

На правах рукописи

Стефанюк Екатерина Васильевна

**Модифицированный метод построения  
приближенных аналитических решений  
задач нестационарного теплопереноса**

Специальность: 05.13.18 Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**Автореферат**

диссертации

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Москва 2006

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования Самарского государственного технического университета.

Научный руководитель - доктор физико - математических наук, профессор  
Радченко Владимир Павлович

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук, профессор  
заслуженный деятель науки РФ  
Карташов Эдуард Михайлович  
доктор физико - математических наук, профессор  
заслуженный деятель науки РФ  
Формалев Владимир Федорович

Ведущая организация Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный университет» (СамГУ)

Защита состоится 15 ноября 2006 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д.212.110.06 при ГОУ ВПО «МАТИ» - российского государственного технологического университета им К.Э. Циолковского по адресу: 121552, г. Москва, Оршанская ул, д. 3, зал Ученого Совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО МАТИ РГТУ  
им. К.Э. Циолковского

Ваш отзыв на автореферат в 2-х экземплярах, заверенных печатью, просим направлять по указанному адресу.

Автореферат разослан 5 октября 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

д.т.н., проф.

Марсова Е.В.

## **Общая характеристика работы**

**Актуальность проблемы.** Разработка, исследование, обоснование адекватности математических моделей теплопереноса, а также совершенствование методов, алгоритмов и программного обеспечения для их реализации важны как в теоретическом, так и прикладном аспектах. Сущность методологии математического моделирования процесса теплопереноса состоит в замене реального физического явления его идеализированными «образами» - физической и математической моделями с последующим изучением их аналитическими и (или) численными методами.

Очевидно, что аналитические методы дают полную всеобъемлющую картину моделируемого процесса или явления в отличие от численных методов, которые требуют огромной вариативной проработки искомой задачи, каждый раз при новом наборе исходных данных.

В этом плане следует отметить, что получение точных аналитических решений линейных и нелинейных задач теплопроводности для однослойных и многослойных конструкций с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды, а также с переменными по координатам и во времени граничными условиями представляет серьезные математические трудности. Аналитические решения получены лишь для незначительного круга отдельных частных задач, к тому же, при весьма существенных допущениях. В связи с этим актуальность разработки новых эффективных аналитических (приближенных аналитических) методов решения краевых задач для моделирования процессов теплопереноса не вызывает сомнений.

Особое место среди приближенных аналитических методов занимают методы, в которых используется идея конечной скорости распространения теплового возмущения. К их недостаткам следует отнести априорный выбор температурного профиля, что порождает проблему однозначности решения и приводит к низкой его точности. Очевидный путь повышения точности интегральных методов – использования в температурных профилях полиномов более высокого порядка. В связи с этим возникает проблема поиска недостающих граничных условий, которые совместно с заданными позволили бы определять коэффициенты оптимального температурного профиля высокого порядка, учитывающего все физические особенности исследуемой задачи.

### **Цель работы:**

1. Разработка аналитических методов решения краевых задач на основе введения фронта температурного возмущения, с учетом конечной скорости распространения теплоты при использовании дополнительных граничных условий.

2. Разработка методов определения дополнительных граничных условий в задачах теплопроводности на основе интегрального метода с целью максимального учета физических свойств дифференциального оператора краевой задачи.

3. Разработка аналитических и приближенных аналитических методов решения краевых задач на основе вариационного метода Л.В. Канторовича применительно к моделированию процессов теплопроводности для однослойных и многослойных тел с переменными по координатам физическими свойствами среды, а также переменными во времени граничными условиями теплообмена.

4. Разработка приближенных аналитических методов решения задач теплопроводности на основе совместного использования метода разделения переменных (Фурье) и ортогонального метода Бубнова - Галеркина применительно к моделированию

процессов теплопроводности для многослойных конструкций, а также задач теплообмена при ламинарном течении жидкостей в трубах и плоских каналах.

***Научная новизна.***

1. Разработан аналитический метод решения краевых задач на основе введения фронта температурного возмущения с учетом конечной скорости распространения теплоты, позволяющий получать высокоточные аналитические решения практически во всем диапазоне изменения временной координаты путем разделения процесса теплопроводности на две стадии по времени.

2. Разработан метод получения дополнительных граничных условий в задачах теплопроводности на основе интегрального метода теплового баланса, позволяющий существенно увеличить степень полинома, аппроксимирующего температурный профиль и максимально учесть физические свойства дифференциального оператора краевой задачи.

3. На основе ортогонального метода Л.В. Канторовича при использовании предложенных систем координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, получены новые аналитические решения задач теплопроводности для многослойных конструкций с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды, а также с переменными во времени граничными условиями.

4. Путем совместного использования точных (Фурье) и приближенных аналитических методов (ортогональный метод Бубнова - Галеркина) получены новые аналитические решения задач теплопроводности для многослойных конструкций с использованием локальных систем координат, а также задач теплообмена при ламинарном течении жидкостей в трубах и плоских каналах.

***На защиту выносятся:***

1. Аналитический метод решения краевых задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения с учетом конечной скорости продвижения теплоты путем разделения теплового процесса на две стадии по времени при использовании дополнительных граничных условий.

2. Метод построения дополнительных граничных условий применительно к моделированию процесса теплопроводности на основе интегрального метода теплового баланса, позволяющего получать высокоточные решения практически во всем диапазоне времени нестационарного процесса за счет существенного увеличения степени аппроксимирующего температурный профиль полинома.

3. Результаты развития метода Л.В. Канторовича применительно к получению новых аналитических решений задач теплопроводности для многослойных конструкций на основе предложенных в диссертации систем координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения.

4. Результаты получения новых эффективных аналитических решений задач теплопроводности для многослойных конструкций при использовании локальных систем координат, а также задач теплообмена при ламинарном течении жидкостей в трубах и плоских каналах на основе совместного использования метода разделения переменных и ортогонального метода Бубнова - Галеркина.

5. Результаты математического моделирования по определению коэффициентов теплоотдачи на внутренних поверхностях барабанов паровых котлов путем решения обратных задач теплопроводности с использованием полученных в диссертации ана-

литических решений прямых задач теплопроводности путем совместного использования точных и приближенных аналитических методов.

6. Результаты математического моделирования по определению начала и продолжительности пленочного кипения топлива на стенках многослойных топливных коллекторов газотурбинных двигателей с использованием разработанных методов решения задач теплопроводности для многослойных конструкций.

#### ***Практическая значимость работы:***

1. Практическая значимость разработанных в диссертации аналитических и приближенных аналитических методов математического моделирования краевых задач в том, что полученные решения отличаются заметной простотой конструкции при точности, вполне достаточной для прикладных задач. Такие решения особенно полезны в случаях, когда решение температурной задачи является промежуточной стадией каких-либо других исследований, например, решения задач термоупругости, задач автоматизированного проектирования и управления, обратных задач теплопроводности. И, в частности, аналитические решения задач теплопроводности при ламинарном течении жидкостей, полученные в диссертации, были использованы при разработке компьютерных моделей и программных комплексов для теплосетей Самарской ТЭЦ и Привокзальной отопительной котельной г. Самары (акты о внедрении приведены в приложениях диссертации).

2. С использованием разработанных в диссертации методов путем решения обратной задачи теплопроводности найдены коэффициенты теплоотдачи на внутренней поверхности барабана парового котла БКЗ-420-140 НГМ Самарской ТЭЦ в процессах планового или аварийного останова, сопровождающихся сбросом давления. Показано, что при сбросе давления происходит частичное вскипание жидкости, находящейся в барабане котла, при котором коэффициенты теплоотдачи возрастают до значений, равных  $a = 470 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ .

3. Путем решения обратных задач теплопроводности выполнены расчеты по определению начала и продолжительности кипения топлива на стенках многослойных топливных коллекторов камер сгорания газотурбинных двигателей. Показано, что продолжительность кипения холодного ( $20^\circ\text{C}$ ) топлива, поступающего в нагретый топливный коллектор (до  $200^\circ\text{C}$ ), составляет от 8 до 12 секунд. Величина коэффициентов теплоотдачи при этом составляет около  $600 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ . После прекращения пленочного кипения они возрастают до  $2500 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ . Выданы рекомендации по уменьшению продолжительности кипения путем применения низкотеплопроводных материалов в качестве покрытий внутренних поверхностей трубок коллекторов, а также путем турбулизации потока в областях трубопроводов, наиболее подверженных пленочному кипению.

***Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность результатов исследований*** подтверждается использованием математических моделей, адекватных реальным физическим процессам, протекающим в конкретных теплотехнических установках, а также сравнением полученных в диссертации результатов с точными аналитическими решениями и с данными натурных экспериментов, а также с результатами расчетов численными методами.

***Связь диссертационной работы с планами научных исследований.*** Представленная работа является обобщением теоретических и экспериментальных исследований, выполненных автором на кафедре «Прикладная математика и информатика» Самарского

государственного технического университета. Исследования проводились по планам госбюджетной тематики Минвуза РФ № 551/02 «Разработка методов определения собственных значений в краевых задачах теплопроводности», а также по планам НИОКРовских работ ОАО «Самараэнерго» за 2002 – 2004 г.г.

Научные и практические результаты использованы на Самарской ТЭЦ, Новокуйбышевской ТЭЦ-2, в Самарских тепловых сетях. Экономический эффект от внедрения, подтвержденный актами о внедрении, составляет 400 000 рублей.

### ***Апробация работы***

Основные результаты работы были доложены и обсуждены на четвертой Международной Конференции “Обратные задачи: идентификация, проектирование и управление”. Москва, МАИ. 2003; Пятом Международном форуме по тепло - и мас-сообмену. Минск. АНБ. 2004; Всероссийских научно - технических конференциях “Математическое моделирование и краевые задачи”. Самара, СамГТУ. (2003, 2004); научном семинаре «Прикладная математика и механика» кафедры «Прикладная математика и информатика» СамГТУ (рук. д. ф.-м. н., проф. Радченко В.П., 2004-2006 г.г.).

***Публикации.*** По результатам выполненных исследований опубликовано 21 научная работа, в том числе 5 статей в центральных академических изданиях, 8 статей в Вестнике Самарского государственного технического университета, напечатана одна монография в соавторстве и одно учебное пособие в соавторстве.

### ***Структура и объем работы***

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, выводов, списка используемой литературы, приложений: изложена на 185 страницах основного машинописного текста, содержит 61 рисунок, 8 таблиц. Список использованной литературы включает 91 наименование.

**1. В первой главе диссертации** выполнен обзор работ по избранному направлению исследований. В частности, было отмечено, что решения краевых задач, полученные с помощью точных аналитических методов, выражаются сложными функциональными рядами, которые, как правило, являются медленно сходящимися. Например, для нахождения решений краевых задач теплопроводности на начальном участке по времени в ряде случаев приходится использовать сотни, а иногда и тысячи членов ряда. Такие формулы малоприспособны для инженерных приложений и особенно в случаях, когда решение температурной задачи является промежуточным этапом, например, при решении обратных задач, задач термоупругости, задач автоматизированного управления и др. В этой связи наибольший интерес представляют приближенные аналитические методы, позволяющие получать решения, хотя и приближенные, но в аналитической форме, с точностью, во многих случаях достаточной для инженерных приложений. Решению этих проблем посвящены работы Михлина С.Г., Мучника Г.Ф., Цоя П.В., Беляева Н.Н., Рядно А.А., Кудряшова Л.И. и других авторов. Отмечается, что несмотря на определенные успехи эти методы применительно к нелинейным задачам, задачам теплопроводности для однослойных и многослойных конструкций с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами среды, а так же с переменными по координатам и во времени граничными условиями пока еще не достаточно разработаны.

**2. Во второй главе диссертации** приводятся результаты разработки аналитического метода получения решений краевых задач теплопроводности на основе введения

фронта температурного возмущения с учетом конечной скорости распространения теплоты. Для увеличения степени аппроксимирующего полинома с целью получения высокоточных аналитических решений во всем диапазоне временной координаты вводятся дополнительные граничные условия. Такие условия определяются из исходного дифференциального уравнения и заданных граничных условий, включая условия на фронте температурного возмущения, путем их дифференцирования соответственно по эллиптической координате и по времени и сопоставления получающихся при этом выражений в применении к граничным точкам. Такой подход позволяет в аналитическом решении максимально учесть свойства дифференциального оператора краевой задачи.

**2.1. Нестационарная теплопроводность в бесконечной пластине.** В данной задаче конечная скорость распространения теплоты учитывается введением новой функции  $q_1 = q_1(Fo)$ , называемой глубиной проникновения (глубиной термического слоя). Такая модель процесса теплопроводности используется в ряде методов, таких как: интегральный метод теплового баланса; метод осреднения функциональных поправок; метод Швеца М.Е.; метод Био; метод Вейника и др. Недостатком этих методов является низкая точность решений. Очевидный путь повышения точности интегральных методов – аппроксимация температурной функции полиномами более высоких степеней. Однако такой путь не всегда приводит к повышению точности решения. И причина этого в том, основные граничные условия и условия на фронте температурного возмущения не являются достаточными для определения коэффициентов температурного профиля более высокого порядка. В связи с чем возникает необходимость привлечения недостающих (дополнительных) граничных условий. В настоящей работе такие дополнительные граничные условия получаются из основного дифференциального уравнения с использованием основных граничных условий и условий, задаваемых на фронте температурного возмущения.

В качестве конкретного примера найдено решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины в следующей математической постановке

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq \rho < 1);$$

$$\Theta(\rho, 0) = 0; \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial \rho = 0; \quad \Theta(1, Fo) = 1,$$

где  $\Theta = (T - T_0) / (T_{II} - T_0)$  – относительная избыточная температура;  $Fo = at / R^2$  – число Фурье.

Процесс нагрева разделится на две стадии:  $0 \leq Fo \leq Fo_1$  и  $Fo_1 \leq Fo < \infty$ , для чего вводится движущаяся во времени граница, разделяющая исходную область  $0 \leq r < 1$  на две подобласти  $0 \leq r < q_1(Fo)$  и  $q_1(Fo) \leq r < 1$ , где  $q_1(Fo)$  – функция, определяющая продвижение границы раздела во времени (глубина проникновения – глубина термического слоя).

Если от координаты  $r$ , отсчитываемой от центра пластины, перейти к новой переменной  $x = 1 - r$ , отсчитываемой от поверхности, то задачу нагрева пластины для первой стадии процесса можно сформулировать следующим образом.

$$\frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(x, Fo)}{\partial x^2} \quad [0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq x \leq q_1(Fo)]; \quad (2.1)$$

$$\Theta(x, 0) = 0; \quad (2.2)$$

$$\Theta(0, Fo) = 1. \quad (2.3)$$

Ввиду того, что в рассмотрение введена величина  $q_1(Fo)$ , необходимо добавить условия, выполняющиеся на фронте температурного возмущения:

$$\Theta(x, Fo)|_{x=q_1} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial x} \right|_{x=q_1} = 0. \quad (2.4)$$

Соотношения (2.4) представляют условия тепловой изоляции для подвижной границы.

Потребуем, чтобы искомое решение задачи (2.1) – (2.4) удовлетворяло не первоначальному уравнению теплопроводности (2.1), а осредненному по толщине термического слоя (интегралу теплового баланса):

$$\int_0^{q_1(Fo)} \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} dx = - \left. \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (2.5)$$

Решение задачи (2.1) – (2.4) разыскивается в виде многочлена второй степени

$$\Theta(x, Fo) = a_0(Fo) + a_1(Fo)x + a_2(Fo)x^2, \quad (2.6)$$

где  $a_k$ , ( $k=0,1,2$ ) – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (2.3), (2.4). С учетом найденных коэффициентов  $a_k$  соотношение (2.6) принимает вид

$$\Theta(x, Fo) = (1 - x/q_1)^2. \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.5), получим

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1(Fo)} \left( 1 - \frac{2}{q_1}x + \frac{1}{q_1^2}x^2 \right) dx = \frac{2}{q_1}.$$

Отсюда для определения неизвестной функции  $q_1(Fo)$  будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид

$$q_1 = \sqrt{12Fo}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.7), получим искомое решение для первой стадии процесса, найденное интегральным методом теплового баланса.

Анализ результатов расчетов температур по формуле (2.7) позволил сделать заключение, что в диапазоне чисел Фурье  $0,00001 \leq Fo \leq 0,08$  отклонение безразмерных температур от точных их значений находится в пределах 5-6 %.

Для повышения точности решения представим искомый температурный профиль в виде полинома  $n$ -ой степени

$$\Theta(x, Fo) = \sum_{k=0}^n a_k(q_1)x^k. \quad (2.9)$$

В случае если число коэффициентов  $a_k(q_1)$  больше трех, для их определения необходимо привлекать дополнительные граничные условия. Для этого последовательно дифференцируется уравнение (2.1) по переменной  $x$ , а граничные условия (2.3), (2.4) – по переменной  $Fo$ . Из сопоставления полученных соотношений получаются следующие дополнительные граничные условия:

$$\left. \frac{\partial^2 \Theta(x, Fo)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 \Theta(x, Fo)}{\partial x^2} \right|_{x=q_1} = 0. \quad \left. \frac{\partial^3 \Theta(x, Fo)}{\partial x^3} \right|_{x=q_1} = 0. \quad (2.10)$$

Используя дополнительные граничные условия (2.10) совместно с заданными (2.3), (2.4), находятся уже 6 коэффициентов полинома (2.9), и задается оптимальный температурный профиль во втором приближении в виде полинома пятой степени



$$\Theta(x, Fo) = (1 + 3x/2q_1)(1 - x/q_1)^4. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в интеграл теплового баланса (2.5), относительно неизвестной функции  $q_1(Fo)$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого имеет вид

$$q_1 = \sqrt{20Fo}. \quad (2.12)$$

Положив  $q_1 = 1$ , найдем время окончания первой стадии процесса  $Fo_1 = 0,05$ .

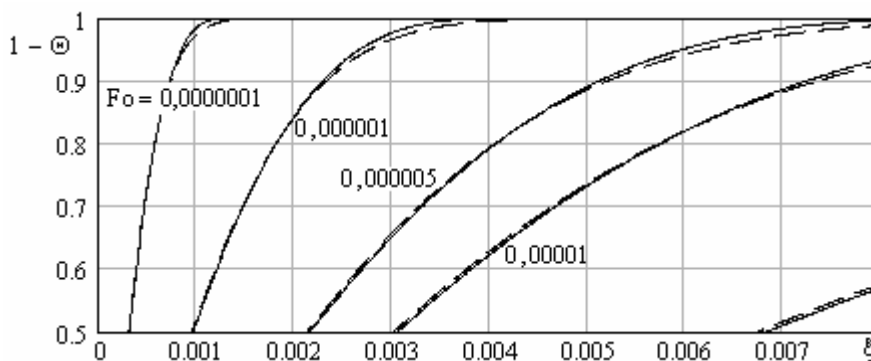
Подставляя (2.12) в (2.11) получим решение задачи (2.1) – (2.4) во втором приближении, найденное с использованием дополнительных граничных условий

Результаты расчетов безразмерной температуры по формуле (2.11) в сравнении с точным решением, представлены на графиках рис. 2.1. Из их анализа следует, что в диапазоне чисел Фурье  $0,0000001 \leq Fo \leq 0,05$  отличие решения по формуле (2.11) от точного не превышает 1,5 %.

Во второй стадии процесса  $Fo_1 \leq Fo < \infty$  понятие глубины проникновения (глубины термического слоя) теряет смысл и в качестве обобщенной координаты выбирается температура в центре тела  $q_2 = q_2(Fo)$ . Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(x, Fo)}{\partial x^2} \quad (Fo > Fo_1; 0 \leq x < 1);$$

$$\Theta(x, Fo_1) = (1 - x)^2; \quad \Theta(0, Fo) = 1; \quad \Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad \Theta'(1, Fo) = 0.$$



Р и с. 2.1. Графики распределения относительной избыточной температуры: — — — — расчет по формуле (2.15); — — — — точное решение

Интеграл теплового баланса будет

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} dx = - \left. \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Первые три дополнительных граничных условия находятся в виде

$$\Theta''(0, Fo) = 0; \quad \Theta''(x, Fo) = dq_2/dFo; \quad \Theta'''(x, Fo) = 0;$$

Решение задачи во втором приближении будет

$$\Theta(x, Fo) = 1 - (1,772x - 0,761x^3 + 0,065x^4 + 0,05x^5) \exp[-2,471(Fo - Fo_1)] - (0,728x - 4,239x^3 + 4,935x^4 - 1,55x^5) \exp[-22,074(Fo - Fo_1)],$$

где  $Fo_1 = 0,05$  - время окончания первой стадии процесса.

Анализ результатов расчетов показал, что полученные автором значения температур в диапазоне чисел  $0,05 \leq Fo < \infty$  практически совпадают с точными.

**2.2. Переменные во времени граничные условия второго рода.** Рассмотрим методику построения оптимального температурного профиля для решения интегральным методом задач нестационарной теплопроводности в случае переменных граничных условий второго рода.

При задании на поверхности классических тел граничных условий второго рода задача нестационарной теплопроводности в безразмерной форме записывается в виде

$$\frac{\partial \Theta(r, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{r^c} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^c \frac{\partial \Theta(r, Fo)}{\partial r} \right) \quad (Fo > 0; 0 \leq r < 1); \quad (2.13)$$

$$\Theta(r, 0) = 0; \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial r = 0; \quad -\partial \Theta(1, Fo) / \partial r + Ki(Fo) = 0, \quad (2.14)$$

где  $c=0$  – пластина,  $c=1$  – цилиндр,  $c=2$  – шар;  $Ki(Fo) = q(Fo)R/l (T_c - T_0)$  – критерий Кирпичева.

Ограничимся рассмотрением первой стадии теплового процесса. Вводя новую независимую переменную  $x=1-r$  и выбирая в качестве обобщенной координаты глубину теплового возмущения  $q_1(Fo)$ , краевую задачу (2.13) – (2.14) сведем к виду

$$\frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(1-x)^n} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-x)^n \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial x} \right] \quad (0 \leq x \leq q_1; 0 \leq Fo \leq Fo_1); \quad (2.15)$$

$$\Theta(x, 0) = 0; \quad (2.16)$$

$$-\partial \Theta(0, Fo) / \partial x = Ki(Fo); \quad \Theta(q_1, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(q_1, Fo) / \partial x = 0. \quad (2.17)$$

Решение задачи во втором приближении ищется в виде

$$\Theta(x, Fo) = a_0 + a_1 x/q_1 + a_2 (x/q_1)^2 + a_3 (x/q_1)^3 + a_4 (x/q_1)^4 + a_5 (x/q_1)^5. \quad (2.18)$$

Недостающие граничные условия для определения коэффициентов температурного профиля (2.18) в данном случае имеют вид

$$-\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial x^3} + c \left[ \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial x^2} + \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial x} \right] = \frac{dKi(Fo)}{dFo}. \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial x^3} = 0.$$

Подставляя температурный профиль (2.18) в граничные условия (2.17), (2.19), получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $a_k$  ( $k = \overline{0,5}$ ). С учетом найденных коэффициентов  $a_k(Fo)$  для  $c=0$  и  $Ki(Fo) = const$  температурный профиль принимает вид

$$\Theta(x, Fo) = q_1 Ki \left[ \frac{3}{10} - \frac{x}{q_1} + \left( \frac{x}{q_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{q_1} \right)^4 + \frac{1}{5} \left( \frac{x}{q_1} \right)^5 \right]. \quad (2.20)$$

Подставляя температурный профиль (2.20) в интеграл теплового баланса вида

$$\int_0^{q_1(Fo)} (1-x)^c \frac{\partial \Theta(x, Fo)}{\partial Fo} dx = -\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial x}, \quad (2.21)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения  $q_1(Fo)$ , решение которого будет

$$q_1 = \sqrt{15Fo}. \quad (2.22)$$

Значения температур, полученные по формуле (2.20), в диапазоне  $10^{-18} \leq Fo \leq Fo_1 = 0,06$ , отличаются от точных их значений не более чем на 1,5 %.

**2.3. Нелинейные задачи нестационарной теплопроводности.** В данном пункте показывается, что изложенная выше методика применения метода дополнительных граничных условий эффективна и при решении нелинейных краевых задач нестационарной теплопроводности. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(\Theta) \frac{\partial \Theta(y, t)}{\partial y} \right] \quad (0 \leq t \leq t_*; 0 \leq y \leq q(t)); \quad (2.23)$$

$$\Theta(y,0) = 0; \quad (2.24)$$

$$\Theta(0,t) = 1; \quad \Theta(q,t) = 0; \quad \partial\Theta(q,t)/\partial y = 0, \quad (2.25)$$

где  $a(\Theta) = a_0 + a\Theta$ ;  $a$  - некоторый коэффициент.

Представим искомый температурный профиль полиномом  $n$ -ой степени

$$\Theta(y,t) = \sum_{k=0}^n a_k(q) y^k, \quad (2.26)$$

где  $a_k(q)$  ( $k=1,2,3$ ) – коэффициенты, определяемые из граничных условий (2.25). Подставляя найденные коэффициенты в (2.26), температурный профиль получим в виде квадратичной параболы

$$\Theta(y,t) = (1 - y/q)^2. \quad (2.27)$$

Подставляя (2.27) в интеграл теплового баланса

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^q \Theta(y,t) dy \right] = -a(1) \frac{\partial\Theta(0,t)}{\partial y}, \quad (2.28)$$

находим

$$q = \sqrt{12a(1)t}. \quad (2.29)$$

Формулы (2.27) и (2.29) определяют решение искомой нелинейной задачи в первом приближении.

Дифференцируя граничные условия (2.25) по времени и привлекая дифференциальное уравнение (2.23), получим следующие дополнительные граничные условия:

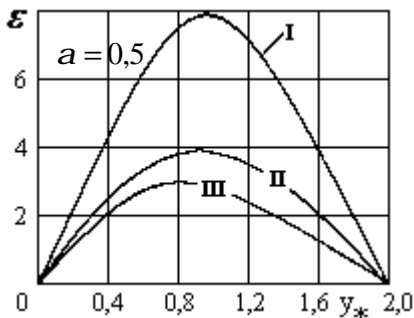
$$\frac{\partial^2\Theta(0,t)}{\partial y^2} + b \left[ \frac{\partial\Theta(0,t)}{\partial y} \right]^2 = 0; \quad \frac{\partial^2\Theta(q,t)}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3\Theta(q,t)}{\partial y^3} = 0, \quad (2.30)$$

где  $b = a/(1+a)$ .

Определяя шесть первых коэффициентов температурного профиля (2.26) из условий (2.25) и (2.30), получим

$$\Theta(y,t) = \left[ 1 + 4(1+\Psi) \frac{y}{q} \right] \left( 1 - \frac{y}{q} \right)^4, \quad (2.31)$$

где  $\Psi = (1 - \sqrt{1 + 5b/4})/b$ .



Р и с. 2.2 Графики изменения погрешности расчета безразмерной температуры

На рис. 2.2 представлены результаты оценки погрешности решений, полученных в первом, во втором и третьем приближениях для  $a = 0,5$ . Результаты расчетов сравнивались с аналитическим решением Янга (Jang K.T. Appl. Mech., 25, 146 (1958)).

Также эти методом в диссертации были решены следующие задачи:

Потребовав, чтобы искомое решение удовлетворяло интегральному условию (2.28), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $q(t)$ , из решения которого при начальном условии  $q(0) = 0$  находим

$$q = \sqrt{-120a(1)\Psi t / (5 + 2\Psi)}, \quad (2.32)$$

где  $a(1) = (1+a)a_0$ .

Формулы (2.31) и (2.32) определяют искомое решение рассматриваемой нелинейной задачи для первой стадии теплового процесса во втором приближении.

1. Теплопроводность в цилиндре при граничных условиях 1-го рода (п. 2.2. дис.).
2. Пластина, цилиндр и шар, переменные во времени граничные условия 1-го и 3-го рода (п. 2.3. дис.).
3. Пластина, переменные начальные условия (п. 2.5. дис.).
4. Переменные во времени внутренние источники теплоты (п. 2.6. дис.).
5. Нелинейные задачи теплопроводности (п. 2.7. дис.).

**3. Совместное использование методов Л.В. Канторовича и Бубнова-Галеркина.** Согласно методу, изложенному во второй главе, полученное решение представляет из себя два аналитических выражения, каждое из которых описывает температуру на соответствующем интервале по времени. Несмотря на то, что этот метод позволяет получать высокоточные решения для начальных временных участков краевых задач, его применение в случаях, когда решение температурной задачи является промежуточной стадией другого исследования (решение задач термоупругости, обратных краевых задач и т.д.) представляет неудобства. В связи с чем более удобным применительно к решению таких задач является решение, полученное путем совместного использования методов Канторовича и Бубнова-Галеркина.

В третьей главе диссертации представлены результаты получения аналитических решений задач теплопроводности для однослойных и многослойных конструкций путем совместного использования методов Л.В. Канторовича и Бубнова - Галеркина. Приводятся результаты разработки метода построения систем координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, путем сведения многослойной конструкции к однослойной с кусочно-однородными физическими свойствами среды.

**3.1. Системы координатных функций в задачах теплопроводности для многослойных конструкций.** Широкое распространение в технике получают композиционные материалы из многослойных конструкций. Для определения требуемого сочетания их свойств наилучшим образом подходят приближенные аналитические методы. Среди них следует отметить методы, в которых многослойные конструкции рассматриваются как один слой, но с переменными (разрывными) физическими свойствами среды. При использовании этих методов в одних случаях строятся системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения, а в других – для описания разрывных свойств среды используется асимметричная единичная функция.

Сведение многослойной конструкции к однослойной значительно упрощает как процесс получения аналитических решений, так и получаемые для них формулы. Однако основной трудностью здесь является построение соответствующих систем координатных функций. И если они построены, то дальнейший процесс получения решения выполняется известными методами (Л.В. Канторовича, Бубнова - Галеркина и др.).

Рассмотрим задачу теплопроводности для многослойной пластины в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial \Theta_i(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta_i(x, Fo)}{\partial x^2} \quad (Fo > 0; x_{i-1} \leq x < x_i; i = 1, 2; x_0 = 0; x_2 = 1); \quad (3.1)$$

$$\Theta_i(x, 0) = 1; \quad (3.2)$$

$$\partial \Theta_1(0, Fo) / \partial x = 0; \quad (3.3)$$

$$\Theta_1(x_1, Fo) = \Theta_2(x_1, Fo); \quad (3.4)$$

$$I_1 \partial \Theta_1(x_1, Fo) / \partial x = I_2 \partial \Theta_2(x_1, Fo) / \partial x; \quad (3.5)$$

$$\partial \Theta_2(1, Fo) / \partial x + Bi \Theta_2(1, Fo) = 0. \quad (3.6)$$

Решение задачи (3.1) – (3.6) разыскивается среди функций вида

$$\Theta_i(x, Fo) = f_1(Fo) j_{i1}(x) + \sum_{k=2}^n f_k(Fo) j_{ki}(x), \quad (3.7)$$

где  $f_k(Fo)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) – неизвестные функции времени;  $j_{ki}(x)$  – координатные функции.

Отметим, что неизвестные функции времени принимаются здесь одинаковыми для всех контактирующих тел при различных для каждого тела координатных функциях. Решение строится так, чтобы координатные функции первого приближения  $j_{i1}(x)$  удовлетворяли граничным условиям и условиям сопряжения. Способ их построения заключается в следующем. Вначале определяется координатная функция для  $m$ -го тела. Эта функция находится методом неопределенных коэффициентов так, чтобы выполнялось граничное условие (3.6). Формула для ее определения будет

$$j_m(x) = (Bi + 2) / Bi - x^2. \quad (3.8)$$

Координатная функция для  $(m-1)$ -го слоя разыскивается в виде

$$j_{m-1}(x) = E_1 + E_2 x^2, \quad (3.9)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из условий сопряжения между  $m$ -ым и  $(m-1)$ -ым слоем. После нахождения из решения двух алгебраических линейных уравнений коэффициентов  $E_1$  и  $E_2$  соотношение (3.9) принимает вид

$$j_{m-1}(x) = (Bi + 2) / Bi + (I_m / I_{m-1} - 1) x_{m-1}^2 - I_m / I_{m-1} x^2. \quad (3.10)$$

Формула для координатной функции  $(m-2)$ -го слоя, определяемая таким образом, чтобы выполнялись условия сопряжения между  $(m-1)$ -ым и  $(m-2)$ -ым слоем, записывается в виде

$$j_{m-2}(x) = \frac{Bi + 2}{Bi} + \left( \frac{I_m}{I_{m-1}} - 1 \right) x_{m-1}^2 + \left( \frac{I_m}{I_{m-2}} - \frac{I_m}{I_{m-1}} \right) x_{m-2}^2 - \frac{I_m}{I_{m-2}} x^2. \quad (3.11)$$

Таким путем можно построить координатные функции для любого числа контактирующих тел. Отсюда можно записать общую формулу для координатной системы первого приближения

$$j_{li}(x) = \frac{Bi + 2}{Bi} + \sum_{k=0}^{m-i} [1 - H(i + k - m)] \left( \frac{I_m}{I_{m-k-1}} - \frac{I_m}{I_{m-k}} \right) x_{m-k-1}^2 - \frac{I_m}{I_i} x^2, \quad (3.12)$$

где  $H(h)$  – функция Хевисайда (единичная функция), определяемая выражением

$$H(h) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq h < \infty; \\ 0 & \text{при } -\infty < h < 0, \end{cases} \quad \text{где } h = i + k - m.$$

На основе формулы (3.12) можно записать общую формулу для координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения не только в первом, но и в любом последующем приближении

$$j_{ki}(x) = \frac{Bi + k}{Bi} + \sum_{l=0}^{m-i} [1 - H(i + l - m)] \left( \frac{I_m}{I_{m-l-1}} - \frac{I_m}{I_{m-l}} \right) x_{m-l-1}^k - \frac{I_m}{I_i} x^k \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{2, n}), \quad (3.13)$$

где  $n$  – число приближений.

Например, для двухслойной пластины координатные функции, получаемые по формуле (3.13), будут иметь вид

$$j_{ki}(x) = \frac{Bi + k}{Bi} + \left( \frac{I_2}{I_1} - 1 \right) x_1^k - \frac{I_2}{I_1} x^k; \quad j_{k2}(x) = \frac{Bi + k}{Bi} - x^k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (3.14)$$

Если использовать координатные функции вида (3.13), то соотношение (3.7) будет точно удовлетворять граничным условиям и условиям сопряжения задачи (3.3) – (3.6). Неизвестные функции времени  $f_k(Fo)$  ( $k = \overline{1, n}$ ) находятся так, чтобы наилучшим образом удовлетворялось уравнение (3.1). Для этого составляется его невязка и требуется ортогональность невязки ко всем координатным функциям, т.е.

$$\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial f_k(Fo)}{\partial Fo} j_{ki}(x) - \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 j_{ki}(x)}{\partial x^2} f_k(Fo) \right] j_{ji}(x) dx = 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.15)$$

Определяя интегралы в (3.15), относительно неизвестных функций времени получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Частные решения системы уравнений (3.15) разыскиваются в виде

$$f_k(Fo) = D_{jk} \exp(mFo), \quad (3.16)$$

где  $D_{jk}$  ( $j = k = \overline{1, n}$ ),  $m$  – некоторые неизвестные постоянные.

Подставляя (3.16) в (3.15), получим систему однородных алгебраических линейных уравнений, из которой находятся собственные числа  $m_k$  и коэффициенты  $D_{jk}$  ( $j = k = \overline{1, n}$ ), с учетом которых соотношение (3.16) примет вид

$$f_j(Fo) = \sum_{k=1}^n D_{jk} \exp(m_k Fo) \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3.18)$$

Соотношения (3.18) являются частными решениями системы уравнений (3.15). Для нахождения ее общего решения умножим частное решение, отвечающее корню  $m_1$ , на произвольную постоянную  $C_1$ ; решение, отвечающее  $m_2$  – на  $C_2$  и т.д. Тогда соотношение (3.18) примет вид

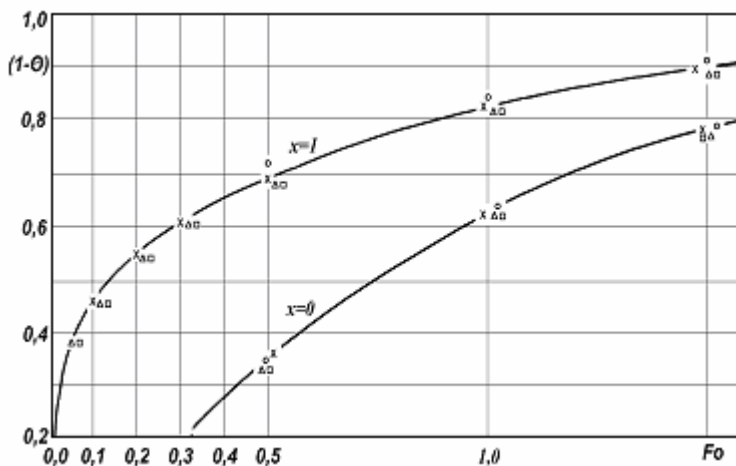
$$\Theta_i(x, Fo) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_k D_{jk} \exp(m_k Fo) j_{ki}(x). \quad (3.19)$$

Для определения постоянных  $C_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) составляется невязка начального условия (3.2) и требуется ортогональность невязки ко всем координатным функциям  $j_{ki}(x)$ , т.е.

$$\sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_k D_{jk} \exp(m_k \cdot 0) j_{ki}(x) - 1 \right] j_{ji}(x) dx = 0. \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3.20)$$

Соотношение (3.20) относительно  $C_k$  является системой алгебраических линейных уравнений. После определения  $C_k$  окончательное решение задачи (3.1) – (3.6) находится из (3.19).

Результаты расчетов по формуле (3.19) в шестом приближении представлены на графиках рис. 3.1. Анализ результатов расчетов дан в п. 4.1.



Р и с. 3.1. Графики распределения температуры в двухслойной пластине:

— — метод прогонки;  
 о — по данным [\*];  
 х — по данным [16];  
 Δ — по формуле (3.19) (шестое приближение);  
 □ — по формуле (4.18) (шестое приближение).  
 \* — Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. шк. 1978.

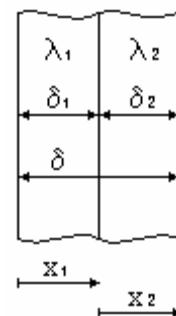
Также этим методом в диссертации были решены следующие задачи:

1. Теплопроводность в пластине при граничных условиях 1-го рода (п. 3.1. дис.).
2. Пластина. Переменные во времени граничные условия 1-го рода (п. 3.2. дис.).
3. Пластина. Переменные во времени граничные условия 3-го рода. (Температура среды – линейная и экспоненциальная функция времени) (п. 3.3. дис.).
4. Расчет коэффициентов теплоотдачи в барабане парового котла (п. 3.5. дис.).
5. Определение начала и продолжительности пленочного кипения на стенках многослойных топливных коллекторов ГТД (п. 3.6. дис.).
6. Диагностика толщины коксовых отложений на внутренних поверхностях трубопроводов (п. 3.7. дис.).

**4. В четвертой главе диссертации** представлены результаты исследований задач теплопроводности путем совместного использования методов Фурье и Бубнова - Галеркина. Выше (см раздел 2) применительно к решению задач теплопроводности был рассмотрен метод решения путем совместного использования методов Л.В. Канторовича и Бубнова - Галеркина. Такой подход при нахождении неизвестных функций времени  $f_k(Fo)$  приводит к необходимости решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Более простые решения большого числа рассмотренных выше задач при практически одинаковой степени точности можно получить путем совместного использования метода разделения переменных и ортогонального метода Бубнова - Галеркина. Такой подход в конечном итоге приводит к решению систем алгебраических линейных уравнений.

В качестве конкретного примера рассмотрим последовательность совместного использования метода Фурье и ортогонального метода Бубнова-Галеркина применительно к решению задач теплопроводности для многослойных конструкций, с использованием локальных систем координат. При решении задач теплопроводности для многослойных конструкций требуется находить системы координатных функций, точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения. Применение локальных систем координат позволяет существенно упростить координатные функции ввиду того, что безразмерная координата в каждом слое изменяется от нуля до  $\Delta_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), где  $\Delta_i$  – безразмерная толщина  $i$ -го слоя;  $m$  – число слоев.

Математическая постановка задачи для двухслойной пластины в безразмерных переменных с использованием локальных систем координат имеет вид (рис. 4.1):



Р и с. 4.1 . Схема применения локальных систем координат

$$\frac{\partial \Theta_i(x_i, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta_i(x_i, Fo)}{\partial x_i^2} \quad (Fo > 0; 0 \leq x_i < \Delta_i; i = 1, 2); \quad (4.1)$$

$$\Theta_i(x_i, 0) = 1; \quad \frac{\partial \Theta_1(0, Fo)}{\partial x_1} = 0; \quad \Theta_1(\Delta_1, Fo) = \Theta_2(0, Fo); \quad (4.2)$$

$$I_1 \frac{\partial \Theta_1(\Delta_1, Fo)}{\partial x_1} = I_2 \frac{\partial \Theta_2(0, Fo)}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial \Theta_2(\Delta_2, Fo)}{\partial x_2} + Bi \Theta_2(\Delta_2, Fo) = 0. \quad (4.3)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (4.1) – (4.3) разыскивается в виде

$$\Theta_i(x_i, Fo) = j_i(Fo) \Psi_i(x_i) \quad (i = 1, 2). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.1), получим

$$j_i'(Fo) + m j_i(Fo) = 0; \quad (4.5)$$

$$\frac{a_i}{a} \Psi_i''(x_i) + m \Psi_i(x_i) = 0, \quad (4.6)$$

где  $m = v^2$  – некоторая постоянная.

Решение уравнения (4.5) имеет вид

$$j_{ni}(Fo) = A_n \exp(-m_n Fo). \quad (4.7)$$

Граничные условия и условия сопряжения для уравнения (4.1) будут

$$\Psi_1'(0) = 0; \quad \Psi_1(\Delta_1) = \Psi_2(0); \quad I_1 \Psi_1'(\Delta_1) = I_2 \Psi_2'(0); \quad \Psi_2'(\Delta_2) + Bi \Psi_2(\Delta_2) = 0. \quad (4.8)$$

Решение уравнения (4.6) с граничными условиями (4.8) разыскивается в виде

$$\Psi_{ni}(x_i) = \sum_{k=0}^m C_{ki} N_{ki}(x_i) \quad (i = 1, 2), \quad (4.9)$$

где  $C_{ki}$  – неизвестные коэффициенты;  $N_{ki}(x_i)$  – координатные функции, определяемые соответственно для первого и второго слоев по следующим формулам

$$N_{k1}(x_1) = B_{1k} + r_1^{2k}; \quad N_{k2}(x_2) = D_{2k} + E_{2k} r_2^{2k}, \quad (4.10)$$

где  $B_{1k}$ ,  $D_{2k}$ ,  $E_{2k}$  ( $k = \overline{0, m}$ ) – коэффициенты, определяемые для каждого приближения из граничных условий (4.8).

Для нахождения собственных чисел  $m_n$  ( $n = \overline{1, 6}$ ) найдем интеграл взвешенной невязки уравнения Штурма - Лиувилля (4.6), т.е.

$$\int_0^{\Delta_1} \left[ \frac{a_1}{a_2} \Psi_1''(x_1) + m \Psi_1(x_1) \right] dx_1 + \int_0^{\Delta_2} \left[ \Psi_2''(x_2) + m \Psi_2(x_2) \right] dx_2 = 0. \quad (4.11)$$

Отсюда для определения собственных чисел получим систему однородных алгебраических уравнений. Однородная система имеет нетривиальное решение, в случае если определитель ее равен нулю. Раскрывая определитель, для нахождения собственных чисел получим алгебраический полином, корни которого имеют следующий вид  $m_1 = 0,99126521$ ;  $m_2 = 14,46488062$ ;  $m_3 = 75,03638586$ ;  $m_4 = 180,8239908$ ;  $m_5 = 435,183729$ ;  $m_6 = 918,18214275$ .

Соотношение (4.4) с учетом найденных значений коэффициентов  $C_{ki}$  ( $k = \overline{0, 5}$   $i = 1, 2$ ) и собственных чисел  $m_n$  ( $n = \overline{1, 6}$ ) принимает вид

$$\Theta_i(x_i, Fo) = \sum_{n=1}^e \left[ A_n \exp(m_n Fo) \sum_{k=1}^m C_{ki}(m_n) N_{ki}(x_i) \right] \quad (i = 1, 2, \quad e = 6). \quad (4.12)$$



Для определения неизвестных коэффициентов  $A_n$  ( $n = \overline{1, e}$ ) составляется невязка начального условия и требуется ортогональность невязки ко всем собственным функциям, т.е.

$$\int_0^{\Delta_1} \left[ \sum_{n=1}^e \left( A_n e^{m_n F_0} \sum_{k=1}^m C_{k1}(m_n) N_{k1}(x_1) \right) - 1 \right] \Psi_{1j}(x_1) dx_1 + \int_0^{\Delta_2} \left[ \sum_{n=1}^e \left( A_n e^{m_n F_0} \sum_{k=1}^m C_{k2}(m_n) N_{k2}(x_2) \right) - 1 \right] \Psi_{2j}(x_2) dx_2 = 0 \quad (j = \overline{1, e}). \quad (4.13)$$

После определения интегралов соотношение (4.13) относительно неизвестных коэффициентов  $A_n$  ( $n = \overline{1, e}$ ) представляет систему  $e = 6$  алгебраических линейных уравнений.

При известных коэффициентах  $A_n$  решение задачи (4.1) – (4.2) в замкнутом виде находится из (4.12). Результаты расчетов по формуле (4.12) представлены на графиках рис. 3.1. Анализ результатов позволяет заключить об удовлетворительном совпадении безразмерных температур, полученных всеми отмеченными здесь методами. Следует особо подчеркнуть примерно одинаковую точность решения со всеми остальными методами при использовании метода дополнительных граничных условий, несмотря на то, что решение здесь получено лишь в третьем приближении. Объяснение этого факта следует искать в том, что благодаря использованию дополнительных граничных условий удастся при меньшем числе приближений лучше удовлетворить дифференциальному уравнению (4.1).

Также этим методом в диссертации были решены следующие задачи:

1. Теплопроводность в пластине при граничных условиях 1-го рода (п. 4.1. дис.).
2. Теплообмен в плоском и цилиндрическом канале при ламинарном течении жидкости (п. 4.7, 4.8. дис.).

### **Основные выводы и результаты работы**

1. В диссертации представлены результаты разработки эффективного аналитического метода решения краевых задач, основанного на разделении процесса теплообмена на две стадии по времени. Используя идею конечной скорости распространения теплового возмущения, в рассмотрение вводятся понятия глубины проникания (глубины термического слоя) и фронта температурного возмущения, фиксирующего глубину проникания теплоты. Решение основной проблемы таких методов – недостаточной точности – оказалось возможным благодаря применению дополнительных граничных условий, физический смысл которых – точное выполнение исходного дифференциального уравнения в граничных точках и на фронте теплового возмущения в тех точках пространства, в которых он находится в данный момент времени.

2. Разработан метод построения дополнительных граничных условий применительно к решению задач на основе интегральных методов теплового баланса. Основное их назначение в том, чтобы исходное дифференциальное уравнение при минимальном числе приближений как можно лучше удовлетворялось на границах тела и на фронте температурного возмущения, область изменения которого охватывает всю область независимой эллиптической координаты. В связи с чем, для их получения используются исходное дифференциальное уравнение и заданные граничные условия. Дополнительные граничные условия находятся путем дифференцирования исходного дифференциального уравнения по независимой эллиптической координате, а заданных граничных условий (включая условия на фронте температурного возмущения) по вре-

мени и сопоставления получающихся при этом результатов. Таким путем в дополнительных граничных условиях удастся избавиться от временной координаты, в связи с чем, они имеют простой вид и легко удовлетворяются решением в виде степенного ряда по пространственной координате.

3. На основе ортогонального метода Л.В. Канторовича получены новые аналитические решения задач теплопроводности для многослойных конструкций с переменными в пределах каждого слоя физическими свойствами, а также с переменными во времени граничными условиями теплообмена. Разработаны принципы построения систем координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения. В основу построения положен рекуррентный метод, когда координатные функции строятся последовательно, переходя от одного слоя к другому, используя всякий раз метод неопределенных коэффициентов.

4. При решении задач теплопроводности для многослойных конструкций с использованием ортогонального метода Л.В. Канторовича принимается глобальная система неизвестных функций времени. Это означает, что многослойная система рассматривается здесь как один слой с разрывными (кусочно-однородными) физическими свойствами среды. Условия сопряжения в точках разрыва удовлетворяются точно благодаря особой конструкции координатных функций. Такой метод решения позволяет значительно упростить как процесс получения решения, так и окончательные формулы для него. При этом появляется возможность получения аналитических решений для задач, не поддающихся решению с помощью классических аналитических методов.

5. Применительно к решению задач теплопроводности для однослойных и многослойных конструкций весьма эффективным направлением получения приближенных аналитических решений является совместное применение точных (Фурье) и приближенных аналитических (ортогональный метод Бубнова - Галеркина) методов. В отличие от метода Л.В. Канторовича, где процесс получения решения сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени, здесь в конечном итоге приходится решать однородные (или неоднородные) системы алгебраических линейных уравнений, а затем алгебраический полином относительно собственных значений краевой задачи. Такая алгебраизация процесса решения позволяет широко использовать современные средства вычислительной техники. При этом окончательное решение является аналитическим, к тому же, в простом и удобном для инженерных приложений виде.

В применении к одним и тем же задачам при использовании одинакового числа приближений метод Л.В. Канторовича и метод совместного применения точных и приближенных аналитических методов приводят к одинаковым результатам. Следует однако заметить, что метод Л.В. Канторовича является более универсальным, так как он может быть применен к дифференциальным уравнениям, не допускающим выполнения разделения переменных, для которых совместное применение методов Фурье и Бубнова - Галеркина не представляется возможным.

6. Полученные в диссертации аналитические решения были использованы для нахождения коэффициентов теплоотдачи на внутренней поверхности барабана парового котла БКЗ-420-140НГМ, а также на внутренних стенках многослойных топливных коллекторов камер сгорания газотурбинных двигателей. Коэффициенты теплоотдачи находились из решения обратных задач теплопроводности на основе экспериментальных данных об изменении температур стенок во времени. Аппроксимируя экспе-

риментальные данные алгебраическим полиномом по временной координате и подставляя его в аналитическое решение прямой задачи, относительно искомых коэффициентов получаются трансцендентные уравнения, решение которых не представляет затруднений.

**Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах**

1. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Метод координатных функций в несимметричных задачах теплопроводности. Межвуз. сб. научн. тр. "Дифф. уравнения и их приложения". № 2. Самара. СамГТУ. 2003. С. 136–141 (35%).

2. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Назаренко С.А., Стефанюк Е.В. Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности для многослойных конструкций. Вестник СамГТУ. Вып. 20. Сер. "Физ - мат. науки". Самара. 2003. С. 12–15 (40%).

3. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А., Дикоп В.В. Применение метода координатных функций для решения обратных задач теплопроводности. Вестник СамГТУ. Вып. 20. Сер. "Тех. науки". Самара. 2003. С. 161–168 (25%).

4. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А., Дикоп В.В. Метод координатных функций для решения обратных задач теплопроводности. Доклад на Четвертой Международной конференции "Обратные задачи: идентификация, проектирование и управление". Москва. МАИ. 2003 (30%).

5. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Дикоп В.В., Волков Е.В. Расчет напряженно-деформированного состояния в отверстиях барабанов котлов. Вестник СамГТУ. Вып. 20. Сер. "Тех. науки". Самара. 2003. С. 152–155 (40%).

6. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А., Дикоп В.В. Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности. Труды Пятого Минского Междунар. форума по тепло - и массообмену. Т. 1. Минск. 2003. С. 246–248 (25%).

7. Аверин Б.В., Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для цилиндрической и сферической симметрии на основе интеграла теплового баланса. Тр. Всеросс. научн. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". Ч. 3. Самара. 2003. С. 9–12 (40%).

8. Аверин Б.В., Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Тепловое и напряженно-деформированное состояние трехслойной панели с решетчатым наполнителем при воздействии солнечного излучения. Тр. Всеросс. научн. конф. "Математическое моделирование и краевые задачи". Ч. 2. Самара. 2003. С. 15–18 (15%).

9. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Об одном методе решения нестационарных задач теплопроводности для многослойных конструкций. Инженерно-физический журнал. Т. 78. № 2. 2005. С. 24–28 (50%).

10. Стефанюк Е.В. «Переменными во времени граничными условиями в задачах теплопроводности для многослойных конструкций». Аспирантский вестник Поволжья. №2 (8) 2004 г. С.63-67. (100%)

11. Аверин Б.В., Кудинов В.А., Назаренко С.А., Стефанюк Е.В. Метод дополнительных граничных условий в задачах теплопроводности на основе интеграла теплового баланса. Изв. АН Энергетики. № 3. 2005. С. 119–127 (30%).

12. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Анализ нелинейного теплопереноса на основе определения фронта температурного возмущения. Теплофизика высоких температур. № 4. 2005. С. 1–9 (40%).

13. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С. Интегральные методы в задачах теплопроводности с переменным начальным условием. Межвуз. сб. научн. тр. "Дифф. уравнения и их приложения". № 1. Самара. СамГТУ. 2006. С (45%).
14. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Аналитические методы теплопроводности. Самара: Самар. гос. техн. ун - т. 2004. 209 с. (30%)
15. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Учеб. пос. для вузов. Самара: Самар. гос. техн. ун - т. 2006. 304 с. (30%).
16. Стефанюк Е.В., Радченко В.П. Теплопроводность в пластине при переменных во времени граничных условиях третьего рода. Температура среды – экспоненциальная функция времени// Вестник СамГТУ. Сер.:Физ.-мат. науки. Вып. 26. Самара. 2004. С. 21–26. (80%).
17. Стефанюк Е.В. Аналитические решения задач теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах// Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 42. Самара. 2006. С. 41–45 (100%).
18. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Котов В.В., Поворина А.И. Метод определения начала и продолжительности пленочного кипения на стенках многослойных топливных коллекторов ГТД.// Труды второй всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» ч. 2. Самара. 2005. С. 150-153. (40%).

Подписано в печать

Формат бумаги 60×84. 1/16. Печать плоская. Усл. Изд. л. 3.0. Тираж 100 экз.

Заказ

Отпечатано в издательско - полиграфическом центре  
Самарского государственного технического университета  
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244