МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВПО «СамГТУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

Самара 2014г.

Репин О.А.,
Методические указания по дисциплине «Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами» / Самар. гос. техн. ун-т; Сост *Репин О.А.* Самара, 2014г.

Методические указания предназначены для работы в аудитории и самостоятельной работы магистров по направлению подготовки 01.04.02 (010400.68) «Прикладная математика и информатика».

Печатается по решению методического совета Инженерно-экономического факультета

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Магистр по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика в соответствии с выбранными приоритетными видами профессиональной деятельности должен быть подготовлен к решению следующих профессиональных задач:

в научной и научно-исследовательской деятельности:

– изучение новых научных результатов, научной литературы или научно-исследовательских проектов в соответствии с профилем объекта профессиональной деятельности;

– применение наукоемких технологий и пакетов программ для решения прикладных задач в области физики, химии, биологии, экономики, медицины, экологии; изучение информационных систем методами математического прогнозирования и системного анализа;

– изучение больших систем современными методами высокопроизводительных вычислительных технологий, применение современных суперкомпьютеров в проводимых исследованиях;

– исследование и разработка математических моделей, алгоритмов, методов, программного обеспечения, инструментальных средств по тематике проводимых научно-исследовательских проектов;

– составление научных обзоров, рефератов и библиографии по тематике проводимых исследований;

– участие в работе научных семинаров, научно-тематических конференций, симпозиумов;

– подготовка научных и научно-технических публикаций;

в проектной и производственно-технологической деятельности:

– исследование математических методов моделирования информационных и имитационных моделей по тематике выполняемых научно-исследовательских прикладных задач или опытно-конструкторских работ;

– исследование автоматизированных систем и средств обработки информации, средств администрирования и методов управления безопасностью компьютерных сетей;

– изучение элементов проектирования сверхбольших интегральных схем, моделирование и разработка математического обеспечения оптических или квантовых элементов для компьютеров нового поколения;

– разработка программного и информационного обеспечения компьютерных сетей, автоматизированных систем вычислительных комплексов, сервисов, операционных систем и распределенных баз данных;

– разработка и исследование алгоритмов, вычислительных моделей и моделей данных для реализации элементов новых (или известных) сервисов систем информационных технологий;

– разработка архитектуры, алгоритмических и программных решений системного и изучение языков программирования, алгоритмов, библиотек и пакетов программ, прикладного программного обеспечения;

– продуктов системного и прикладного программного обеспечения;

– изучение и разработка систем цифровой обработки изображений, средств компьютерной графики, мультимедиа и автоматизированного проектирования;

– развитие и использование инструментальных средств, автоматизированных систем в научной и практической деятельности;

в педагогической деятельности:

– владение методикой преподавания учебных дисциплин;

– владение методами электронного обучения;

– консультирование по выполнению курсовых и дипломных работ студентов образовательных учреждений высшего профессионального и среднего профессионального образования по тематике в области прикладной математики и информационных технологий;

– проведение семинарских и практических занятий по общематематическим дисциплинам, а также лекционных занятий по профилю специализации.

Выпускник должен обладать следующими общекультурными компетенциями:

– способностью понимать философские концепции естествознания, владеть основами методологии научного познания при изучении различных уровней организации материи, пространства и времени (ОК-1);

– способностью иметь представление о современном состоянии и проблемах прикладной математики и информатики, истории и методологии их развития (ОК-2);

– способностью использовать углубленные теоретические и практические знания в области прикладной математики и информатики (ОК-3);

– способностью самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности, расширять и углублять свое научное мировоззрение (ОК-4);

– способностью порождать новые идеи и демонстрировать навыки самостоятельной научно- исследовательской работы и работы в научном коллективе (ОК-5);

– способностью совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень, добиваться нравственного и физического совершенствования своей личности (ОК-6);

– способностью и готовностью к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности (ОК-7);

– способностью свободно пользоваться русским и иностранным языками как средством делового общения; способность к активной социальной мобильности (ОК-8);

– способностью использовать углубленные знания правовых и этических норм при оценке последствий своей профессиональной деятельности, при разработке и осуществлении социально значимых проектов (ОК-9).

Выпускник должен обладать следующими профессиональными компетенциями:

– способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты (ПК-1);

– способностью разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач (ПК-2);

– проектная и производственно-технологическая деятельность: способностью углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3);

– способностью разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов (ПК-4);

– организационно-управленческая деятельность: способностью управлять проектами (подпроектами), планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта (ПК-5);

– способностью организовывать процессы корпоративного обучения на основе технологий электронного и мобильного обучения и развития корпоративных баз знаний (ПК-6);

– нормативно-методическая деятельность: способностью разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов (ПК-7);

– педагогическая деятельность: способностью проводить семинарские и практические занятия с обучающимися, а также лекционные занятия спецкурсов по профилю специализации (ПК-8);

– способностью разрабатывать учебно-методические комплексы для электронного и мобильного обучения (ПК-9);

– способностью разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий по профильной направленности ООП магистратуры (ПК-10);

– способностью работать в международных проектах по тематике специализации (ПК-11);

– способностью участвовать в деятельности профессиональных сетевых сообществ по конкретным направлениям (ПК-12);

– социально ориентированная: способностью осознавать корпоративную политику в области повышения социальной ответственности бизнеса перед обществом, принимать участие в ее развитии (ПК-13);

– социально ориентированная деятельность: способность использования основ защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий, катастроф, стихийных бедствий и применения современных средств поражения, основных мер по ликвидации их последствий, способность к общей оценке условий безопасности жизнедеятельности (ПК-13);

– способность реализации решений, направленных на поддержку социально значимых проектов, на повышение электронной грамотности населения, обеспечения общедоступности информационных услуг (ПК-14).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами» является формирование общекультурных и профессиональных компетенций, необходимых для реализации преимущественно следующих видов деятельности: научной и научно-исследовательской, а также педагогической:

ОК-7 Способность и готовность к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности.

ПК-3 Способность углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности.

Задачами изучения дисциплины выступает приобретение в рамках освоения теоретического и практического материала по дисциплине:

знание:

-основных положений и методологии решения задач Дарбу и Гурса;

- основных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами;
- методов моделирования процессов математической биологии, сред с фрактальной структурой и других систем при помощи дифференциальных уравнений;

умение:

- проводить анализ фундаментальных закономерностей поведения сложных систем;
- находить решения краевых задач при помощи функций Римана и Грина;
- ориентироваться в круге основных проблем, возникающих при решении краевых задач для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами;

владение:

- навыками решения краевых задач, описывающих функционирование систем;
- навыками решения краевых задач для уравнений гиперболического, эллиптического и смешанного типов;
- навыками построения математических моделей для конкретных процессов и проводить необходимые расчеты в рамках построенной модели.

[СОДЕРЖАНИЕ]

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

Самостоятельная работа студентов является одной из важнейших составляющих учебного процесса, в ходе которого происходит формирование знаний, умений и навыков в учебной, научно-исследовательской, профессиональной деятельности, формирование общекультурных и профессиональных компетенций будущего магистра.

Учебно-методическое обеспечение создаёт среду актуализации самостоятельной творческой активности студентов, вызывает потребность к самопознанию, самообучению. Таким образом, создаются предпосылки «двойной подготовки» - личностного и профессионального становления.

Для успешного осуществления самостоятельной работы необходимы:

1. Комплексный подход организации самостоятельной работы по всем формам аудиторной работы;
2. Сочетание всех уровней (типов) самостоятельной работы, предусмотренных рабочей программой;
3. Обеспечение контроля за качеством усвоения.

Методические материалы по самостоятельной работе студентов содержат целевую установку изучаемых тем, списки основной и дополнительной литературы для изучения всех тем дисциплины, теоретические вопросы и вопросы для самоподготовки, усвоив которые магистрант может выполнять определенные виды деятельности (предлагаемые на практических, семинарских, лабораторных занятиях), методические указания для студентов.

1.1 Виды самостоятельной работы

Рабочей программой дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы студентов

1.2 Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к текущим аудиторным занятиям;

- *для овладения знаниями*: чтение текста (учебника, дополнительной литературы, научных публикаций); составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; работа со словарями и справочниками; работа с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование аудио- и видеозаписей; компьютерной техники, Интернет и др.;

- *для закрепления и систематизации знаний*: работа с конспектом лекции (обработка текста); аналитическая работа с фактическим материалом (учебника, дополнительной литературы, научных публикаций, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; составление таблиц и схем для систематизации фактического материала; изучение нормативных материалов; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии; тестирование и др.;

-*для формирования умений*: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем; выполнение расчетнографических работ; решение ситуационных производственных (профессиональных) задач; подготовка к деловым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности; подготовка курсовых и дипломных работ (проектов); экспериментально-конструкторская работа; исследовательская и проектная работа.

1.2.1 Проработка теоретического материала (учебниками, первоисточниками, дополнительной литературой);

При изучении нового материала на лекциях, освещаются наиболее важные и сложные вопросы учебной дисциплины, вводится новый фактический материал.

Поэтому к каждому последующему занятию студенты готовятся по следующей схеме:

- разобраться с основными положениями предшествующей лекции;
- изучить соответствующие темы в учебных пособиях.

1.2.2 Работа с дополнительной учебной и научной литературой.

Включает в себя составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; конспектирование научных статей заданной тематики.

1.2.3 Составление презентаций на темы лекций

Практические рекомендации по созданию презентаций

Создание презентации состоит из трех этапов:

1. Планирование презентации – это многошаговая процедура, включающая определение целей, изучение аудитории, формирование структуры и логики подачи материала.
2. Разработка презентации – методологические особенности подготовки слайдов презентации, включая вертикальную и горизонтальную логику, содержание и соотношение текстовой и графической информации.
3. Репетиция презентации – это проверка и отладка созданной презентации.

1.2.4 Перечень тем, выносимых для самостоятельной работы студентов

Одним из видов самостоятельной работы, позволяющей студенту более полно освоить учебный материал, является подготовка сообщений (докладов), эссе, реферата.

Доклад – это научное сообщение на семинарском занятии, заседании студенческого научного кружка или студенческой конференции.

Эссе – жанр философской, литературно-критической, историко-биографической, публицистической прозы, сочетающий подчеркнуто индивидуальную позицию автора с непринужденным, часто парадоксальным изложением, ориентированным на разговорную речь.

Реферат – это краткое изложение современной научной и учебной литературы, журнальных и газетных публикаций, статистических материалов по конкретной теме.

Процесс написания реферата включает в себя несколько этапов:

выбор темы реферата;

поиск научной и учебной литературы по выбранной теме и ее обзор;

разработка плана реферата;

написание содержания реферата;

оформление реферата в соответствии с требованиями;

сдача реферата преподавателю и его защита перед аудиторией оценка реферата (оценивается уровень полноты проведенного исследования; качество оформления работы; самостоятельность студента, творческая инициатива и умение защищать принятые решения).

Следует выделить подготовку к экзаменам, зачетам, защитам как особый вид самостоятельной работы. Основное его отличие от других видов самостоятельной работы состоит в том, что обучающиеся решают задачу актуализации и систематизации учебного материала, применения приобретенных знаний и умений в качестве структурных элементов компетенций, формирование которых выступает целью и результатом освоения образовательной программы.

Целью самостоятельной работы магистров является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС по дисциплине «**Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами**» являются:

• систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

• углубление и расширение теоретических знаний;

• формирование умений использовать справочную документацию, специальную литературу и информационные ресурсы Интернет;

• развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

• формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

• развитие исследовательских умений;

• использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

В рамках дисциплины
Краевые задачи для уравнений в частных производных
с разрывными коэффициентами
применяются следующие виды самостоятельной работы:

1. Подготовка к практическим занятиям
2. Выполнение домашних заданий
3. Подготовка к зачету

1. Подготовка к практическому занятию.

При подготовке к практическим занятиям, обучающимся необходимо изучить лекционный материал, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы.

Рекомендации по работе с литературой и использованию материалов учебно-методического комплекса

Рекомендуется использовать методические указания по курсу, текст лекций преподавателя. Однако теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекции и изучению конспекта, изучаются и книги. Легче освоить курс придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться состояния понимания изучаемой темы дисциплины. С этой целью рекомендуется после изучения очередного параграфа выполнить несколько простых упражнений на данную тему. Кроме того, очень полезно мысленно задать себе следующие вопросы (и попробовать ответить на них): о чем этот параграф?, какие новые понятия введены, каков их смысл?, что даст это на практике?

Для выполнения самостоятельной работы рекомендуется пользоваться следующими источниками:

1. Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самарского государственного экономического университета, 2008. 276с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 271с.
3. Килбас А.А., Репин О.А. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана-Лиувилля // Дифференциальные уравнения, 2010. Т. 46, № 10. С. 1453-1460.
4. Периодический журнал Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки.

Подготовка к практическому занятию №1

Постановка задач Коши, Дарбу и Гурса. Решение задач Коши и Гурса методом Римана.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое задачи Коши, Дарбу и Гурса?
2. Что такое функция Римана?
3. Свойства функции Римана.

Подготовка к практическому занятию №2

Построение общего решения и функции Римана для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.

Решение задач Дарбу для уравнения $E^{-}u = 0$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Формула уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.
2. Частное решение уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.
3. Однородное решение уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.
4. Вид решений первой и второй задач Дарбу для уравнения $E^{-}u = 0$.

Подготовка к практическому занятию №3

Решение задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с данными на линии параболичности.

<u>Вопросы для самоконтроля:</u>

1. Общий вид вырождения первого рода.
2. Какая линия является линией параболического вырождения?
3. Какую формулу имеют характеристики уравнений?
4. Теорема М. Проттера.
5. Является ли условие корректности задачи необходимым?

Подготовка к практическому занятию №4

Построение фундаментальных решений. Построение формулы Грина. Применение принципа экстремума для доказательства единственности решения краевых задач.

<u>Вопросы для самоконтроля:</u>

1. Что такое фундаментальное решение?
2. Формула Грина.
3. Принцип внутреннего экстремума.
4. Принцип максимума для уравнения $\Delta u = 0$.

Подготовка к практическому занятию №5

Решение основных задач для уравнения Лапласа. Решение основных задач для уравнения $E_0^+ u = 0$.

<u>Вопросы для самоконтроля:</u>

1. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$.
2. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа.
3. Что такое гармоническая функция?
4. Теорема Лиувилля.
5. В чем заключается метод Фурье?
6. Решение задачи Неймана для уравнения $E_0^+ u = 0$.
7. Решение задачи Дирихле для уравнения $E_0^+ u = 0$.

Подготовка к практическому занятию №6

Решение сингулярных краевых задач.

<u>Вопросы для самоконтроля:</u>

1. Двуосесимметрическое уравнение Гельмгольца.
2. Построение частного решения.
3. Построение общего решения.
4. Решение сингулярных задач Дирихле.
5. Решение сингулярных задач Неймана.

Подготовка к практическому занятию №7

Постановка задачи Трикоми. Вывод сингулярного уравнения. Нахождение решения задачи Трикоми.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что такое задача Трикоми?
2. Что такое главное значение интеграла?

Подготовка к практическому занятию №8

Доказательство единственности решения задачи Трикоми. Регуляризация сингулярного интегрального уравнения.

Вопросы для самоконтроля:

1. Принцип экстремума для задачи Трикоми.
2. Вид характеристического сингулярного уравнения.
3. Вычисление индекса характеристического сингулярного уравнения.
4. Решение сингулярного уравнения.

2. Выполнение домашнего задания (постановка и решение задач)

Домашние задания выполняются в отдельной тетради и сдаются на проверку преподавателю на следующем занятии.

Для выполнения самостоятельной работы рекомендуется пользоваться следующими источниками:

1. Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самарского государственного экономического университета, 2008. 276с.

2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 271с.

3. Килбас А.А., Репин О.А. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана-Лиувилля // Дифференциальные уравнения, 2010. Т. 46, № 10. С. 1453-1460.

4. Периодический журнал Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки.

Домашнее задание к практическому занятию №1

Поставить задачу Гурса для уравнения $y^2u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0$ и найти ее решение.

Домашнее задание к практическому занятию №2

Поставить задачу Дарбу для уравнения $u_{xx} - u_{yy} - \frac{2}{y}u_x - \frac{2}{y}u_y = 0$ и найти ее решение.

Домашнее задание к практическому занятию №3

Поставить задачу Коши для вырождающегося гиперболического уравнения $K(y)u_{xx} - u_{yy} + u_x + u_y + u = f(x, y)$ с данными на линии параболичности и найти ее решение.

Домашнее задание к практическому занятию №4

Построить фундаментальное решение для уравнения $u_{xx}+u_{yy}+u=0$.

Вывести формулу Грина для уравнения $v_{xx}+v_{yy}+v=0$.

Домашнее задание к практическому занятию №5

Поставить задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в области $y>0$ и найти их решения.

Домашнее задание к практическому занятию №6

Поставить задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в области $|z|<R$ и найти их решения.

Домашнее задание к практическому занятию №7

Поставить задачу Трикоми для уравнения $u_{xx}+\operatorname{sgn} y u_{yy}+\frac{1}{|y|}u_y=0$. Доказать существование решения задачи.

Домашнее задание к практическому занятию №8

Доказать единственность решения задачи Трикоми, поставленной в домашнем задании к практическому занятию №7.

3. Подготовке к зачету

При подготовке к зачёту магистрант в короткий срок прорабатывает содержание лекций по своему конспекту и, при необходимости, по рекомендованным учебникам. На каждый вопрос студент должен написать план ответа, кратко перечислить и запомнить основные факты и положения. На этапе подготовки к зачёту магистрант интегрирует информацию, относящуюся к разным разделам лекционного материала, лучше понимает взаимосвязь различных фактов и положений дисциплины, восполняет пробелы в своих знаниях.

Материалы для самоконтроля

1. Задачи Коши и Дарбу.
2. Функция Римана и ее свойства.
3. Решение задач Гурса и Коши методом Римана.
4. Задача Коши для уравнения $E^{-}u=0$.
5. Теорема о разрешимости задач Дарбу для уравнения $E^{-}u=0$.
6. Конструктивное определение функции Римана-Адамара для оператора E^{-}.
7. Решение задач Дарбу для уравнения $E^{-}u=0$.
8. Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с данными на линии параболичности.
9. Понятие обобщенного решения.

10. Задача Коши с данными на линии параболичности, являющейся характеристикой.
11. Теоремы о разрешимости задачи Коши для вырождающейся системы уравнений 1-го порядка.
12. Матрица Римана.
13. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.
14. Фундаментальные решения уравнений эллиптического типа, примеры. Связь с функциями Римана.
15. Формула Грина для эллиптических уравнений.
16. Принцип экстремума и единственность решения краевых задач.
17. Функция Грина некоторых краевых задач для уравнения Лапласа.
18. Решение основных задач для уравнения Лапласа в полуплоскости и круге.
19. Решение основных задач для уравнения $E_0^+ u = 0$ в полуплоскости методом разделения переменных.
20. Специальные фундаментальные решения сопряженного уравнения $E^+ * v = 0$. Их применение при решении краевых задач для уравнения $E^+ u = 0$ в полуплоскости.
21. Обобщенные теоремы Кельвина. Решение краевых задач для уравнения $E_0^+ u = 0$ в полукруге.
22. Постановка задачи Трикоми для уравнения $E_0 u = 0$ в нормальной ограниченной области. Вывод сингулярного интегрального уравнения для v.
23. Решение сингулярного интегрального уравнения относительно v.
24. Исследование свойств функций $F(x)$, $v(x)$ и решения u.
25. Единственность решения задачи Трикоми. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса. Постановка задачи. Единственность.
26. Представление решения задачи Трикоми в подобласти эллиптичности и в подобласти гиперболичности и редукция ее к интегральному уравнению.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛЕКЦИОННЫМ ЗАНЯТИЯМ

Лекция представляет собой систематическое устное изложение учебного материала. С учетом целей и места в учебном процессе различают лекции вводные, установочные, текущие, обзорные и заключительные. В зависимости от способа проведения выделяют лекции:

— *Информационные;*
— *Проблемные;*
— *Визуальные;*
— *бинарные (лекция-диалог);*
— *лекции-провокации;*
— *лекции-конференции;*
— *лекции-консультации;*
— *лекции-беседы;*
— *лекция с эвристическими элементами;*
— *лекция с элементами обратной связи;*
— *лекция с решением производственных и конструктивных задач;*
— *лекция с элементами самостоятельной работы студентов;*
— *лекция с решением конкретных ситуаций;*
— *лекция с коллективным исследованием;*
— *лекции спецкурсов.*

✓ *информационные* – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций;

✓ *проблемные* – в них при изложении материала используются проблемные вопросы, задачи, ситуации. Процесс познания происходит через научный поиск, диалог, анализ, сравнение разных точек зрения и т. д.;

✓ *лекция с элементами обратной связи.* В данном случае подразумевается изложение учебного материала и использование знаний по смежным предметам (межпредметные связи) или по изученному ранее учебному материалу. Обратная связь устанавливается посредством ответов студентов на вопросы преподавателя по ходу лекции. Чтобы определить осведомленность студентов по излагаемой проблеме, в начале какого-либо раздела лекции задаются необходимые вопросы.

Если студенты правильно отвечают на вводный вопрос, преподаватель может ограничиться кратким тезисом или выводом и перейти к следующему вопросу.

Если же ответы не удовлетворяют уровню желаемых знаний, преподаватель сам излагает подробный ответ, и в конце объяснения снова задает вопрос, определяя степень усвоения учебного материала.

Если ответы вновь демонстрируют низкий уровень знаний студентов – следует изменить методику подачи учебного материала.

- ✓ *лекции спецкурсов*

Большое научное и образовательное значение имеют по узкому кругу вопросов, с более глубоким научным содержанием. Главная их задача – поиски новых путей в решении тех или иных научных проблем. На лекциях спецкурсов преподаватель излагает результаты собственной научной или производственной деятельности.

РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Лекция 1.

лекция с элементами обратной связи. изложение учебного материала и использование знаний по смежным предметам (межпредметные связи) или по изученному ранее учебному материалу.

Вопросы для рассмотрения.

Задачи Коши и Дарбу.

Функция Римана и ее свойства.

Решение задач Гурса и Коши методом Римана.

Задача Коши для уравнения $E^{-}u = 0$.

Теорема о разрешимости задач Дарбу для уравнения $E^{-}u = 0$.

Конструктивное определение функции Римана-Адамара для оператора E^{-}.

РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Лекция 2.

Проблемная лекция – в них при изложении материала используются проблемные вопросы, задачи, ситуации.

Вопросы для рассмотрения.

Решение задач Дарбу для уравнения $E^{-}u = 0$.

Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с данными на линии параболичности.

Понятие обобщенного решения.

Задача Коши с данными на линии параболичности, являющейся характеристикой.

РАЗДЕЛ 1. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Лекция 3.

информационные – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций

Вопросы для рассмотрения.

Теоремы о разрешимости задачи Коши для вырождающейся системы уравнений 1-го порядка.

Матрица Римана.

Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.

РАЗДЕЛ 2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

Лекция 4.

лекция с элементами обратной связи. изложение учебного материала и использование знаний по смежным предметам (межпредметные связи) или по изученному ранее учебному материалу.

Вопросы для рассмотрения.

Фундаментальные решения, примеры.

Связь с функциями Римана.

Формула Грина для эллиптических уравнений.

Принцип экстремума и единственность решения краевых задач.

РАЗДЕЛ 2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

Лекция 5.

лекция с элементами обратной связи. изложение учебного материала и использование знаний по смежным предметам (межпредметные связи) или по изученному ранее учебному материалу.

Вопросы для рассмотрения.

Функция Грина некоторых краевых задач для уравнения Лапласа.

Решение основных задач для уравнения Лапласа в полуплоскости и круге.

Решение основных задач для уравнения $E_0^+ u = 0$ в полуплоскости методом разделения переменных.

РАЗДЕЛ 2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

Лекция 6.

Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций

Вопросы для рассмотрения.

Специальные фундаментальные решения сопряженного уравнения $E^+ * v = 0$.

Их применение при решении краевых задач для уравнения $E^+ u = 0$ в полуплоскости.

Обобщенные теоремы Кельвина.

Решение краевых задач для уравнения $E_0^+ u = 0$ в полукруге.

РАЗДЕЛ 3. УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА.

Лекция 7.

лекция спецкурсов. Большое научное и образовательное значение имеют по узкому кругу вопросов, с более глубоким научным содержанием

Вопросы для рассмотрения.

Постановка задачи Трикоми для уравнения $E_0 u = 0$ в нормальной ограниченной области.

Вывод сингулярного интегрального уравнения для v.

РАЗДЕЛ 3. УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА.

Лекция 8.

лекция спецкурсов. Большое научное и образовательное значение имеют по узкому кругу вопросов, с более глубоким научным содержанием

Вопросы для рассмотрения.

Решение сингулярного интегрального уравнения относительно ν.

Исследование свойств функций $F(x)$, $\nu(x)$ и решения u.

РАЗДЕЛ 3. УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА.

Лекция 9.

Проблемная лекция – в них при изложении материала используются проблемные вопросы, задачи, ситуации.

Вопросы для рассмотрения.

Единственность решения задачи Трикоми.

Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса.

Постановка задачи.

Единственность.

Представление решения задачи Трикоми в подобласти эллиптичности и в подобласти гиперболичности и редукция ее к интегральному уравнению.

Написание конспекта лекций:

Лекции являются эффективным видом занятий для формирования у студентов способности быстро воспринимать новые факты, идеи, обобщать их, а также самостоятельно мыслить.

Студенту следует научиться понимать и основную идею лекции, а также, следуя за лектором, участвовать в усвоении новых мыслей. Но для этого надо быть подготовленным к восприятию очередной темы. Время, отведенное на лекцию, можно считать использованным полноценно, если студенты понимают задачи лекции, если работают вместе с лектором, а не бездумно ведут конспект.

Подготовленным можно считать такого студента, который, присутствуя на лекции, усвоил ее содержание, а перед лекцией просмотрел конспект предыдущей лекции или учебник. После окончания крупного раздела курса рекомендуется проработать его по конспектам и учебникам.

Для наиболее важных дисциплин, вызывающих наибольшие затруднения, рекомендуется перед каждой лекцией просматривать содержание предстоящей лекции по учебнику с тем, чтобы лучше воспринять материал лекции. В этом случае предмет усваивается настолько, что перед экзаменом остается сделать немногое для закрепления знаний.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ) ЗАНЯТИЯМ

Семинар — это форма организации обучения, доминирующим компонентом которой является самостоятельная исследовательско-аналитическая работа студентов с учебной литературой и последующим активным обсуждением проблемы под руководством педагога.

Семинары проводятся по наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной дисциплины и имеют целью ее углубленное изучение, привитие обучающимся навыков самостоятельного поиска и анализа учебной информации, формирование и развитие у них научного мышления, умения активно участвовать в творческой дискуссии, делать правильные выводы, аргументировано излагать и отстаивать свое мнение. Подготовка студентов к семинару осуществляется на основе задания, которое разрабатывается преподавателем и доводится до обучающихся перед проведением первых занятий по теме семинара.

Коллективное обсуждение изучаемых вопросов, докладов и рефератов проводится на семинарских занятиях. Отличие семинаров от других форм обучения состоит в том, что они ориентируют обучаемых на большую самостоятельность в учебно-познавательной деятельности. В ходе семинарских занятий знания учащихся углубляются, систематизируются и контролируются в результате самостоятельной внеаудиторной работы с первоисточниками, документами, дополнительной литературой; укрепляются их мировоззренческие позиции; формируются оценочные суждения.

Принципы проведения семинарского занятия:

1. Комментарий основных вопросов плана семинара.
2. Указать обучающимся страницы в конспекте лекций, разделы учебников и учебных пособий, чтобы они получили общее представление о месте и значении темы в изучаемом курсе. Затем следует рекомендовать им поработать с дополнительной литературой, сделать записи по рекомендованным источникам.
3. Развивать у студентов умение сопоставлять источники, продумывать изучаемый материал. Большое значение имеет совершенствование навыков конспектирования у студентов.
4. В ходе семинара студент учится публично выступать, видеть реакцию слушателей, логично, ясно, четко, грамотным литературным языком излагать свои мысли, проводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

Семинар как развивающая, активная форма учебного процесса способствует выработке самостоятельного мышления студента, формированию информационной культуры. Этому во многом помогают создающиеся спонтанно или создаваемые преподавателем и отдельными студентами в ходе семинара проблемные ситуации.

В заключение преподаватель, как руководитель семинара, подводит итоги семинара. Он может (выборочно) проверить конспекты обучающихся и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения.

Для стимулирования самостоятельного мышления используются различные *активные методики обучения:* проблемные ситуации, задания «закончить предложение», тесты, интерактивный опрос, деловая игра. Ряд студентов может получить задание - подготовить рефераты и выступить с тезисами, а затем преподаватель определяет вопросы для постановки перед группой.

Практическое занятие — форма организации обучения, которая направлена на формирование практических умений и навыков и является связующим звеном между самостоятельным теоретическим освоением студентами учебной дисциплины и применением ее положений на практике.

Практические занятия проводятся в целях: выработки практических умений и приобретения навыков в решении задач, выполнении заданий, производстве расчетов, разработке и оформлении документов, практического овладения иностранными языками и компьютерными технологиями. Главным их содержанием является практическая работа каждого студента. Подготовка студентов к практическому занятию и его выполнение, осуществляется на основе задания, которое разрабатывается преподавателем и доводится до обучающихся перед проведением и в начале занятия.

Наряду с семинарами, важное значение в подготовке студента к профессиональной деятельности имеют практические занятия. Они составляют значительную часть всего объема аудиторных занятий и имеют важнейшее значение для усвоения программного материала. Выполняемые задания могут подразделяться на несколько групп:

1) иллюстрацией теоретического материала и носят воспроизводящий характер. Они выявляют качество понимания студентами теории.

2) образцы задач и примеров, разобранных в аудитории. Для самостоятельного выполнения требуется, чтобы студент овладел показанными методами решения.

3) вид заданий, содержащий элементы творчества. Одни из них требуют от студента преобразований, реконструкций, обобщений. Для их выполнения необходимо привлекать ранее приобретенный опыт, устанавливать внутрипредметные и межпредметные связи. Решение других требует дополнительных знаний, которые студент должен приобрести самостоятельно. Третьи предполагают наличие у студента некоторых исследовательских умений.

4) может применяться выдача индивидуальных или опережающих заданий на различный срок, определяемый преподавателем, с последующим представлением их для проверки в указанный срок.

Основу практических занятий составляет

Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самарского государственного экономического университета, 2008. 276с.

Основные принципы построения практических/семинарских занятий

1. Опрос по теоретическому материалу, проверка подготовки студентов к занятию (10-15минут);

2. Разбор вопросов возникших при выполнении домашней работы. (при необходимости)

3. Решение задач в аналитическом виде. Разбор алгоритмов. Коллективное обсуждение, сравнение нескольких методов решения.

Практическое занятие/семинар 1.
Постановка задач Коши, Дарбу и Гурса.
Решение задач Коши и Гурса методом Римана.
Цель занятия получить алгоритм решения предложенных задач.
Приводятся основные формулы.
Рассматриваются возможные проблемы, которые могут возникнуть при решении
Приводятся основные результаты и выводы при решении такого рода задач.
Рассматриваются преимущества предложенного метода Римана.

Практическое занятие/семинар 2.
Построение общего решения и функции Римана для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.
Решение задач Дарбу для уравнения $E^{-}u = 0$.
Цель занятия получить алгоритм решения предложенных задач.
Приводятся основные формулы.
Рассматривается вывод решения в аналитическом виде.
Рассматриваются возможные проблемы, которые могут возникнуть при решении
Приводятся основные результаты и выводы при решении такого рода задач.

Практическое занятие/семинар 3.
Решение задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с данными на линии параболичности.
Цель занятия получить алгоритм решения предложенных задач.
Рассматривается вывод решения в аналитическом виде.
Приводятся основные формулы.
Рассматриваются возможные проблемы, которые могут возникнуть при решении
Приводятся основные результаты и выводы при решении такого рода задач.

Практическое занятие/семинар 4.
Построение фундаментальных решений.
Построение формулы Грина.
Применение принципа экстремума для доказательства единственности решения краевых задач.
Цель занятия получить алгоритм решения предложенных задач.
Рассматривается вывод решения в аналитическом виде.
Приводятся основные формулы.
Рассматриваются возможные проблемы, которые могут возникнуть при решении
Приводятся основные результаты и выводы при решении такого рода задач.

Практическое занятие/семинар 5.
Решение основных задач для уравнения Лапласа.
Решение основных задач для уравнения $E_0^{+}u = 0$.
Цель занятия получить алгоритм решения предложенных задач.

Рассматривается вывод решения в аналитическом виде.
Приводятся основные формулы.
Рассматриваются возможные проблемы, которые могут возникнуть при решении
Приводятся основные результаты и выводы при решении такого рода задач.

Практическое занятие/семинар 6.
Решение сингулярных краевых задач.

Практическое занятие/семинар 7.
Постановка задачи Трикоми.
Вывод сингулярного уравнения.
Нахождение решения задачи Трикоми.
Цель занятия получить алгоритм решения предложенных задач.
Рассматривается вывод решения в аналитическом виде.
Приводятся основные формулы.
Рассматриваются возможные проблемы, которые могут возникнуть при решении
Приводятся основные результаты и выводы при решении такого рода задач.

Практическое занятие/семинар 8.
Доказательство единственности решения задачи Трикоми.
Регуляризация сингулярного интегрального уравнения.
Цель занятия получить алгоритм решения предложенных задач.
Рассматривается вывод решения в аналитическом виде.
Приводятся основные формулы.
Рассматриваются возможные проблемы, которые могут возникнуть при решении
Приводятся основные результаты и выводы при решении такого рода задач.

Разбор практического занятия

Постановка задачи Трикоми. Вывод сингулярного уравнения. Нахождение решения задачи Трикоми

Обозначим через D открытую область, ограниченную полуокружностью $L = \left[|z-a| = a, y \geq 0 \right]$, $z = x + iy$, $a > 0$, и отрезками $AC: y = -x$ и $BC: y = x - 2a$. Полукруг $B_a = D(y > 0)$ переобозначим через D^+, а треугольник $D(y < 0) = D^-$. Пусть в области $D(y \neq 0)$ задано уравнение

$$E_0 u \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} + \frac{2p}{|y|} u_y = 0, \tag{1}$$

p const. Тогда AC и BC являются его характеристиками, а область D называется нормальной, поскольку L является полуокружностью, то есть нормальным контуром для (1). В области D ставится следующая задача.

Задача Трикоми (Т). Найти в области D решение $u \in C^2(y \neq 0) \cap C(\bar{D})$ уравнения (1), принимающее на кривой L и на одной их характеристик, например, на AC, заданные непрерывные значения

$$
\begin{aligned}
&u\big|_L = \varphi(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \\
&u(x,-x) = \psi(x), \quad 0 \le x \le a, \quad \varphi(\pi) = \psi(0), \quad \theta = \arg(z-a).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Остановимся на случае $2p > -1$, когда значение $|y|^{2p} u_y$ ограничено и непрерывно на линии $y = 0$. Как ранее отмечалось, $u(x,\pm 0)$ органичены, если $2p < 1$. Поскольку $u \in C(\bar{D})$, то естественно ввести единые обозначения предельных значений:

$$
\begin{aligned}
&u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 2a, \\
&\lim_{y \to \pm 0} |y|^{2p} u_y(x,y) = \nu(x), \quad 0 < x < 2a, \quad |p| < \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Непрерывные функции τ, ν нам неизвестны. Для их определения составим систему интегральных уравнений.

$$
\nu(x) = -\frac{2^{1-2p}\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-2p)}\left[x^p \frac{d}{dx} I_{0+}^{p} \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)} \frac{d}{dx} I_{0+}^{2p} \tau(x)\right], \quad 0 < x < 2a, \tag{4}
$$

Подставив сюда соотношение между τ и ν, выведенное из гиперболической части D^-, выражение τ через ν, которое получается из эллиптической части, придем к интегральному уравнению для определения одной неизвестной функции ν :

$$
\begin{aligned}
&\nu(x) + \frac{2^{-2p}\Gamma(1-p)\Gamma(2p)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-2p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} I_{0+}^{2p} \int_0^{2a} \nu(t) \left\{ \frac{1}{|t-x|^{2p}} - \frac{1}{|x+t-\kappa t x|^{2p}} \right\} dt = \\
&= -\frac{2^{1-2p}\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-2p)}\left[x^p \frac{d}{dx} I_{0+}^{p} \psi\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)} \frac{d}{dx} I_{0+}^{2p} f_1(x)\right] = \\
&= \left(1 + \sin(\pi p)\right) F(x) x^{2p-1}, \quad 0 < x < 2a,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Если решить данное уравнение, то найдем решение u в D^+, а по формулам, выражающим решение второй задачи Дарбу, восстановим искомое решение u в области D^-.

Для упрощения (5) произведем следующие операции. Воспользовавшись полугрупповым свойством дробного интегрирования и

$$
I_{xb}^{\alpha}\varphi = \cos \pi\alpha I_{0+}^{\alpha}\varphi + \sin \pi I_{0+}^{\alpha} \frac{1}{r_0} S_{ab} r_0 \varphi, \quad b = 2a, \quad r_0 = x^{1-2p}, \quad \alpha = 1-2p,
$$

Преобразуем первый интеграл в правой части (5).

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1-2p)}\frac{d}{dx}I_{0+}^{2p}\int_0^{2a}\frac{\nu(t)\,dt}{|t-x|^{2p}}=\frac{d}{dt}\left(I_{0+}^{2p}I_{0+}^{1-2p}+I_{0+}^{2p}I_{xb}^{1-2p}\right)\nu(x)=\\
&=\frac{d}{dx}\left(I_{0+}^{1}\nu(x)\right)+\left[\frac{d}{dx}I_{0+}^{2p}\left(\cos\left[\pi(1-2p)\right]I_{0+}^{1-2p}\right)+\right.\\
&\left.+\sin\left[(1-2p)\pi\right]I_{0+}^{2p}x^{2p-1}S_{0b}x^{1-2p}\right]\nu(x)=\\
&=2\sin^2(\pi p)\nu(x)+\frac{\sin 2\pi p}{\pi}x^{2p-1}\int_0^{2a}\frac{t^{1-2p}}{t-x}b=2a.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Подставляя порядки интегрирования, осуществим замену $\tau=\eta x$, используя непосредственно проверяемое равенство

$$
\frac{d}{dx}x^{2p}F\left[2p,1;2p+1;\left(\kappa-\frac{1}{t}\right)\right]=\frac{x^{2p-1}t}{t+x-\kappa xt},
$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}I_{0+}^{2p}\int_0^{2a}\frac{\nu(t)\,dt}{(x+t-\kappa tx)^{2p}}=\frac{d}{dx}\int_0^{2a}\frac{\nu(t)\,dt}{\Gamma(2p)}\int_0^{x}(x-z)^{2p-1}(t+\tau-\kappa t\tau)^{-2p}\,d\tau=\\
&=\frac{d}{dx}\int_0^{2a}\frac{\nu(t)\,dt}{\Gamma(2p)}\left(\frac{x}{t}\right)^{2p}\int_0^{1}(1-\eta)^{2p-1}\left[1-\eta\left(\kappa x-\frac{x}{t}\right)\right]^{-2p}d\eta=\\
&=\int_0^{2a}\frac{t^{-2p}\nu(t)}{\Gamma(2p+1)}\frac{d}{dx}\left[x^{2p}F\left(2p,1;1+2p;x-\frac{1}{t}\right)x\right]dt=\\
&=\frac{1}{\Gamma(2p)}\int_0^{2a}\frac{\nu(t)}{t-\kappa xt+x}\left(\frac{x}{t}\right)^{2p-1}dt.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Подставляя полученное выражение (7) в (5) и применяя формулы дополнения и удвоения Лежандра для гамма-функции, представим (5) в виде

$$
\begin{aligned}
&\left[1+\sin(\pi p)\right]\nu(x)+\frac{\cos(\pi p)}{\pi}\int_0^{2a}\left(\frac{x}{t}\right)^{2p-1}\left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-\kappa xt}\right]\nu(t)\,dt=\\
&=-\frac{2^{1-2p}\Gamma(1-p)}{\Gamma(1-2p)}\left[x^{p}\frac{d}{dx}\left(I_{0+}^{p}\psi\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)}\frac{d}{dx}\left(I_{0+}^{2p}f_1\right)(x)\right)\right].
\end{aligned}
$$

Отсюда придем к сингулярному уравнению относительно неизвестной функции $\varphi(x)$

$$
\varphi(x)+\frac{tg\pi\tilde{p}}{\pi}\int_0^{2a}\varphi(t)\left[\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-\kappa tx}\right]dt=F(x),\quad 0<x<2a,
\tag{8}
$$

где введены обозначения

$$
\begin{aligned}
&\varphi(t)=\nu(t)t^{1-2p},\quad 2\tilde{p}=\frac{1}{2}-p,\quad 0<2\tilde{p}<\frac{1}{2},\\
&F(x)=-\frac{2^{1-2p}\Gamma(1-p)x^{1-2p}}{\Gamma(1-2p)\left(1-\sin(\pi p)\right)}\left[\frac{d}{dx}I_{0+}^{p}\psi\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\Gamma(2p)}{\Gamma(p)}x^{-p}\frac{d}{dx}I_{0+}^{2p}f_1(x)\right].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Интеграл в (8) при $t = t_1 = x$ имеет особенность первого порядка, поэтому его следует понимать в смысле главного значения. Вторая точка $t_2 = \dfrac{x}{\kappa x - 1} = \dfrac{ax}{x - a}$, где знаменатель ядра обращается в нуль, инверсна точке t_1, находится вне отрезка $\left[0, 2a\right]$ и поэтому не является особой. Однако, при изменении x по $\left(0, 2a\right)$ t_2 изменяется по интервалам $\left(-\infty, 0\right)$, $\left(2a, \infty\right)$, что обуславливает принадлежность (8)к классу так называемых сингулярных интегральных уравнений с автоморфными ядрами и приводит в итоге к возможности построения решения этого уравнения в замкнутой форме.

Для решения уравнения (8) удобно воспользоваться аппаратом краевых задач из теории аналитических функций. Заменив в ядре (8) действительное x на комплексное z, осуществим его аналитическое продолжение на комплексную плоскость $\left(z\right)$ и рассмотрим соответствующий интеграл:

$$\Phi\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2a} \varphi\left(t\right)\left[\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t + z - \kappa t z}\right]dt, \quad \kappa = \frac{1}{a}. \tag{10}$$

(Множитель $2\pi i$ введен для удобства в дальнейшем). Как и ядро, введенная функция Φ является, по крайней мере для z, не лежащих на оси абсцисс, аналитической функцией от z. Она обладает легко проверяемым свойством автоморфности с весом

$$\Phi\left(\frac{z}{\kappa z - 1}\right) = \left(\kappa z - 1\right)\Phi\left(z\right). \tag{11}$$

Первый интеграл $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2a} \frac{\varphi\left(t\right)dt}{t - z}$ является интегралом типа Коши, и для него при $z \to x \pm i\theta \in \left(0, 2a\right)$ справедливы формулы Сохоцкого, а второй интеграл при переходе z через $x \in \left(0, 2a\right)$ непрерывен, поскольку его сингулярная точка $t_2 = \dfrac{ax}{x - a}$ находится вне $\left[0, 2a\right]$. Поэтому формулы Сохоцкого для (10) на $\left(0, 2a\right)$ принимают вид

$$\begin{gathered} \Phi^+\left(x\right) - \Phi^-\left(x\right) = \varphi\left(x\right), \quad 0 < X < 2a, \\ \Phi^+\left(x\right) - \Phi^-\left(x\right) = \frac{1}{\pi i}\int_0^{2a} \varphi\left(t\right)\left[\frac{1}{t - x} - \frac{1}{t + x - \kappa t x}\right]dt. \end{gathered} \tag{12}$$

С их помощью (8) переписывается в виде

$$\left(1 + itg\pi\tilde{p}\right)\Phi^+\left(x\right) - \left(1 - itg(\pi\tilde{p})\right)\Phi^-\left(x\right) = F\left(x\right), \quad 0 < x < 2a. \tag{13}$$

Дробно-линейное преобразование $r = \dfrac{az}{z - a}$ переводит точки верхней полуплоскости в точки нижней и наоборот. Значит равенство (11) при $z \to x \pm i\theta$ примет вид

$$\Phi^{\pm}\left(\frac{x}{\kappa x - 1}\right) = \left(\kappa x - 1\right)\Phi^{\mp}\left(x\right). \tag{14}$$

Заменив в (13) x через $\frac{ax}{x-a}=\frac{x}{\kappa x-1}$ и воспользовавшись (14), найдем соотношение между Φ^{+} и Φ^{-} на лучах $(-\infty,0)$, $(2a,\infty)$, в которые отображение r переводит точки из интервала $(0,2a)$:

$$\begin{gathered}\left(1+itg(\pi\tilde{p})\right)\Phi^{-}(x)-\left(1-itg(\pi\tilde{p})\right)\Phi^{+}(x)=\frac{1}{\kappa x-1}F\left(\frac{x}{\kappa x-1}\right),\\ -\infty<x<0,\ 2a<x<\infty.\end{gathered} \tag{15}$$

Задача о нахождении неизвестной аналитической функции $\Phi(z)$ по условиям линейного сопряжения ее предельных значений $\Phi^{\pm}$ на контуре (типа (13), (15)) называется краевой задачей Римана. Восстановив $\Phi(z)$, найдем $\Phi^{\pm}(x)$, а затем по формуле (12) и неизвестное решение $\varphi(x)$ уравнения (8). Таким образом, определенные классы сингулярных интегральных уравнений могут быть сведены к эквивалентным краевым задачам Римана из теории аналитических функций и посредством их решения в замкнутой форме.

Объединим условия (13) и (15) в одно. Для этого преобразуем выражение

$$\frac{1-itg(\pi\tilde{p})}{1+itg\pi\tilde{p}}=\frac{\cos\pi\tilde{p}-i\sin\pi\tilde{p}}{\cos\pi\tilde{p}+i\sin\pi\tilde{p}}=e^{2\pi i(l-p)}, \tag{16}$$

величину целого l уточним в дальнейшем. Введя функции

$$\begin{gathered}G(x)=\begin{cases}e^{-2\pi\tilde{p}i}, & 0<x<2a,\\ e^{-2\pi i(\tilde{p}-l)}, & x<0, x>2a,\end{cases}\\ g(x)=\begin{cases}e^{-\pi\tilde{p}i}\cos(\pi\tilde{p})\mathrm{F}(x), & 0<x<2a,\\ -\dfrac{e^{\pi\tilde{p}i}\cos(\pi\tilde{p})}{\kappa x-1}\mathrm{F}\left(\dfrac{x}{\kappa x-1}\right), & x<0, x>2a,\end{cases}\end{gathered} \tag{17}$$

из (13) и (15) получим краевое условие задачи Римана:

$$\Phi^{+}(x)=G(x)\Phi^{-}(x)+g(x),\quad |x|<\infty,\ x\neq 0,\ x\neq 2a. \tag{18}$$

В силу периодичности e^{z} (ее период $2\pi i$) значение G не зависит от величины l.

Вместо такое неоднородной задачи рассмотрим вначале более простую однородную задачу нахождения аналитической при $\operatorname{Im} z\geq 0$ функции $X(z)$ по условию

$$X^{+}(x)=G(x)X^{-}(x),\quad |x|<\infty,\ x\neq 0,\ x\neq 2a. \tag{19}$$

Прологарифмировав его, получим значение скачка $\ln X(z)$

$$\ln X^{+}(x)-\ln X^{-}(x)=\ln G(x). \tag{20}$$

В силу (12), правая часть его кусочно-постоянная. Разделив последнее равенство на $x-\omega$, где $\omega\in(-\infty,\infty)$ произвольная точка плоскости, мы получим исчезающую на бесконечности правую часть, что в дальнейшем обеспечит сходимость ее интеграла типа Коши по оси OX:

$$\frac{\ln X^{+}(x)}{x-\omega}-\frac{\ln X^{-}(x)}{x-\omega}=\frac{\ln G(x)}{x-\omega},\quad |x|<\infty,\ x\neq 0,\ x\neq 2a. \tag{21}$$

Сравнив (21) с первой формулой (12), видим, что и в этом случае написана первая из формул Сохоцкого о скачке предельных значений функции $\dfrac{\ln X(z)}{z-\omega}$ на оси абсцисс. Значит, сама функция выражается интегралом типа Коши, плотность которого равна правой части (21):

$$\frac{\ln X(z)}{z-\omega}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(t)\,dt}{(t-\omega)(t-z)}. \tag{22}$$

Отсюда следует

$$X(z)=e^{\Gamma(z)},\quad \Gamma(z)=\frac{z-\omega}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(t)\,dt}{(t-\omega)(t-z)}. \tag{23}$$

Очевидно, что функцию $X(z)$ можно вычислять с точностью до постоянного множителя. Учтя (17), получим

$$\begin{gathered}\Gamma(z)=-\tilde{p}\int_0^{2a}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\omega}\right)dt+\\ +\lim_{A\to+\infty}\left[(\tilde{p}-l)\left(\int_{-A}^{+}+\int_{2a}^{A}\right)\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\omega}\right)dt\right]=\ln\frac{X_0(z)}{X_0(\omega)},\\ \ln X_0(z)=-\tilde{p}\ln\frac{2a-z}{-z}+\lim_{A\to+\infty}\left\{(\tilde{p}-l)\left[\ln\frac{z}{A+z}+\ln\frac{A-z}{2a-z}\right]\right\}=\\ =-\tilde{p}\ln\left(\frac{2a-z}{-z}\right)+(\tilde{p}-l)\ln\left(\frac{z}{2a-z}\right).\end{gathered} \tag{24}$$

Отсюда решение (19) примет вид

$$X(z)=\left(\frac{z}{z-2a}\right)^{\tilde{p}}\left(\frac{z}{2a-z}\right)^{\tilde{p}-l}. \tag{25}$$

В силу (18) если выбрать $l=0$, то решение X будет ограниченным при $z\to 0$, а при $z\to 2a$ оно останется интегрируемым. Такое решение

$$X(z)=z^{\tilde{p}}\left(\frac{z}{2a-z}\right)^{\tilde{p}}(z-2a)^{-\tilde{p}} \tag{26}$$

называется каноническим решение в классе ограниченных в нуле и интегрируемых в точке $2a$ функций для задачи Римана (18). Если положить $l=1$, то класс решения (25) изменится на противоположный. Другие значения l приведут к нарушению интегрируемости X в одной из точек 0 или $2a$.

Остановимся на изучении вышеуказанного класса. Каноническая функция (26), как следует из (24), является произведением трех аналитических функций с разрывами соответственно по $(-\infty,0)$, $(0,2a)$ и $(2a,+\infty)$. Положим для определенности, что при $z\to x+i0>2a$ значение $(z-2a)^{-\tilde{p}}\to(x-2a)^{-\tilde{p}}$. Тогда при $z\to x-i0>2a$ разность $z-2a\to|x-2a|e^{2\pi i}$, а $(z-2a)^{-\tilde{p}}\to|x-2a|^{-\tilde{p}}e^{-2\pi\tilde{p}i}$. При $z\to x\pm i0<2a$ величина $(z-2a)^{-\tilde{p}}\to|x-2a|^{-\tilde{p}}e^{-2\pi\tilde{p}i}$, так как $z-2a\to|x-2a|e^{2\pi i}=x-2a$. Поскольку предельные значения этой степенной функции при $z \to x \pm i0 > 2a$ не совпадают, отличаясь множителем $e^{-2\pi \tilde{p} i}$, то для задания ее однозначной ветви следует провести так называемый разрез по лучу $[2a,\infty)$, переход через который запрещен. В противном случае совпадающим точкам $z_1 = \left(x-2a\right)e^{+i0} + 2a$ и $z_2 = \left(x-2a\right)e^{i\left(2\pi+0\right)} + 2a = z_1$ будут соответствовать разные значения функции и однородность нарушится.

СОДЕРЖАНИЕ

ВОПРОСЫ ДЛЯ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ»

Перечень вопросов к зачету

1. Задачи Коши и Дарбу.
2. Функция Римана и ее свойства.
3. Решение задач Гурса и Коши методом Римана.
4. Задача Коши для уравнения $E^{-}u = 0$.
5. Теорема о разрешимости задач Дарбу для уравнения $E^{-}u = 0$.
6. Конструктивное определение функции Римана-Адамара для оператора E^{-}.
7. Решение задач Дарбу для уравнения $E^{-}u = 0$.
8. Задача Коши для вырождающихся гиперболических уравнений с данными на линии параболичности.
9. Понятие обобщенного решения.
10. Задача Коши с данными на линии параболичности, являющейся характеристикой.
11. Теоремы о разрешимости задачи Коши для вырождающейся системы уравнений 1-го порядка.
12. Матрица Римана.
13. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона.
14. Фундаментальные решения уравнений эллиптического типа, примеры. Связь с функциями Римана.
15. Формула Грина для эллиптических уравнений.
16. Принцип экстремума и единственность решения краевых задач.
17. Функция Грина некоторых краевых задач для уравнения Лапласа.
18. Решение основных задач для уравнения Лапласа в полуплоскости и круге.
19. Решение основных задач для уравнения $E_0^{+}u = 0$ в полуплоскости методом разделения переменных.
20. Специальные фундаментальные решения сопряженного уравнения $E^{+} * v = 0$. Их применение при решении краевых задач для уравнения $E^{+}u = 0$ в полуплоскости.
21. Обобщенные теоремы Кельвина. Решение краевых задач для уравнения $E_0^{+}u = 0$ в полукруге.
22. Постановка задачи Трикоми для уравнения $E_0 u = 0$ в нормальной ограниченной области. Вывод сингулярного интегрального уравнения для v.
23. Решение сингулярного интегрального уравнения относительно v.
24. Исследование свойств функций $F(x)$, $v(x)$ и решения u.
25. Единственность решения задачи Трикоми. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой – полуполоса. Постановка задачи. Единственность.
26. Представление решения задачи Трикоми в подобласти эллиптичности и в подобласти гиперболичности и редукция ее к интегральному уравнению.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускник по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика Самарского государственного технического университета отвечает следующим требованиям:

– имеет целостное представление о процессах и явлениях, происходящих в неживой и живой природе, понимает возможности современных научных методов познания природы и владеет ими на уровне, необходимом для решения задач, имеющих естественнонаучное содержание и возникающих при выполнении профессиональных функций;

– способен продолжить обучение в аспирантуре, вести профессиональную деятельность в иноязычной среде;

– владеет культурой мышления, знает его общие законы, способен в письменной и устной речи правильно (логически) оформить его результаты;

– умеет на научной основе организовать свой труд, владеет компьютерными методами сбора, хранения и обработки (редактирования) информации, применяемые в сфере его профессиональной деятельности;

– способен в условиях развития науки и изменяющейся социальной практики к переоценке накопленного опыта, анализу своих возможностей, умеет приобретать новые знания, обучаться в аспирантуре, использовать другие формы обучения, включая самостоятельные и информационно образовательные технологии;

– понимает сущность и социальную значимость своей будущей профессии, основные проблемы дисциплин, определяющих конкретную область его деятельности, видит их взаимосвязь в целостной системе знаний;

– способен к проектной деятельности в профессиональной сфере на основе системного подхода, умеет строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ;

– способен поставить цель и сформулировать задачи, связанные с реализацией профессиональных функций, умеет использовать для их решения методы изученных им наук;

– готов к кооперации с коллегами и работе в коллективе, знаком с методами управления, умеет организовать работу исполнителей, находить и принимать управленческие решения в условиях различных мнений, знает основы педагогической деятельности;

– методически и психологически готов к изменению вида и характера своей профессиональной деятельности, работе над междисциплинарными проектами;

– знает основные тенденции развития современными естествознания, принципы математического моделирования и его применения в исследовании физических, химических, биологических, экологических процессов;

– способен к совершенствованию своей профессиональной деятельности в области математики, программирования.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

№ п/п	Учебник, учебное пособие (приводится библиографическое описание учебника, учебного пособия)	Ресурс НТБ СамГТУ	Кол-во экз.
1.	Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самарского государственного экономического университета, 2008. 276с.	517.9 М 265	2

Дополнительная литература

№ п/п	Учебник, учебное пособие, монография, справочная литература (приводится библиографическое описание)	Ресурс НТБ СамГТУ	Кол-во экз.
3.	Килбас А.А., Репин О.А. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана-Лиувилля // Дифференциальные уравнения, 2010. Т. 46, № 10. С. 1453-1460.	Сайт НЭБ eLIBRARY.RU	Электр. ресурс
4.	Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 271с.	ЭБС изд-ва Лань	Электр. ресурс

Периодические издания

перечень отраслевых периодических изданий по профилю дисциплины, имеющихся в НТБ СамГТУ:

Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математически
е науки.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет»

Сайт научной электронной библиотекиeLIBRARY.RU (http://elibrary.ru)

Общероссийский математический портал Math-Net.ru (http://www.mathnet.ru)

СОДЕРЖАНИЕ

Репин Олег Александрович

Методические указания по дисциплине

«Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами»

Электронные методические указания

Компьютерная верстка Е. В. Башкинова

Подписано для размещения в электронной библиотеке СамГТУ 25.12.2014

Формат 60x84 $\frac{1}{8}$.

Усл. п. л. .3,37_. Уч. -изд. л. 3,84.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Самарский государственный технический университет»

443100. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Главный корпус.

E-mail radch@samgtu.ru