МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
(ФГБОУ ВПО «СамГТУ»)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ»

Самара 2014г.

Зотеев В.Е.,

Методические указания по дисциплине «Методы возмущений в математическом моделировании» / Самар. гос. техн. ун-т; Сост Зотеев В.Е. Самара, 2014г.

Методические указания предназначены для работы в аудитории и самостоятельной работы магистров по направлению подготовки 01.04.02 (010400.68) «Прикладная математика и информатика».

Печатается по решению методического совета Инженерно-экономического факультета

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Магистр по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика в соответствии с выбранными приоритетными видами профессиональной деятельности должен быть подготовлен к решению следующих профессиональных задач:

в научной и научно-исследовательской деятельности:

– изучение новых научных результатов, научной литературы или научно-исследовательских проектов в соответствии с профилем объекта профессиональной деятельности;

– применение наукоемких технологий и пакетов программ для решения прикладных задач в области физики, химии, биологии, экономики, медицины, экологии; изучение информационных систем методами математического прогнозирования и системного анализа;

– изучение больших систем современными методами высокопроизводительных вычислительных технологий, применение современных суперкомпьютеров в проводимых исследованиях;

– исследование и разработка математических моделей, алгоритмов, методов, программного обеспечения, инструментальных средств по тематике проводимых научно-исследовательских проектов;

– составление научных обзоров, рефератов и библиографии по тематике проводимых исследований;

– участие в работе научных семинаров, научно-тематических конференций, симпозиумов;

– подготовка научных и научно-технических публикаций;

в проектной и производственно-технологической деятельности:

– исследование математических методов моделирования информационных и имитационных моделей по тематике выполняемых научно-исследовательских прикладных задач или опытно-конструкторских работ;

– исследование автоматизированных систем и средств обработки информации, средств администрирования и методов управления безопасностью компьютерных сетей;

– изучение элементов проектирования сверхбольших интегральных схем, моделирование и разработка математического обеспечения оптических или квантовых элементов для компьютеров нового поколения;

– разработка программного и информационного обеспечения компьютерных сетей, автоматизированных систем вычислительных комплексов, сервисов, операционных систем и распределенных баз данных;

– разработка и исследование алгоритмов, вычислительных моделей и моделей данных для реализации элементов новых (или известных) сервисов систем информационных технологий;

– разработка архитектуры, алгоритмических и программных решений системного и изучение языков программирования, алгоритмов, библиотек и пакетов программ, прикладного программного обеспечения;

– продуктов системного и прикладного программного обеспечения;

– изучение и разработка систем цифровой обработки изображений, средств компьютерной графики, мультимедиа и автоматизированного проектирования;

– развитие и использование инструментальных средств, автоматизированных систем в научной и практической деятельности;

в педагогической деятельности:
– владение методикой преподавания учебных дисциплин;
– владение методами электронного обучения;
– консультирование по выполнению курсовых и дипломных работ студентов образовательных учреждений высшего профессионального и среднего профессионального образования по тематике в области прикладной математики и информационных технологий;
– проведение семинарских и практических занятий по общематематическим дисциплинам, а также лекционных занятий по профилю специализации.

Выпускник должен обладать следующими общекультурными компетенциями:
– способностью понимать философские концепции естествознания, владеть основами методологии научного познания при изучении различных уровней организации материи, пространства и времени (ОК-1);
– способностью иметь представление о современном состоянии и проблемах прикладной математики и информатики, истории и методологии их развития (ОК-2);
– способностью использовать углубленные теоретические и практические знания в области прикладной математики и информатики (ОК-3);
– способностью самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности, расширять и углублять свое научное мировоззрение (ОК-4);
– способностью порождать новые идеи и демонстрировать навыки самостоятельной научно- исследовательской работы и работы в научном коллективе (ОК-5);
– способностью совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень, добиваться нравственного и физического совершенствования своей личности (ОК-6);
– способностью и готовностью к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности (ОК-7);
– способностью свободно пользоваться русским и иностранным языками как средством делового общения; способность к активной социальной мобильности (ОК-8);
– способностью использовать углубленные знания правовых и этических норм при оценке последствий своей профессиональной деятельности, при разработке и осуществлении социально значимых проектов (ОК-9).

Выпускник должен обладать следующими профессиональными компетенциями:
– способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты (ПК-1);
– способностью разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач (ПК-2);
– проектная и производственно-технологическая деятельность: способностью углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3);
– способностью разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов (ПК-4);

– организационно-управленческая деятельность: способностью управлять проектами (подпроектами), планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта (ПК-5);

– способностью организовывать процессы корпоративного обучения на основе технологий электронного и мобильного обучения и развития корпоративных баз знаний (ПК-6);

– нормативно-методическая деятельность: способностью разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов (ПК-7);

– педагогическая деятельность: способностью проводить семинарские и практические занятия с обучающимися, а также лекционные занятия спецкурсов по профилю специализации (ПК-8);

– способностью разрабатывать учебно-методические комплексы для электронного и мобильного обучения (ПК-9);

– способностью разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий по профильной направленности ООП магистратуры (ПК-10);

– способностью работать в международных проектах по тематике специализации (ПК-11);

– способностью участвовать в деятельности профессиональных сетевых сообществ по конкретным направлениям (ПК-12);

– социально ориентированная: способностью осознавать корпоративную политику в области повышения социальной ответственности бизнеса перед обществом, принимать участие в ее развитии (ПК-13);

– социально ориентированная деятельность: способность использования основ защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий, катастроф, стихийных бедствий и применения современных средств поражения, основных мер по ликвидации их последствий, способность к общей оценке условий безопасности жизнедеятельности (ПК-13);

– способность реализации решений, направленных на поддержку социально значимых проектов, на повышение электронной грамотности населения, обеспечения общедоступности информационных услуг (ПК-14).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Методы возмущений в математическом моделировании» является формирование общекультурных и профессиональных компетенций, необходимых для реализации преимущественно следующих видов деятельности: научной и научно-исследовательской, а также педагогической:

ОК-3 Способностью использовать углубленные теоретические и практические знания в области прикладной математики и информатики.

ПК-2 Способностью разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач.

Задачами изучения дисциплины выступает приобретение в рамках освоения теоретического и практического материала по дисциплине

Знаний:

- теоретических основ методов возмущений;
- основных методов построения равномерно пригодных разложений при решении дифференциальных уравнений.
- основ математического моделирования с использованием методов возмущений;

Умений:

- ориентироваться в круге основных проблем при решении прикладных задач методами возмущений.
- применять методы возмущений при решении уравнений колебаний систем со слабой нелинейностью;
- применять асимптотические разложения к вычислению интегралов;

Владений:

- навыков построения математических моделей на основе асимптотических разложений.
- навыков построения равномерно пригодных разложений при решении дифференциальных уравнений.
- навыков решения научных проблем на основе методов возмущений.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с построением математических моделей на основе асимптотических разложений методами возмущений. Исследуется проблема неравномерности разложений при решении алгебраических уравнений. Рассматривается задача сингулярных возмущений и её решение для алгебраических уравнений. Изучаются методы асимптотических разложений при вычислении различных интегралов. Рассматриваются методы построения равномерных асимптотических разложений для решений дифференциальных уравнений, описывающих динамические процессы в нелинейных колебательных системах.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ»

Самостоятельная работа студентов является одной из важнейших составляющих учебного процесса, в ходе которого происходит формирование знаний, умений и навыков в учебной, научно-исследовательской, профессиональной деятельности, формирование общекультурных и профессиональных компетенций будущего магистра.

Учебно-методическое обеспечение создаёт среду актуализации самостоятельной творческой активности студентов, вызывает потребность к самопознанию, самообучению. Таким образом, создаются предпосылки «двойной подготовки» - личностного и профессионального становления.

Для успешного осуществления самостоятельной работы необходимы:

1. Комплексный подход организации самостоятельной работы по всем формам аудиторной работы;
2. Сочетание всех уровней (типов) самостоятельной работы, предусмотренных рабочей программой;
3. Обеспечение контроля за качеством усвоения.

Методические материалы по самостоятельной работе студентов содержат целевую установку изучаемых тем, списки основной и дополнительной литературы для изучения всех тем дисциплины, теоретические вопросы и вопросы для самоподготовки, усвоив которые магистрант может выполнять определенные виды деятельности (предлагаемые на практических, семинарских, лабораторных занятиях), методические указания для студентов.

1.1 Виды самостоятельной работы

Рабочей программой дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы студентов

1.2 Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к текущим аудиторным занятиям;

- *для овладения знаниями*: чтение текста (учебника, дополнительной литературы, научных публикаций); составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; работа со словарями и справочниками; работа с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование аудио- и видеозаписей; компьютерной техники, Интернет и др.;

- *для закрепления и систематизации знаний*: работа с конспектом лекции (обработка текста); аналитическая работа с фактическим материалом (учебника, дополнительной литературы, научных публикаций, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; составление таблиц и схем для систематизации фактического материала; изучение нормативных материалов; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии; тестирование и др.;

-*для формирования умений*: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем; выполнение расчетно-графических работ; решение ситуационных производственных (профессиональных) задач; подготовка к деловым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности; подготовка курсовых и дипломных работ (проектов); экспериментально-конструкторская работа; исследовательская и проектная работа.

1.2.1 Проработка теоретического материала (учебниками, первоисточниками, дополнительной литературой);

При изучении нового материала на лекциях, освещаются наиболее важные и сложные вопросы учебной дисциплины, вводится новый фактический материал.

Поэтому к каждому последующему занятию студенты готовятся по следующей схеме:

- разобраться с основными положениями предшествующей лекции;

- изучить соответствующие темы в учебных пособиях.

1.2.2 Работа с дополнительной учебной и научной литературой.

Включает в себя составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; конспектирование научных статей заданной тематики.

1.2.3 Составление презентаций на темы лекций

Практические рекомендации по созданию презентаций

Создание презентации состоит из трех этапов:

1. Планирование презентации – это многошаговая процедура, включающая определение целей, изучение аудитории, формирование структуры и логики подачи материала.

2. Разработка презентации – методологические особенности подготовки слайдов презентации, включая вертикальную и горизонтальную логику, содержание и соотношение текстовой и графической информации.

3. Репетиция презентации – это проверка и отладка созданной презентации.

1.2.4 Перечень тем, выносимых для самостоятельной работы студентов

Одним из видов самостоятельной работы, позволяющей студенту более полно освоить учебный материал, является подготовка сообщений (докладов), эссе, реферата.

Доклад – это научное сообщение на семинарском занятии, заседании студенческого научного кружка или студенческой конференции.

Эссе – жанр философской, литературно-критической, историко-биографической, публицистической прозы, сочетающий подчеркнуто индивидуальную позицию автора с непринужденным, часто парадоксальным изложением, ориентированным на разговорную речь.

Реферат – это краткое изложение современной научной и учебной литературы, журнальных и газетных публикаций, статистических материалов по конкретной теме.

Процесс написания реферата включает в себя несколько этапов:

выбор темы реферата;

поиск научной и учебной литературы по выбранной теме и ее обзор;

разработка плана реферата;

написание содержания реферата;

оформление реферата в соответствии с требованиями;

сдача реферата преподавателю и его защита перед аудиторией

оценка реферата (оценивается уровень полноты проведенного исследования; качество оформления работы; самостоятельность студента, творческая инициатива и умение защищать принятые решения).

Следует выделить подготовку к экзаменам, зачетам, защитам как особый вид самостоятельной работы. Основное его отличие от других видов самостоятельной работы состоит в том, что обучающиеся решают задачу актуализации и систематизации учебного материала, применения приобретенных знаний и умений в качестве структурных элементов компетенций, формирование которых выступает целью и результатом освоения образовательной программы.

Введение.

Самостоятельная работа обучающихся является неотъемлемым элементом изучения дисциплины. В ходе самостоятельной работы происходит формирование знаний, умений и навыков в учебной, научно-исследовательской, профессиональной деятельности, формирование общекультурных и профессиональных компетенций будущего магистра. Самостоятельная работа обучающихся предполагает изучение теоретического материала по актуальным вопросам дисциплины. Рекомендуется самостоятельное изучение доступной учебной и научной литературы.

Самостоятельно изученные теоретические материалы повышают уровень подготовки обучающегося к усвоению лекционного материала и используются при выполнении лабораторных работ. В процессе самостоятельной работы обучающиеся:

- осваивают материал, предложенный им на лекциях с привлечением указанной преподавателем литературы;
- осваивают дополнительные теоретические вопросы связанные с построением математических моделей на основе методов возмущений;
- готовятся к лабораторным занятиям в соответствии с описанием лабораторных работ и методическими указаниями к лабораторным работам;
- готовятся к защите выполненных работ с подготовкой отчёта о проделанной работе в соответствии с указаниями по оформлению отчёта;
- ведут подготовку к промежуточной аттестации по данному курсу, которая проходит в форме зачета (1семестр).

Целями самостоятельной работы обучающегося являются:

- формирование навыков самостоятельной образовательной деятельности;
- выявления и устранения обучающимся пробелов в знаниях, необходимых для изучения данного курса;
- осознания роли и места изучаемой дисциплины в образовательной программе, по которой производится обучение.

Общие требования

Самостоятельная работа обучающегося должна быть обеспечена необходимыми учебными и методическими материалами:

- основной и дополнительной литературой;
- методическими указаниями по проведению лабораторных работ;
- перечнем вопросов, выносимых на промежуточную аттестацию.

Самостоятельная работа обучающегося способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

По дисциплине «Методы возмущений в математическом моделировании» применяются следующие виды самостоятельной работы:

1. Оформление отчета по лабораторным работам
2. Подготовка к лабораторным работам
3. Проработка нового материала по лекциям и рекомендованной учебной литературе
4. Подготовка к контрольной работе
5. Подготовка к зачету

1. Подготовка к лабораторным работам

Лабораторные работы составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся. Они направлены на формирование учебных и профессиональных практических умений. При подготовке к лабораторным занятиям обучающимся необходимо изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, с ресурсами информационно-телекоммуникационной сети «Интернет». При этом обучающийся должен учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. В ходе подготовки к лабораторным занятиям необходимо освоить основные понятия; изучить методы решения задач методами возмущений, ответить на контрольные вопросы.

Подготовка к лабораторной работе 1. Асимптотические последовательности и разложения.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении асимптотических разложений для различных функциональных зависимостей, в том числе, при анализе сингулярности и неравномерности построенных разложений.

Теоретические основы. Лабораторная работа 1 относится к разделу «Асимптотические последовательности и разложения». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Понятия асимптотической последовательности, асимптотического ряда, асимптотического разложения. Равномерность асимптотического разложения».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

Подготовка к лабораторной работе 2. Проблема неравномерности разложений при решении алгебраических уравнений методами возмущений.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерных разложений для решений алгебраических уравнений при наличии кратных корней.

Теоретические основы. Лабораторная работа 2 относится к разделу «Применение методов возмущений к решению алгебраических уравнений». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Обеспечение равномерности асимптотических разложений при решении уравнений с кратными корнями. Регулярные и сингулярные разложения при решении алгебраических уравнений».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

Подготовка к лабораторной работе 3. Проблема неравномерности разложений при решении алгебраических уравнений методами возмущений.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при решении алгебраических уравнений на основе построения сингулярных разложений его корней.

Теоретические основы. Лабораторная работа 3 относится к разделу «Применение методов возмущений к решению алгебраических уравнений». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Обеспечение равномерности асимптотических разложений при решении уравнений с кратными корнями. Регулярные и сингулярные разложения при решении алгебраических уравнений».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

Подготовка к лабораторной работе 4. Применение методов возмущений к вычислению интегралов.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при вычислении интегралов на основе асимптотических разложений подынтегральной функции или метода интегрирования по частям.

Теоретические основы. Лабораторная работа 4 относится к разделу «Применение асимптотических разложений к вычислению интеграла». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Метод разложения подынтегральной функции при вычислении полного эллиптического интеграла первого рода. Применение асимптотических разложений при вычислении интеграла ошибок. Метод интегрирования по частям при вычислении неполной гамма - функции».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

Подготовка к лабораторной работе 5. Применение методики Линдштедта-Пуанкаре при построении равномерно пригодных разложений для решения уравнения Дюффинга.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерно пригодных разложений решения уравнения Дюффинга на основе методики Линдштедта-Пуанкаре.

Теоретические основы. Лабораторная работа 5 относится к разделу « Методы построения равномерных асимптотических разложений при решении нелинейных дифференциальных уравнений ». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Построение прямого разложения и его анализ при решении уравнения Дюффинга. Построение равномерных разложений на основе методики Линдштедта – Пуанкаре».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

Подготовка к лабораторной работе 6. Применение метода перенормировки при построении равномерно пригодных решений дифференциальных уравнений с нелинейной восстанавливающей силой.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерно пригодных разложений решения дифференциальных уравнений с нелинейной восстанавливающей силой методом перенормировки.

Теоретические основы. Лабораторная работа 6 относится к разделу « Методы построения равномерных асимптотических разложений при решении нелинейных дифференциальных уравнений ». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Построение равномерных разложений на основе метода перенормировки и метода многих масштабов. Построение равномерных разложений методом усреднений. Метод Ван-Дер-Поля».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

Подготовка к лабораторной работе 7. Построение асимптотических разложений методом многих масштабов для решений дифференциальных уравнений, описывающих колебания нелинейных диссипативных систем.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении методом многих масштабов равномерно пригодных разложений динамических процессов в нелинейных диссипативных колебательных системах.

Теоретические основы. Лабораторная работа 7 относится к разделу «Применение асимптотических разложений при решении уравнений колебаний систем со слабой нелинейностью». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Построение равномерного разложения методом многих масштабов и методом усреднений».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

Подготовка к лабораторной работе 8. Применение метода Ван-Дер-Поля при построении равномерно пригодных решений уравнений, описывающих колебательные системы со слабой нелинейностью общего вида.

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерно пригодных разложений, описывающих динамические процессы в колебательных системах со слабой нелинейностью на основе метода Ван-дер-Поля.

Теоретические основы. Лабораторная работа 8 относится к разделу «Применение асимптотических разложений при решении уравнений колебаний систем со слабой нелинейностью». При подготовке к занятию необходимо проанализировать информацию по теме «Построение равномерного разложения методом многих масштабов и методом усреднений».

Ход подготовки к лабораторной работе. Требуется изучить конспекты лекций и усвоить полученную информацию. Необходимо обратить особое внимание на самостоятельное изучение рекомендованной учебно-методической (а также научной и популярной) литературы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся свое отношение к конкретной проблеме.

Основная и дополнительная учебная литература:

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

Ресурс информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», содержащий дополнительную информацию: http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

Для выполнения лабораторной работы необходим компьютерный класс с соответствующим (необходимым для выполнения лабораторной работы) программным обеспечением Microsoft Office.

2. Оформление отчётов по лабораторным работам

В течении лабораторного занятия обучающемуся необходимо выполнить индивидуальные задания, выданные преподавателем, а затем оформить выполнение работы в виде отчёта в соответствии с нижеизложенными *указаниями по оформлению отчётов.*

1. Отчеты по лабораторным работам готовятся в произвольном виде.
2. Отчет должен включать титульный лист и результаты выполнения лабораторных работ за весь семестр.
3. Отчет по каждой лабораторной работе должен содержать:
   - тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;
   - результаты аналитических исследований, связанных с построением асимптотических разложений, описывающих приближенное решение задачи;
   - описание алгоритма численного метода решения задачи;
   - результаты решения задачи численными методами с использованием персонального компьютера;
   - результаты оценивания погрешности решения задачи методом возмущений;
   - необходимый графический материал;
   - выводы по работе.
4. Отчеты по всем лабораторным работам сдаются преподавателю в конце семестра.

Защита лабораторных работ осуществляется демонстрацией выполненных работ, ответами на контрольные вопросы и отчётами по лабораторным работам. Защита лабораторных работ осуществляется обучающимся по мере выполнения лабораторных работ и относится к самостоятельной работе обучающегося под руководством преподавателя.

3. Проработка нового материала по лекциям и рекомендованной учебной литературе

Организация самостоятельной работы по освоению содержания курса включает в себя такие виды работ как самостоятельное изучение текстов лекций, учебников из списка основной и дополнительной рекомендуемой литературы, использование ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» и пр. Имеет смысл ознакомиться с раскрытием содержания каждой лекции по нескольким рекомендованным источникам для сопоставления точек зрения различных авторов с различных методологических позиций, а для более углубленного изучения воспользоваться дополнительной литературой.

Для успешного освоения вопросов, вынесенных на самостоятельное изучение, необходимо законспектировать предложенные вопросы (см. перечень тем для самостоятельного изучения, предложенный в п. 4 рабочей программы дисциплины), проанализировать различные подходы на изложение предложенной проблемы. Возможно использование литературы, подобранной самим обучающимся.

4. Подготовка к зачёту (1 семестр)

При подготовке к зачёту обучающийся в короткий срок прорабатывает содержание лекций по своему конспекту и, при необходимости, по рекомендованным учебникам. На каждый вопрос обучающийся должен написать план ответа, кратко перечислить и запомнить основные факты и положения. На этапе подготовки к зачёту обучающийся систематизирует и интегрирует информацию, относящуюся к разным разделам лекционного материала, лучше понимает взаимосвязь различных фактов и положений дисциплины, восполняет пробелы в своих знаниях.

Методические указания для обучающихся

Советы по планированию и организации времени,необходимого для изучения дисциплины

Рекомендуется следующим образом организовать время, необходимое для изучения дисциплины:

- Изучение конспекта лекции в тот же день, после лекции – 10-15 минут.
- Изучение конспекта лекции за день перед следующей лекцией – 10-15 минут.
- Изучение теоретического материала по учебнику и конспекту – 2 час в неделю.
- Подготовка к лабораторной работе – 1 час в неделю.

  Всего в неделю – 3 часа.

Описание последовательности действий обучающегося («сценарий изучения дисциплины»)

Для понимания материала и качественного его усвоения рекомендуется такая последовательность действий:

1. После прослушивания лекции и окончания учебных занятий, при подготовке к занятиям следующего дня, нужно сначала просмотреть и обдумать текст лекции, прослушанной сегодня (10-15 минут).
2. При подготовке к лекции следующего дня, нужно просмотреть текст предыдущей лекции, подумать о том, какая может быть тема следующей лекции (10-15 минут).
3. В течение недели выбрать время (1 час) для работы с литературой в библиотеке.
4. При подготовке к лабораторным занятиям следующего дня, необходимо сначала прочитать основные понятия и подходы по теме лабораторной работы. При подготовке к выполнению лабораторной работы нужно сначала понять, что и как требуется сделать, какой теоретический материал нужно использовать, наметить план решения задачи.

Задания для самостоятельной работы магистрантов

Задание 1. Определить порядок выражения при $\varepsilon \to 0$

№ задания	$f(\varepsilon)$
1	$\dfrac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}$
2	$\ln(1+2\varepsilon)$
3	$\ln(1+5\varepsilon)$
4	$\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\sin\varepsilon}$
5	$\dfrac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{1-\cos\varepsilon}$

Задание 2. Найти первые три члена разложения функции при малых значениях ε.

Исследовать зависимость от параметра ε погрешности аппроксимации функции, полученным разложением.

№ задания	$f(\varepsilon)$
1	$\left(1-\dfrac{3}{4}\varepsilon+\dfrac{7}{8}\varepsilon^2\right)^{-1}$
2	$\sqrt{1-\varepsilon^2-\varepsilon^4}$
3	$\sin\left(1+\dfrac{1}{2}\varepsilon+\dfrac{1}{4}\varepsilon^2\right)$
4	$\cos\sqrt{1-\varepsilon}$
5	$\sin\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}$

Задание 3. Указать область неравномерности разложения по параметру ε функциональной зависимости

№ задания	$f(x,\varepsilon)$
1	$1+\dfrac{\varepsilon^2}{x-1}+\dfrac{\varepsilon^4}{(x-1)^2}+\dfrac{\varepsilon^6}{(x-1)^3}+O\left(\varepsilon^8\right)$
2	$\varepsilon\cos x+\dfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos 2x+\dfrac{3}{16}\varepsilon^3\cos 3x+O\left(\varepsilon^4\right)$
3	$1-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{\varepsilon^3}{x}+O\left(\varepsilon^4\right)$
4	$\sin x+\dfrac{1}{2}\varepsilon\cos x-\dfrac{1}{3}\varepsilon^2\sin x-\dfrac{1}{4}\varepsilon^3\cos x+O\left(\varepsilon^4\right)$
5	$1-\varepsilon^2x^2+\varepsilon^4x^4+\varepsilon^6x^6+O\left(\varepsilon^8\right)$

Задание 4. Построить разложения для каждого из корней уравнения при $\varepsilon\to 0$. На основе построенных разложений вычислить с тремя знаками после запятой приближенные значения корней алгебраического уравнения при ε равном 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5.

№ зад.	Алгебраическое уравнение
1	$x^3+(6+7\varepsilon)x^2+12x+8-3\varepsilon=0$
2	$x^3-(8-3\varepsilon)x^2+20x-16+\varepsilon=0$
3	$x^3+(3-2\varepsilon)x^2-(9+4\varepsilon)x+5=0$
4	$x^3+(3-2\varepsilon)x^2+(3+\varepsilon)x+1=0$
5	$x^3-(9+2\varepsilon)x^2+27x-27=0$

Задание 5. Построить разложения для каждого из корней уравнения при $\varepsilon \to 0$. На основе построенных разложений вычислить с тремя знаками после запятой приближенные значения корней алгебраического уравнения при ε равном 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5.

№ зад.	Алгебраическое уравнение
1	$\varepsilon x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$
2	$\varepsilon x^3 + (1+\varepsilon)x^2 - 4 = 0$
3	$\varepsilon x^3 + x^2 + (3-\varepsilon)x + 2 = 0$
4	$\varepsilon x^3 - (1+2\varepsilon)x^2 + 1 = 0$
5	$\varepsilon x^3 - x + 2 = 0$

Задание 6. Найти первые четыре члена разложения интеграла при малых ε. Вычислить заданный интеграл с пятью верными знаками после запятой (например, используя численные методы интегрирования). Принять результаты этих вычислений за точные (истинные) значения интегралов. Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, при различных значениях ε.

1	$\int_1^2 \sin\frac{\varepsilon}{t}\,dt$
2	$\int_0^1 \frac{\sin^2 \varepsilon t}{\sqrt[3]{t^2}}\,dt$
3	$\int_0^\varepsilon \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}}\,dt$
4	$\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt$
5	$\int_0^1 \left(1-\cos\varepsilon t^2\right)dt$

Задание 7. Построить прямое разложение для решения дифференциального уравнения Дюффинга. Исследовать равномерность этого разложения.

№ зад.	Дифференциальное уравнение
1	$u'' + 9u + 0,5u^3 = 0$
2	$u'' + 9u + 0,3u^3 = 0$
3	$u'' + 2u + 0,4u^3 = 0$
4	$u'' + 8u + 0,2u^3 = 0$
5	$u'' + 6u + 0,3u^3 = 0$

Задание 8. Используя методику Линдштедта-Пуанкаре, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения Дюффинга.

№ зад.	Дифференциальное уравнение
1	$u'' + 8u + 0,2u^3 = 0$
2	$u'' + 9u + 0,5u^3 = 0$
3	$u'' + 2u + 0,4u^3 = 0$
4	$u'' + 6u + 0,3u^3 = 0$
5	$u'' + 9u + 0,3u^3 = 0$

Задание 9. Построить прямое разложение для решения дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой. Исследовать равномерность этого разложения. Используя метод перенормировки, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения дифференциального уравнения с нелинейной восстанавливающей силой.

№ зад.	Дифференциальное уравнение
1	$u'' + 8u + 0,2u^5 = 0$
2	$u'' + 2u + 0,2u^5 = 0$
3	$u'' + 4u + 0,4u^5 = 0$
4	$u'' + u + 0,5u^5 = 0$
5	$u'' + 9u + 0,4u^5 = 0$

Задание 10. Построить прямое разложение для решения дифференциального уравнения, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы. Исследовать равномерность этого разложения. Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения дифференциального уравнения, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы.

№ зад.	Дифференциальное уравнение
1	$u'' + 0,5(u')^3 + 2u = 0$
2	$u'' + 0,2(u')^3 + 4u = 0$
3	$u'' + 0,4(u')^3 + 4u = 0$
4	$u'' + 0,6(u')^3 + u = 0$
5	$u'' + 0,3(u')^3 + 8u = 0$

Задание 11. Используя метод Ван-дер-Поля (метод Крылова-Боголюбова), построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения дифференциального уравнения, описывающего колебательную систему со слабой нелинейностью общего вида.

№ зад.	Дифференциальное уравнение
1	$u'' + 2u + 0,4u'\lvert u'\rvert + 0,3u^3 = 0$
2	$u'' + 3u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,5u^3 = 0$
3	$u'' + 5u + 0,2u'\lvert u'\rvert + 0,5u^3 = 0$
4	$u'' + 4u + 0,5u'\lvert u'\rvert + 0,2u^3 = 0$
5	$u'' + u + 0,2u'\lvert u'\rvert + 0,3u^3 = 0$

Рекомендуемая литература для выполнения заданий СРС

1. *Найфе А. Х.* Введение в методы возмущений. М: Мир, 1996. – 535 с.
2. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. М: Наука, 1986. – 454 с.
3. Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ./ *В.Е. Зотеев, А.Ф. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 78 с.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛЕКЦИОННЫМ ЗАНЯТИЯМ

Лекция представляет собой систематическое устное изложение учебного материала. С учетом целей и места в учебном процессе различают лекции вводные, установочные, текущие, обзорные и заключительные. В зависимости от способа проведения выделяют лекции:

- *Информационные;*
- *Проблемные;*
- *Визуальные;*
- *бинарные (лекция-диалог);*
- *лекции-провокации;*
- *лекции-конференции;*
- *лекции-консультации;*
- *лекции-беседы;*
- *лекция с эвристическими элементами;*
- *лекция с элементами обратной связи;*
- *лекция с решением производственных и конструктивных задач;*
- *лекция с элементами самостоятельной работы студентов;*
- *лекция с решением конкретных ситуаций;*
- *лекция с коллективным исследованием;*
- *лекции спецкурсов.*

При чтении лекций по дисциплине «**Методы возмущений в математическом моделировании** », используются следующие способы представления материала:

✓ *информационные* – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций;

✓ *лекции-беседы.* В названном виде занятий планируется диалог с аудиторией, это наиболее простой способ индивидуального общения, построенный на непосредственном контакте преподавателя и студента, который позволяет привлекать к двухстороннему обмену мнениями по наиболее важным вопросам темы занятия, менять темп изложения с учетом особенности аудитории. В начале лекции и по ходу ее преподаватель задает слушателям вопросы не для контроля усвоения знаний, а для выяснения уровня осведомленности по рассматриваемой проблеме. Вопросы могут быть элементарными: для того, чтобы сосредоточить внимание, как на отдельных нюансах темы, так и на проблемах. Продумывая ответ, студенты получают возможность самостоятельно прийти к выводам и обобщениям, которые хочет сообщить преподаватель в качестве новых знаний. Необходимо следить, чтобы вопросы не оставались без ответа, иначе лекция будет носить риторический характер.

- ✓ *лекция с решением конкретных ситуаций.*

Организация активной учебно-познавательной деятельности построена на анализе конкретных ситуаций (микроситуации и ситуации-проблемы).

Микроситуация выражает суть конфликта, или проблемы с весьма схематичным обозначением обстоятельств. Требует от студентов новых самостоятельных выводов, обобщений, заостряет внимание на изучаемом материале (примерами могут служить примерами микроситуации, происходящие в процессе лекционного материала).

Ситуации-проблемы, или ситуации, в которых студентам предлагается не только дать анализ сложившейся обстановки, но и принять логически обоснованное решение, т.е. решить ситуационную задачу.

Преподаватель должен продумать, что дано, что требуется сделать в данной ситуации? Характер вопросов может быть следующим:

1 В чем заключается проблема?

2 Можно ли ее решить?

3 Каков путь решения, т.е. каково решение исследовательской задача.

4 Важно понимать! Ситуационная задача является источником творческого мышления: от простого словесного рассуждения - к практическому решению задачи.

РАЗДЕЛ 1. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ КАК МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Лекция 1.

лекция-беседа. В названном виде занятий планируется диалог с аудиторией, это наиболее простой способ индивидуального общения, построенный на непосредственном контакте преподавателя и студента

Вопросы:

Основная идея методов возмущений.
Алгоритм метода возмущений на примере решения уравнения теплопроводности.

РАЗДЕЛ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РАЗЛОЖЕНИЯ.

Лекция 2.

Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций

Вопросы:

Понятия асимптотической последовательности, асимптотического ряда, асимптотического разложения. Равномерность асимптотического разложения.

РАЗДЕЛ 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Лекция 3.

лекция-беседа. В названном виде занятий планируется диалог с аудиторией, это наиболее простой способ индивидуального общения, построенный на непосредственном контакте преподавателя и студента

Вопросы:

Обеспечение равномерности асимптотических разложений при решении уравнений с кратными корнями.

Регулярные и сингулярные разложения при решении алгебраических уравнений.

РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ.

Лекция 4.

лекция-беседа. В названном виде занятий планируется диалог с аудиторией, это наиболее простой способ индивидуального общения, построенный на непосредственном контакте преподавателя и студента

Вопросы:

Метод разложения подынтегральной функции при вычислении полного эллиптического интеграла первого рода.

Применение асимптотических разложений при вычислении интеграла ошибок.

Метод интегрирования по частям при вычислении неполной гамма - функции.

РАЗДЕЛ 5. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАВНОМЕРНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Лекция 5.

Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций

Вопросы:

Построение прямого разложения и его анализ при решении уравнения Дюффинга.

Построение равномерных разложений на основе методики Линдштедта – Пуанкаре.

РАЗДЕЛ 5. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАВНОМЕРНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Лекция 6.

Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций

Вопросы:

Построение равномерных разложений на основе метода перенормировки и метода многих масштабов.

Построение равномерных разложений методом усреднений.

Метод Ван-Дер-Поля.

РАЗДЕЛ 6. ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ.
Лекция 7.
Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций
Вопросы:
Построение прямого разложения и его анализ.

Построение равномерного разложения методом перенормировки

РАЗДЕЛ 6. ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ.
Лекция 8.
Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций
Вопросы:
Построение равномерного разложения методом многих масштабов и методом усреднений

РАЗДЕЛ 6. ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ.
Лекция9.
лекция с решением конкретных ситуаций.Организация активной учебно-познавательной деятельности построена на анализе конкретных ситуаций (микроситуации и ситуации-проблемы).

Вопросы:
Построение методом возмущений приближенного решения уравнения колебаний диссипативной системы с турбулентным трением.

1. Рекомендации по конспектированию лекций

Лекции являются эффективным видом занятий для формирования у студентов способности быстро воспринимать новые факты, идеи, обобщать их, а также самостоятельно мыслить.

Лектор излагает теоретический и практический материал, относящийся к основному курсу. Из большого числа монографий, учебников, сборников лектор выбирает самое главное, помогает усвоить логику рассуждений. Интонацией голоса и манерой изложения лектором подчеркивает наиболее существенное, выделяет главное и второстепенное. Наиболее важные положения лекции записываются под диктовку лектора.

Студенту следует научиться понимать и основную идею лекции, а также, следуя за лектором, участвовать в усвоении новых мыслей. Но для этого надо быть подготовленным к восприятию очередной темы. Время, отведенное на лекцию, можно считать использованным полноценно, если студенты понимают задачи лекции, если работают вместе с лектором, а не бездумно ведут конспект.

Подготовленным можно считать такого студента, который, присутствуя на лекции, усвоил ее содержание, а перед лекцией просмотрел конспект предыдущей лекции или учебник. После окончания крупного раздела курса рекомендуется проработать его по конспектам и учебникам.

Для наиболее важных дисциплин, вызывающих наибольшие затруднения, рекомендуется перед каждой лекцией просматривать содержание предстоящей лекции по учебнику с тем, чтобы лучше воспринять материал лекции. В этом случае предмет усваивается настолько, что перед экзаменом остается сделать немногое для закрепления знаний.

Написание конспекта лекций необходимо проводить кратко, схематично; последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины. Незнакомые термины, понятия после лекции проверять с помощью энциклопедий, словарей, справочников с выписыванием толкований в тетрадь. Обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации или на лабораторном занятии.

Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых во внеаудиторное время можно сделать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

Лабораторные работы составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки обучающихся. Они направлены на формирование учебных и профессиональных практических умений. На лабораторных занятиях задания выполняются по материалам согласно плану.

До начала лабораторных занятий обучающиеся должны пройти инструктаж по технике безопасности. Перед выполнением лабораторной работы обучающийся должен изучить теоретический материал по теме лабораторной работы по основной и дополнительной литературе, ознакомиться с ресурсами информационно-телекоммуникационной сети «Интернет». При этом обучающийся должен учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. В ходе подготовки к лабораторным занятиям необходимо ознакомиться с методическими указаниями; с порядком ее выполнения; освоить основные понятия; изучить алгоритмы; методы и технологии, необходимые для реализации этих алгоритмов; ответить на контрольные вопросы.

Предлагаемый лабораторный практикум предназначен для студентов-магистрантов, обучающихся по направлению 01.04.02 – прикладная математика и информатика, и включает задания по всем основным разделам дисциплины «Методы возмущений в математическом моделировании».

Целью выполнения лабораторных работ является приобретение и закрепление практических навыков в применении методов возмущений для решения широкого круга задач прикладной математики и математического моделирования.

Каждая лабораторная работа содержит 20 вариантов одинаковых по сложности заданий. Вариант выбирается в соответствии с порядковым номером студента в списке группы. В конце каждой лабораторной работы рассматривается пример выполнения аналогичного задания, приводятся основные формулы, необходимые для решения поставленной задачи.

При выполнении каждого учебного задания необходимо:

- изучить теоретический материал в соответствии с темой задания;
- разработать алгоритм решения задачи методом возмущений, включающий построение асимптотических разложений и применение численных методов решения задачи с заданной точностью;
- построить аналитическое приближенное решение задачи на основе методов возмущений;

– разработать и отладить программу на алгоритмическом языке или использовать пакет прикладных программ и решить задачу с заданной точностью численными методами с использованием персонального компьютера;

– проанализировать полученное методом возмущений приближенное решение задачи, оценить погрешность этого решения и сделать выводы;

– оформить отчет по лабораторной работе.

Отчет по каждой лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– результаты аналитических исследований, связанных с построением асимптотических разложений, описывающих приближенное решение задачи;

– описание алгоритма численного метода решения задачи;

– результаты решения задачи численными методами с использованием персонального компьютера;

– результаты оценивания погрешности решения задачи методом возмущений;

– необходимый графический материал;

– выводы по работе.

Выполнение индивидуальных заданий, входящих в данный лабораторный практикум, предполагает использование персонального компьютера с операционной системой Microsoft® Windows®. Для эффективной реализации алгоритмов численных методов при решении задач математического моделирования **программное обеспечение** должно включать приложение (табличный процессор) Microsoft Excel из пакета прикладных программ Microsoft Office. Рекомендуется также использовать приложение (текстовый редактор) Microsoft Word при оформлении отчетов по выполненным лабораторным работам.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РАЗЛОЖЕНИЯ

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении асимптотических разложений для различных функциональных зависимостей, в том числе, при анализе сингулярности и неравномерности построенных разложений.

Задание 1. Определить порядок выражения, представленного в таблице 1.1, при $\varepsilon \to 0$.

Таблица 1.1

№ варианта	$f(\varepsilon)$	№ варианта	$f(\varepsilon)$
1	$\dfrac{\sin 5\varepsilon}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$	11	$1-\dfrac{1}{2}\varepsilon^2-\cos\varepsilon$
2	$\ln(1+\sin\varepsilon)$	12	$\ln(\cos\varepsilon^2)$
3	$\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$	13	$\ln(1+3\sin\varepsilon)$
4	$\ln(1+2\varepsilon)$	14	$\dfrac{1-\cos 2\varepsilon}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$
5	$\dfrac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}$	15	$\dfrac{\sqrt[4]{\varepsilon^3}}{1-\cos\varepsilon}$
6	$\dfrac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{1-\cos\varepsilon}$	16	$\ln[1+\ln(1+2\varepsilon)]$
7	$\ln[1+\varepsilon(1-2\varepsilon)]$	17	$\sqrt{3\varepsilon(1-2\varepsilon)}$
8	$\ln(1+5\varepsilon)$	18	$\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\cos\varepsilon}$
9	$\arcsin\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}$	19	$\dfrac{\sqrt[4]{\varepsilon^3}}{\sin\varepsilon}$
10	$\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\sin\varepsilon}$	20	$\ln(1-3\sin\varepsilon)$

Задание 2. Найти первые три члена разложения функции, представленной в таблице 1.2, при малых значениях ε.

Исследовать зависимость от параметра ε погрешности аппроксимации функции, представленной в таблице 1.2, полученным разложением. Построить график этой зависимости.

Указание. Диапазон изменения параметра ε выбирать от нуля до значений, при которых погрешность аппроксимации не превышает $10 \div 15\%$.

Таблица 1.2

№ варианта	$f(\varepsilon)$	№ варианта	$f(\varepsilon)$
1	$\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{51}{256}\varepsilon^2\right)^{-1}$	11	$(1-3\varepsilon)^{-1}$
2	$\cos\sqrt{1-2\varepsilon}$	12	$\left(1-\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)^{-2}$
3	$\sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon+2\varepsilon^2}$	13	$\sin\left(2-\varepsilon+\varepsilon^2\right)$
4	$\sin\left(1+\varepsilon-\varepsilon^2\right)$	14	$\sin\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-2\varepsilon}}$
5	$\sqrt{1-\frac{1}{2}\varepsilon^2-\frac{1}{8}\varepsilon^4}$	15	$\ln\frac{1+\varepsilon-2\varepsilon^2}{\sqrt{1+\varepsilon}}$
6	$(1+7\varepsilon)^{-1}$	16	$\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon+\frac{7}{8}\varepsilon^2\right)^{-1}$
7	$\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2\right)^{-2}$	17	$\cos\sqrt{1-\varepsilon}$
8	$\sin\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$	18	$\sqrt{1-\varepsilon^2-\varepsilon^4}$
9	$\sin\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}}$	19	$\sin\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$

10	$\ln\dfrac{1+2\varepsilon-\varepsilon^2}{\sqrt[3]{1+2\varepsilon}}$	20	$\sqrt{1+\varepsilon+\varepsilon^2}$

Задание 3. Указать область неравномерности разложения по параметру ε функциональной зависимости, представленной в таблице 1.3.

Таблица 1.3

№ варианта	$f(x,\varepsilon)$
1	$1-\varepsilon x+\varepsilon^2x^2-\varepsilon^3x^3+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
2	$1+\dfrac{2\varepsilon}{x-1}+\dfrac{3\varepsilon^2}{(x-1)^2}+\dfrac{4\varepsilon^3}{(x-1)^3}+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
3	$1+\varepsilon x^2+\varepsilon^2x^4+\varepsilon^3x^6+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
4	$1+\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{\varepsilon^2}{x-1}+\dfrac{\varepsilon^3}{(x-1)^{3/2}}+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
5	$\sin x+\varepsilon\cos x-\dfrac{1}{2}\varepsilon^2\sin x-\dfrac{1}{6}\varepsilon^3\cos x+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
6	$1-\dfrac{2\varepsilon}{\sqrt{x}}+\dfrac{3\varepsilon^2}{x}-\dfrac{4\varepsilon^3}{x^{3/2}}+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
7	$\varepsilon\cos x+\dfrac{1}{2}\varepsilon^2\cos 2x+\dfrac{3}{16}\varepsilon^3\cos 3x+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
8	$1-\dfrac{1}{2}\varepsilon x+\dfrac{1}{4}\varepsilon^2x^2-\dfrac{1}{8}\varepsilon^3x^3+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^4\right)$
9	$1+\dfrac{\varepsilon^2}{x-1}+\dfrac{\varepsilon^4}{(x-1)^2}+\dfrac{\varepsilon^6}{(x-1)^3}+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^8\right)$

10	$1-\varepsilon^2x^2+\varepsilon^4x^4+\varepsilon^6x^6+O\left(\varepsilon^8\right)$
11	$1+\frac{2\varepsilon}{\sqrt{x+3}}+\frac{3\varepsilon^2}{x+3}+\frac{4\varepsilon^3}{(x+3)^{3/2}}+O\left(\varepsilon^4\right)$
12	$\sin x+\frac{1}{2}\varepsilon\cos x-\frac{1}{3}\varepsilon^2\sin x-\frac{1}{4}\varepsilon^3\cos x+O\left(\varepsilon^4\right)$
13	$1-\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\varepsilon^3}{x}+O\left(\varepsilon^4\right)$
14	$\varepsilon\cos x+\varepsilon^3\cos 2x+\varepsilon^5\cos 3x+O\left(\varepsilon^7\right)$
15	$1-\varepsilon\sqrt[3]{x}+\varepsilon^2\sqrt[3]{x^2}-\varepsilon^3x+O\left(\varepsilon^4\right)$
16	$1+\frac{\varepsilon^2}{x+1}+\frac{\varepsilon^4}{(x+1)^2}+\frac{\varepsilon^6}{(x+1)^3}+O\left(\varepsilon^8\right)$
17	$1+\varepsilon^2\sqrt[5]{x^2}+\varepsilon^4\sqrt[5]{x^4}+\varepsilon^6x\sqrt[5]{x}+O\left(\varepsilon^8\right)$
18	$1+\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{x}+\frac{3\varepsilon}{x^2}+\frac{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{x^{3/2}}+O\left(\varepsilon^2\right)$
19	$\sin x+\sqrt{\varepsilon}\cos x-\varepsilon\sin x-\frac{1}{4}\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\cos x+O\left(\varepsilon^2\right)$
20	$1-\frac{\varepsilon}{\sqrt[5]{x}}+\frac{\varepsilon^2}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{\varepsilon^3}{\sqrt[5]{x^3}}+O\left(\varepsilon^4\right)$

Пример 1.1. Определить порядок выражения $\ln\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)-\sin\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \to 0$.

Используя известные разложения для основных элементарных функций при $x \to 0$:

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \text{ и } \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\ldots,$$

получаем

$$\ln\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)-\sin\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3}-\frac{\varepsilon^2}{4}+\ldots-\sqrt{\varepsilon}+\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{6}-\frac{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}{120}+\ldots=$$
$$=-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{2}-\frac{\varepsilon^2}{4}+\frac{23\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}{120}+\cdots.$$

Очевидно, что при $\varepsilon \to 0$ выражение $f\left(\varepsilon\right)=\ln\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)-\sin\sqrt{\varepsilon}$ имеет порядок ε: $\ln\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)-\sin\sqrt{\varepsilon}=\boldsymbol{O}\left(\varepsilon\right)$. Действительно:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\ln\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)-\sin\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{2}-\frac{\varepsilon^2}{4}+\ldots}{\varepsilon}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}-\frac{\varepsilon}{4}+\ldots\right)=-\frac{1}{2}\neq\infty.$$

Пример 1.2. Найти первые три члена разложения функции $f\left(\varepsilon\right)=\cos\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)$ при малых значениях ε.

Используя известное разложение $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\ldots$, получаем:

$$\cos\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)=1-\frac{\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)^2}{2!}+\frac{\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)^4}{4!}-\ldots=$$
$$=1-\frac{\varepsilon+4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}+4\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2+8\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}+24\varepsilon^3+32\varepsilon^3\sqrt{\varepsilon}+16\varepsilon^4}{24}-\ldots=$$
$$=1-\frac{\varepsilon}{2}-2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}-\frac{47}{24}\varepsilon^2+\frac{1}{3}\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon^3+\ldots.$$

Таким образом, имеем $f\left(\varepsilon\right)=\cos\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)=1-\frac{\varepsilon}{2}-2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right)$.

Оценка погрешности $\Delta f\left(\varepsilon\right)$ аппроксимации функции $f\left(\varepsilon\right)=\cos\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)$ первыми тремя членами её разложения $\hat{f}\left(\varepsilon\right)=1-\frac{\varepsilon}{2}-2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$ вычисляется по формуле $\Delta f\left(\varepsilon\right)=\frac{\left\|f\left(\varepsilon\right)-\hat{f}\left(\varepsilon\right)\right\|}{\left\|f\left(\varepsilon\right)\right\|}$, где

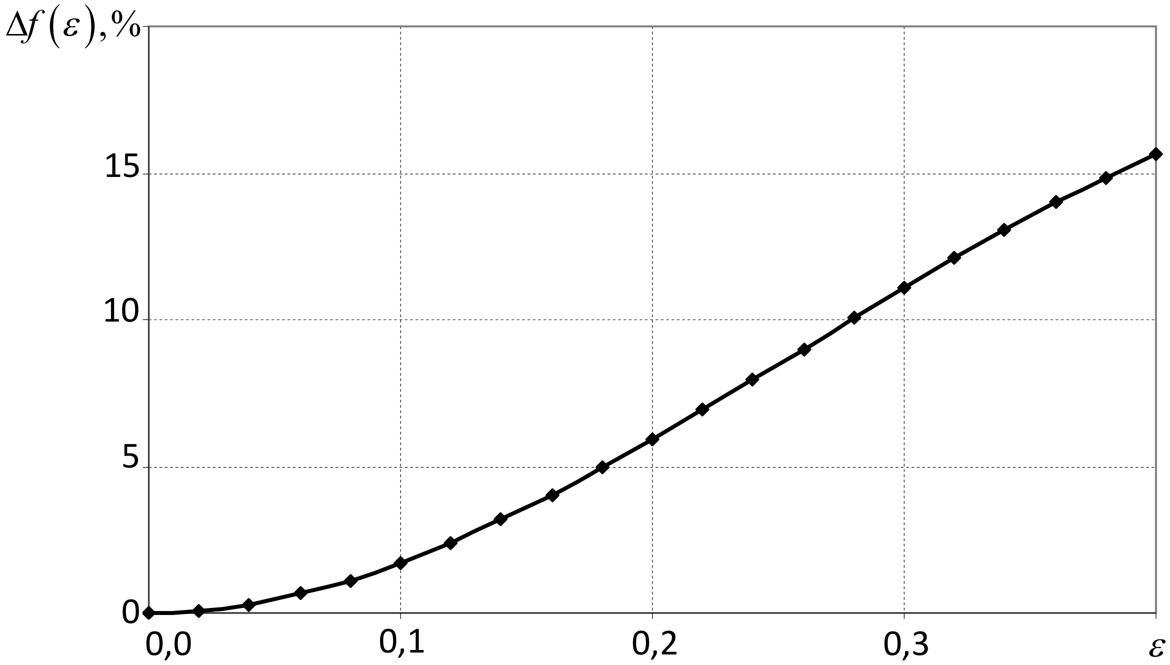
$\left\|f\left(\varepsilon\right)-\hat{f}\left(\varepsilon\right)\right\|=\max\limits_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_{\max}]}\left|f\left(\varepsilon\right)-\hat{f}\left(\varepsilon\right)\right|=\max\limits_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_{\max}]}\left|\cos\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)-1+\frac{\varepsilon}{2}+2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\right|$;

$\left\|f\left(\varepsilon\right)\right\|=\max\limits_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_{\max}]}\left|f\left(\varepsilon\right)\right|=\max\limits_{\varepsilon\in[0;\varepsilon_{\max}]}\left|\cos\left(\sqrt{\varepsilon}+2\varepsilon\right)\right|$; величина $\varepsilon_{\max}$ выбирается из условия $\Delta f\left(\varepsilon_{\max}\right),\%\approx 10\div 15\%$.

В таблице 1.4 представлены значения функций $f\left(\varepsilon\right)$, $\hat{f}\left(\varepsilon\right)$ и погрешности $\Delta f\left(\varepsilon\right),\%$, вычисленные для различных значений ε из промежутка от 0 до 0,36 с шагом 0, 04.

Таблица 1.4

ε	0,00	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32
$f(\varepsilon)$	1,000	0,961	0,904	0,833	0,752	0,662	0,565	0,463	0,357
$\hat{f}(\varepsilon)$	1,000	0,964	0,915	0,857	0,792	0,721	0,645	0,564	0,478
$\Delta f(\varepsilon),\%$	0,0	0,3	1,1	2,4	4,0	5,9	7,9	10,0	12,1



На рис. 1.1 изображен график зависимости относительной погрешности аппроксимации (в процентах) от величины параметра ε .

Пример 1.3. Указать область неравномерности разложения по параметру ε функциональной зависимости $f(x,\varepsilon)=\sqrt[3]{x^2+\varepsilon}$ при $\varepsilon\to 0$.

Асимптотическое разложение данной зависимости по малому параметру ε имеет вид:

$$f(x,\varepsilon)=\sqrt[3]{x^2+\varepsilon}=\sqrt[3]{x^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{x^2}\left[1+\frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{x^2}+\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{\varepsilon}{x^2}\right)^2+\ldots\right]=$$

$$=\sqrt[3]{x^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{3x^2}-\frac{\varepsilon^2}{9x^4}+\ldots\right).$$

Равномерность разложения нарушается при $\frac{\varepsilon}{x^2}=O(1)$ или при $x=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, поскольку при этом второй, третий и последующие члены разложения становятся соизмеримыми по порядку с первым членом. Поэтому ошибка при усечении ряда после N членов при $x\le O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$ уже не будет иметь порядок $O\left(\varepsilon^N\right)$, т.е. не будет порядка первого отброшенного члена, и, следовательно, разложение в этом случае является неравномерным.

Контрольные вопросы

1. Записать биномиальную формулу разложения функции в ряд.
2. Что такое калибровочные функции?
3. Что означает выражение: «*Две функции стремятся к нулю с одной скоростью?*»
4. Какие функции не могут быть представлены в виде ряда по степеням ε ?
5. Дать определение асимптотической последовательности.
6. Какой ряд называется асимптотическим рядом?
7. Дать математическое определение асимптотического разложения функции.
8. Должен ли асимптотический ряд быть обязательно сходящимся и почему?
9. Единственно ли асимптотическое разложение данной функции?
10. Чему равно асимптотическое разложение суммы двух функций?
11. Чему равно асимптотическое разложение произведения двух функций?
12. Дать определение равномерности асимптотического разложения.
13. Сформулировать теорему об интегрируемости степенных равномерных асимптотических рядов.
14. Сформулировать теорему о дифференцируемости степенных равномерных асимптотических рядов.
15. Описать алгоритм построения асимптотического разложения некоторой функциональной зависимости по элементам заданной асимптотической последовательности.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ПРОБЛЕМА НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерных разложений для решений алгебраических уравнений при наличии кратных корней.

Задание 1. Построить разложения для каждого из корней уравнения, представленного в таблице 2.1, при $\varepsilon \to 0$. На основе построенных разложений вычислить с тремя знаками после запятой приближенные значения корней алгебраического уравнения при ε равном 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5.

Таблица 2.1

№ вар.	Алгебраическое уравнение	№ вар.	Алгебраическое уравнение
1	$x^3 + \varepsilon x^2 - 3x + 2 - 3\varepsilon = 0$	11	$x^3 - (3 + 5\varepsilon)x + 2 - \varepsilon = 0$
2	$x^3 + (3 - \varepsilon)x^2 + 2\varepsilon x - 4 = 0$	12	$x^3 + (3 + \varepsilon)x^2 - 4 + 3\varepsilon = 0$
3	$x^3 - (6 - \varepsilon)x^2 + (4 + \varepsilon)x + 8 = 0$	13	$x^3 - (6 - \varepsilon)x^2 + (4 + 3\varepsilon)x + 8 = 0$
4	$x^3 - (1 + \varepsilon)x^2 - (8 + 3\varepsilon)x + 12 = 0$	14	$x^3 - (1 + 2\varepsilon)x^2 - 8x + 12 + \varepsilon = 0$
5	$x^3 + (7 - \varepsilon)x^2 + 15x + 9 + 2\varepsilon = 0$	15	$x^3 + (7 - 5\varepsilon)x^2 + (15 + \varepsilon)x + 9 = 0$
6	$x^3 + (3 - 2\varepsilon)x^2 + (3 + \varepsilon)x + 1 = 0$	16	$x^3 + (3 + 4\varepsilon)x^2 + (3 - \varepsilon)x + 1 = 0$
7	$x^3 - (8 - 3\varepsilon)x^2 + 20x - 16 + \varepsilon = 0$	17	$x^3 - (8 + \varepsilon)x^2 + 20x - 16 + 2\varepsilon = 0$
8	$x^3 - (9 + 2\varepsilon)x^2 + 27x - 27 = 0$	18	$x^3 - (9 + \varepsilon)x^2 + (27 - \varepsilon)x - 27 = 0$
9	$x^3 + (3 - 2\varepsilon)x^2 - (9 + 4\varepsilon)x + 5 = 0$	19	$x^3 + (3 - 5\varepsilon)x^2 - (9 + \varepsilon)x + 5 = 0$
10	$x^3 + (6 + 7\varepsilon)x^2 + 12x + 8 - 3\varepsilon = 0$	20	$x^3 + (6 + \varepsilon)x^2 + (12 - \varepsilon)x + 8 = 0$

Задание 2. При значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5 найти с пятью верными знаками после запятой корни алгебраического уравнения, представленного в таблице 2.1. Принять эти значения за точные (истинные) значения корней алгебраического уравнения.

Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, для различных ε. Построить графики зависимости погрешности вычисления для каждого из корней заданного уравнения от величины ε.

Пример 2.1. Построить разложения для каждого из корней кубического уравнения

$$x^3-(3+\varepsilon)x^2+(\varepsilon-9)x-5+\varepsilon^2=0 \tag{2.1}$$

при $\varepsilon \to 0$. Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, при значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5.

Для нахождения приближенных значений корней уравнения (2.1) попытаемся воспользоваться разложением по целым степеням ε

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\ldots . \tag{2.2}$$

Подстановка (2.2) в (2.1) дает

$$(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)^3-(3+\varepsilon)(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)^2+(\varepsilon-9)(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)-5+\varepsilon^2=0$$

или

$$x_0^3+3x_0^2\varepsilon x_1+\ldots-(3+\varepsilon)(x_0^2+2x_0\varepsilon x_1+\ldots)+(\varepsilon-9)(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)-5+\varepsilon^2=0$$

или

$$x_0^3-3x_0^2-9x_0-5+\varepsilon\left(3x_0^2x_1-6x_0x_1-x_0^2+x_0-9x_1\right)+\ldots=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$x_0^3-3x_0^2-9x_0-5=0, \tag{2.3}$$

$$3x_0^2x_1-6x_0x_1-x_0^2+x_0-9x_1=0. \tag{2.4}$$

Несложно показать, что левую часть уравнения (2.3) можно представить в виде произведения $\left(x_0+1\right)^2\left(x_0-5\right)=0$. Отсюда находим корни уравнения (2.3): $x_0^{(1)}=5$, $x_0^{(2)}=x_0^{(3)}=-1$. Очевидно, что уравнение (2.3) имеет кратные корни.

Из (2.4) следует, что $3\left(x_0^2-2x_0-3\right)x_1=x_0^2-x_0$, откуда

$$x_1=\frac{x_0^2-x_0}{3\left(x_0^2-2x_0-3\right)}. \tag{2.5}$$

При $x_0=5$ из (2.5) получаем, что $x_1=\frac{5}{9}\approx 0,556$. Таким образом, один из корней исходного уравнения может быть представлен в виде

$$x^{(1)}=5+\frac{5}{9}\varepsilon+\ldots\ . \tag{2.6}$$

Для кратного корня $x_0=-1$ из (2.5) получаем, что $x_1=\infty$, что указывает на ошибочность выбранной формы разложения.

Для построения разложения, пригодного при $x_0=-1$, будем использовать разложение вида

$$x=x_0+\varepsilon^{\nu}x_1+\varepsilon^{2\nu}x_2+\ldots,\qquad \nu>0, \tag{2.7}$$

где значение ν найдем в ходе вычислений. Подставляя (2.7) в (2.1), получаем

$$\begin{aligned}\left(x_0+\varepsilon^{\nu}x_1+\varepsilon^{2\nu}x_2+\ldots\right)^3-\left(3+\varepsilon\right)\left(x_0+\varepsilon^{\nu}x_1+\varepsilon^{2\nu}x_2+\ldots\right)^2+\\+\left(\varepsilon-9\right)\left(x_0+\varepsilon^{\nu}x_1+\varepsilon^{2\nu}x_2+\ldots\right)-5+\varepsilon^2=0.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}&x_0^3+3x_0^2\varepsilon^{\nu}x_1+3x_0^2\varepsilon^{2\nu}x_2+3x_0\varepsilon^{2\nu}x_1^2+\ldots\\&\ldots-\left(3+\varepsilon\right)\left(x_0^2+2x_0\varepsilon^{\nu}x_1+2x_0\varepsilon^{2\nu}x_2+\varepsilon^{2\nu}x_1^2+\ldots\right)+\\&+\varepsilon x_0+\ldots-9x_0-9\varepsilon^{\nu}x_1-9\varepsilon^{2\nu}x_2-\ldots-5+\varepsilon^2=0,\end{aligned}$$

или

$$\left(x_0+1\right)^2\left(x_0-5\right)+\varepsilon^{\nu}3\left(x_0^2-2x_0-3\right)x_1+\varepsilon^{2\nu}3\left[\left(x_0^2-2x_0-3\right)x_2+x_1^2\left(x_0-1\right)\right]+$$
$$+\varepsilon\left(-x_0^2+x_0\right)+\ldots=0.$$

При $x_0=-1$ отсюда имеем $-6x_1^2\varepsilon^{2\nu}-2\varepsilon+\ldots=0$. Для того, чтобы главные члены в этом равенстве скомпенсировали друг друга, необходимо чтобы $2\nu=1$, или $\nu=\dfrac{1}{2}$. При этом должно выполняться условие: $-6x_1^2-2=0$. Отсюда $x_1=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}i$. Тогда из (2.7) получаем разложения для второго и третьего корня исходного уравнения:

$$x^{(2)}=-1+\varepsilon^{1/2}\frac{1}{\sqrt{3}}i+\ldots,\qquad x^{(3)}=-1-\varepsilon^{1/2}\frac{1}{\sqrt{3}}i+\ldots. \tag{2.8}$$

Оценим погрешность приближенных решений уравнения (2.1), представленных в форме разложений (2.6) и (2.8), при значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5. Для этого найдем точные значения корней соответствующих кубических уравнений. При решении кубического уравнения можно использовать формулы Кардано [5].

Пусть кубическое уравнение имеет вид $x^3+ax^2+bx+c=0$. Подстановкой $x=y-\dfrac{a}{3}$ это уравнение приводится к неполному виду

$$y^3+py+q=0. \tag{2.9}$$

Вычисляются величины

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\qquad \beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}, \tag{2.10}$$

причем должно выполняться условие $\alpha\beta=-\dfrac{p}{3}$. Тогда корни неполного кубического уравнения (2.9) находятся по формулам

$$y^{(1)}=\alpha+\beta,\qquad y^{(2)}=\alpha e_1+\beta e_2,\qquad y^{(3)}=\alpha e_2+\beta e_1, \tag{2.11}$$

где $e_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $e_2 = e_1^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Окончательно получаем: $x^{(k)} = y^{(k)} - \frac{a}{3}, k = 1,2,3$.

Погрешность приближенного значения корня уравнения вычисляется по формуле

$$\Delta x^{(k)}, \% = \frac{\left| x^{(k)} - \tilde{x}^{(k)} \right|}{\left| \tilde{x}^{(k)} \right|} 100\%, \tag{2.12}$$

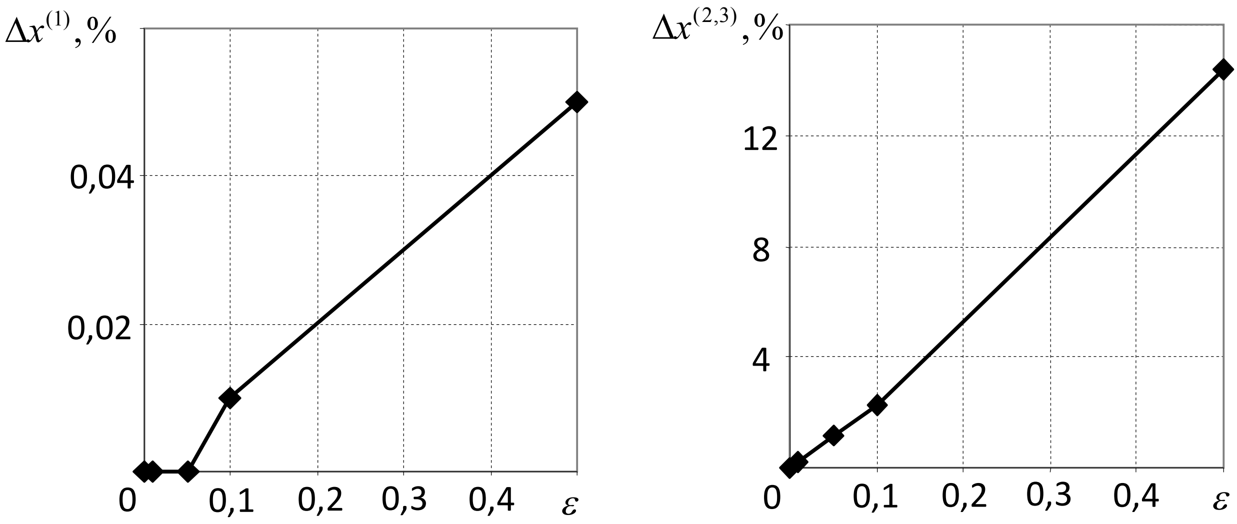
где $\tilde{x}^{(k)}$ – точное значение корня уравнения; $x^{(k)}$ – приближенное значение корня; $k = 1,2,3$. Для комплексно-сопряженных корней кубического уравнения $x = a \pm bi$ их модуль вычисляется по формуле $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

В таблице 2.2 представлены кубические уравнения, полученные на основе (2.1) при значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5; корни этих уравнений, вычисленные по формулам Кардана (2.9) – (2.11) с пятью верными знаками после запятой; приближенные значения корней, найденные на основе разложений (2.6) и (2.8), а также погрешности приближенных решений.

Таблица 2.2

ε	Кубическое уравнение	Корни кубического уравнения		Погрешность приближенных решений
		Точное значение	Приближенное значение	
0	$x^3-3x^2-9x-5=0$	5,00000 -1,000 -1,000	5,000 -1,000 -1,000	0,0% 0,0% 0,0%
0,01	$x^3-3{,}01x^2-8{,}99x-4{,}9999=0$	5,00556 -0,998+0,058i -0,998-0,058i	5,006 -1,000+0,058i -1,000-0,058i	0,00% 0,22% 0,22%
0,05	$x^3-3{,}05x^2-8{,}95x-4{,}9975=0$	5,02780 -0,989+0,127i -0,989-0,127i	5,028 -1,000+0,129i -1,000-0,129i	0,00% 1,14% 1,14%
0,1	$x^3-3{,}1x^2-8{,}9x-4{,}99=0$	5,05589 -0,978+0,180i -0,978-0,180i	5,056 -1,000+0,183i -1,000-0,183i	0,01% 2,23% 2,23%
0,5	$x^3-3{,}5x^2-8{,}5x-4{,}75=0$	5,28017 -0,890+0,328i -0,890-0,328i	5,278 -1,000+0,408i -1,000-0,408i	0,05% 14,37% 14,37%

Графики зависимости погрешности приближенных значений корней кубического уравнения, вычисленных на основе построенных разложений, представлены на рис. 2.1.



а) действительный корень; б) комплексно-сопряженные корни;

Рис. 2.1. Зависимость погрешности вычисления корней алгебраического уравнения от параметра ε

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется возмущенным?
2. В чем состоит алгоритм решения алгебраического уравнения методом возмущений?
3. Как построить асимптотическое разложение корней квадратного уравнения?
4. Когда асимптотическое разложение корня алгебраического уравнения становится неравномерным?
5. Как построить равномерно пригодное разложение корней алгебраического уравнения?
6. В каких случаях следует использовать разложения по дробным степеням параметра ε?
7. Из-за чего возникают неравномерности в разложениях, используемых в методах возмущений?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

ЗАДАЧА СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ И МЕТОДЫ ЕЁ РЕШЕНИЯ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при решении алгебраических уравнений на основе построения сингулярных разложений его корней.

Задание 1. Построить разложения для каждого из корней уравнения, представленного в таблице 3.1, при $\varepsilon \to 0$. На основе построенных разложений вычислить с тремя знаками после запятой приближенные значения корней алгебраического уравнения при ε равном 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5.

Таблица 3.1

№ вар.	Алгебраическое уравнение	№ вар.	Алгебраическое уравнение
1	$\varepsilon x^3 - x^2 + 4x - 3 = 0$	11	$\varepsilon x^3 + x^2 - (4+\varepsilon)x + 4 = 0$
2	$\varepsilon x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$	12	$\varepsilon x^3 + x^2 - (3-\varepsilon)x + 2 = 0$
3	$\varepsilon x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$	13	$\varepsilon x^3 - x^2 + (2+\varepsilon)x - 1 = 0$
4	$\varepsilon x^3 - x^2 + 2 = 0$	14	$\varepsilon x^3 - (1+\varepsilon)x + 3 = 0$
5	$\varepsilon x^3 - x^2 - (1+\varepsilon)x + 2 = 0$	15	$\varepsilon x^3 + (1-2\varepsilon)x^2 - 4x + 4 = 0$
6	$\varepsilon x^3 - x^2 + 6x - 5 = 0$	16	$\varepsilon x^3 + x^2 + (3-\varepsilon)x + 2 = 0$
7	$\varepsilon x^3 + x^2 - 4x + 4 = 0$	17	$\varepsilon x^3 - x + 2 = 0$
8	$\varepsilon x^3 - x^2 + 5x - 6 = 0$	18	$\varepsilon x^3 + (1+\varepsilon)x^2 - 4 = 0$
9	$\varepsilon x^3 + x - 3 = 0$	19	$\varepsilon x^3 - (1+2\varepsilon)x^2 + 1 = 0$
10	$\varepsilon x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$	20	$\varepsilon x^3 + x^2 - 2x - 3 = 0$

Задание 2. При значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5. найти с пятью верными знаками после запятой корни алгебраического уравнения, представленного в таблице 3.1. Принять эти значения за точные (истинные) значения корней алгебраического уравнения.

Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, для различных ε. Построить графики зависимости погрешности вычисления для каждого из корней заданного уравнения от величины ε.

Пример 3.1. Построить разложения для каждого из корней кубического уравнения

$$\varepsilon x^3 - (4-\varepsilon)x + 3 = 0 \tag{3.1}$$

при $\varepsilon \to 0$. Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, при значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5.

Кубическое уравнение (3.1) при $\varepsilon \to 0$ переходит в уравнение первой степени $-4x+3=0$. Поэтому один из корней уравнения (3.1) можно представить в виде разложения

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots \, . \tag{3.2}$$

Подстановка (3.2) в (3.1) дает

$$\varepsilon\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots\right)^3 - (4-\varepsilon)\left(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots\right) + 3 = 0$$

или $\varepsilon x_0^3 + 3x_0^2\varepsilon^2 x_1 + \ldots - 4x_0 - 4\varepsilon x_1 + \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \ldots + 3 = 0$. Отсюда имеем

$$-4x_0 + 3 + \varepsilon\left(x_0^3 + x_0 - 4x_1\right) + \ldots = 0 .$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$-4x_0 + 3 = 0, \qquad 4x_1 = x_0^3 + x_0 .$$

Отсюда имеем $x_0 = \dfrac{3}{4} = 0,750$, $\quad x_1 = \dfrac{75}{256} \approx 0,293$. Таким образом, один из корней уравнения (3.1) имеет разложение

$$x^{(1)} = \frac{3}{4} + \frac{75}{256}\varepsilon + \dots \tag{3.3}$$

Отметим, что остальные два корня уравнения (3.1) при $\varepsilon \to 0$ будут стремиться к бесконечности, поскольку ε входит множителем в член наивысшей степени, то есть зависимость $x(\varepsilon)$ претерпевает разрыв при $\varepsilon = 0$. Такую задачу принято называть *задачей сингулярных возмущений*. Поэтому разложения для этих корней следует искать в виде

$$x = \frac{y}{\varepsilon^{\nu}} + x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \dots, \qquad \nu > 0, \tag{3.4}$$

с положительным ν, определяемым в процессе дальнейшего решения. Подставляя (3.4) в (3.1), получаем

$$\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon^{\nu}} + x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \dots\right)^3 - (4-\varepsilon)\left(\frac{y}{\varepsilon^{\nu}} + x_0 + \varepsilon^{\nu} x_1 + \dots\right) + 3 = 0$$

или

$$\varepsilon\left(\frac{y^3}{\varepsilon^{3\nu}} + x_0^3 + \varepsilon^{3\nu} x_1^3 + \frac{3y^2 x_0}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{3y^2\varepsilon^{\nu} x_1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{3yx_0^2}{\varepsilon^{\nu}} + \frac{3y\varepsilon^{2\nu} x_1^2}{\varepsilon^{\nu}} + \frac{6yx_0\varepsilon^{\nu} x_1}{\varepsilon^{\nu}} + \dots\right) -$$
$$-\left(\frac{4y}{\varepsilon^{\nu}} + 4x_0 + 4\varepsilon^{\nu} x_1 + \dots - \frac{\varepsilon y}{\varepsilon^{\nu}} - \varepsilon x_0 - \varepsilon^{\nu+1} x_1 - \dots\right) + 3 = 0.$$

Отсюда можно получить

$$\begin{gathered}\frac{y^3}{\varepsilon^{3\nu-1}} - \frac{4y}{\varepsilon^{\nu}} + \frac{3y^2 x_0}{\varepsilon^{2\nu-1}} - 4x_0 + 3 + \frac{3y^2 x_1 + 3yx_0^2 + y}{\varepsilon^{\nu-1}} - 4\varepsilon^{\nu} x_1 + \\ +\varepsilon\left(x_0^3 + 6yx_0x_1 + x_0 + \dots\right) + \varepsilon^{\nu+1}\left(3yx_1^2 + x_1 + \dots\right) + \varepsilon^{3\nu+1} x_1^3 + \dots = 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Главными членами в (3.5) являются члены $\dfrac{y^3}{\varepsilon^{3\nu-1}}$ и $-\dfrac{4y}{\varepsilon^{\nu}}$. Они должны компенсировать друг друга: $\dfrac{y^3}{\varepsilon^{3\nu-1}} - \dfrac{4y}{\varepsilon^{\nu}} = 0$. Для этого необходимо выполнение условий: $3\nu - 1 = \nu$ и $y^3 - 4y = 0$. Откуда $\nu = \dfrac{1}{2}$, $y^{(1)} = 0$, $y^{(2)} = 2$ и $y^{(3)} = -2$. Случай $y^{(1)} = 0$ соответствует первому корню заданного уравнения и поэтому здесь не рассматривается.

С учетом $\nu = \dfrac{1}{2}$ и равенства $y^3 - 4y = 0$ уравнение (3.5) с точностью до членов порядка $\varepsilon^{1/2}$ принимает вид

$$3y^2 x_0 - 4x_0 + 3 + \varepsilon^{1/2}\left(3y^2 x_1 - 4x_1 + 3yx_0^2 + y\right) + \ldots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, имеем

$$3y^2 x_0 - 4x_0 + 3 = 0, \quad \left(3y^2 - 4\right)x_1 + \left(3x_0^2 + 1\right)y = 0.$$

Отсюда $x_0 = \dfrac{3}{4-3y^2}$ и $x_1 = \dfrac{\left(3x_0^2+1\right)y}{4-3y^2}$. При $y^{(2)} = 2$ получаем $x_0^{(2)} = -\dfrac{3}{8} = -0,375$ и $x_1^{(2)} = -\dfrac{91}{256} \approx -0,35547$. При $y^{(3)} = -2$ имеем $x_0^{(3)} = -\dfrac{3}{8} = -0,375$ и $x_1^{(3)} = \dfrac{91}{256} \approx 0,35547$. Таким образом, второй и третий корни уравнения (3.1) представляются разложениями

$$x^{(2)} = \frac{2}{\varepsilon^{1/2}} - \frac{3}{8} - \varepsilon^{1/2}\frac{91}{256} + \ldots \text{ и } x^{(3)} = -\frac{2}{\varepsilon^{1/2}} - \frac{3}{8} + \varepsilon^{1/2}\frac{91}{256} + \ldots. \tag{3.6}$$

С использованием формулы (2.12) оценим погрешность приближенных решений уравнения (3.1), представленных в форме разложений (3.3) и (3.6), при значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5. Для этого с помощью формул Кардана (2.9) – (2.11) найдем точные значения корней соответствующих кубических уравнений.

В таблице 3.2 представлены кубические уравнения, полученные на основе (3.1) при значениях ε равных 0; 0,01; 0,05; 0,1 и 0,5; корни этих уравнений, вычисленные по формулам Кардана (2.9) – (2.11) с пятью верными знаками после запятой; приближенные значения корней, найденные на основе разложений (3.3) и (3.6), а также погрешности приближенных решений.

Графики зависимости погрешности приближенных значений корней кубического уравнения, вычисленных на основе построенных разложений, представлены на рис. 3.1.

Таблица 3.2

ε	Уравнение	Корни кубического уравнения		Погрешность приближенных решений
		Точное значение	Приближенное значение	
0	$-4x+3=0$	-0,75000 – –	-0,75000 – –	0,0% – –
0,01	$0,01x^3-3,99x+3=0$	0,75295 19,58786 -20,34081	0,753 19,588 -20,339	0,00% 0,01% 0,01%
0,05	$0,05x^3-3,95x+3=0$	0,76516 8,48088 -9,24604	0,765 8,490 -9,240	0,07% 0,11% 0,07%
0,1	$0,1x^3-3,9x+3=0$	0,78147 5,81749 -6,59895	0,779 5,837 -6,587	0,28% 0,34% 0,18%
0,5	$0,5x^3-3,5x+3=0$	1,00000 2,00000 -3,00000	0,896 2,202 -2,952	10,3% 10,1% 1,6%

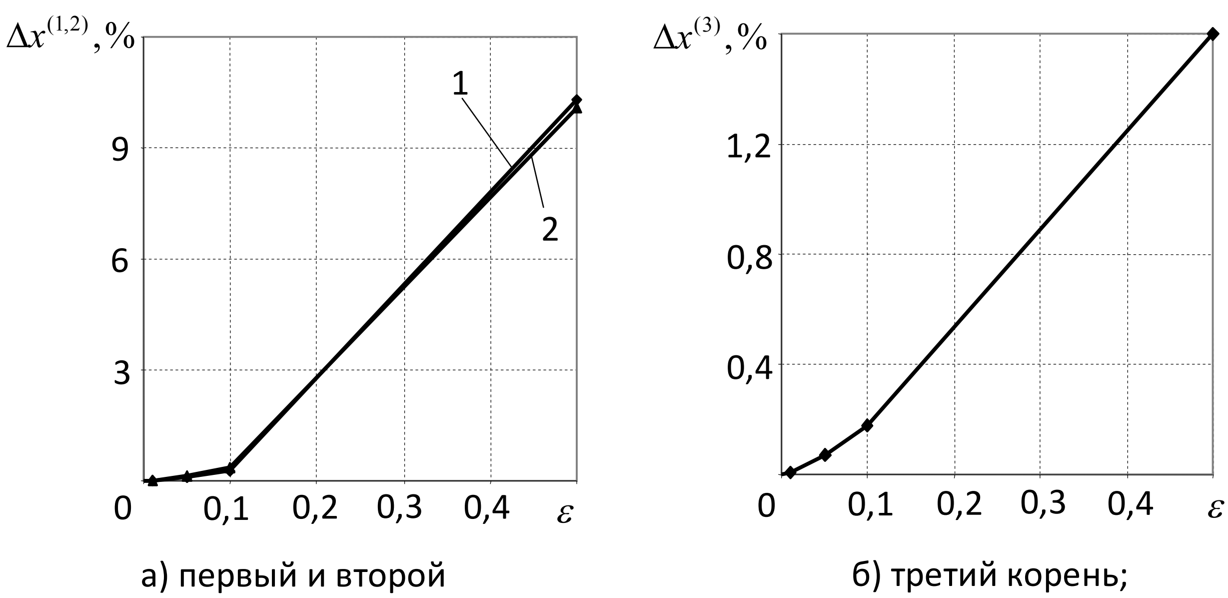


Рис. 3.1. Зависимость погрешности вычисления корней алгебраического уравнения от параметра ε

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется невозмущенным?
2. В чем состоит алгоритм решения алгебраического уравнения методом возмущений?
3. Как построить асимптотическое разложение корней квадратного уравнения?
4. Сформулировать задачу сингулярных возмущений для квадратного уравнения.
5. Как построить регулярное разложение корней алгебраического уравнения?
6. Какие проблемы возникают при построении асимптотических разложений корней алгебраических уравнений высших порядков с малым параметром при наибольшей степени неизвестной?
7. В каком виде следует искать разложения корней уравнения, если они стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при вычислении интегралов на основе асимптотических разложений подынтегральной функции или метода интегрирования по частям.

Задание 1. Найти первые четыре члена разложения интеграла, представленного в таблице 4.1 при малых ε для вариантов с нечетными номерами или при больших положительных x для вариантов с четными номерами.

На основе построенных разложений вычислить с тремя знаками после запятой приближенные значения интегралов при ε равных 0; 0,1; 0,2; 0,3 и 0,5 для вариантов с нечетными номерами или при x равных 5; 7; 10; 15 и 20 для вариантов с четными номерами.

Задание 2. При значениях ε равных 0; 0,1; 0,2; 0,3 и 0,5 для вариантов с нечетными номерами или при значениях x равных 5; 7; 10; 15 и 20 для вариантов с четными номерами вычислить заданный интеграл с пятью верными знаками после запятой (например, используя численные методы интегрирования). Принять результаты этих вычислений за точные (истинные) значения интегралов.

Задание 3. Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, при различных значениях ε для вариантов с нечетными номерами или при различных значениях x для вариантов с четными номерами. Построить график зависимости погрешности приближенных значений интеграла, полученных на основе разложений, от величины ε для вариантов с нечетными номерами или от величины x для вариантов с четными номерами.

Таблица 4.1

№ вар.	Интеграл	№ вар.	Интеграл
1	$\int_0^1 \frac{\sin \varepsilon t}{\sqrt{t}} dt$	11	$\int_0^\varepsilon \frac{e^{-2t}}{\sqrt{t}} dt$
2	$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$	12	$\int_x^\infty e^{-t^2} dt$
3	$\int_0^1 \sin \varepsilon t^2 dt$	13	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon \sin^2 t} dt$
4	$\int_0^1 e^{-xt} \ln(2+t) dt$	14	$\int_0^1 e^{-xt} \ln(1+t) dt$
5	$\int_0^\varepsilon \frac{e^{-t}}{t^{3/4}} dt$	15	$\int_0^1 \frac{\sin^2 \varepsilon t}{\sqrt[3]{t^2}} dt$
6	$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3} dt$	16	$\int_x^\infty \frac{\cos(t-x)}{t} dt$
7	$\int_0^1 \frac{1-\cos \varepsilon t}{\sqrt[3]{t}} dt$	17	$\int_1^2 \sin \frac{\varepsilon}{t} dt$
8	$\int_0^\infty e^{-xt} \cos t^2 dt$	18	$\int_0^\infty e^{-xt} \sin t^2 dt$
9	$\int_0^1 \left(1-\cos \varepsilon t^2\right) dt$	19	$\int_0^\varepsilon \frac{e^{-t}}{\sqrt[3]{t}} dt$
10	$\int_0^\infty e^{-xt+t^2} dt$	20	$\int_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t} dt$

Пример 4.1. Найти первые пять членов разложения интеграла

$$J\left(\varepsilon\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 x}} \tag{4.1}$$

при малых значениях ε. На основе построенного разложения вычислить приближенные значения интеграла $\hat{J}\left(\varepsilon\right)$ при ε равном 0; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6 и 0,8.

Используя численные методы интегрирования, найти величину $J\left(\varepsilon\right)$ интеграла (4.1) при значениях ε равных 0; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6 и 0,8. Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, при различных значениях ε; построить график зависимости погрешности приближенных значений интеграла от величины ε.

Для решения данной задачи используем разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора. Для этого воспользуемся биномиальной формулой

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2 x}}=\left(1-\varepsilon\sin^2 x\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\varepsilon\sin^2 x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(-\varepsilon\sin^2 x\right)^2+$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(-\varepsilon\sin^2 x\right)^3+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{4!}\left(-\varepsilon\sin^2 x\right)^4+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^5\right).$$

Несложно показать (используя признак Даламбера), что данный ряд сходится при всех значениях ε, для которых $\varepsilon\sin^2 x<1$. Так как $\sin^2 x\le 1$, а параметр ε предполагается малым, то остаточный член в разложении представляет собой величину порядка ε^5 для любых значений x.

Подставляя разложение подынтегральной функции в формулу (4.1) и интегрируя почленно, получаем

$$J\left(\varepsilon\right)=\int\limits_0^{\pi/2}dx+\frac{1}{2}\varepsilon\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 xdx+\frac{3}{8}\varepsilon^2\int\limits_0^{\pi/2}\sin^4 xdx+\frac{5}{16}\varepsilon^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^6 xdx+$$
$$+\frac{35}{128}\varepsilon^4\int\limits_0^{\pi/2}\sin^8 xdx+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^5\right). \tag{4.2}$$

Воспользовавшись формулой $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$, разложение (4.2) можно представить в виде

$$J(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{9}{64}\varepsilon^2 + \frac{25}{256}\varepsilon^3 + \frac{1225}{16384}\varepsilon^4 + O\left(\varepsilon^5\right)\right]. \quad (4.3)$$

В таблице 4.2 приведены значения $J(\varepsilon)$ интеграла (4.1), вычисленные с пятью верными знаками после запятой, при ε равном 0; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6 и 0,8. Вычисления проводились с использованием численных методов интегрирования по формуле Симпсона [2]

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right)\right],$$

где $h = \frac{b-a}{n}$, $n = 100$. В последних двух строках таблицы 4.2. представлены приближенные значения интеграла $\hat{J}(\varepsilon)$, найденные на основе построенного разложения (4.3), а также относительная погрешность вычисления интеграла: $\Delta J(\varepsilon),\% = \frac{\left|J(\varepsilon) - \hat{J}(\varepsilon)\right|}{\left|J(\varepsilon)\right|}100\%$.

Таблица 4.2

ε	0,0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
$J(\varepsilon)$	1,57080	1,65962	1,77752	1,85407	1,94957	2,25721
$\hat{J}(\varepsilon)$	1,57080	1,65959	1,77604	1,84888	1,93429	2,15297
$\Delta J(\varepsilon)$	0,0%	0,0%	0,1%	0,3%	0,8%	4,6%

График зависимости погрешности вычисления интеграла (4.1) на основе построенного разложения (4.3), представлен на рис. 4.1.

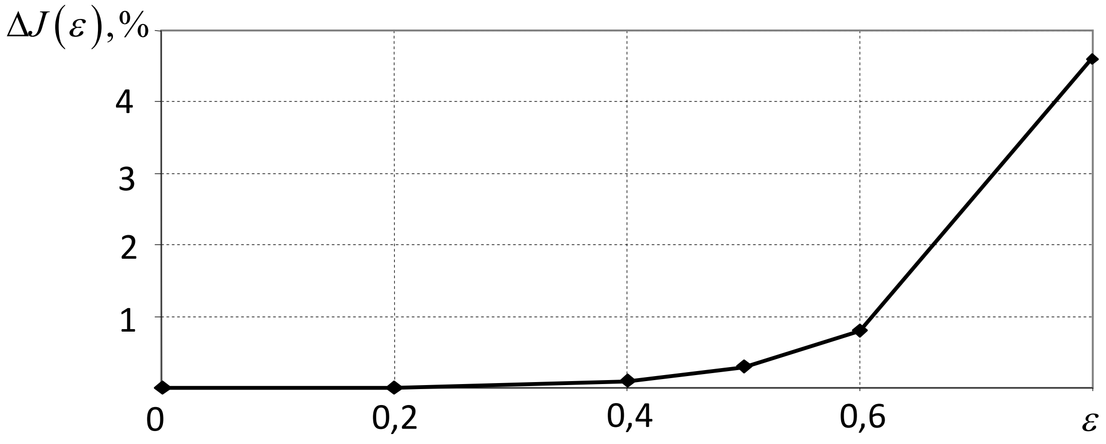


Рис. 4.1. Зависимость погрешности вычисления интеграла

Пример 4.2. Найти первые четыре члена разложения интеграла

$$J(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \tag{4.4}$$

при больших значениях x. На основе построенного разложения вычислить приближенные значения интегралов при значениях x равных 5; 7; 8; 10; 15 и 20.

Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений, при различных значениях x; построить график зависимости погрешности приближенных значений интеграла от величины x.

Для построения асимптотического разложения интеграла (4.40 при больших значениях x используем *метод интегрирования по частям*, в основе которого лежит формула

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{4.5}$$

В данной задаче разбиение на множители u и dv следует проводить таким образом, чтобы последовательные члены разложения интеграла $J(x)$, получающиеся при интегрировании по частям, являлись бы величинами все более высокого порядка по малому параметру x^{-1}. Рассмотрим два варианта выбора u и dv при реализации метода интегрирования по частям.

Сначала положим $u = e^{-t}$ и $dv = \frac{dt}{t^2}$. В этом случае $du = -e^{-t}dt$ и $v = -\frac{1}{t}$. Подстановка этих соотношений в (4.5) дает

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}dt = -\left.\frac{-e^{-t}}{t}\right|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

Продолжая этот процесс, положим $u = e^{-t}$, $dv = \frac{dt}{t}$. Тогда $du = -e^{-t}dt$, $v = \ln t$ и $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt = e^{-t}\ln t\Big|_x^\infty + \int_x^\infty e^{-t}\ln t dt = -e^{-x}\ln x + \int_x^\infty e^{-t}\ln t dt$, поскольку в соответствии с правилом Лопиталя имеем

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t}\ln t = \lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{te^t} = 0.$$

Следовательно, имеем $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x - \int_x^\infty e^{-t}\ln t dt.$ Очевидно, что второе слагаемое в правой части этого разложения оказывается существенно больше первого при $x \to \infty$. Таким образом, использование подстановки $u = e^{-t}$ и $dv = \frac{dt}{t^2}$ не позволяет получить асимптотическое разложение интеграла $J(x)$ при $x \to \infty$.

Теперь будем использовать подстановку $u = \frac{1}{t^2}$ и $dv = e^{-t}dt$. Тогда $du = -\frac{2}{t^3}dt$, $v = -e^{-t}$. Подстановка этих выражений в (4.5) дает

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}dt = -\left.\frac{-e^{-t}}{t^2}\right|_x^\infty - 2\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - 2\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3}dt.$$

Продолжая процесс интегрирования по частям, положим $u = \frac{1}{t^3}$ и $dv = e^{-t}dt$, откуда $du = -\frac{3}{t^4}dt$, $v = -e^{-t}$. Таким образом, имеем

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^3}dt = -\frac{-e^{-t}}{t^3}\Bigg|_x^\infty - 3\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^4}dt = \frac{e^{-x}}{x^3} - 3\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^4}dt.$$

Отсюда следует $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2e^{-x}}{x^3} + 3!\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^4}dt.$ Продолжая процесс интегрирования по частям и полагая на каждом шаге $dv = e^{-t}dt$, получаем

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2!e^{-x}}{x^3} + \frac{3!e^{-x}}{x^4} - \frac{4!e^{-x}}{x^5} + \frac{5!e^{-x}}{x^6} - \ldots +$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}n!e^{-x}}{x^{n-1}} + (-1)^n(n+1)!\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}dt. \qquad (4.6)$$

Так как при $x \le t < \infty$ имеет место неравенство $t^{n+2} \ge x^{n+2}$, то $\frac{1}{t^{n+2}} \le \frac{1}{x^{n+2}}$. С учетом этого, имеем $\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+2}}dt \le \frac{1}{x^{n+2}}\int_x^\infty e^{-t}dt = \frac{e^{-x}}{x^{n+2}}$. Поэтому формулу (4.6) можно представить в виде разложения

$$J(x) = e^{-x}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}} + e^{-x}\boldsymbol{O}\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right),$$

которое по определению является асимптотическим. Таким образом, представление интеграла (4.4) в виде суммы четырех членов разложения (4.6) описывается формулой

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{2!e^{-x}}{x^3} + \frac{3!e^{-x}}{x^4} - \frac{4!e^{-x}}{x^5} + e^{-x}\boldsymbol{O}\left(x^{-6}\right). \qquad (4.7)$$

В таблице 4.3 приведены значения $J(x)$ интеграла (4.4), вычисленные с пятью верными знаками после запятой, при x равном 5; 7; 8; 10; 15 и 20. В последних двух строках таблицы 4.4 представлены приближенные значения интеграла $\hat{J}(x)$, найденные на основе построенного разложения (4.7), а также относительная погрешность вычисления интеграла: $\Delta J(x),\% = \dfrac{\left|J(x) - \hat{J}(x)\right|}{\left|J(x)\right|}100\%\cdot$

Таблица 4.3

x	5	7	8	10	15	20
$J(x)$	1,99E-	1,48E-	4,27E-	3,83E-	1,21E-	4,70E-
$\hat{J}(x)$	1,75E-	1,43E-	4,18E-	3,80E-	1,20E-	4,70E-
$\Delta J(x)$	12,4%	3,5%	2,1%	0,9%	0,2%	0,1%

График зависимости погрешности вычисления интеграла (4.4) на основе построенного разложения (4.7), представлен на рис. 4.2.

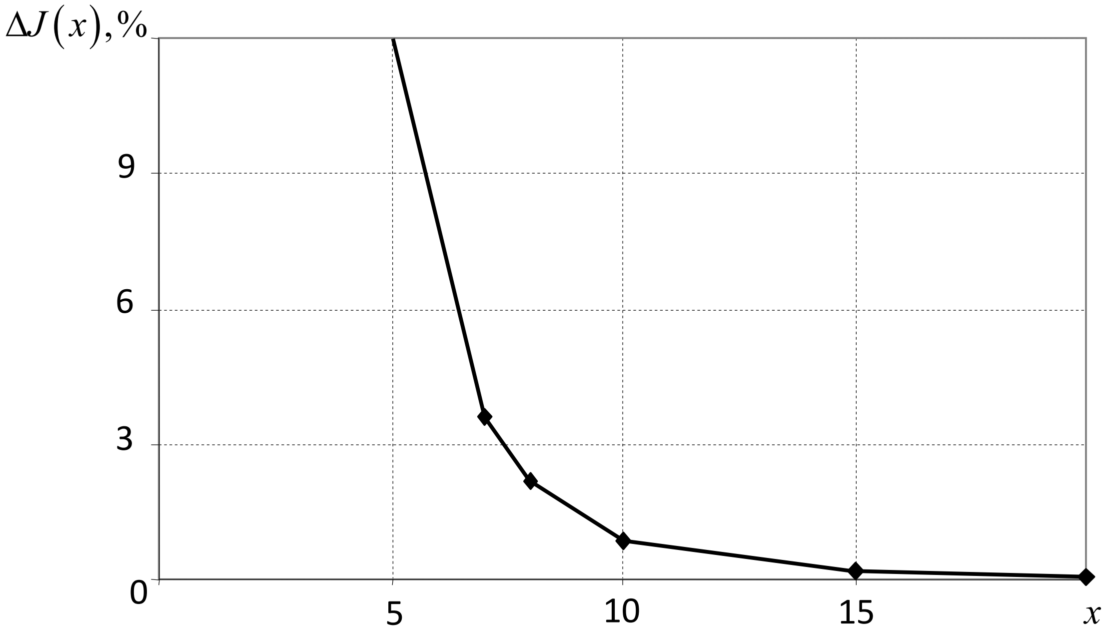


Рис. 4.2. Зависимость погрешности вычисления интеграла

Контрольные вопросы

1. Какие основные методы используются при построении асимптотических разложений при вычислении интегралов?
2. В чем состоит метод разложения подынтегральной функции при вычислении полного эллиптического интеграла первого рода?

3. Как строятся асимптотические разложения при вычислении интеграла ошибок?

4. В чем состоит метод интегрирования по частям при вычислении неполной гамма-функции?

5. Как строятся асимптотические разложения для преобразования Лапласа?

6. В чем состоит построение асимптотических разложений при вычислении интеграла Фурье?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ ЛИНДШТЕДТА-ПУАНКАРЕ ПРИ ОСТРОЕНИИ РАВНОМЕРНО ПРИГОДНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерно пригодных разложений решения уравнения Дюффинга на основе методики Линдштедта-Пуанкаре.

Задание 1. Построить прямое разложение для решения заданного в таблице 5.1 дифференциального уравнения Дюффинга. Исследовать равномерность этого разложения.

Задание 2. Используя методику Линдштедта-Пуанкаре, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения Дюффинга.

Задание 3. Построить с точностью до четырех десятичных знаков после запятой на промежутке времени $t_н = 20$ частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0) = 1$; $u'(0) = 0$ (например, используя численные методы решения дифференциальных уравнений).

Сравнить полученное решение, прямое и равномерно пригодное разложения. Оценить погрешность приближенных решений уравнения Дюффинга, полученных на основе разложений.

Таблица 5.1

№ вар.	Дифференциальное уравнение	№ вар.	Дифференциальное уравнение
1	$u''+u+0,3u^3=0$	11	$u''+3u+0,5u^3=0$
2	$u''+2u+0,2u^3=0$	12	$u''+9u+0,4u^3=0$
3	$u''+4u+0,2u^3=0$	13	$u''+9u+0,2u^3=0$
4	$u''+3u+0,5u^3=0$	14	$u''+8u+0,3u^3=0$
5	$u''+2u+0,2u^3=0$	15	$u''+9u+0,2u^3=0$
6	$u''+3u+0,4u^3=0$	16	$u''+8u+0,2u^3=0$
7	$u''+3u+0,2u^3=0$	17	$u''+9u+0,3u^3=0$
8	$u''+4u+0,4u^3=0$	18	$u''+6u+0,4u^3=0$
9	$u''+u+0,5u^3=0$	19	$u''+9u+0,5u^3=0$
10	$u''+2u+0,4u^3=0$	20	$u''+6u+0,3u^3=0$

Пример 5.1. Построить прямое разложение для решения уравнения Дюффинга

$$u''+4u+0,3u^3=0. \tag{5.1}$$

Исследовать равномерность этого разложения. Используя методику Линдштедта-Пуанкаре, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (5.1).

Построить с точностью до четырех десятичных знаков после запятой частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0)=1;\ u'(0)=0$.

Сравнить полученное решение, прямое и равномерно пригодное разложения. Оценить погрешность приближенных решений уравнения Дюффинга, полученных на основе разложений.

Решение. Заданное дифференциальное уравнение (5.1) можно представить в виде возмущенного уравнения $u''+4u+\varepsilon u^3=0$, в котором малый параметр ε принимает значение равное 0,3. Решение этого уравнения будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε:

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\varepsilon^3 u_3(t)+\ldots.$$

Ограничимся разложением первого порядка

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right). \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получаем

$$u_0''+\varepsilon u_1''+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right)+4u_0+4\varepsilon u_1+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right)+\varepsilon\left[u_0+\varepsilon u_1+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right)\right]^3=0.$$

Отсюда после простых алгебраических преобразований имеем

$$u_0''+4u_0+\varepsilon\left(u_1''+4u_1+u_0^3\right)+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right)=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &u_0''+4u_0=0;\\ &u_1''+4u_1+u_0^3=0, \end{aligned} \tag{5.3}$$

из которой последовательно находим функции $u_0(t)$ и $u_1(t)$.

Первое уравнение в системе (5.3) – невозмущенное уравнение, которое получается из (5.1) при $\varepsilon=0$, – имеет решение

$$u_0=a_0\cos\left(2t+\beta_0\right), \tag{5.4}$$

где a_0 и β_0 - произвольные постоянные.

Подставляя (5.4) во второе уравнение системы (5.3), имеем $u_1''+4u_1=-a_0^3\cos^3\left(2t+\beta_0\right)$ или с учетом тригонометрических формул

$$u_1''+4u_1=-\frac{3}{4}a_0^3\cos\left(2t+\beta_0\right)-\frac{1}{4}a_0^3\cos\left(6t+3\beta_0\right). \tag{5.5}$$

Решение уравнения (5.5) можно представить в виде $u_1 = u_{1\text{одн}} + \overline{u}_1$, где $u_{1\text{одн}} = a_1 \cos\left(2t + \beta_1\right)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, a_1 и β_1 - произвольные постоянные. Частное решение $\overline{u}_1$ неоднородного уравнения (5.5) ищем в виде

$$\overline{u}_1 = \left[A\cos\left(2t + \beta_0\right) + B\sin\left(2t + \beta_0\right) \right] t + D\cos\left(6t + 3\beta_0\right) + C\sin\left(6t + 3\beta_0\right). \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (5.5), находим коэффициенты $A = 0$, $B = -\dfrac{3}{16}a_0^3$, $D = \dfrac{1}{128}a_0^3$, $C = 0$. При этом частное решение уравнения (5.5) принимает вид $\overline{u}_1 = -\dfrac{3}{16}a_0^3 t\sin\left(2t + \beta_0\right) + \dfrac{1}{128}a_0^3\cos\left(6t + 3\beta_0\right)$, а его общее решение описывается формулой

$$u_1 = a_1\cos\left(2t + \beta_1\right) - \frac{3}{16}a_0^3 t\sin\left(2t + \beta_0\right) + \frac{1}{128}a_0^3\cos\left(6t + 3\beta_0\right). \quad (5.7)$$

Подставляя теперь выражения для u_0 и u_1 из (5.4) и (5.7) соответственно в разложение (5.2), для общего решения возмущенного уравнения получаем следующее разложение первого порядка:

$$\begin{aligned} u = a_0\cos\left(2t + \beta_0\right) + \varepsilon\Bigg[& a_1\cos\left(2t + \beta_1\right) - \frac{3}{16}a_0^3 t\sin\left(2t + \beta_0\right) + \\ & + \frac{1}{128}a_0^3\cos\left(6t + 3\beta_0\right)\Bigg] + \ldots, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где a_0, β_0, a_1 и β_1 - некоторые, связанные между собой, произвольные постоянные, для нахождения которых вполне достаточно двух начальных условий: $u(0) = u_0$ и $u'(0) = u_0'$.

Действительно, из (5.8) имеем

$$u' = -2a_0 \sin\left(2t+\beta_0\right) + \varepsilon\left[-2a_1 \sin\left(2t+\beta_1\right) - \frac{3}{16}a_0^3 \sin\left(2t+\beta_0\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{8}a_0^3 t \cos\left(2t+\beta_0\right) - \frac{3}{64}a_0^3 \sin\left(6t+3\beta_0\right)\right] + \ldots.$$

Следовательно, $u(0) = a_0 \cos\beta_0 + \varepsilon\left[a_1 \cos\beta_1 + \frac{1}{128}a_0^3 \cos 3\beta_0\right] \ldots = u_0$ и

$$u'(0) = -2a_0 \sin\beta_0 - \varepsilon\left[2a_1 \sin\beta_1 + \frac{3}{16}a_0^3 \sin\beta_0 + \frac{3}{64}a_0^3 \sin 3\beta_0\right] \ldots = u_0'.$$

Отсюда следует, что $a_0 \cos\beta_0 = u_0$ и $a_0 \sin\beta_0 = -\frac{1}{2}u_0'$, а также, что $a_1 \cos\beta_1 = -\frac{1}{128}a_0^3 \cos 3\beta_0$ и $a_1 \sin\beta_1 = -\frac{3}{32}a_0^3 \sin\beta_0 - \frac{3}{128}a_0^3 \sin 3\beta_0$.

Из первых двух равенств получаем:

$$a_0 = \sqrt{u_0^2 + \frac{1}{4}u_0'^2}, \tag{5.9}$$

$$\beta_0 = -arctg\,\frac{u_0'}{2u_0}. \tag{5.10}$$

Аналогично из последних двух равенств имеем

$$a_1 = \frac{a_0^3}{128}\sqrt{\cos^2 3\beta_0 + 9\left(4\sin\beta_0 + \sin 3\beta_0\right)^2}, \tag{5.11}$$

$$\beta_1 = \pi + arctg\,\frac{3\left(4\sin\beta_0 + \sin 3\beta_0\right)}{\cos 3\beta_0}. \tag{5.12}$$

Таким образом, вычислив постоянные a_0 и β_0 по формулам (5.9) и (5.10), постоянные a_1 и β_1 можно найти по формулам (5.11) и (5.12).

Отметим, что

$$a_0\cos\left(2t+\beta_0\right)+\varepsilon a_1\cos\left(2t+\beta_1\right)=a_0\cos 2t\cos\beta_0-a_0\sin 2t\sin\beta_0+$$
$$+\varepsilon a_1\cos 2t\cos\beta_1-\varepsilon a_1\sin 2t\sin\beta_1=\left(a_0\cos\beta_0+\varepsilon a_1\cos\beta_1\right)\cos 2t-$$
$$-\left(a_0\sin\beta_0+\varepsilon a_1\sin\beta_1\right)\sin 2t=a\cos 2t\cos\beta-a\sin 2t\sin\beta=a\cos\left(2t+\beta\right),$$

где

$$a\cos\beta=a_0\cos\beta_0+\varepsilon a_1\cos\beta_1,\quad a\sin\beta=a_0\sin\beta_0+\varepsilon a_1\sin\beta_1. \tag{5.13}$$

При этом, очевидно, что $a_0=a+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon\right)$ и $\beta_0=\beta+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon\right)$.

Воспользовавшись соотношениями (5.13), разложение (5.8) можно представить в виде

$$u=a\cos\left(2t+\beta\right)+\varepsilon a^3\left[-\frac{3}{16}t\sin\left(2t+\beta\right)+\frac{1}{128}\cos\left(6t+3\beta\right)\right]+\ldots. \tag{5.14}$$

Произвольные постоянные a и β в разложении (5.14), с учетом (5.13), могут быть вычислены по формулам

$$a=\sqrt{a_0^2+2\varepsilon a_0 a_1\cos\left(\beta_0-\beta_1\right)+\varepsilon^2 a_1^2}, \tag{5.15}$$

$$\beta=arctg\,\frac{a_0\sin\beta_0+\varepsilon a_1\sin\beta_1}{a_0\cos\beta_0+\varepsilon a_1\cos\beta_1}, \tag{5.16}$$

где a_0, β_0, a_1 и β_1 вычисляются по формулам (5.9) – (5.12).

Разложение (5.14) будет асимптотическим только в том случае, когда произведение εt будет мало по сравнению с единицей. В случае, когда величина εt имеет порядок $\boldsymbol{O}\left(1\right)$: $\varepsilon t=\boldsymbol{O}\left(1\right)$, а также когда $\varepsilon t>\boldsymbol{O}\left(1\right)$, второе слагаемое в (5.14) становится соизмеримым с главным членом разложения $a\cos\left(2t+\beta\right)$. Само разложение (5.14) уже не будет являться асимптотическим и, следовательно, его нельзя использовать при описании решения уравнения (5.1).

Таким образом, прямое разложение (5.14) является *неравномерным* по t, так как оно применимо только для таких времен t, при которых $\varepsilon t<\boldsymbol{O}\left(1\right)$, т.е. для $t<\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^{-1}\right)$. Причина непригодности прямого разложения (5.14) заключается в наличии члена $t\sin\left(2t+\beta\right)$, который называется *секулярным* членом. Для того, чтобы данное разложение было равномерно пригодным по t, нем должны отсутствовать секулярные члены.

Построим равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (5.1), используя методику Линдштедта-Пуанкаре [8].

В соответствии с методикой Линдштедта-Пуанкаре в исходное дифференциальное уравнение Дюффинга вводится частота ω, зависящая от малого параметра ε. С этой целью используем преобразование $\tau = \omega t$. Переходя от аргумента t к новой независимой переменной τ, используя при этом правило дифференцирования сложной функции: $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d\tau}{dt}\dfrac{d}{d\tau} = \omega\dfrac{d}{d\tau}, \dfrac{d^2}{dt^2} = \omega^2\dfrac{d^2}{d\tau^2}$, преобразуем исходное уравнение Дюффинга к виду

$$\omega^2 u''_{\tau\tau} + 4u + \varepsilon u^3 = 0. \tag{5.17}$$

Будем искать решение уравнения (5.17) и величину ω в виде разложений по степеням ε:

$$u(\tau,\varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + O(\varepsilon^2), \tag{5.18}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2). \tag{5.19}$$

В качестве ω_0 примем частоту, соответствующую невозмущенному (при $\varepsilon = 0$) уравнению $u'' + 4u = 0$, т.е. $\omega_0 = 2$.

Подставляя (5.18) и (5.19) в (5.17), имеем

$$(2 + \varepsilon\omega_1 + \ldots)^2 (u_0'' + \varepsilon u_1'' + \ldots) + 4u_0 + 4\varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots)^3 = 0.$$

Отсюда после алгебраических преобразований получаем

$$4u_0'' + 4u_0 + \varepsilon\left(4u_1'' + 4u_1 + 4\omega_1 u_0'' + u_0^3\right) + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^0 и ε^1, получаем:

$$u_0'' + u_0 = 0, \tag{5.20}$$

$$u_1'' + u_1 = -\frac{1}{4}u_0^3 - \omega_1 u_0''. \tag{5.21}$$

Общее решение уравнения (5.20) имеет вид

$$u_0 = a\cos(\tau+\beta), \tag{5.22}$$

где a и β – некоторые произвольные постоянные. При этом уравнение (5.21) принимает вид $u_1'' + u_1 = -\dfrac{1}{4}a^3\cos^3(\tau+\beta) + \omega_1 a\cos(\tau+\beta)$ или с учетом тригонометрических формул

$$u_1'' + u_1 = \left(\omega_1 a - \frac{3}{16}a^3\right)\cos(\tau+\beta) - \frac{1}{16}a^3\cos(3\tau+3\beta). \tag{5.23}$$

Очевидно, что появление секулярного члена в частном решении u_1 уравнения (5.23) обусловлено слагаемым $\left(\omega_1 a - \dfrac{3}{16}a^3\right)\cos(\tau+\beta)$. Поэтому для исключения секулярного члена в разложении следует положить нулю коэффициент при $\cos(\tau+\beta)$: $\omega_1 a - \dfrac{3}{16}a^3 = 0$ (при этом нет необходимости строить соответствующее частное решение уравнения (5.23)). Получаем

$$\omega_1 = \frac{3}{16}a^2. \tag{5.24}$$

При этом уравнение (5.23) принимает вид

$$u_1'' + u_1 = -\frac{1}{16}a^3\cos(3\tau+3\beta),$$

а его частное решение описывается формулой

$$u_1 = \frac{1}{128}a^3\cos(3\tau+3\beta). \tag{5.25}$$

Подстановка (5.22) и (5.27) в (5.18) дает

$$u = a\cos(\tau+\beta) + \frac{1}{128}\varepsilon a^3\cos(3\tau+3\beta) + \dots. \tag{5.26}$$

Подставляя теперь значение ω_1 из (5.24) в разложение (5.19), имеем $\omega = 2 + \frac{3}{16}\varepsilon a^2 + \ldots$. Так как $\tau = \omega t$, то разложение (5.26) можно представить в виде

$$u = a\cos\left[\left(2 + \frac{3}{16}\varepsilon a^2\right)t + \beta\right] + \frac{1}{128}\varepsilon a^3 \cos\left[3\left(2 + \frac{3}{16}\varepsilon a^2\right)t + 3\beta\right] + \ldots \quad (5.27)$$

Разложение (5.27) будет равномерным разложением первого порядка, поскольку секулярные члены в нем отсутствуют, а поправка (член, пропорциональный ε) оказывается малой по сравнению с главным членом разложения.

При $\varepsilon = 0,3$ прямое разложение (5.14) для решения уравнения Дюффинга (5.1) и равномерно пригодное разложение первого порядка (5.27) соответственно принимают вид

$$u = a\cos\left(2t + \beta\right) + 0,3a^3\left[-\frac{3}{16}t\sin\left(2t + \beta\right) + \frac{1}{128}\cos\left(6t + 3\beta\right)\right] + \ldots, \quad (5.28)$$

$$u = a\cos\left[\left(2 + \frac{9}{160}a^2\right)t + \beta\right] + \frac{3}{1280}a^3 \cos\left[\left(6 + \frac{27}{160}a^2\right)t + 3\beta\right] + \ldots \quad (5.29)$$

При начальных условиях $u(0) = 1;\ u'(0) = 0$ в соответствии с формулами (5.9) – (5.12), (5.15) и (5.16) для прямого разложения (5.28) получаем $a_0 = 1,000$, $\beta_0 = 0,000$, $a_1 = \frac{1}{128} \approx 0,007813$, $\beta_1 = \pi \approx 3,142$, $a = 0,99766$ и $\beta = 0,000$. При этом частное решение уравнения (5.1) в форме прямого разложения принимает вид

$$u(t) = 0,99766\cos 2t + 0,2979\left(-\frac{3}{16}t\sin 2t + \frac{1}{128}\cos 6t\right) + \ldots \quad (5.30)$$

Произвольные постоянные в разложении (5.29) найдем из решения системы нелинейных уравнений. Для этого сначала вычислим производную

$$u' = -a\left(2+\frac{9}{160}a^2\right)\sin\left[\left(2+\frac{9}{160}a^2\right)t+\beta\right]-$$
$$-\frac{3}{1280}a^3\left(6+\frac{27}{160}a^2\right)\sin\left[\left(6+\frac{27}{160}a^2\right)t+3\beta\right]+\ldots.$$

Затем найдем значения функции $u(t)$ и её производной $u'(t)$ при $t=0$:

$$u(0) = a\cos\beta + \frac{3}{1280}a^3\cos 3\beta,$$

$$u'(0) = -a\left(2+\frac{9}{160}a^2\right)\sin\beta - \frac{3}{1280}a^3\left(6+\frac{27}{160}a^2\right)\sin 3\beta.$$

С учетом начальных условий получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cos\beta + \dfrac{3}{1280}a^3\cos 3\beta = 1; \\ a\left(2+\dfrac{9}{160}a^2\right)\sin\beta + \dfrac{3}{1280}a^3\left(6+\dfrac{27}{160}a^2\right)\sin 3\beta = 0, \end{cases}$$

или с учетом неравенства $a\left(2+\dfrac{9}{160}a^2\right)\neq 0$

$$\begin{cases} a\cos\beta + \dfrac{3}{1280}a^3\cos 3\beta = 1; \\ \sin\beta + \dfrac{9}{1280}a^2\sin 3\beta = 0, \end{cases} \tag{5.31}$$

Для решения этой нелинейной системы можно применить численный метод Ньютона [2]. Алгоритм метода описывается формулами: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)})$, $k = 0,1,2,3,\ldots$, где $x = (a,\beta)^T$ - вектор неизвестных; $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\beta + \dfrac{3}{1280}a^3\cos 3\beta - 1 \\ \sin\beta + \dfrac{9}{1280}a^2\sin 3\beta \end{bmatrix}$ – вектор-функция, описывающая нелинейную систему уравнений; $W\left(x\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial a} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \beta} \end{bmatrix}$- матрица Якоби, в которой: $\dfrac{\partial f_1}{\partial a}=\cos\beta+\dfrac{9a^2}{1280}\cos 3\beta$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial \beta}=-a\sin\beta-\dfrac{9a^3}{1280}\sin 3\beta$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial a}=\dfrac{9a}{640}\sin 3\beta$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial \beta}=\cos\beta+\dfrac{27}{1280}a^2\cos 3\beta$.

В качестве начального приближения выбираем вектор $x^{(0)}=\left(1,0\right)^T$.

В результате вычислений уже после трех итераций с точностью более шести знаков после десятичной запятой получаем $a=0,9977$ и $\beta=0,000$. Таким образом, частное решение уравнения (5.1) в форме равномерно пригодного разложения имеет вид

$$u\left(t\right)=0,9977\cos 2,0560t+0,002327\cos 6,1680t+\ldots \quad (5.32)$$

Для оценки погрешности построенных разложений (5.30) и (5.32) было получено решение уравнения (5.1) на промежутке времени от 0 до 20. При решении уравнения (5.1) применялся численный метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Высокая точность результатов вычислений (пять верных знаков после запятой) позволяет принять это решение за истинное.

Алгоритм решения дифференциального уравнения второго порядка методом Рунге-Кутта заключается в следующем [3].

Заданное уравнение представляется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} u'=z; \\ z'=-4u-0,3u^3; \end{cases}$$

$$u\left(0\right)=1, \quad z\left(0\right)=0.$$

Полагая $u_0=u\left(0\right)=1$ и $z_0=z\left(0\right)=0$, последовательно $\left(i=1,2,3,4,\ldots\right)$ вычисляются сначала коэффициенты:

$$k_1^{(i-1)}=z_{i-1}, \qquad l_1^{(i-1)}=-4u_{i-1}-0,3u_{i-1}^3,$$

$$k_2^{(i-1)} = z_{i-1} + \frac{h}{2} l_1^{(i-1)}, \quad l_2^{(i-1)} = -4\left(u_{i-1} + \frac{h}{2} k_1^{(i-1)}\right) - 0,3\left(u_{i-1} + \frac{h}{2} k_1^{(i-1)}\right)^3,$$

$$k_3^{(i-1)} = z_{i-1} + \frac{h}{2} l_2^{(i-1)}, \quad l_3^{(i-1)} = -4\left(u_{i-1} + \frac{h}{2} k_2^{(i-1)}\right) - 0,3\left(u_{i-1} + \frac{h}{2} k_2^{(i-1)}\right)^3,$$

$$k_4^{(i-1)} = z_{i-1} + h l_3^{(i-1)}, \quad l_4^{(i-1)} = -4\left(u_{i-1} + h k_3^{(i-1)}\right) - 0,3\left(u_{i-1} + h k_3^{(i-1)}\right)^3,$$

а затем находятся дискретные значения решения u_i дифференциального уравнения и его производной $z_i = u_i'$ в узлах $x_i = ih$, $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$:

$$u_i = u_{i-1} + \frac{h}{6}\left(k_1^{(i-1)} + 2k_2^{(i-1)} + 2k_3^{(i-1)} + k_4^{(i-1)}\right),$$
$$z_i = z_{i-1} + \frac{h}{6}\left(l_1^{(i-1)} + 2l_2^{(i-1)} + 2l_3^{(i-1)} + l_4^{(i-1)}\right).$$

Шаг интегрирования $h = 0,0125$ выбирался с учетом заданной точности вычислений: $\left|u_i(h) - u_i\left(\frac{h}{2}\right)\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,00001$.

Результаты вычислений представлены в таблице 5.2. Во второй строке таблицы 5.2 приведены результаты вычислений $u_{\text{т}i}$, полученные численным методом и принятые за точное решение уравнения (5.1). В третьей и четвертой строках таблицы 5.2 представлены значения приближенных решений, построенных на основе прямого $u_{\text{пр}}(t)$ и равномерно пригодного $u_{\text{рав}}(t)$ разложений. Графики решений $u_{\text{т}}(t)$ и $u_{\text{пр}}(t)$ представлены на рис. 5.1 кривыми 1 и 2, соответственно. График решения $u_{\text{рав}}(t)$ практически совпадает с графиком точного решения $u_{\text{т}}(t)$.

Таблица 5.2

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$u_{\text{т}}(t)$	1,000	-0,563	-0,356	0,972	-0,739	-0,132	0,891	-0,875	0,100	0,760	-0,964
$u_{\text{пр}}(t)$	1,000	-0,566	-0,365	1,021	-0,828	-0,105	1,028	-1,174	0,339	0,870	-1,496
$u_{\text{рав}}(t)$	1,000	-0,561	-0,359	0,973	-0,735	-0,138	0,894	-0,871	0,090	0,768	-0,961
$\left\|u_{\text{т}} - u_{\text{пр}}\right\|$	0,000	0,003	0,009	0,049	0,089	0,027	0,137	0,298	0,239	0,110	0,532
$\left\|u_{\text{т}} - u_{\text{рав}}\right\|$	0,000	0,001	0,002	0,001	0,004	0,006	0,003	0,005	0,010	0,007	0,004

Относительная погрешность приближенного решения $u(t)$ вычислялась по формуле $\Delta u, \% = \dfrac{\max\limits_{t\in[0;20]}\left|u_{\text{т}}(t) - u(t)\right|}{\max\limits_{t\in[0;20]}\left|u(t)\right|}100\%$. Для прямого разложения (5.30) погрешность составила 53,2%, а для равномерно пригодного (5.32) относительная погрешность оказалась равной 1,2%.

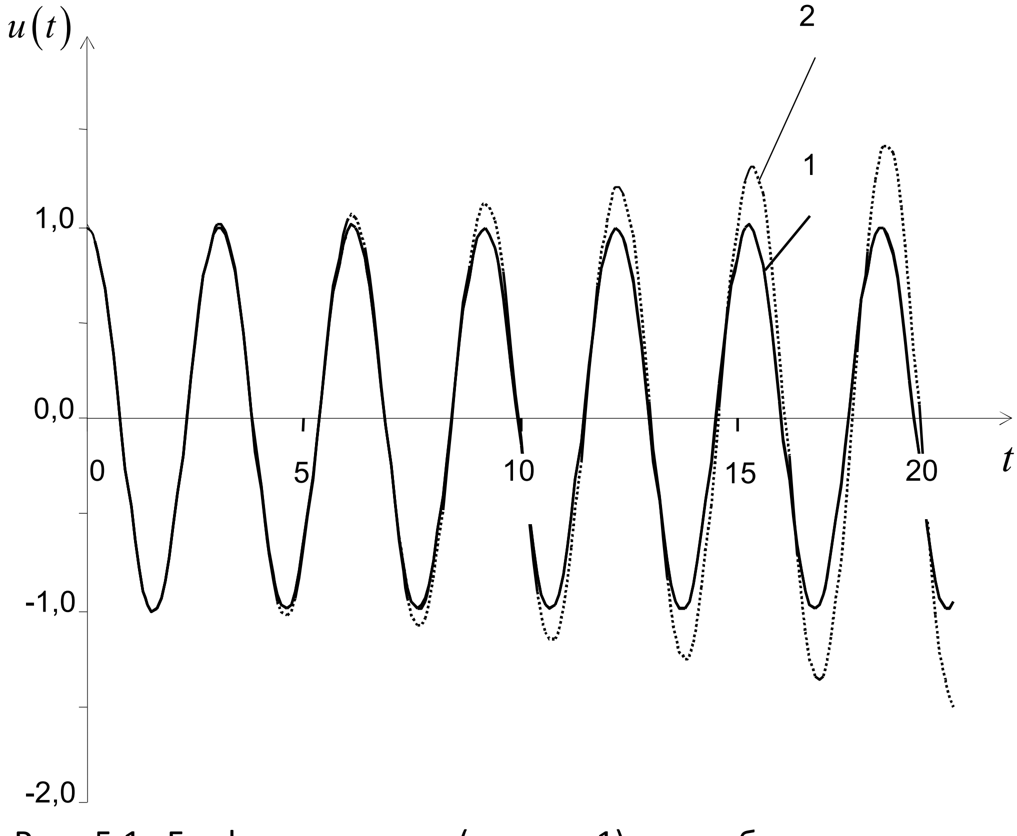


Рис. 5.1. Графики точного (кривая 1) и приближенного, на основе прямого разложения, (кривая 2) решений уравнения Дюффинга (5.1)

Контрольные вопросы

1. Дать определение уравнения Дюффинга.
2. Как строится прямое разложение решения уравнения Дюффинга?
3. Как вычисляются произвольные постоянные в прямом разложении решения уравнения Дюффинга?
4. Как определяется область равномерности разложения решения дифференциального уравнения?
5. Какие члены разложения называют секулярными (вековыми)?
6. Какие существуют методы построения равномерно пригодных разложений решения уравнения Дюффинга?
7. В чем состоит методика Линдштедта-Пуанкаре построения равномерно пригодного разложения решения уравнения Дюффинга?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРЕНОРМИРОВКИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РАВНОМЕРНО ПРИГОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерно пригодных разложений решения дифференциальных уравнений с нелинейной восстанавливающей силой методом перенормировки.

Задание 1. Построить прямое разложение для решения заданного в таблице 6.1 дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой. Исследовать равномерность этого разложения.

Таблица 6.1

№ вар.	Дифференциальное уравнение	№ вар.	Дифференциальное уравнение
1	$u'' + 3u + 0,5u^5 = 0$	11	$u'' + 9u + 0,2u^5 = 0$
2	$u'' + 2u + 0,4u^5 = 0$	12	$u'' + 9u + 0,3u^5 = 0$
3	$u'' + 4u + 0,4u^5 = 0$	13	$u'' + 9u + 0,5u^5 = 0$
4	$u'' + 2u + 0,2u^5 = 0$	14	$u'' + 6u + 0,4u^5 = 0$
5	$u'' + u + 0,5u^5 = 0$	15	$u'' + 9u + 0,4u^5 = 0$
6	$u'' + u + 0,3u^5 = 0$	16	$u'' + 8u + 0,3u^5 = 0$
7	$u'' + 3u + 0,4u^5 = 0$	17	$u'' + 6u + 0,3u^5 = 0$
8	$u'' + 2u + 0,2u^5 = 0$	18	$u'' + 8u + 0,2u^5 = 0$
9	$u'' + 3u + 0,2u^5 = 0$	19	$u'' + 9u + 0,2u^5 = 0$
10	$u'' + 4u + 0,2u^5 = 0$	20	$u'' + 3u + 0,5u^5 = 0$

Задание 2. Используя метод перенормировки, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения дифференциального уравнения с нелинейной восстанавливающей силой.

Задание 3. Построить с точностью до четырех десятичных знаков после запятой на промежутке времени $t_н = 20$ частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0) = 1;\ u'(0) = 0$ (например, используя численные методы решения дифференциальных уравнений).

Сравнить полученное решение, прямое и равномерно пригодное разложения. Оценить погрешность приближенных решений дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой, полученных на основе разложений.

Пример 6.1. Построить прямое разложение для решения дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой

$$u'' + 3u + 0,4u^5 = 0. \tag{6.1}$$

Исследовать равномерность этого разложения. Используя метод перенормировки, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (6.1).

Построить с точностью до четырех десятичных знаков после запятой частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0) = 1$; $u'(0) = 0$.

Сравнить полученное решение, прямое и равномерно пригодное разложения. Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений.

Решение. Заданное дифференциальное уравнение (6.1) можно представить в виде возмущенного уравнения $u'' + 3u + \varepsilon u^5 = 0$, в котором малый параметр ε принимает значение равное 0,4. Решение этого уравнения будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε: $u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \varepsilon^3 u_3(t) + \dots$.

Ограничимся разложением первого порядка

$$u(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + O(\varepsilon^2). \tag{6.2}$$

Подставляя (6.2) в (6.1), получаем

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + O(\varepsilon^2) + 3u_0 + 3\varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) + \varepsilon\left[u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2)\right]^5 = 0.$$

Отсюда после простых алгебраических преобразований имеем

$$u_0'' + 3u_0 + \varepsilon\left(u_1'' + 3u_1 + u_0^5\right) + O(\varepsilon^2) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &u_0'' + 3u_0 = 0; \\ &u_1'' + 3u_1 + u_0^5 = 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

из которой последовательно находим функции $u_0(t)$ и $u_1(t)$.

Первое уравнение в системе (6.3) – невозмущенное уравнение, которое получается из (6.1) при $\varepsilon = 0$, – имеет решение

$$u_0 = a_0 \cos\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right), \tag{6.4}$$

где a_0 и β_0 - произвольные постоянные.

Подставляя (6.4) во второе уравнение системы (6.3), имеем $u_1'' + 3u_1 = -a_0^5 \cos^5\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right)$. Тогда с учетом тригонометрической формулы $\cos^5 \alpha = \frac{5}{8}\cos\alpha + \frac{5}{16}\cos 3\alpha + \frac{1}{16}\cos 5\alpha$ получаем

$$u_1'' + 3u_1 = -\frac{5}{8}a_0^5 \cos\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right) - \frac{5}{16}a_0^5 \cos\left(3\sqrt{3}t + 3\beta_0\right) -$$

$$-\frac{1}{16}a_0^5 \cos\left(5\sqrt{3}t + 5\beta_0\right). \tag{6.5}$$

Ограничимся нахождением только частного решения уравнения (6.5). Будем искать это решение в виде

$$u_1 = \left[A\cos\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right) + B\sin\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right)\right]t + D\cos\left(3\sqrt{3}t + 3\beta_0\right) + C\sin\left(3\sqrt{3}t + 3\beta_0\right) +$$

$$+E\cos\left(5\sqrt{3}t + 5\beta_0\right) + F\sin\left(5\sqrt{3}t + 5\beta_0\right). \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в (6.5), находим коэффициенты $A = C = F = 0$, $B = -\frac{5}{16\sqrt{3}}a_0^5$, $D = \frac{5}{384}a_0^5$, $E = \frac{1}{1152}a_0^5$. При этом частное решение уравнения (6.5) принимает вид

$$u_1 = -\frac{5}{16\sqrt{3}}a_0^5 t \sin\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right) + \frac{5}{384}a_0^5 \cos\left(3\sqrt{3}t + 3\beta_0\right) +$$

$$+\frac{1}{1152}a_0^5 \cos\left(5\sqrt{3}t + 5\beta_0\right). \tag{6.7}$$

Подставляя теперь выражения для u_0 и u_1 из (6.4) и (6.7) в (6.2), получаем следующее разложение первого порядка:

$$u = a_0\cos\left(\sqrt{3}t+\beta_0\right)+\varepsilon\left[-\frac{5}{16\sqrt{3}}a_0^5 t\sin\left(\sqrt{3}t+\beta_0\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{384}a_0^5\cos\left(3\sqrt{3}t+3\beta_0\right)+\frac{1}{1152}a_0^5\cos\left(5\sqrt{3}t+5\beta_0\right)\right]+\ldots, \tag{6.8}$$

где a_0 и β_0- произвольные постоянные, для нахождения которых используются начальные условия: $u(0)=u_0$ и $u'(0)=u_0'$.

Разложение (6.8) содержит секулярный член $t\sin\left(\sqrt{3}t+\beta_0\right)$. Поэтому оно является *неравномерным* по t и применимо только для $t < O\left(\varepsilon^{-1}\right)$.

Построим равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (6.1), используя метод перенормировки [8].

В соответствии с методом перенормировки введем в прямое разложение (6.8) преобразование $\tau=\omega t$, $\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+O\left(\varepsilon^2\right)$, где $\omega_0=\sqrt{3}$ – частота невозмущенной системы (при $\varepsilon=0$).

Имеем

$$t=\frac{\tau}{\omega}=\frac{\tau}{\sqrt{3}+\varepsilon\omega_1+\ldots}=\tau\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\varepsilon\frac{\omega_1}{3}+\ldots\right)=\frac{\tau}{\sqrt{3}}-\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{3}+\ldots. \tag{6.9}$$

Подставляя (6.9) в прямое разложение (6.8), получаем

$$u=a_0\cos\left(\tau+\beta_0-\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)+\varepsilon\frac{a_0^5}{48}\left[-5\left(\tau-\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)\sin\left(\tau+\beta_0-\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{5}{8}\cos\left(3\tau+3\beta_0-\varepsilon\frac{3\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)+\frac{1}{24}\cos\left(5\tau+5\beta_0-\varepsilon\frac{5\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)\right]+\ldots. \tag{6.10}$$

Разлагая синус и косинусы в ряды Тейлора, получаем

$$\sin\left(\tau+\beta_0-\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=\sin\left(\tau+\beta_0\right)-\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{\sqrt{3}}\cos\left(\tau+\beta_0\right)+\ldots,$$

$$\cos\left(\tau+\beta_0-\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=\cos\left(\tau+\beta_0\right)+\varepsilon\frac{\tau\omega_1}{\sqrt{3}}\sin\left(\tau+\beta_0\right)+\ldots,$$

$$\cos\left(3\tau+3\beta_0-\varepsilon\frac{3\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=\cos\left(3\tau+3\beta_0\right)+\varepsilon\frac{3\tau\omega_1}{\sqrt{3}}\sin\left(3\tau+3\beta_0\right)+\ldots,$$

$$\cos\left(5\tau+5\beta_0-\varepsilon\frac{5\tau\omega_1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=\cos\left(5\tau+5\beta_0\right)+\varepsilon\frac{5\tau\omega_1}{\sqrt{3}}\sin\left(5\tau+5\beta_0\right)+\ldots.$$

Используя эти разложения, можно представить (6.10) в виде

$$u=a_0\cos\left(\tau+\beta_0\right)+\varepsilon\left[a_0\tau\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{3}}-\frac{5a_0^5}{48}\right)\sin\left(\tau+\beta_0\right)+\frac{5a_0^5}{384}\cos\left(3\tau+3\beta_0\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{a_0^5}{1152}\cos\left(5\tau+5\beta_0\right)\right]+\ldots. \tag{6.11}$$

Очевидно, что для того, чтобы избавиться от секулярного члена в (6.11), следует положить $\frac{\omega_1}{\sqrt{3}}-\frac{5a_0^5}{48}=0$. Отсюда получаем

$$\omega_1=\frac{5\sqrt{3}a_0^5}{48},\qquad \tau=\omega t=\left(\sqrt{3}+\varepsilon\omega_1+\ldots\right)t=\sqrt{3}\left(1+\varepsilon\frac{5}{48}a_0^5\right)t+\ldots. \tag{6.12}$$

При этом формула (6.11) принимает вид

$$u=a_0\cos\left(\tau+\beta_0\right)+\varepsilon\frac{a_0^5}{1152}\left[15\cos\left(3\tau+3\beta_0\right)+\cos\left(5\tau+5\beta_0\right)\right]+\ldots.$$

Отсюда с учетом (6.12) получаем равномерно пригодное разложение вида

$$u=a_0\cos\left[\sqrt{3}\left(1+\varepsilon\frac{5}{48}a_0^5\right)t+\beta_0\right]+\varepsilon\frac{a_0^5}{1152}\left\{15\cos\left[3\sqrt{3}\left(1+\varepsilon\frac{5}{48}a_0^5\right)t+3\beta_0\right]+\right.$$

$$\left.+\cos\left[5\sqrt{3}\left(1+\varepsilon\frac{5}{48}a_0^5\right)t+5\beta_0\right]\right\}+\ldots. \tag{6.13}$$

При $\varepsilon = 0,4$ прямое разложение (6.8) и равномерно пригодное разложение первого порядка (6.13) соответственно принимают вид

$$u = a_0 \cos\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right) + 0,4\left[-\frac{5}{16\sqrt{3}} a_0^5 t \sin\left(\sqrt{3}t + \beta_0\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{384} a_0^5 \cos\left(3\sqrt{3}t + 3\beta_0\right) + \frac{1}{1152} a_0^5 \cos\left(5\sqrt{3}t + 5\beta_0\right)\right] + \ldots, \qquad (6.14)$$

$$u = a_0 \cos\left[\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{24}a_0^5\right)t + \beta_0\right] + \frac{a_0^5}{2880}\left\{15\cos\left[3\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{24}a_0^5\right)t + 3\beta_0\right] + \right.$$

$$\left. + \cos\left[5\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{24}a_0^5\right)t + 5\beta_0\right]\right\} + \ldots. \qquad (6.15)$$

При начальных условиях $u(0) = 1$ и $u'(0) = 0$ произвольные постоянные a_0 и β_0 в прямом разложении (6.14) находятся из решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} a_0 \cos\beta_0 + \dfrac{1}{192} a_0^5 \cos 3\beta_0 + \dfrac{1}{2880} a_0^5 \cos 5\beta_0 = 1; \\ \left(1 + \dfrac{1}{24} a_0^4\right)\sin\beta_0 + \dfrac{1}{64} a_0^4 \sin 3\beta_0 + \dfrac{1}{576} a_0^4 \sin 5\beta_0 = 0. \end{cases} \qquad (6.16)$$

Соответствующая система нелинейных уравнений для вычисления произвольных постоянных a_0 и β_0 в равномерно пригодном разложении (6.15) при начальных условиях $u(0) = 1$ и $u'(0) = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} a_0 \cos\beta_0 + \dfrac{1}{192} a_0^5 \cos 3\beta_0 + \dfrac{1}{2880} a_0^5 \cos 5\beta_0 = 1; \\ \sin\beta_0 + \dfrac{1}{64} a_0^4 \sin 3\beta_0 + \dfrac{1}{576} a_0^4 \sin 5\beta_0 = 0. \end{cases} \qquad (6.17)$$

Очевидно, что второе уравнение обеих систем обращается в нуль при $\beta_0 = 0,0000$. При этом первые уравнения в этих системах совпадают и имеют вид $a_0 + \frac{1}{180} a_0^5 = 1$. Это алгебраическое уравнение легко решается численным методом простых итераций [2]: $a_0^{(k)} = 1 - \frac{1}{180}\left[a_0^{(k-1)}\right]^5$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где $a_0^{(0)} = 1$. Уже на третьей итерации решение данного уравнения имеет шесть верных знаков после запятой: $a_0 = 0,994593$. Таким образом, решение систем (6.16) и (6.17) совпадают и имеют вид $a_0 = 0,99459$ и $\beta_0 = 0,0000$.

В результате получаем следующие приближенные решения заданного дифференциального уравнения (6.1), построенные методом возмущений на основе асимптотических разложений:

$$u_{\text{пр}}(t) = 0,9946\cos\sqrt{3}t - 0,07024t\sin\sqrt{3}t + 0,005069\cos 3\sqrt{3}t +$$

$$+0,000338\cos 5\sqrt{3}t + \ldots, \tag{6.18}$$

$$u_{\text{рав}}(t) = 0,9946\cos 1,80229t + 0,005069\cos 5,40687t +$$

$$+0,000338\cos 9,011448t + \ldots. \tag{6.19}$$

Для оценки погрешности построенных приближенных решений (6.18) и (6.19) было получено решение уравнения (6.1) на промежутке времени от 0 до 20. При решении уравнения (6.1) применялся численный метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности [3]. Высокая точность результатов вычислений (пять верных знаков после запятой) позволяет принять это решение за истинное.

Шаг интегрирования $h = 0,0125$ выбирался с учетом заданной точности вычислений: $\left|u_i(h) - u_i\left(\frac{h}{2}\right)\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,00001$.

Результаты вычислений представлены в таблице 6.2. Во второй строке таблицы 6.2 приведены результаты вычислений $u_{\text{т}i}$, полученные численным методом и принятые за точное решение уравнения (6.1). В третьей и четвертой строках таблицы 6.2 представлены значения приближенных решений, построенных на основе прямого $u_{\text{пр}}(t)$ и равномерно пригодного $u_{\text{рав}}(t)$ разложений. Графики решений $u_{\text{т}}(t)$ и $u_{\text{пр}}(t)$ представлены на рис. 6.1 кривыми 1 и 2, соответственно. График решения $u_{\text{рав}}(t)$ практически совпадает с графиком точного решения $u_{\text{т}}(t)$.

Таблица 6.2

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$u_{\text{т}}(t)$	1,000	-0,891	0,594	-0,178	-0,272	0,669	-0,932	0,995	-0,842	0,513	-0,083
$u_{\text{пр}}(t)$	1,000	-0,902	0,624	-0,212	-0,268	0,743	-1,138	1,386	-1,439	1,270	-0,879
$u_{\text{рав}}(t)$	1,000	-0,891	0,593	-0,177	-0,273	0,669	-0,932	0,995	-0,841	0,511	-0,081
$\lvert u_{\text{т}} - u_{\text{пр}} \rvert$	0,000	0,011	0,030	0,034	0,004	0,073	0,206	0,392	0,598	0,757	0,796
$\lvert u_{\text{т}} - u_{\text{рав}} \rvert$	0,000	0,000	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,002

Относительная погрешность приближенного решения $u(t)$ вычислялась по формуле $\Delta u,\% = \dfrac{\max\limits_{t\in[0;20]} \left| u_{\text{т}}(t) - u(t) \right|}{\max\limits_{t\in[0;20]} \left| u(t) \right|} 100\%$. Для прямого разложения (6.18) погрешность составила 90,2%, а для равномерно пригодного (6.19) относительная погрешность оказалась равной 0,2%.

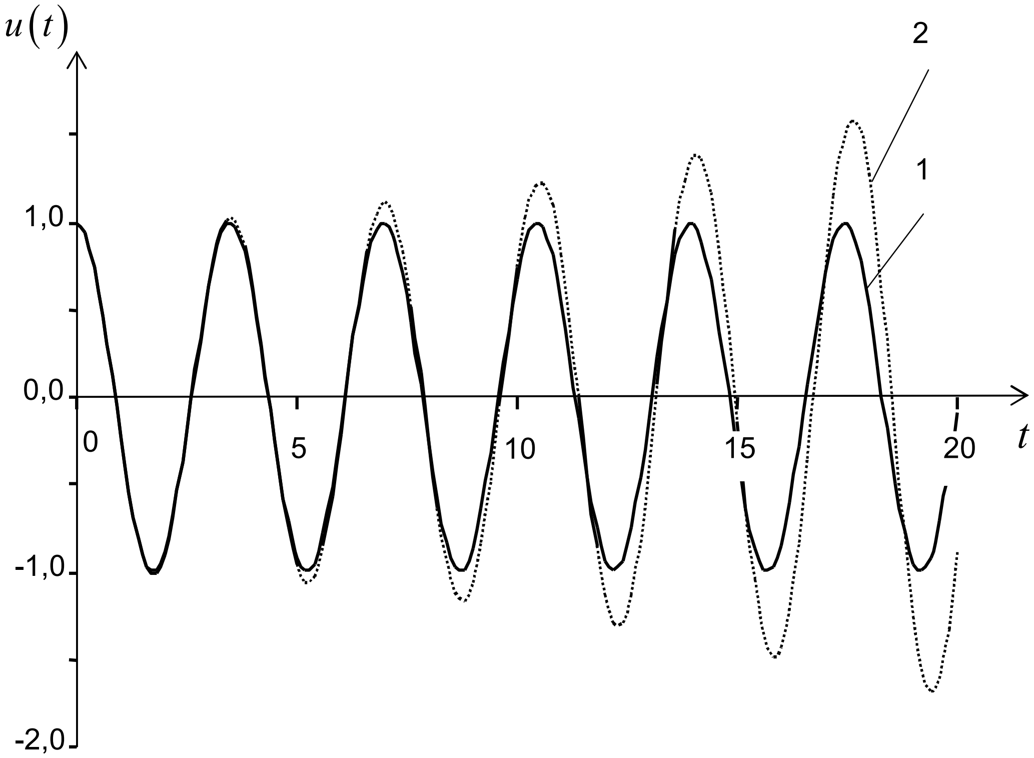


Рис. 6.1. Графики точного (кривая 1) и приближенного, на основе прямого разложения, (кривая 2) решений дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей

Контрольные вопросы

1. Дать определение дифференциальному уравнению второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой.
2. Как строится прямое разложение решения дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой?
3. Как вычисляются произвольные постоянные в прямом разложении решения дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой?
4. Как определяется область равномерности разложения решения дифференциального уравнения?
5. Какие члены разложения называют секулярными (вековыми)?
6. Какие существуют методы построения равномерно пригодных разложений решения дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой?

7. В чем состоит метод перенормировки построения равномерно пригодного разложения решения дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной восстанавливающей силой?

8. В чем различие и сходство методики Линдштедта-Пуанкаре и метода перенормировки?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ МЕТОДОМ МНОГИХ МАСШТАБОВ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении методом многих масштабов равномерно пригодных разложений динамических процессов в нелинейных диссипативных колебательных системах.

Задание 1. Построить прямое разложение для решения заданного в таблице 7.1 дифференциального уравнения, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы. Исследовать равномерность этого разложения.

Задание 2. Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения дифференциального уравнения, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы.

Задание 3. Построить с точностью до четырех десятичных знаков после запятой на промежутке времени $t_н = 10$ частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0) = 1$; $u'(0) = 0$ (например, используя численные методы решения дифференциальных уравнений).

Сравнить полученное решение, прямое и равномерно пригодное разложения. Оценить погрешность приближенных решений дифференциального уравнения, полученных на основе разложений.

Таблица 7.1

№ вар.	Дифференциальное уравнение	№ вар.	Дифференциальное уравнение
1	$u''+0,1(u')^3+u=0$	11	$u''+0,2(u')^3+2u=0$
2	$u''+0,3(u')^3+2u=0$	12	$u''+0,1(u')^3+6u=0$
3	$u''+0,4(u')^3+3u=0$	13	$u''+0,3(u')^3+7u=0$
4	$u''+0,2(u')^3+4u=0$	14	$u''+0,5(u')^3+2u=0$
5	$u''+0,5(u')^3+9u=0$	15	$u''+0,2(u')^3+7u=0$
6	$u''+0,3(u')^3+9u=0$	16	$u''+0,6(u')^3+9u=0$
7	$u''+0,4(u')^3+4u=0$	17	$u''+0,5(u')^3+4u=0$
8	$u''+0,3(u')^3+5u=0$	18	$u''+0,6(u')^3+u=0$
9	$u''+0,1(u')^3+2u=0$	19	$u''+0,2(u')^3+9u=0$
10	$u''+0,4(u')^3+u=0$	20	$u''+0,3(u')^3+8u=0$

Пример 7.1. Построить прямое разложение для решения дифференциального уравнения, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы

$$u''+0,3(u')^3+4u=0. \tag{7.1}$$

Исследовать равномерность этого разложения. Используя метод многих масштабов, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (7.1).

Построить с точностью до четырех десятичных знаков после запятой частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0)=1$; $u'(0)=0$.

Сравнить полученное решение, прямое и равномерно пригодное разложения. Оценить погрешность приближенных решений, полученных на основе разложений.

Решение. Заданное дифференциальное уравнение (7.1) можно представить в виде возмущенного уравнения $u'' + \varepsilon\left(u'\right)^3 + 4u = 0$, в котором малый параметр ε принимает значение равное 0,3. Решение этого уравнения будем искать в виде разложения по степеням малого параметра ε: $u\left(t,\varepsilon\right) = u_0\left(t\right) + \varepsilon u_1\left(t\right) + \varepsilon^2 u_2\left(t\right) + \varepsilon^3 u_3\left(t\right) + \ldots$.

Ограничимся разложением первого порядка

$$u\left(t,\varepsilon\right) = u_0\left(t\right) + \varepsilon u_1\left(t\right) + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right). \tag{7.2}$$

Подставляя (7.2) в (7.1), получаем

$$u_0'' + \varepsilon u_1'' + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right) + 4u_0 + 4\varepsilon u_1 + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right) + \varepsilon\left[u_0' + \varepsilon u_1' + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right)\right]^3 = 0.$$

Отсюда после простых алгебраических преобразований имеем

$$u_0'' + 4u_0 + \varepsilon\left[u_1'' + 4u_1 + \left(u_0'\right)^3\right] + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2\right) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &u_0'' + 4u_0 = 0; \\ &u_1'' + 4u_1 + \left(u_0'\right)^3 = 0, \end{aligned} \tag{7.3}$$

из которой последовательно находим функции $u_0\left(t\right)$ и $u_1\left(t\right)$.

Первое уравнение в системе (7.3) – невозмущенное уравнение, которое получается из (7.1) при $\varepsilon = 0$, – имеет решение и производную от решения вида

$$u_0 = a_0 \cos\left(2t + \beta_0\right), \qquad u_0' = -2a_0 \sin\left(2t + \beta_0\right) \tag{7.4}$$

где a_0 и β_0 - произвольные постоянные.

Подставляя (7.4) во второе уравнение системы (7.3), имеем $u_1'' + 4u_1 = 8a_0^3 \sin^3(2t + \beta_0)$. Тогда с учетом тригонометрической формулы $\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$ получаем

$$u_1'' + 4u_1 = 6a_0^3 \sin(2t + \beta_0) - 2a_0^3 \cos(6t + 3\beta_0) \tag{7.5}$$

Ограничимся нахождением только частного решения уравнения (7.5). Будем искать это решение в виде

$$u_1 = \left[A\cos(2t+\beta_0) + B\sin(2t+\beta_0)\right]t + D\cos(6t+3\beta_0) + C\sin(6t+3\beta_0). \tag{7.6}$$

Подставляя (7.6) в (7.5), находим коэффициенты $A = -\frac{3}{2}a_0^3$, $B = C = 0$, $D = \frac{1}{16}a_0^3$. При этом частное решение уравнения (7.5) принимает вид

$$u_1(t) = -\frac{3}{2}a_0^3 t\cos(2t+\beta_0) + \frac{1}{16}a_0^3\cos(6t+3\beta_0). \tag{7.7}$$

Подставляя теперь выражения для $u_0(t)$ и $u_1(t)$ из (7.4) и (7.7) в (7.2), получаем следующее разложение первого порядка:

$$u(t) = a_0\left[1 - \frac{3}{2}\varepsilon a_0^2 t\right]\cos(2t+\beta_0) + \varepsilon\frac{a_0^3}{16}\cos(6t+3\beta_0) + \ldots, \tag{7.8}$$

где a_0 и β_0- произвольные постоянные, для нахождения которых используются начальные условия: $u(0) = u_0$ и $u'(0) = u_0'$.

Разложение (6.8) содержит секулярный член $t\cos(2t+\beta_0)$. Поэтому оно является *неравномерным* по t и применимо только для $t < O(\varepsilon^{-1})$.

Построим равномерно пригодное разложение первого порядка для решения уравнения (7.1), используя метод многих масштабов [8].

Будем рассматривать $u(t)$ как функцию нескольких аргументов $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t \ldots$. С этой целью перейдем в уравнении $u'' + \varepsilon(u')^3 + 4u = 0$ от независимой переменной t к переменным T_0, T_1, T_2,… . Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+\ldots,\ \frac{d^2}{dt^2}=\frac{\partial^2}{\partial T_0^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1}+\varepsilon^2\left(2\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_2}+\frac{\partial^2}{\partial T_1^2}\right)+\ldots.$$

При этом уравнение $u''+\varepsilon\left(u'\right)^3+4u=0$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial T_0\partial T_1}+\varepsilon^2\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial T_0\partial T_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial T_1^2}\right)+\ldots+\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial T_1}+\ldots\right)^3+4u=0. \quad (7.9)$$

Будем искать приближенное решение уравнения (7.9) в виде

$$u=u_0\left(T_0,T_1,T_2,\ldots\right)+\varepsilon u_1\left(T_0,T_1,T_2,\ldots\right)+\ldots. \quad (7.10)$$

Подстановка этого разложения в (7.9) дает

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2}+\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0\partial T_1}+\varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial T_0}\right)^3+4u_0+\varepsilon 4u_1+\ldots=0.$$

Приравнивая нулю соответствующие коэффициенты при ε^0 и ε^1, имеет

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2}+4u_0=0, \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2}+4u_1=-2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0\partial T_1}-\left(\frac{\partial u_0}{\partial T_0}\right)^3. \quad (7.12)$$

Общее решение уравнение (7.11) может быть представлено в виде

$$u_0=a\left(T_1,T_2,\ldots\right)\cos\left[2T_0+\beta\left(T_1,T_2,\ldots\right)\right]. \quad (7.13)$$

В данном решении a и β являются не постоянными величинами, а функциями медленных масштабов T_1, T_2,… .

Подставляя (7.13) в (7.12), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2}+4u_1=-2\frac{\partial}{\partial T_1}\left[-2a\sin\left(2T_0+\beta\right)\right]+8a^3\sin^3\left(2T_0+\beta\right)=4\frac{\partial a}{\partial T_1}\sin\left(2T_0+\beta\right)+$$
$$+8a\frac{\partial \beta}{\partial T_1}\cos\left(2T_0+\beta\right)+6a^3\sin\left(2T_0+\beta\right)-2a^3\cos\left(6T_0+3\beta\right),$$

или

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2}+4u_1=\left(4\frac{\partial a}{\partial T_1}+6a^3\right)\sin\left(2T_0+\beta\right)+8a\frac{\partial \beta}{\partial T_1}\cos\left(2T_0+\beta\right)-2a^3\cos\left(6T_0+3\beta\right). \quad (7.14)$$

Источником секулярных членов в решении этого уравнения являются слагаемые $\left(4\frac{\partial a}{\partial T_1}+6a^3\right)\sin\left(2T_0+\beta\right)$ и $8a\frac{\partial \beta}{\partial T_1}\cos\left(2T_0+\beta\right)$ в правой части (7.14). Для того, чтобы исключить секулярные члены , следует приравнять нулю коэффициенты при $\sin\left(2T_0+\beta\right)$ и $\cos\left(2T_0+\beta\right)$. В результате чего получаем

$$\frac{\partial \beta}{\partial T_1}=0, \quad (7.15)$$

$$4\frac{\partial a}{\partial T_1}+6a^3=0. \quad (7.16)$$

При этом частное решение уравнения (7.14) принимает вид

$$u_1\left(T_0,T_1,...\right)=\frac{1}{16}a^3\cos\left(6T_0+3\beta\right). \quad (7.17)$$

Решение уравнения (7.15) есть функция $\beta=\beta\left(T_2,T_3,...\right)$, независящая от T_0 и T_1. Поэтому с точностью до бесконечно малых порядка $\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2 t\right)$ величину β можно считать постоянной: $\beta=\beta_0+\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2 t\right)$.

Из (7.16) следует $\frac{\partial a}{\partial T_1}=-\frac{3}{2}a^3$. Решением этого уравнения является функция

$$a=\frac{a_0}{\sqrt{1+3a_0^2T_1}}, \quad (7.18)$$

где величину $a_0 = a_0\left(T_2, T_3, \dots\right)$ с точностью до бесконечно малых порядка $\boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2 t\right)$ можно считать постоянной.

Подставляя выражения для u_0 и u_1 из (7.13) и (7.17) в разложение (7.10), получаем

$$u = a\cos\left(2T_0 + \beta\right) + \frac{1}{16}\varepsilon a^3 \cos\left(6T_0 + 3\beta\right). \tag{7.19}$$

Подставляя теперь выражение для a из (7.18) в (7.19) с учетом $\beta = \beta_0 + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2 t\right)$, получаем

$$u = \frac{a_0}{\sqrt{1+3a_0^2 T_1}}\cos\left(2T_0 + \beta_0\right) + \frac{1}{16}\varepsilon\frac{a_0^3}{\sqrt{\left(1+3a_0^2 T_1\right)^3}}\cos\left(6T_0 + 3\beta_0\right) + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2 t\right),$$

или после возвращения к исходной переменной t

$$u = \frac{a_0}{\sqrt{1+3a_0^2 \varepsilon t}}\cos\left(2t + \beta_0\right) + \frac{1}{16}\varepsilon\frac{a_0^3}{\sqrt{\left(1+3a_0^2 \varepsilon t\right)^3}}\cos\left(6t + 3\beta_0\right) + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^2 t\right). \tag{7.20}$$

Анализ формулы (7.20) показывает, что ошибка в ней будет иметь порядок $\boldsymbol{O}\left(1\right)$, то есть порядка первого члена, если $t = \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^{-2}\right)$. Поэтому для значений $t \geq \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^{-2}\right)$ разложение (7.20) становится непригодным. Если же $t = \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^{-1}\right)$, то ошибка будет иметь порядок ε, то есть окажется порядка второго члена разложения, и, следовательно, разложение, пригодное при $t = \boldsymbol{O}\left(\varepsilon^{-1}\right)$, должно включать в себя только первый член:

$$u = \frac{a_0}{\sqrt{1+3a_0^2 \varepsilon t}}\cos\left(2t + \beta_0\right) + \boldsymbol{O}\left(\varepsilon\right). \tag{7.21}$$

При $\varepsilon = 0{,}3$ прямое разложение (7.8) и равномерно пригодное разложение первого порядка (7.21) соответственно принимают вид

$$u\left(t\right) = a_0\left[1 - \frac{9}{20}a_0^2 t\right]\cos\left(2t + \beta_0\right) + \frac{3a_0^3}{160}\cos\left(6t + 3\beta_0\right) + \dots, \tag{7.22}$$

$$u=\frac{a_0}{\sqrt{1+0,9a_0^2t}}\cos\left(2t+\beta_0\right). \tag{7.23}$$

При начальных условиях $u(0)=1$ и $u'(0)=0$ произвольные постоянные a_0 и β_0 в прямом разложении (7.22) находятся из решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} a_0\cos\beta_0+\dfrac{3}{160}a_0^3\cos 3\beta_0=1; \\ 2\sin\beta_0+\dfrac{9}{20}a_0^2\cos\beta_0+\dfrac{9}{80}a_0^2\sin 3\beta_0=0. \end{cases} \tag{7.24}$$

Соответствующая система нелинейных уравнений для вычисления произвольных постоянных a_0 и β_0 в равномерно пригодном разложении (7.23) при начальных условиях $u(0)=1$ и $u'(0)=0$ имеет вид

$$\begin{cases} a_0\cos\beta_0=1; \\ \dfrac{9}{20}a_0^2\cos\beta_0+2\sin\beta_0=0. \end{cases} \tag{7.25}$$

Для решения этой нелинейной системы можно применить численный метод Ньютона [2]. Алгоритм метода описывается формулами: $x^{(k+1)}=x^{(k)}-W^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)}),\quad k=0,1,2,3,\ldots,$ где $x=\left(a,\beta\right)^T$ - вектор неизвестных; $f(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_1(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0\cos\beta_0+\dfrac{3}{160}a_0^3\cos 3\beta_0-1 \\ 2\sin\beta_0+\dfrac{9}{20}a_0^2\cos\beta_0+\dfrac{9}{80}a_0^2\sin 3\beta_0 \end{bmatrix}$ – вектор-функция, описывающая нелинейную систему уравнений; $W\left(x\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial a_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a_0} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \beta_0} \end{bmatrix}$ - матрица Якоби, в которой: $\dfrac{\partial f_1}{\partial a_0}=\cos\beta_0+\dfrac{9a_0^2}{160}\cos 3\beta_0,$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_0}=-a_0\sin\beta_0-\frac{9a_0^3}{160}\sin 3\beta_0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial a_0}=\frac{9a_0}{10}\cos\beta_0+\frac{9a_0}{40}\sin 3\beta_0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_0} = 2\cos\beta_0 - \frac{9}{20}a_0^2\sin\beta_0 + \frac{27}{80}a^2\cos 3\beta_0 .$$

В качестве начального приближения выбираем вектор $x^{(0)} = (1,0)^T$.

В результате вычислений уже после трех итераций с точностью более шести знаков после десятичной запятой получаем $a = 1,002653$ и $\beta = -0,192356$. Вторая система уравнений (7.25) решается аналитически, методом подстановки: $a_0 = 1,027866$ и $\beta_0 = -0,233383$.

В результате получаем следующие приближенные решения заданного дифференциального уравнения (7.1), построенные методом возмущений на основе асимптотических разложений:

$$u_{\text{пр}}(t) = (1,002653 - 0,453591t)\cos(2t - 0,192356) +$$

$$+0,0189\cos(6t - 0,577069), \tag{7.26}$$

$$u_{\text{рав}}(t) = \frac{1,027866}{\sqrt{1+0,950857t}}\cos(2t - 0,233383). \tag{7.27}$$

Для оценки погрешности построенных приближенных решений (7.26) и (7.27) было получено решение уравнения (7.1) на промежутке времени от 0 до 10. При решении уравнения (7.1) применялся численный метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности [3]. Высокая точность результатов вычислений (пять верных знаков после запятой) позволяет принять это решение за истинное.

Шаг интегрирования $h = 0,025$ выбирался с учетом заданной точности вычислений: $\left|u_i(h) - u_i\left(\frac{h}{2}\right)\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,00001$.

Результаты вычислений представлены в таблице 7.2. Во второй строке таблицы 7.2 приведены результаты вычислений $u_{\text{т}}(t)$, полученные численным методом и принятые за точное решение уравнения (7.1). В третьей и четвертой строках таблицы 7.2 представлены значения приближенных решений, построенных на основе прямого $u_{\text{пр}}(t)$ и равномерно пригодного $u_{\text{рав}}(t)$ разложений. Графики решений $u_{\text{т}}(t)$ и

$u_{\text{пр}}(t)$ представлены на рис. 7.1 кривыми 1 и 2, соответственно. График решения $u_{\text{рав}}(t)$ практически совпадает с графиком точного решения $u_{\text{т}}(t)$.

Таблица 7.2

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u_{\text{т}}(t)$	1,000	-0,202	-0,457	0,470	-0,003	-0,389	0,299	0,101	-0,346	0,181	0,168
$u_{\text{пр}}(t)$	1,000	-0,126	-0,093	-0,306	-0,030	1,155	-1,240	-0,691	2,595	-1,551	-2,016
$u_{\text{рав}}(t)$	1,000	-0,143	-0,489	0,455	0,041	-0,404	0,277	0,135	-0,350	0,156	0,193
$\lvert u_{\text{т}} - u_{\text{пр}} \rvert$	0,000	0,076	0,364	0,777	0,027	1,544	1,538	0,792	2,941	1,733	2,184
$\lvert u_{\text{т}} - u_{\text{рав}} \rvert$	0,000	0,058	0,032	0,015	0,043	0,015	0,022	0,033	0,004	0,026	0,024

Относительная погрешность приближенного решения $u(t)$ вычислялась по формуле $\Delta u, \% = \dfrac{\max\limits_{t\in[0;10]} \left| u_{\text{т}}(t) - u(t) \right|}{\max\limits_{t\in[0;10]} \left| u(t) \right|} 100\%$. Для прямого разложения (7.26) погрешность составила 361%, а для равномерно пригодного (7.27) относительная погрешность оказалась равной 7%.

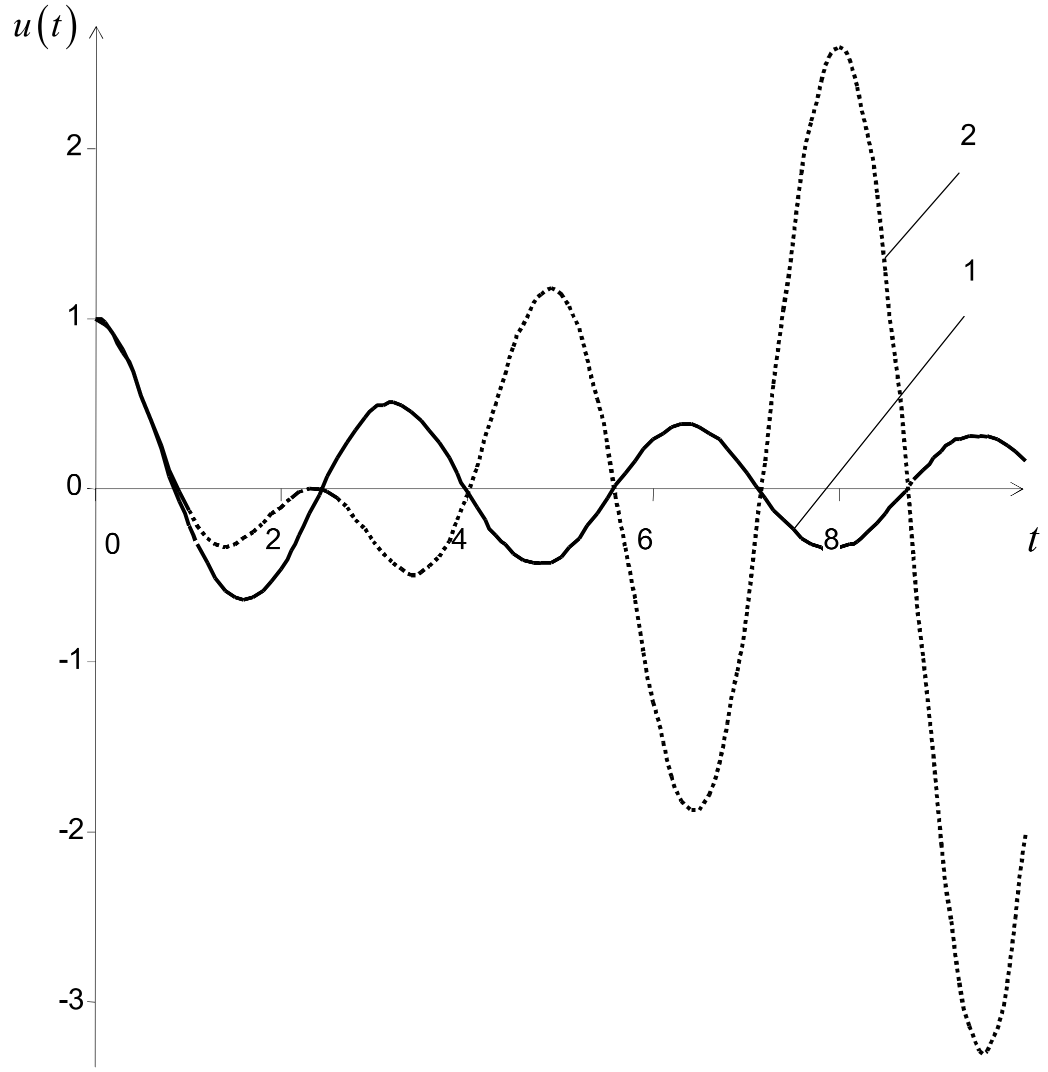


Рис. 7.1. Графики точного (кривая 1) и приближенного, на основе прямого разложения, (кривая 2) решений дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания

Контрольные вопросы

1. Дать определение дифференциальному уравнению второго порядка, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы.
2. Как строится прямое разложение решения дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы?
3. Как вычисляются произвольные постоянные в прямом разложении решения дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы?
4. Как определяется область равномерности разложения решения дифференциального уравнения?
5. Какие члены разложения называют секулярными (вековыми)?

6. Какие существуют методы построения равномерно пригодных разложений решения дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы?

7. В чем состоит метод многих масштабов построения равномерно пригодного разложения решения дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания нелинейной диссипативной системы?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РАВНОМЕРНО ПРИГОДНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ СО СЛАБОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

Целью работы является приобретение и закрепление практических навыков при построении равномерно пригодных разложений, описывающих динамические процессы в колебательных системах со слабой нелинейностью на основе метода Ван-дер-Поля.

Задание 1. Используя метод Ван-дер-Поля (метод Крылова-Боголюбова), построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения заданного в таблице 8.1 дифференциального уравнения, описывающего колебательную систему со слабой нелинейностью общего вида.

Задание 2. Построить с точностью до четырех десятичных знаков после запятой на промежутке времени $t_н = 10$ частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0) = 1$; $u'(0) = 0$ (например, используя численные методы решения дифференциальных уравнений).

Сравнить полученное решение и равномерно пригодное разложение, построенное на основе метода Ван-дер-Поля. Оценить погрешность приближенного решения дифференциального уравнения, полученного на основе разложения.

Таблица 8.1

№ вар.	Дифференциальное уравнение	№ вар.	Дифференциальное уравнение
1	$u'' + 4u + 0,2u'\lvert u'\rvert + 0,1u^3 = 0$	11	$u'' + 4u + 0,5u'\lvert u'\rvert + 0,2u^3 = 0$
2	$u'' + u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,3u^3 = 0$	12	$u'' + 3u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,5u^3 = 0$
3	$u'' + 2u + 0,3u'\lvert u'\rvert + 0,2u^3 = 0$	13	$u'' + 2u + 0,2u'\lvert u'\rvert + 0,4u^3 = 0$
4	$u'' + 3u + 0,3u'\lvert u'\rvert + 0,1u^3 = 0$	14	$u'' + u + 0,2u'\lvert u'\rvert + 0,3u^3 = 0$
5	$u'' + 5u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,4u^3 = 0$	15	$u'' + 5u + 0,2u'\lvert u'\rvert + 0,5u^3 = 0$
6	$u'' + 4u + 0,3u'\lvert u'\rvert + 0,2u^3 = 0$	16	$u'' + 3u + 0,5u'\lvert u'\rvert + 0,1u^3 = 0$
7	$u'' + u + 0,5u'\lvert u'\rvert + 0,1u^3 = 0$	17	$u'' + 4u + 0,3u'\lvert u'\rvert + 0,4u^3 = 0$
8	$u'' + 3u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,5u^3 = 0$	18	$u'' + 2u + 0,4u'\lvert u'\rvert + 0,3u^3 = 0$
9	$u'' + 2u + 0,3u'\lvert u'\rvert + 0,3u^3 = 0$	19	$u'' + u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,1u^3 = 0$
10	$u'' + 5u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,1u^3 = 0$	20	$u'' + 5u + 0,4u'\lvert u'\rvert + 0,2u^3 = 0$

Пример 8.1. Используя метод Ван-дер-Поля, построить равномерно пригодное разложение первого порядка для решения дифференциального уравнения

$$u'' + 2u + 0,1u'\lvert u'\rvert + 0,2u^3 = 0, \qquad (8.1)$$

описывающего колебательную систему со слабой нелинейностью.

С использованием численных методов найти с точностью до четырех десятичных знаков после запятой частное решение заданного уравнения при начальных условиях: $u(0) = 1$; $u'(0) = 0$.

Сравнить полученное решение и равномерно пригодное разложение, построенное на основе метода Ван-дер-Поля. Оценить погрешность приближенного решения дифференциального уравнения, полученного на основе разложения.

Решение. Заданное дифференциальное уравнение (8.1) можно представить в виде возмущенного уравнения

$$u'' + 2u = \varepsilon f\left(u, u'\right), \qquad f\left(u, u'\right) = -u'\left|u'\right| - 2u^3, \tag{8.2}$$

в котором малый параметр ε принимает значение равное 0,1.

Невозмущенное уравнение, которое вытекает из уравнения (8.2) при значении параметра $\varepsilon = 0$, имеет вид $u'' + 2u = 0$. Очевидно, что решением этого уравнения является функция

$$u = a\cos\left(\sqrt{2}t + \beta\right), \tag{8.3}$$

где a и β - некоторые произвольные постоянные. Кроме того, из (8.3) следует, что

$$u' = -\sqrt{2}a\sin\left(\sqrt{2}t + \beta\right). \tag{8.4}$$

В соответствии с *методом вариации произвольных постоянных* будем предполагать, что решение возмущенного уравнения (8.2) также описывается формулой (8.3), но при этом a и β являются функциями времени t

$$u\left(t\right) = a\left(t\right)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta\left(t\right)\right], \qquad (8.5).$$

Мы имеем два уравнения (8.2) и (8.5) для трех неизвестных функций $u\left(t\right)$, $a\left(t\right)$ и $\beta\left(t\right)$. Наложим на эти функции еще одно дополнительное условие, независимое от (8.2) и (8.5). Предположим, что функция $u'\left(t\right)$ имеет тот же самый вид (8.4), что и для невозмущенного уравнения, то есть

$$u'\left(t\right) = -\sqrt{2}a\left(t\right)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta\left(t\right)\right]. \tag{8.6}$$

Такой подход позволяет свести задачу к решению системы уравнений не второго, а первого порядка относительно неизвестных функций $u\left(t\right)$, $a\left(t\right)$ и $\beta\left(t\right)$. Действительно, дифференцируя (8.5) по t и учитывая, что $a\left(t\right)$ и $\beta\left(t\right)$ являются функциями времени, имеем

$$u'\left(t\right) = a'\left(t\right)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta\left(t\right)\right] - a\left(t\right)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta\left(t\right)\right]\left[\sqrt{2} + \beta'\left(t\right)\right] =$$

$$= a'(t)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] - \sqrt{2}a(t)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] -$$

$$-a(t)\beta'(t)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right]. \qquad (8.7)$$

Сравнивая (8.7) с (8.6),получаем, что имеет место равенство

$$a'(t)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] - a(t)\beta'(t)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] = 0. \qquad (8.8)$$

Дальнейшее дифференцирование (8.6) по t дает

$$u''(t) = -\sqrt{2}a'(t)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] - \sqrt{2}a(t)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right]\left[\sqrt{2} + \beta'(t)\right] =$$

$$= -\sqrt{2}a'(t)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] - 2a(t)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] -$$

$$-\sqrt{2}a(t)\beta'(t)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right]. \qquad (8.9)$$

Подставляя выражения для $u(t)$ и $u'(t)$ из (8.5) и (8.9) в уравнение (8.2), получаем

$$a'(t)\sin\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] + a(t)\beta'(t)\cos\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon f(u,u'), \qquad (8.10)$$

где $f(u,u') = -u'|u'| - 2u^3$.

Соотношения (8.8) и (8.10) представляют собой систему двух алгебраических уравнений относительно $a'(t)$ и $\beta'(t)$. Решая эту систему, получаем:

$$a'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon\sin\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right]f(u,u'), \qquad (8.11)$$

$$a(t)\beta'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon\cos\left[\sqrt{2}t + \beta(t)\right]f(u,u'). \qquad (8.12)$$

Так как $f(u,u') = -u'|u'| - 2u^3 = f\left[a\cos\left(\sqrt{2}t+\beta\right), -\sqrt{2}a\sin\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\right] =$
$= 2a^2\sin\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\left|\sin\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\right| - 2a^3\cos^3\left(\sqrt{2}t+\beta\right)$, то имеем

$$a'(t) = -\sqrt{2}\varepsilon a^2 \sin^2\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\left|\sin\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\right| +$$

$$+\sqrt{2}\varepsilon a^3 \sin\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\cos^3\left(\sqrt{2}t+\beta\right), \qquad (8.13)$$

$$\beta'(t) = -\sqrt{2}\varepsilon a \sin\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\left|\sin\left(\sqrt{2}t+\beta\right)\right|\cos\left(\sqrt{2}t+\beta\right) +$$

$$+\sqrt{2}\varepsilon a^2 \cos^4\left(\sqrt{2}t+\beta\right). \qquad (8.14)$$

Обозначим $\varphi = \sqrt{2}t+\beta$. Тогда уравнения (8.13) и (8.14) принимают вид

$$a'(t) = -\sqrt{2}\varepsilon a^2 \sin^2\varphi\left|\sin\varphi\right| + \sqrt{2}\varepsilon a^3 \sin\varphi\cos^3\varphi, \qquad (8.15)$$

$$\beta'(t) = -\sqrt{2}\varepsilon a \sin\varphi\left|\sin\varphi\right|\cos\varphi + \sqrt{2}\varepsilon a^2 \cos^4\varphi. \qquad (8.16)$$

Очевидно, что функции $a(t)$ и $\beta(t)$ – периодические функции с периодом равным $\sqrt{2}\pi$.

Так как $\left|\sin\varphi\right| \le 1$ и $\left|\cos\varphi\right| \le 1$, то для любого ограниченного a имеем $a' = \boldsymbol{O}(\varepsilon)$ и $\beta' = \boldsymbol{O}(\varepsilon)$. То есть $a(t)$ и $\beta(t)$ являются медленно меняющимися функциями. Это означает, что на интервале $\left[\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}, \frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}\right]$ длиной, равной периоду функций $\sqrt{2}\pi$, они изменяются незначительно и, следовательно, в первом приближении на этом интервале их можно считать постоянными. Усредняя по интервалу $\left[\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}, \frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}\right]$ левые и правые части уравнений (8.15) и (8.16), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}} a'dt = -\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}} a^2\sin^2\varphi\left|\sin\varphi\right|dt + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}} a^3\sin\varphi\cos^3\varphi dt,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}}\beta' dt = -\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}} a\sin\varphi\left|\sin\varphi\right|\cos\varphi dt + \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}} a^2\cos^4\varphi dt .$$

Так как a и β на интервале интегрирования $\left[\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}},\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}\right]$ считаются постоянными, то величины a, a' и β' в этих формулах можно вынести за знак интеграла, в результате чего получаем

$$a' = -\frac{\varepsilon}{\pi}a^2\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}}\sin^2\varphi\left|\sin\varphi\right| dt + \frac{\varepsilon}{\pi}a^3\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}}\sin\varphi\cos^3\varphi dt ,$$

$$\beta' = -\frac{\varepsilon}{\pi}a\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}}\sin\varphi\left|\sin\varphi\right|\cos\varphi dt + \frac{\varepsilon}{\pi}a^2\int\limits_{\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}}\cos^4\varphi dt .$$

Заменим переменную интегрирования t на $\varphi = \sqrt{2}t + \beta$. Тогда, при условии постоянства β на $\left[\frac{-\pi-\beta}{\sqrt{2}},\frac{\pi-\beta}{\sqrt{2}}\right]$, $dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2}}$ и представленные выше соотношения примут вид

$$a' = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}a^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\left|\sin\varphi\right| d\varphi + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}a^3\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi ,$$

$$\beta' = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}a\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi\left|\sin\varphi\right|\cos\varphi d\varphi + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\pi}a^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi .$$

С учетом того, что интегралы от нечетных функций на симметричном промежутке $\left[-\pi,\pi\right]$ равны нулю, а от четных функций равны удвоенным интегралам на промежутке $\left[0,\pi\right]$, имеем

$$a' = -\frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\pi}a^2\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2\varphi\left|\sin\varphi\right| d\varphi , \quad \beta' = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\pi}a^2\int\limits_{0}^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi .$$

Так как $\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi \left|\sin\varphi\right| d\varphi = \int\limits_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi = \int\limits_0^\pi \left(\cos^2\varphi - 1\right) d\left(\cos\varphi\right) =$

$= \left.\left(\dfrac{\cos^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right)\right|_0^\pi = \dfrac{4}{3}$ и $\int\limits_0^\pi \cos^4\varphi d\varphi = \dfrac{1}{8}\int\limits_0^\pi \left(3 + 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi\right) d\varphi = \dfrac{3\pi}{8}$, то отсюда получаем

$$a'(t) = -\frac{4\sqrt{2}\varepsilon a^2}{3\pi}, \tag{8.17}$$

$$\beta'(t) = \frac{3\sqrt{2}\varepsilon}{8} a^2. \tag{8.18}$$

Заметим, что систему дифференциальных уравнений (8.17) и (8.18), из решения которой находятся функции $a(t)$ и $\beta(t)$, можно получить из формул (8.11) и (8.12) на основе разложения нелинейной, периодической (с периодом $\sqrt{2}\pi$) функции $f(u,u')$ в ряд Фурье:

$$f(u,u') = f\left(a\cos\varphi, -\sqrt{2}a\sin\varphi\right) = f_0(a) + \sum_{n=1}^\infty f_n(a)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^\infty g_n(a)\sin n\varphi,$$

где $\varphi = \sqrt{2}t + \beta$, а коэффициенты Фурье в разложении вычисляются по формулам:

$$f_0(a) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}\pi} f\left(a\cos\varphi, -\sqrt{2}a\sin\varphi\right) dt,$$

$$f_n(a) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}\pi} f\left(a\cos\varphi, -\sqrt{2}a\sin\varphi\right)\cos n\varphi dt,$$

$$g_n(a) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}\pi} f\left(a\cos\varphi, -\sqrt{2}a\sin\varphi\right)\sin n\varphi dt.$$

Заменяя функцию $f(u,u')$ ее разложением в ряд Фурье, перепишем уравнения (8.11) и (8.12) в виде

$$a'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon \sin\varphi \left[f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a)\sin n\varphi \right],$$

$$a(t)\beta'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon \cos\varphi \left[f_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a)\sin n\varphi \right].$$

Используя известные тригонометрические формулы, преобразуем эти уравнения к виду

$$a'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon f_0(a)\sin\varphi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)\left[\sin(n+1)\varphi - \sin(n-1)\varphi\right] -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a)\left[\cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi\right];$$

$$a(t)\beta'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon f_0(a)\cos\varphi - \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)\left[\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi\right] -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} g_n(a)\left[\sin(n+1)\varphi + \sin(n-1)\varphi\right].$$

В первом приближении сохраняем только медленно меняющиеся слагаемые в правых частях, то есть только те слагаемые, которые не содержат тригонометрических функций. Такие слагаемые соответствуют членам, содержащим $\cos(n-1)\varphi$ при $n=1$. В результате получаем:

$$a'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon g_1(a), \tag{8.19}$$

$$a(t)\beta'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon f_1(a). \tag{8.20}$$

Вычисляя коэффициенты Фурье $g_1(a)$ и $f_1(a)$, получаем:

$$g_1(a) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\sqrt{2}\pi} f\left(a\cos\varphi, -\sqrt{2}a\sin\varphi\right)\sin\varphi dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\sqrt{2}\pi} \left(2a^2\sin\varphi\left|\sin\varphi\right| - 2a^3\cos^3\varphi\right)\sin\varphi dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\beta}^{2\pi+\beta}\left(2a^2\sin\varphi\left|\sin\varphi\right|-2a^3\cos^3\varphi\right)\sin\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2a^2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\varphi\left|\sin\varphi\right|d\varphi-\frac{2a^3}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=\frac{4a^2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{16a^2}{3\pi}$$

$$f_1\left(a\right)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{0}^{\sqrt{2}\pi}f\left(a\cos\varphi,-\sqrt{2}a\sin\varphi\right)\cos\varphi dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{0}^{\sqrt{2}\pi}\left(2a^2\sin\varphi\left|\sin\varphi\right|-2a^3\cos^3\varphi\right)\cos\varphi dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\beta}^{2\pi+\beta}\left(2a^2\sin\varphi\left|\sin\varphi\right|-2a^3\cos^3\varphi\right)\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{2a^2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi\left|\sin\varphi\right|\cos\varphi d\varphi-\frac{2a^3}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi=-\frac{4a^3}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi=-\frac{3a^2}{2}.$$

Подставляя полученные значения коэффициентов Фурье в формулы (8.19) и (8.20), получаем систему уравнений (8.17) и (8.18).

Решая уравнение (8.17), находим $\frac{da}{a^2}=-\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon dt$, $\quad -\frac{1}{a}=-\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon t-\frac{1}{a_0}$,

где a_0 – некоторая постоянная. Отсюда получаем:

$$a\left(t\right)=\frac{a_0}{1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon a_0 t},\tag{8.21}$$

С учетом (8.21) уравнение (8.18) принимает вид:

$$\beta'\left(t\right)=\frac{0,375\sqrt{2}a_0^2\varepsilon}{\left(1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon a_0 t\right)^2}.$$

Легко показать, что решением этого дифференциального уравнения является функция:

$$\beta(t) = -\frac{\frac{9\pi}{32}a_0}{1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon a_0 t} + \beta_0, \tag{8.22}$$

где β_0 – некоторая постоянная.

Подставляя найденные значения $a(t)$ и $\beta(t)$ в (8.5), в первом приближении получаем

$$u(t) = \frac{a_0}{1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon a_0 t}\cos\left[\sqrt{2}t - \frac{\frac{9\pi}{32}a_0}{1+\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\varepsilon a_0 t} + \beta_0\right]$$

или

$$u(t) = \frac{3\pi a_0}{3\pi + 4\sqrt{2}\varepsilon a_0 t}\cos\left[\frac{512\varepsilon a_0 t^2 + 192\sqrt{2}\pi t - 54\pi^2 a_0}{256\sqrt{2}\varepsilon a_0 t + 192\pi} + \beta_0\right], \tag{8.23}$$

где a_0 и β_0- произвольные постоянные, для нахождения которых используются начальные условия: $u(0) = u_0$ и $u'(0) = u'_0$.

При $\varepsilon = 0,1$ равномерно пригодное разложение первого порядка (8.23) принимает вид

$$u(t) = \frac{3\pi a_0}{3\pi + 0,4\sqrt{2}a_0 t}\cos\left[\frac{51,2a_0 t^2 + 192\sqrt{2}\pi t - 54\pi^2 a_0}{25,6\sqrt{2}a_0 t + 192\pi} + \beta_0\right]. \tag{8.24}$$

При начальных условиях $u(0) = 1$ и $u'(0) = 0$ произвольные постоянные a_0 и β_0 в решении (8.24) находятся из решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} a_0 \cos\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right) = 1; \\ \left(2048 + 76,8a_0^2\right)\sin\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right) = -\frac{4096}{15\pi}. \end{cases} \tag{8.25}$$

Для решения этой нелинейной системы можно применить численный метод Ньютона [2]. Алгоритм метода описывается формулами: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)})$, $k = 0,1,2,3,\ldots$, где $x = \left(a, \beta\right)^T$ - вектор неизвестных; $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \cos\left(-\dfrac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right) - 1 \\ \left(2048 + 76,8a_0^2\right)\sin\left(-\dfrac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right) + \dfrac{4096}{15\pi} \end{bmatrix}$ – вектор-функция, описывающая нелинейную систему уравнений; $W\left(x\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial a_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a_0} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \beta_0} \end{bmatrix}$ - матрица Якоби, в которой:

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_0} = \cos\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right) + \frac{9\pi a_0}{32}\sin\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \beta_0} = -a_0 \sin\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_0} = 153,6a_0 \sin\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right) - \pi\left(576 + 21,6a_0^2\right)\cos\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta_0} = \left(2048 + 76,8a_0^2\right)\cos\left(-\frac{9\pi a_0}{32} + \beta_0\right).$$

В качестве начального приближения выбираем вектор $x^{(0)} = \left(1,0\right)^T$.

В результате вычислений уже после четырех итераций с точностью более шести знаков после десятичной запятой получаем $a = 1,000838$ и $\beta = 0,843397$.

Таким образом, решение дифференциального уравнения (8.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$u\left(t\right) = \frac{9,4328}{9,425 + 0,5662t}\cos\left(\frac{51,243t^2 + 853,03t - 533,4}{36,235t + 603,19} + 0,8434\right). \quad (8.26)$$

Для оценки погрешности построенного методом Ван-дер-Поля приближенного решения (8.26) было найдено, с использованием численных методов, решение уравнения (8.1) на промежутке времени от 0 до 10. При решении уравнения (8.1) применялся численный метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности [3]. Высокая точность результатов вычислений (пять верных знаков после запятой) позволяет принять это решение за истинное.

Шаг интегрирования $h = 0,025$ выбирался с учетом заданной точности вычислений: $\left| u_i(h) - u_i\left(\frac{h}{2}\right) \right| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,00001$.

Результаты вычислений представлены в таблице 8.2. Во второй строке таблицы 8.2 приведены результаты вычислений $u_{\text{т}}(t)$, полученные численным методом и принятые за точное решение уравнения (8.1). В третьей строке таблицы 8.2 представлены значения приближенного решения $u_{\text{рав}}(t)$, построенного на основе равномерно пригодного разложения. Графики решений $u_{\text{т}}(t)$ и $u_{\text{рав}}(t)$ представлены на рис. 8.1 и они практически совпадают.

Таблица 8.2

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$u_{\text{т}}(t)$	1,000	0,129	-0,863	-0,304	0,709	0,443	-0,539	-0,539	0,361	0,590	-0,183
$u_{\text{рав}}(t)$	1,000	0,139	-0,864	-0,311	0,710	0,447	-0,540	-0,541	0,362	0,590	-0,182
$\lvert u_{\text{т}} - u_{\text{рав}} \rvert$	0,000	0,010	0,001	0,007	0,001	0,004	0,001	0,002	0,000	0,000	0,001

Относительная погрешность приближенного решения $u_{\text{рав}}(t)$, которая вычислялась по формуле $\Delta u, \% = \frac{\max\limits_{t \in [0;10]} \left| u_{\text{т}}(t) - u(t) \right|}{\max\limits_{t \in [0;10]} \left| u(t) \right|} 100\%$, оказалась равной 1,1%.

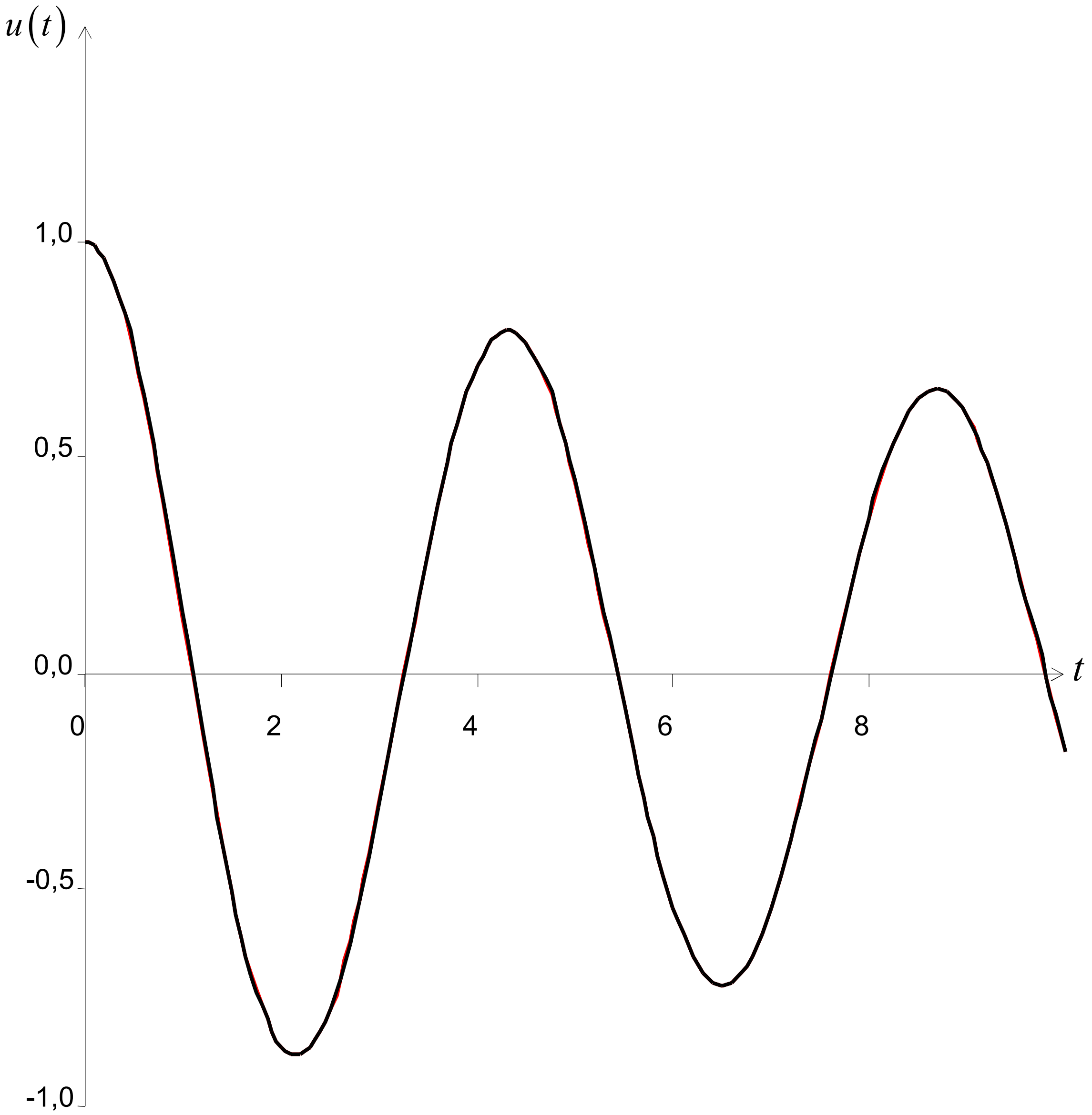


Рис. 8.1. Графики точного и приближенного, построенного на основе метода Ван-дер-Поля, решений дифференциального уравнения, описывающего колебательную систему со слабой нелинейностью общего вида

Контрольные вопросы

1. Как строится прямое разложение решения дифференциального уравнения колебания систем со слабой нелинейностью общего вида?
2. Как вычисляются произвольные постоянные в прямом разложении решения уравнения колебания систем со слабой нелинейностью общего вида?
3. Как определяется область равномерности разложения решения дифференциального уравнения?

4. Какие члены разложения называют секулярными (вековыми)?

5. Какие существуют методы построения равномерно пригодных разложений решения дифференциального уравнения колебания систем со слабой нелинейностью общего вида?

6. В чем заключается применение метода многих масштабов при построении равномерно пригодного разложения решения уравнения колебаний систем со слабой нелинейностью общего вида?

7. В чем состоит метод Ван-дер-Поля, применяемый при построении равномерно пригодного разложения решения дифференциального уравнения колебаний систем со слабой нелинейностью общего вида?

8. В чем заключается применение метода усреднений при построении равномерно пригодного разложения решения уравнения колебаний систем со слабой нелинейностью общего вида?

СОДЕРЖАНИЕ

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Перечень вопросов к зачету

1. Метод возмущений как метод математического моделирования. Основная идея методов возмущений. Примеры использования методов возмущений при решении уравнения теплопроводности.
2. Теоретические основы методов возмущений. Метод регулярных возмущений для неоднородных задач. Формальная схема алгоритма метода возмущений и ее связь с исследованием разрешимости исходного уравнения.
3. Метод возмущений для задач на собственные значения.
4. Сопряженные уравнения и теория возмущений для линейных функционалов.
5. Асимптотические последовательности и разложения. Понятие калибровочной функции. Определение асимптотической последовательности, асимптотического ряда, асимптотического разложения.
6. Равномерность асимптотических разложений.
7. Применение методов возмущений при решении алгебраических уравнений. Обеспечение равномерности разложения при решении уравнений с кратными конями.
8. Регулярные и сингулярные разложения решений алгебраических уравнений.
9. Применение метода возмущений при решении уравнений высших порядков с малым параметром при старшей степени неизвестной.
10. Применение асимптотических разложений к вычислению интегралов. Метод разложения подынтегральной функции при вычислении полного эллиптического интеграла первого рода.
11. Применение асимптотических разложений при вычислении интеграла ошибок.
12. Применение асимптотических разложений в методе интегрирования по частям при вычислении неполной гамма-функции.
13. Применение асимптотических разложений при вычислении преобразований Лапласа.
14. Применение методов возмущений при решении уравнения Дюффинга. Построение прямого разложения и его анализ.
15. Построение равномерных разложений на основе методике Линдштедта - Пуанкаре.
16. Построение равномерных разложений на основе метода перенормировки.
17. Построение равномерных разложений на основе метода многих масштабов.
18. Построение равномерных разложений методом усреднения.
19. Построение равномерных разложений при решении уравнений колебаний систем со слабой нелинейностью общего вида. Построение прямого разложения и его анализ.
20. Построение равномерных разложений при решении уравнений колебаний систем со слабой нелинейностью общего вида. Построение равномерного разложения методом перенормировки.
21. Построение равномерных разложений при решении уравнений колебаний систем со слабой нелинейностью общего вида. Построение равномерного разложения методом многих масштабов.
22. Построение равномерных разложений при решении уравнений колебаний систем со слабой нелинейностью общего вида. Построение равномерного разложения методом усреднений.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускник по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика Самарского государственного технического университета отвечает следующим требованиям:

– имеет целостное представление о процессах и явлениях, происходящих в неживой и живой природе, понимает возможности современных научных методов познания природы и владеет ими на уровне, необходимом для решения задач, имеющих естественнонаучное содержание и возникающих при выполнении профессиональных функций;

– способен продолжить обучение в аспирантуре, вести профессиональную деятельность в иноязычной среде;

– владеет культурой мышления, знает его общие законы, способен в письменной и устной речи правильно (логически) оформить его результаты;

– умеет на научной основе организовать свой труд, владеет компьютерными методами сбора, хранения и обработки (редактирования) информации, применяемые в сфере его профессиональной деятельности;

– способен в условиях развития науки и изменяющейся социальной практики к переоценке накопленного опыта, анализу своих возможностей, умеет приобретать новые знания, обучаться в аспирантуре, использовать другие формы обучения, включая самостоятельные и информационно образовательные технологии;

– понимает сущность и социальную значимость своей будущей профессии, основные проблемы дисциплин, определяющих конкретную область его деятельности, видит их взаимосвязь в целостной системе знаний;

– способен к проектной деятельности в профессиональной сфере на основе системного подхода, умеет строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ;

– способен поставить цель и сформулировать задачи, связанные с реализацией профессиональных функций, умеет использовать для их решения методы изученных им наук;

– готов к кооперации с коллегами и работе в коллективе, знаком с методами управления, умеет организовать работу исполнителей, находить и принимать управленческие решения в условиях различных мнений, знает основы педагогической деятельности;

– методически и психологически готов к изменению вида и характера своей профессиональной деятельности, работе над междисциплинарными проектами;

– знает основные тенденции развития современными естествознания, принципы математического моделирования и его применения в исследовании физических, химических, биологических, экологических процессов;

– способен к совершенствованию своей профессиональной деятельности в области математики, программирования.

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

N п/п	Автор	Название	Место издания	Наименование издательства	Год издания	Количество экземпляров
Основная литература						
1	Марчук Г.И.	Методы вычислительной математики	Краснодар	Лань	2009	2
Дополнительная литература						
1	Найфэ А.Х.	Методы возмущений	Москва	Мир	1976	2
2	Найфэ А.Х.	Введение в методы возмущений	Москва	Мир	1984	3
Методические указания и материалы						
1	Зотеев В.Е., Заусаев А.Ф.	Применение методов возмущений в математическом моделировании: лаб. практикум и учеб. метод. указ.	Самара	СамГТУ	2010	10

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет»

Сайт научной электронной библиотекиeLIBRARY.RU (http://elibrary.ru)
Общероссийский математический портал Math-Net.ru (http://www.mathnet.ru)
Национальном Открытом Университете «ИНТУИТ» (http://www.intuit.ru)
Сайт кафедры прикладная математика и информатика СамГТУ
http://home.samgtu.ru/~pmi/stud_posob.html

СОДЕРЖАНИЕ

Зотеев Владимир Евгеньевич

Методические указания по дисциплине
«Методы возмущений в математическом моделировании»

Электронные методические указания

Компьютерная верстка Е. В. Башкинова

Подписано для размещения в электронной библиотеке СамГТУ 25.12.2014

Формат 60x84 $1/8$.

Усл. п. л. .12,09_. Уч. -изд. л. 13,37.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.
E-mail radch@samgtu.ru