На правах рукописи

Тарасенко Анна Валерьевна

Краевые задачи для нагруженных уравнений и уравнений с дробным дифференцированием

01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет» на кафедре «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель:	**Репин Олег Александрович** доктор физико-математических наук, профессор каф. «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВПО «СамГТУ»
Официальные оппоненты:	**Логинов Борис Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор каф. «Высшая математика» ФГБОУ ВПО «УлГТУ»
	Плещинская Ирина Евгеньевна кандидат физико-математических наук, доцент каф. «Информатика и прикладная математика» ФГБОУ ВПО «КНИТУ»
Ведущая организация:	ФГБУН «Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук» (НИИ ПМА КБНЦ РАН)

Защита диссертации состоится 28 ноября 2013 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автороферат разослан «______» октября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент Липачёв Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта.

Новым этапом в развитии теории уравнений смешанного типа явились работы Ф.И. Франкля, в которых он обнаружил важные приложения теории уравнений смешанного типа к проблемам трансзвуковой газовой динамики.

В дальнейшем были поставлены и исследованы новые задачи для уравнений смешанного типа как в нашей стране, так и за рубежом. На сегодняшний день в математической литературе имеются многочисленные работы, в которых изучены такие задачи. Отметим ученых, которые сделали большой личностный вклад и тем самым, повлияли на развитие данной теории: Ф.И. Франкль, М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, В.А. Ильин, Е.И. Моисеев, С.П. Пулькин, В.И. Жегалов, А.М. Нахушев, М.М. Смирнов, В.Ф. Волкодавов, А.П. Солдатов, В.Н. Врагов, Т.Ш. Кальменов, А.И. Кожанов, К.Б. Сабитов, Н.Р. Раджабов, А.Н. Зарубин, А.А. Килбас, Н.Б. Плещинский, Р.С. Хайруллин, О.А. Репин, Л.С. Пулькина, Н.Ю. Капустин, А.В. Псху и другие. В монографии А.В. Бицадзе отмечено, что уравнения смешанного типа стали объектами систематических исследований с конца сороковых годов.

В свою очередь, не менее важным разделом в теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения. Работы, которые посвящены их исследованию, можно разделить на два типа: работы, в которых изучаются нагруженные интегральные уравнения, и работы, в которых изучаются нагруженные дифференциальные уравнения.

Исторически сложилось так, что первые работы были посвящены нагруженным интегральным уравнениям

$$K\,u \equiv L\,u(x) + M\,u(x) = f(x) \,\text{в области}\, \Omega \in R^N, \tag{1}$$

где L – интегральный оператор, а M – интегральный оператор по многообразиям размерности строго меньше N. Этому классу нагруженных уравнений посвящены работы A. Kneser, L. Lichtenstein, Н.М. Гюнтера, Н.Н. Назарова. Важность изучения таких уравнений подчеркивали А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, которые приводили примеры прикладных задач из техники и физики, сводящиеся к нагруженным интегральным уравнениям.

Интерес к нагруженным дифференциальным уравнениям (то есть уравнениям вида (1), где L – дифференциальный оператор, а M – дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции $u(x)$ на многообразиях из замыкания $\overline{\Omega}$ размерности строго меньше N) обуславливается тем, что решение многих важных задач по оптимальному управлению, например, агроэкосистемой, сводятся к изучению именно таких уравнений.

Большой вклад в разработку теории нагруженных дифференциальных уравнений внесли следующие учёные: В.М. Будак, А.Д. Искендеров, А.М. Нахушев, А.В. Бородин, В.М. Казиев, A.M. Krall, А.А. Керефов. Отметим, что в последние годы, благодаря усилиям А.М. Нахушева и его последователей, а также М.Т. Дженалиева и учеников его научной школы, теория нагруженных уравнений получила дальнейшее развитие. В обзорных работах А.М. Нахушева на многочисленных примерах показана практическая и теоретическая важность исследований по нагруженным уравнениям. М.Т. Дженалиев в своей монографии отмечает потребность в изучении нагруженных уравнений:

1. При приближенном решении интегро-дифференциальных уравнений.
2. При исследовании некоторых обратных задач.
3. При линеаризации нелинейных уравнений.
4. При соответствующем преобразовании нелокальных краевых задач.
5. При изучении некоторых задач оптимального управления и т.д.

Результаты настоящей диссертационной работы являются продолжением исследований в этих направлениях. Ставятся различные задачи для нагруженных уравнений и уравнений с частной дробной производной Римана–Лиувилля, отличительной особенностью которых является наличие в краевых условиях операторов дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, Эрдейи–Кобера, М. Сайго или их комбинации. Актуальность исследований таких краевых задач можно обосновать как внутренними потребностями теоретического обобщения классических задач для уравнений математической физики, так и прикладным значением этих задач, играющих большую роль при математическом моделировании различных процессов естествознания.

Целью диссертации является постановка новых краевых задач для нагруженных уравнений и уравнений с дробным дифференцированием, а также доказательство теорем существования и единственности решения этих задач.

Общая методика исследования. В работе при доказательстве единственности и существования решений поставленных задач широко используется аппарат специальных функций, методы теории интегральных уравнений и теории дифференциальных уравнений с частными производными, свойства операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования.

Научная новизна. Основные научные результаты диссертации являются новыми. В числе наиболее важных следует отметить:

1. Постановку и исследование новых задач для нагруженных уравнений и уравнений с частной дробной производной Римана–Лиувилля, краевые условия которых содержат операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, Эрдейи–Кобера, М. Сайго или их комбинации. Доказательство теорем единственности и существования решения краевых задач.

2. Определение интервалов изменения параметров операторов дробного интегрирования и дифференцирования, при которых задачи корректны.

3. Разработка методов сведения исследуемых задач к вопросам разрешимости интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре или интегральных уравнений Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре, а также разработка методов сведения задач к однозначной разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка.

4. Исследование частных случаев, допускающих возможность нахождения явных решений изучаемых задач.

Теоретическая и практическая значимость. Материалы диссертации носят теоретический характер. Полученные в ней результаты могут представлять научный интерес для широкого круга математиков и специалистов, работающих в области дифференциальных уравнений, краевых задач, и могут быть полезными для дальнейшей разработки теории нагруженных дифференциальных уравнений, а также при решении прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Приведены доказательства теорем существования и единственности решения задач для нагруженных уравнений и уравнений с частной производной Римана–Лиувилля, краевые условия которых содержат операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, Эрдейи–Кобера, М. Сайго или их комбинации.

2. Установлены интервалы изменения параметров в краевых условиях поставленных задач, при которых справедливы теоремы единственности и существования решений этих задач.

3. Разработана методика, позволяющая сводить существование и единственность изучаемых задач к разрешимости интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре или к разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре или к однозначной разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка.

4. Исследованы три частных случая, позволяющие выписать решение задачи в явном виде.

Степень обоснованности научных положений и достоверности полученных результатов. Научные положения и выводы являются достоверными и обоснованными, что подтверждается согласованностью результатов работы с результатами, полученными другими авторами при решении краевых задач для нагруженных уравнений и уравнений с дробным дифференцированием. Также достоверность полученных результатов обусловлена их широкой апробацией.

Апробация результатов исследования. Основные положения диссертации и полученные результаты были представлены и докладывались автором на следующих международных и российских конференциях и семинарах:

- Общевузовская конференция профессорско-преподавательского состава Самарского государственного архитектурно-строительного университета (Самара, март 2011 г.);
- Конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения" (Самара, июнь 2011 г.);
- Международная конференция "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (Минск, сентябрь 2011 г.);
- VIII всероссийская научная конференция с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара, сентябрь 2011 г.);
- XIV международная научная конференция им. акад. М.Кравчука (Киев, апрель 2012 г.);
- XI молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения–2012" (Казань, ноябрь 2012 г.);
- научном семинаре "Прикладная математика и механика" кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета (научный руководитель д.ф.-м.н., профессор В.П. Радченко, август 2013 г.);
- научном семинаре "Неклассические задачи математической физики" кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета (научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Л.С. Пулькина, сентябрь 2013 г.);
- научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (научный руководитель д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов, октябрь 2013 г.);

- XII молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения–2013" (Казань, октябрь 2013 г.).

Публикации. По результатам исследований опубликовано одиннадцать печатных работ по теме диссертации, которые отражают ее основные результаты. Список публикаций приведен в конце автореферата. Статьи [5], [9] опубликованы в соавторстве с профессором О.А. Репиным, и их результаты принадлежат авторам в равной мере. Работы [1]–[4] опубликованы в изданиях, входящих в список научных журналов, рекомендованных ВАК.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, вводных сведений, двух глав, которые разбиты на шесть параграфов, заключения и списка использованной литературы, включая работы автора. Объем диссертации составляет 106 страниц машинописного текста. Список литературы содержит 118 источников, из них 8 – иностранных авторов. Работа иллюстрирована 4 рисунками.

Выражение признательности. Автор выражает искреннюю благодарность и признательность за большую помощь и поддержку на всех этапах работы научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Репину Олегу Александровичу, а также доктору физико-математических наук, профессору Сабитову Камиль Басировичу за ценные советы и полезные замечания.

Основное содержание работы

Во **введении** даётся обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

Вводные сведения включают в себя вспомогательный материал. Даны определения и некоторые свойства ряда специальных символов и функций, а также вводятся определения оператора Эрдейи–Кобера $\left(E_{0+}^{a,b}f\right)(x)$, операторов дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля $\left(I_{0+}^{\alpha}f\right)(x)$, $\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha}f\right)(x)$, $\left(D_{1-}^{\alpha}f\right)(x)$ и операторов обобщенного дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго $\left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}f\right)(x)$, $\left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}f\right)(x)$. Показано, что дробные интегралы и производные Римана–Лиувилля являются частным случаем обобщенного оператора дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго. Из многочисленных свойств этих операторов приводятся именно те, которые необходимы в дальнейшем.

Первая глава диссертации посвящена краевым задачам для нагруженных уравнений теплопроводности и Геллерстедта.

В § 1.1 рассматривается уравнение

$$u_t = u_{xx} + u(0,t) \tag{2}$$

в односвязной области $\Omega = \{(x,t): 0<x<l,\, 0<t<T\}$, где l, T – заданные положительные действительные числа. Формулируется задача I.

Задача I. *Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (2) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{x=0\})$, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{3}$$

$$u_x(0,t) - I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma} u(0,t) = -\mu(t), \quad 0<t<T; \tag{4}$$

$$u(l,t) = \varphi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi_1(t) \in C^1[0,T]$, $\mu(t) \in C^1[0,T]$, $\varphi'(0) = -\mu(0)$, $\varphi_1(0) = \varphi(l)$, причем, не нарушая общности, считаем $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$, $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma} f)(x)$ – обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре.

В публикации А.А. Керефова и Р.М. Кумышева[1] изучалась краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности, где в краевом условии использовался оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка α. Новизна постановки задачи I заключается в том, что в краевом условии содержится обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго.

Доказано существование единственного решения краевой задачи для уравнения теплопроводности, нагруженного значением искомой функции $u(x,y)$ на границе $x=0$ прямоугольной области Ω. Используя свойства функции Грина смешанной задачи и указанное краевое условие, задача сводится к интегральному уравнению вольтерровского типа относительно следа искомой функции $u(0,t)$. Показано, что полученное уравнение является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре, которое однозначно и безусловно разрешимо. Основной результат приведён в виде теоремы.

Теорема 1.1.1. *Пусть выполняются условия*

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad \beta < 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad \textit{либо} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \quad \beta > 0.$$

Тогда задача I всегда разрешима и притом единственным образом.

В этом же параграфе выписаны условия для параметров α и β, при которых обобщенный оператор дробного интегро-диффференцирования в смысле М. Сайго сводится либо к оператору Эрдейи–Кобера, либо к оператору дробного интегрирования Римана–Лиувилля, либо к оператору дробного дифференцирования Римана–Лиувилля; и для первых двух случаев обосновано существование единственного решения краевой задачи, сформулированы леммы 1.1.3 и 1.1.4, при выполнении которых однозначная разрешимость

[1]Керефов А. А., Кумышев Р. М. О краевых задачах для нагруженного уравнения теплопроводности // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — Нальчик.— 1996. — Т. 2, № 1. — С. 13–15.

задачи также будет сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре и с непрерывной правой частью, а последний случай, когда обобщенный оператор дробного интегро-диффференцирования в смысле М. Сайго сводится к оператору дробного дифференцирования Римана–Лиувилля, был рассмотрен в работе А.А. Керефова, Р.М. Кумышевой. Все три случая записаны в виде замечаний 1.1.1–1.1.3.

В § 1.2 рассмотрены задачи Гурса и Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Новизна рассматриваемых задач заключается в том, что роль нагрузки выполняет оператор в смысле Эрдейи–Кобера, в отличие от работ А.М. Нахушева [2] и В.М. Казиева [3], в которых также изучались задачи Дарбу и Гурса для нагруженного интегро-дифференциального уравнения, которое содержало дробные производные от следов искомой функции, определяемыми в смысле Римана–Лиувилля, и от работ Н.А. Вирченко [4] и О.А. Репина [5], в которых в качестве нагрузки использовался обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго.

Пусть Ω – конечная область евклидовой плоскости точек (x, y), ограниченная характеристиками $AC : \xi = 0$, $BC : \eta = 1$, где

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \tag{6}$$

оператора

$$L(u) = u_{yy} - (-y)^m u_{xx}, \quad m = \mathrm{const} > 0 \tag{7}$$

и отрезком $AB : 0 \leqslant x \leqslant 1$ прямой $y = 0$. В дальнейшем через I будем обозначать единичный интервал $(0,1)$, а через $\overline{\Omega}$ – замыкание Ω.

В области Ω рассматривается нагруженное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка с оператором Геллерстедта (7) в главной части

$$L(u) - \mu E_{0+}^{a,b} u(x,0) = f(x,y), \tag{8}$$

где μ – действительная константа, $(E_{0+}^{a,b}\varphi)(x)$ – оператор Эрдейи–Кобера, определяемый формулой

$$(E_{0+}^{a,b}\varphi)(x) = \frac{x^{-a-b}}{\Gamma(a)} \int\limits_0^x (x-t)^{a-1} t^b \varphi(t)\, dt, \quad a > 0, \tag{9}$$

[2] Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 1. — С. 103–108.

[3] Казиев В. М. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 2. — С. 313–319.

[4] Вирченко Н. А., Репин О. А. О задаче Дарбу для нагруженного уравнения Геллерстедта // Докл. нац. АН Украины — 1996. — № 7. — С. 21–25.

[5] Репин О. А. О задаче Гурса для нагруженного уравнения Геллерстедта // Труды второго межд. семинара "Дифференциальные уравнения и их приложени". Самара.— 1998. — С. 133–139.

$$f(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega). \tag{10}$$

Формулировка задачи Гурса выглядит следующим образом.

Задача Гурса. *Найти в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения (8) из класса* $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{AC} = \varphi_1(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{11}$$

$$u|_{BC} = \varphi_2(x), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \tag{12}$$

причем $\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

Вопрос существования и единственности решения задачи Гурса сведен к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре. В итоге получается следующий результат.

Теорема 1.2.1. *Пусть правая часть уравнения* $f(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$ *, а для функций* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *справедливы равенства*

$$\varphi_1(x) = x^{\delta_1}\overline{\varphi}_1(x), \quad \delta_1 \geqslant 1 - 2\beta, \tag{13}$$

$$\varphi_2(x) = (1-x)^{\delta_2}\overline{\varphi}_2(x), \quad \delta_2 \geqslant 1 - 2\beta, \tag{14}$$

где

$$\overline{\varphi}_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \overline{\varphi}_2(x) \in C^1\left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad \overline{\varphi}_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{15}$$

$$(2m+4)\beta = m, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}.$$

Тогда задача Гурса (8), (11), (12) разрешима и притом единственным образом, если

$$b > 0, \quad a > \begin{cases} \dfrac{m}{m+2}, & 0 < m \leqslant 4, \\ \dfrac{m+4}{2(m+2)}, & m > 4. \end{cases} \tag{16}$$

Также в § 1.2 для уравнения (8) в той же области Ω ставится следующая задача.

Задача Дарбу. *Определить в области* Ω *решение уравнения (8) из класса* $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I)$ *, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad x \in I; \quad u|_{AC} = \varphi(\eta), \quad \eta \in \overline{I}. \tag{17}$$

Причём будем предполагать, что

$$f(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega), \quad \varphi(\eta) \in C^1(\overline{I}) \cap C^2(I), \quad \nu(x) \in C^2(I). \tag{18}$$

Проблема однозначной разрешимости исследуемой задачи также сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Получаем, что задача Дарбу эквивалентно редуцируется к задаче Коши

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in \overline{I}, \quad u_y(x,0) = \nu(x), \quad x \in I$$

для уравнения
$$L(u) = f(x,y) + \mu \left(E^{a,b}_{0+}\tau \right)(x),$$
решение которой дается в явном виде
$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int\limits_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right](t-t^2)^{\beta-1}\,dt +$$
$$+\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} y \int\limits_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right](t-t^2)^{-\beta}\,dt +$$
$$+\gamma_0 \int\limits_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int\limits_{\xi_1}^{\eta_1} \frac{R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)}{(\eta_1-\xi_1)^{4\beta}} \left[\mu E^{a,b}_{0+}(\tau) + F(\xi_1,\eta_1)\right] d\eta_1,$$
где
$$\gamma_0 = -\frac{1}{4}(2-4\beta)^{4\beta}, \quad F(\xi,\eta) = f\left[\frac{\xi+\eta}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\beta}(\eta-\xi)^{1-2\beta}\right],$$
$$R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = \frac{(\eta_1-\xi_1)^{2\beta}}{\left[(\eta-\xi_1)(\eta_1-\xi)\right]^{-\beta}} \cdot F\left(\beta,\beta;1;\frac{(\xi-\xi_1)(\eta_1-\eta)}{(\xi-\eta_1)(\xi_1-\eta)}\right).$$
Основной результат сформулирован в виде теоремы 1.2.2.

Теорема 1.2.2. *Пусть выполняются условия* $m > 0$, $a > 4\beta - 2$, $b > 0$. *Тогда задача Дарбу всегда разрешима и притом единственным образом.*

В замечании 1.2.1 рассматривается задача Дарбу (17) для уравнения (8) в случае, когда $m = 0$.

В § 1.3 в той же области Ω для уравнения (8) ставится и исследуется задача такого содержания.

Задача II. *Найти в области* Ω *решение уравнения (8) из класса* $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I) \cap C^2(\Omega)$, *удовлетворяющее краевым условиям*
$$u|_{AC} = \varphi(\eta), \quad \eta \in \overline{I}, \tag{19}$$
$$A_1 E^{a,b}_{0+} u(x,0) + A_2 E^{c,b}_{0+} u_y(x,0) = A_3 E^{d,b}_{0+}\varphi_1(x), \tag{20}$$
где $a > 0$, $c > 0$, $d > 0$ *и* $A_i = const$, $i = \overline{(1,3)}$;
$$\varphi(\eta) \in C^1(\overline{I}) \cap C^2(I), \quad \varphi_1(x) \in C^1[0,1]. \tag{21}$$
Доказательство существования и единственности решения рассматриваемой задачи вытекает из эквивалентной редукции её к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое имеет единственное решение.

Полученный результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1.3.1 *Пусть для уравнения (8) справедливы условия (19), (20), а также выполняются условия* $A_2 \neq 0$, $a > c$, $d > c$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *исследуемой задачи из класса* $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I) \cap C^2(\Omega)$.

Вторая глава диссертации посвящена нелокальным задачам для уравнения смешанного типа.

В § 2.1 рассматривается уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y} u = 0 \quad (y > 0), \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + a(-y)^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0 \quad (y < 0), \end{cases} \tag{22}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка α $(0 < \alpha < 1)$ от функции $u(x,y)$:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,y} u\right)(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y \frac{u(x,t)\,dt}{(y-t)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1,\ y > 0), \tag{23}$$

a – вещественная постоянная, $m > 2$, в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно, лежащих в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (22) в полуплоскости $y < 0$.

Формулируется следующая задача.

Задача III. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (22) в области Ω при $y \neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{24}$$

$$\begin{gathered} A(x)\left(I^{\alpha_1,\beta_1,\eta_1}_{0+} w(t) u[\Theta_0(t)]\right)(x) + B(x)\left(I^{\alpha_2,\beta_2,\eta_2}_{1-} \delta(t) u[\Theta_1(t)]\right)(x) + \\ + C_1(x)\left(I^{1-\beta^*-\beta}_{0+} u_y(t,0)\right)(x) + C_2(x)\left(I^{1-\beta^*-\beta}_{1-} u_y(t,0)\right)(x) + \\ + M_1(x) u_y(x,0) + M_2(x) u(x,0) = \gamma(x), \quad \forall\, x \in I, \end{gathered} \tag{25}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha} u(x,y) = \lim_{y \to 0-} u(x,y), \quad \forall\, x \in \overline{I}, \tag{26}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha} u(x,y)\right)_y = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y), \quad \forall\, x \in I, \tag{27}$$

где $\varphi_i(y)$ $(i = 1,2)$, $A(x)$, $B(x)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$, $M_1(x)$, $M_2(x)$, $\gamma(x)$ – заданные функции такие, что

$$\begin{gathered} A^2(x) + B^2(x) + C_1^2(x) + C_2^2(x) + M_1^2(x) + M_2^2(x) \neq 0, \\ A(x),\, B(x),\, C_1(x),\, C_2(x),\, M_1(x),\, M_2(x),\, \gamma(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I), \end{gathered} \tag{28}$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \tag{29}$$

$$y^{1-\alpha}\varphi_1(y),\, y^{1-\alpha}\varphi_2(y) \in C([0,1]), \tag{30}$$

$\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ *– точки пересечения характеристик уравнения (22), выходящих из точки $(x,0) \in I$, с характеристиками AC и BC соответственно;*

$$\beta^* = \frac{m-2a}{2(m+2)},\ \beta = \frac{m+2a}{2(m+2)},\ -1 < a < 1,\ 0 < \beta^* < \frac{1}{2},\ 0 < \beta < \frac{1}{2},$$

где α_1, β_1, η_1, α_2, β_2, η_2 – действительные числа, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, которые будут указаны далее.

Решение $u(x,y)$ поставленной задачи ищется в классе дважды дифференцируемых функций в области Ω таких, что

$$\begin{aligned}
&y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1), \quad u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_2),\\
&y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y\in C(\Omega_1\cup\{(x,y):0<x<1, y=0\}),\\
&u_{xx}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2), \quad u_{yy}\in C(\overline{\Omega}_2).
\end{aligned}\tag{31}$$

Истоком данной задачи послужила публикация А.А. Килбаса, О.А. Репина [6]. Новизна этой задачи состоит в условии (25), которое является обобщением краевых условий подобного типа.

Доказана следующая теорема единственности решения задачи.

Теорема 2.1.1. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи (22), (24)–(25), если либо*

$$w(x)=p_1, \quad \delta(x)=p_2, \quad \alpha_1=-\beta^*, \quad \beta_1=0, \quad \alpha_2=-\beta, \quad \beta_2=0, \tag{32}$$

либо

$$\begin{aligned}
&w(x)=p_1x^{\beta^*+\beta-1}, \quad \delta(x)=p_2(1-x)^{\beta^*+\beta-1}, \quad \alpha_1=-\beta^*,\\
&\beta_1=\beta^*+\beta-1, \quad \alpha_2=-\beta, \quad \beta_2=\beta^*+\beta-1,
\end{aligned}\tag{33}$$

где $p_i=const$ $(i=1,2)$, и выполняются условия

$$E(x)=\frac{\Gamma(\beta^*+\beta)}{\Gamma(\beta)}p_1A(x)+\frac{\Gamma(\beta^*+\beta)}{\Gamma(\beta^*)}p_2B(x)+D(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in\overline{I}; \tag{34}$$

$$\frac{C_1(1)}{E(1)}\leqslant 0, \frac{C_2(0)}{E(0)}\leqslant 0, \left[\frac{C_1(x)}{E(x)}\right]'\geqslant 0, \left[\frac{C_2(x)}{E(x)}\right]'\leqslant 0, \frac{M_1(x)}{E(x)}\geqslant 0 \quad \forall x\in\overline{I}; \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
&p_1>0,\ \frac{A(1)}{E(1)}\leqslant 0,\ \left[\frac{A(x)}{E(x)}\right]'\geqslant 0 \quad \textit{или}\\
&\qquad p_1<0,\ \frac{A(1)}{E(1)}\geqslant 0,\ \left[\frac{A(x)}{E(x)}\right]'\leqslant 0\,\forall x\in\overline{I};
\end{aligned}\tag{36}$$

$$\begin{aligned}
&p_2>0,\ \frac{B(0)}{E(0)}\leqslant 0,\ \left[\frac{B(x)}{E(x)}\right]'\leqslant 0 \quad \textit{или}\\
&\qquad p_2<0,\ \frac{B(0)}{E(0)}\geqslant 0,\ \left[\frac{B(x)}{E(x)}\right]'\geqslant 0\,\forall x\in\overline{I}.
\end{aligned}\tag{37}$$

В замечании 2.1.1 выписаны условия, при выполнении которых теорема единственности решения поставленной задачи может быть доказана на основании принципа экстремума для нелокального параболического уравнения и принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля.

[6] Килбас А. А., Репин О. А. Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // Дифференц. уравнения — 2003. — Т. 39, № 5. — с. 638–644.

Вопрос существования решения рассматриваемой задачи сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре.

В замечании 2.1.2 приведено доказательство существования решения ещё одной исследуемой задачи в случае $A(x) = k_1 = \mathrm{const}$, $C_1(x) = k_2 = \mathrm{const}$, $M_2(x) = k_3 = \mathrm{const}$, $B(x) = C_2(x) = M_1(x) \equiv 0$. При таких условиях получаем, что доказательство существования решения эквивалентно сводится к вопросу разрешимости дифференциального уравнения дробного порядка. Решение поставленой задачи даётся в явном виде

$$u(x,y) = \int\limits_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x,y,0,\eta)\, d\eta -$$

$$- \int\limits_0^y \varphi_2(\eta) G_\xi(x,y,1,\eta)\, d\eta + \Gamma(\alpha) \int\limits_0^1 \tau(\xi) G(x,y,\xi,0)\, d\xi,$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta) = \frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e^{1,\beta}_{1,\beta} \left(-\frac{|x-\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{1,\beta}_{1,\beta} \left(-\frac{|x+\xi+2n|}{(y-\eta)^\beta} \right) \right], \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$$e^{p,\,q}_{b,\,c}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(bk+p)\Gamma(q-ck)}, \quad b > c, \quad b > 0, \quad z \in C,$$

$$\tau(x) = c_1^* x E_{1+\beta^*+\beta,2} \left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_2} x^{1+\beta^*+\beta} \right) + c_2^* E_{1+\beta^*+\beta} \left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_2} x^{1+\beta^*+\beta} \right) +$$

$$+ \gamma_1(x) - \int\limits_0^x (x-t) E_{1+\beta^*+\beta,2} \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_2} (x-t)^{1+\beta^*+\beta} \right] \frac{\gamma''(s)}{\mu_1}\, dt,$$

$$c_1^* = \frac{1}{E_{1+\beta^*+\beta,2} \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_2} \right]} \left[\gamma_1(0) E_{1+\beta^*+\beta} \left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_2} \right) - \gamma_1(1) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^1 (1-t) E_{1+\beta^*+\beta,2} \left((1-t)^{1+\beta^*+\beta} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\mu_2} \right) \frac{\gamma''(t)}{\mu_1}\, dt \right],$$

$$c_2^* = -\gamma_1(0), \quad \gamma_1(x) = \frac{\gamma(x)}{\mu_1}, \quad \mu_1 = \frac{\Gamma(\beta^*+\beta)}{\Gamma(\beta)} k_1 + k_3 = \mathrm{const} \neq 0,$$

$$\mu_2 = -\frac{\Gamma(2-\beta^*-\beta)}{\Gamma(1-\beta^*)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{\frac{2}{m+2}} \frac{k_1}{\mu_1} - \frac{k_2}{\mu_1} = \mathrm{const} \neq 0,$$

$E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha)$ и $E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha]$ – специальные случаи функции Миттаг–Лёффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$.

Используя полученное решение, непосредственно проверяется выполнение краевых условий (24), (25) и условий сопряжения (26), (27), а также принадлежность полученного решения поставленной задачи классу функций (31), что завершает доказательство существования решения исходной задачи.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1.2. *Пусть для уравнения (22) справедливы условия (24)–(25), (29)–(30), а также выполняются условия сопряжения (26), (27). Тогда существует решение $u(x,y)$ исследуемой задачи III из класса (31).*

В § 2.2 для уравнения (22) в области Ω ставится и исследуется нелокальная задача.

Задача III (в исключительных случаях). *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (22) в области Ω при $y \neq 0$, удовлетворяющее краевым условиям (24) и*

$$\begin{gathered} A_1\left(I_{0+}^{\mu}u[\Theta_0(t)]\right)(x) + A_2\left(I_{0+}^{\mu}u(t,0)\right)(x) + \\ +A_3\left(I_{0+}^{\gamma+\mu}u_y(t,0)\right)(x) = A_4x^k, \end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\begin{gathered} k > max(0,\, \mu+\gamma-\eta) - 1, \quad \mu > 0, \\ \gamma = \tfrac{2}{m+2}, \quad \eta - \text{любое действительное число}, \end{gathered} \tag{39}$$

а также условиям сопряжения (26), (27). Здесь A_i, $i = \overline{1,4}$ – действительные константы, на которые далее будут наложены необходимые условия, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – заданные функции, удовлетворяющие условиям (29), (30); $\Theta_0(x)$ – точка пересечения характеристик уравнения (22), выходящих из точек $(x,0) \in I$ с характеристикой AC.

Новизна постановки заключается в том, что решение $u(x,y)$ поставленной задачи ищется для двух исключительных случаев $a = \frac{m}{2}$ и $a = -\frac{m}{2}$ в заданном классе функций (31).

При исследовании задачи III (в исключительных случаях) доказана теорема единственности. Доказательство существования решения, так же как и в § 2.1, эквивалентно сводится к вопросу разрешимости дифференциального уравнения дробного порядка. Полученный результат формулируется в виде двух теорем.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполняются неравенства*

$$-A_2 < A_1 < -\frac{A_3}{\lambda_0} \quad \text{либо} \quad -\frac{A_3}{\lambda_0} < A_1 < -A_2, \tag{40}$$

где $\lambda_0 = \gamma\left(\dfrac{1}{2\gamma}\right)^{\gamma}\Gamma(\gamma)$, и условия сопряжения (26), (27). Тогда, если существует решение исследуемой задачи, то оно единственно.

Теорема 2.2.2. *Пусть для уравнения (22) справедливы условия (24), (38)–(39), (29)–(30) и (40), а также выполняются условия сопряжения (26), (27). Тогда существует решение $u(x,y)$ исследуемой задачи из класса (31).*

В § 2.3 для уравнения (22) при $a=0$ и $m>0$, которое принимает вид:

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D^{\alpha}_{0+,y}u \quad (y>0), \\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy} \quad (m=const>0,\, y<0), \end{cases} \tag{41}$$

в области Ω, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $\Omega_1=\{(x,y):\,-\infty<x<\infty,\, y>0\}$ и области Ω_2, лежащей в нижней полуплоскости $(y<0)$ и ограниченной характеристиками

$$AC:\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0, \quad BC:\eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

и отрезком $[0,\,1]$ прямой $y=0$, ставится и исследуется следующая задача.

Задача IV. *Найти решение $u(x,y)$ уравнения (41) в области Ω, удовлетворяющее краевым условиям*

$$y^{1-\alpha}u|_{y=0}=0 \quad (-\infty<x\leqslant 0,\, 1\leqslant x<\infty), \tag{42}$$

$$\begin{gathered} a(x)\left(I^{-\beta,0,2\beta-1}_{0+}u[\Theta_0(t)]\right)(x)+b(x)\left(I^{-\beta,0,2\beta-1}_{1-}u[\Theta_1(t)]\right)(x)+ \\ +c(x)u(x,0)+d(x)u_y(x,0)=g(x), \quad x\in I, \end{gathered} \tag{43}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0-}u(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}u(x,y), \quad (x\in\overline{I}), \tag{44}$$

$$\lim_{y\to 0-}u_y(x,y)=\beta(x)\lim_{y\to 0+}y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}u(x,y))_y, \quad (x\in I). \tag{45}$$

Здесь $\beta=\dfrac{m}{2m+4}$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $g(x)$ *– заданные функции такие, что*

$$\begin{gathered} a(x),\, b(x),\, c(x),\, d(x),\, g(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I), \\ \alpha(x),\, \beta(x)\in C^2(\overline{I})\cap C^3(I), \quad \alpha(x)\beta(x)>0, \quad \frac{d^2}{dx^2}[\alpha(x)\beta(x)]\leqslant 0, \end{gathered} \tag{46}$$

$\Theta_0(x)$ *и* $\Theta_1(x)$ *– точки пересечения характеристик уравнения (41), выходящих из точки $(x,\,0)\in I$ соответственно с характеристиками AC и BC; $I=(0,\,1)$ единичный интервал прямой $y=0$.*

Будем искать решение $u(x,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области Ω таких, что

$$\begin{gathered} y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1), \quad u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_2), \\ y^{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}u\right)_y\in C(\Omega_1\cup\{(x,y):0<x<1, y=0\}), \\ u_{xx}\in C(\Omega_1\cup\Omega_2), \quad u_{yy}\in C(\overline{\Omega}_2), \\ u(x,y) \quad \text{стремится к нулю при} \quad (x^2+y^2)\to\infty. \end{gathered} \tag{47}$$

Доказана следующая теорема единственности решения поставленной задачи.

Теорема 2.3.1. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи (41), (42)–(45), если*

$$\frac{a(1)}{E(1)}+\frac{b(0)}{E(0)}\geqslant 0, \tag{48}$$

$$E(x)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left[a(x)+b(x)\right]+c(x)\neq 0 \quad \forall x\in \overline{I}, \tag{49}$$

$$\left[\frac{a(x)}{E(x)}\right]'\leqslant 0, \quad \left[\frac{b(x)}{E(x)}\right]'\geqslant 0, \quad \frac{d(x)}{E(x)}\geqslant 0 \quad \forall\, x\in \overline{I}. \tag{50}$$

Вопрос существования решения рассматриваемой задачи сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре.

В замечании 2.3.1 приведено доказательство существования решения ещё одной исследуемой задачи в случае $\alpha(x) = k_1 = \text{const} \neq 0$, $\beta(x) = k_2 = \text{const} \neq 0$, $a_1(x) = k_3 = \text{const} \neq 0$, $b_1(x) = c_1(x) \equiv 0$. При таких условиях получаем, что доказательство существования решения эквивалентно сводится к вопросу разрешимости дифференциального уравнения дробного порядка. Решение поставленой задачи даётся в явном виде:

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 G(x,y,t)\tau(t)\,dt,$$

где

$$G(x,y,t)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}y^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{1,\frac{\alpha}{2}}_{1,\frac{\alpha}{2}}\left(-|x-t|y^{-\frac{\alpha}{2}}\right),$$

$$e^{p,q}_{b,c}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(p+kb)\Gamma(q-ck)}, \quad b>c, \quad b>0, \quad z\in C,$$

$$\begin{aligned}\tau(x)=&\frac{k_2k_3}{k_1}c_1xE_{2\beta+1,2}\left(\frac{k_1\Gamma(1+\alpha)}{k_2k_3}x^{2\beta+1}\right)+\\ &+\frac{k_2k_3}{k_1}c_2E_{2\beta+1}\left(\frac{k_1\Gamma(1+\alpha)}{k_2k_3}x^{2\beta+1}\right)+g_1(x)-\\ &-\frac{1}{k_1}\int\limits_0^x(x-t)E_{2\beta+1,2}\left[\frac{k_1\Gamma(1+\alpha)}{k_2k_3}(x-t)^{2\beta+1}\right]g''(t)\,dt,\end{aligned}$$

$$c_2=-\frac{k_1}{k_2k_3}g_1(0), \quad c_1=\frac{k_1}{k_2k_3E_{2\beta+1,2}\left[k_1\frac{\Gamma(1+\alpha)}{k_2k_3}\right]}\left[g_1(0)E_{2\beta+1}\left(\frac{k_1\Gamma(1+\alpha)}{k_2k_3}\right)-\right.$$

$$\left.-g_1(1)+\frac{1}{k_1}\int\limits_0^1(1-t)E_{2\beta+1,2}\left((1-t)^{2\beta+1}\frac{k_1\Gamma(1+\alpha)}{k_2k_3}\right)g''(t)\,dt\right],$$

$E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^{\alpha})$ и $E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}]$ – специальные случаи функции Миттаг–Лёффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$.

В замечании 2.3.2 рассмотрен случай, когда $\beta(x) \neq k_2$. Проблема однозначной разрешимости исследуемой задачи сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

В замечании 2.3.3 рассматривается задача для уравнения (22) в случае, когда параболическая область Ω_1 представляет собой половину верхней полуплоскости, то есть $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 \leqslant x < \infty, \quad y > 0\}$.

В **заключении** сформулированы следующие основные научные результаты диссертационной работы, полученные лично автором диссертации:

1. Для нагруженных уравнений и уравнений с частной дробной производной Римана–Лиувилля, краевые условия которых содержат операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля, Эрдейи–Кобера, М. Сайго или их комбинации, поставлены и исследованы новые краевые задачи. Доказаны теоремы единственности и существования решения этих задач.

2. Установлены границы параметров, при которых задачи корректны.

3. Изучен метод сведения исследуемых задач к вопросам разрешимости интегральных уравнений Вольтерра второго рода и интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Кроме того, изучен метод сведения исследуемых задач к вопросам разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка.

4. Выделены случаи, допускающие возможность нахождения явных решений изучаемых задач.

Методы и результаты диссертации могут быть использованы в теоретических исследованиях в таких математических дисциплинах, как дифференциальные и интегральные уравнения, интегральные преобразования, и при решении краевых задач для дифференциальных уравнений.

Публикации по теме диссертации

1. **Тарасенко А. В. Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения Геллерстедта / А.В. Тарасенко // Докл. АМАН. — 2011. Т. 13, №2. — С. 57–61.**

2. **Тарасенко А. В. Об одной задаче с оператором М.Сайго в краевом условии для нагруженного уравнения теплопроводности / А.В. Тарасенко // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер: физ.-мат. науки. — 2012. Вып. 3(28). — С. 41–46.**

3. **Тарасенко А. В. О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения / А.В. Тарасенко // Известия вузов. Математика. — 2013. №. 1. — С. 73–81.**

4. **Тарасенко А. В. О задаче со смещением для одного уравнения в частных производных / А.В. Тарасенко // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер: физ.-мат. науки. — 2013. Вып. 3(32). — С. 22–28.**

5. Тарасенко А. В. Задачи Гурса и Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / А.В. Тарасенко, О.А. Репин // Математический журнал. Алматы. — 2011. Т.11. № 2(40). — С. 64–72.

6. Тарасенко А. В. Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения Геллерстедта [Тезисы] / А.В. Тарасенко // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Самара. — Самара: Изд-во Универс групп. — 2011. — С. 116.

7. Тарасенко А. В. О краевых задачах для нагруженного уравнения теплопроводности [Тезисы] / А.В. Тарасенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. Труды международной конференции. Минск. — 2011. — С. 141.

8. Тарасенко А. В. Об одной задаче с оператором М.Сайго в краевом условии для нагруженного уравнения теплопроводности [Тезисы] / А.В. Тарасенко // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. — Самара: СамГТУ. — 2011. — С. 173–174.

9. Тарасенко А. В. Нелокальная задача для нагруженного дифференциального уравнения с обобщенными операторами в краевом условии / А.В. Тарасенко, О.А. Репин // Дифференциальные и интегральные уравнения, их приложения. Труды XIV международной научной конференции им. акад. Кравчука. Украина. — 2012. — С. 362–369.

10. Тарасенко А. В. Об одной задаче с оператором дробного интегрирования Римана–Лиувилля в краевом условии для нагруженного уравнения теплопроводности [Тезисы] / А.В. Тарасенко // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.45.: Лобачевские чтения-2012: материалы XI молодежной школы-конференции. Казань. — 2012. — С. 199–201.

11. Тарасенко А. В. О разрешимости нелокальной задачи для нагруженного уравнения смешанного типа [Тезисы] / А.В. Тарасенко // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.46.: Лобачевские чтения-2013: материалы XII молодежной школы-конференции. Казань. — 2013. — С. 168–170.