



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Самарский государственный технический университет»  
(ФГБОУ ВПО «СамГТУ»)

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
«СТОХАСТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ  
РЕОЛОГИИ И НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ  
КОНСТРУКЦИЙ»**

**Самара 2014г.**

**Попов Н.Н.,**

**Методические указания по дисциплине «Стохастические краевые задачи реологии и надежность элементов конструкций» / Самар. гос. техн. ун-т; Сост *Попов Н.Н.* Самара, 2014г.**

Методические указания предназначены для работы в аудитории и самостоятельной работы магистров по направлению подготовки 01.04.02 (010400.68) «Прикладная математика и информатика».

Печатается по решению методического совета Инженерно-экономического факультета

## СОДЕРЖАНИЕ

1	<a href="#">Предисловие</a> .....	4
2	<a href="#">Введение</a> .....	6
3	<a href="#">Методические указания для самостоятельной работы обучающихся</a> .....	8
4	<a href="#">Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины</a> .....	17
4.1	<a href="#">Методические указания к лекционным занятиям</a> .....	17
4.2	<a href="#">Методические указания к практическим (семинарским) занятиям</a> .....	22
5	<a href="#">Вопросы для промежуточной аттестации по дисциплине</a> .....	38
6	<a href="#">Заключение</a> .....	40
7	<a href="#">Литература</a> .....	41

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Магистр по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика в соответствии с выбранными приоритетными видами профессиональной деятельности должен быть подготовлен к решению следующих профессиональных задач:

### **в научной и научно-исследовательской деятельности:**

- изучение новых научных результатов, научной литературы или научно-исследовательских проектов в соответствии с профилем объекта профессиональной деятельности;
- применение наукоемких технологий и пакетов программ для решения прикладных задач в области физики, химии, биологии, экономики, медицины, экологии; изучение информационных систем методами математического прогнозирования и системного анализа;
- изучение больших систем современными методами высокопроизводительных вычислительных технологий, применение современных суперкомпьютеров в проводимых исследованиях;
- исследование и разработка математических моделей, алгоритмов, методов, программного обеспечения, инструментальных средств по тематике проводимых научно-исследовательских проектов;
- составление научных обзоров, рефератов и библиографии по тематике проводимых исследований;
- участие в работе научных семинаров, научно-тематических конференций, симпозиумов;
- подготовка научных и научно-технических публикаций;

### **в проектной и производственно-технологической деятельности:**

- исследование математических методов моделирования информационных и имитационных моделей по тематике выполняемых научно-исследовательских прикладных задач или опытно-конструкторских работ;
- исследование автоматизированных систем и средств обработки информации, средств администрирования и методов управления безопасностью компьютерных сетей;
- изучение элементов проектирования сверхбольших интегральных схем, моделирование и разработка математического обеспечения оптических или квантовых элементов для компьютеров нового поколения;
- разработка программного и информационного обеспечения компьютерных сетей, автоматизированных систем вычислительных комплексов, сервисов, операционных систем и распределенных баз данных;
- разработка и исследование алгоритмов, вычислительных моделей и моделей данных для реализации элементов новых (или известных) сервисов систем информационных технологий;
- разработка архитектуры, алгоритмических и программных решений системного и изучение языков программирования, алгоритмов, библиотек и пакетов программ, прикладного программного обеспечения;
- продуктов системного и прикладного программного обеспечения;
- изучение и разработка систем цифровой обработки изображений, средств компьютерной графики, мультимедиа и автоматизированного проектирования;
- развитие и использование инструментальных средств, автоматизированных систем в научной и практической деятельности;

**в педагогической деятельности:**

- владение методикой преподавания учебных дисциплин;
- владение методами электронного обучения;
- консультирование по выполнению курсовых и дипломных работ студентов образовательных учреждений высшего профессионального и среднего профессионального образования по тематике в области прикладной математики и информационных технологий;
- проведение семинарских и практических занятий по общематематическим дисциплинам, а также лекционных занятий по профилю специализации.

**Выпускник должен обладать следующими общекультурными компетенциями:**

- способностью понимать философские концепции естествознания, владеть основами методологии научного познания при изучении различных уровней организации материи, пространства и времени (ОК-1);
- способностью иметь представление о современном состоянии и проблемах прикладной математики и информатики, истории и методологии их развития (ОК-2);
- способностью использовать углубленные теоретические и практические знания в области прикладной математики и информатики (ОК-3);
- способностью самостоятельно приобретать с помощью информационных технологий и использовать в практической деятельности новые знания и умения, в том числе в новых областях знаний, непосредственно не связанных со сферой деятельности, расширять и углублять свое научное мировоззрение (ОК-4);
- способностью порождать новые идеи и демонстрировать навыки самостоятельной научно-исследовательской работы и работы в научном коллективе (ОК-5);
- способностью совершенствовать и развивать свой интеллектуальный и общекультурный уровень, добиваться нравственного и физического совершенствования своей личности (ОК-6);
- способностью и готовностью к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности (ОК-7);
- способностью свободно пользоваться русским и иностранным языками как средством делового общения; способностью к активной социальной мобильности (ОК-8);
- способностью использовать углубленные знания правовых и этических норм при оценке последствий своей профессиональной деятельности, при разработке и осуществлении социально значимых проектов (ОК-9).

**Выпускник должен обладать следующими профессиональными компетенциями:**

- способностью проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты (ПК-1);
- способностью разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач (ПК-2);
- проектная и производственно-технологическая деятельность: способностью углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3);
- способностью разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов (ПК-4);

- организационно-управленческая деятельность: способностью управлять проектами (подпроектами), планировать научно-исследовательскую деятельность, анализировать риски, управлять командой проекта (ПК-5);
- способностью организовывать процессы корпоративного обучения на основе технологий электронного и мобильного обучения и развития корпоративных баз знаний (ПК-6);
- нормативно-методическая деятельность: способностью разрабатывать и оптимизировать бизнес-планы научно-прикладных проектов (ПК-7);
- педагогическая деятельность: способностью проводить семинарские и практические занятия с обучающимися, а также лекционные занятия спецкурсов по профилю специализации (ПК-8);
- способностью разрабатывать учебно-методические комплексы для электронного и мобильного обучения (ПК-9);
- способностью разрабатывать аналитические обзоры состояния области прикладной математики и информационных технологий по профильной направленности ООП магистратуры (ПК-10);
- способностью работать в международных проектах по тематике специализации (ПК-11);
- способностью участвовать в деятельности профессиональных сетевых сообществ по конкретным направлениям (ПК-12);
- социально ориентированная: способностью осознавать корпоративную политику в области повышения социальной ответственности бизнеса перед обществом, принимать участие в ее развитии (ПК-13);
- социально ориентированная деятельность: способность использования основ защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий, катастроф, стихийных бедствий и применения современных средств поражения, основных мер по ликвидации их последствий, способность к общей оценке условий безопасности жизнедеятельности (ПК-13);
- способность реализации решений, направленных на поддержку социально значимых проектов, на повышение электронной грамотности населения, обеспечения общедоступности информационных услуг (ПК-14).

## [СОДЕРЖАНИЕ](#)

## ВВЕДЕНИЕ

**Целью освоения дисциплины** «Стохастические краевые задачи реологии и надежность элементов конструкций» является формирование общекультурных и профессиональных компетенций, необходимых для реализации преимущественно следующих видов деятельности: научной и научно-исследовательской, а также педагогической:

**ОК-7** Способность и готовность к активному общению в научной, производственной и социально-общественной сферах деятельности.

**ПК-3** Способность углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности.

**Задачами изучения дисциплины** выступает приобретение в рамках освоения теоретического и практического материала по дисциплине:

### **знаний:**

- основ теории случайных функций и случайных полей, спектральной теории однородных случайных полей;
- основных методов решения стохастических нелинейных краевых задач;
- основных положений современной математической теории надежности элементов конструкций;
- методов моделирования стохастических систем при помощи дифференциальных уравнений;

### **умений:**

- применять методы теории вероятностей и случайных функций при исследовании стохастических систем;
- оценивать надежность элементов конструкций при ползучести по критерию деформационного типа и длительной прочности;
- применять методы теории выбросов для расчета надежности элементов конструкций при ползучести;
- ориентироваться в круге основных проблем, возникающих при решении стохастических нелинейных краевых задач ползучести;

### **владений:**

- навыками статистического анализа деформаций ползучести при постоянном и переменном напряжениях;
- компьютерными технологиями и пакетами прикладных программ для решения стохастических задач ползучести;
- навыками решения стохастических краевых задач механики деформируемого твердого тела;
- навыками построения стохастических моделей для конкретных процессов и проводить необходимые расчеты в рамках построенной модели.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с постановкой и решением стохастических нелинейных краевых задач механики деформируемого твердого тела и оценкой надежности стохастических элементов конструкции.

## [СОДЕРЖАНИЕ](#)

# **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «СТОХАСТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РЕОЛОГИИ И НАДЕЖНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ»**

Самостоятельная работа студентов является одной из важнейших составляющих учебного процесса, в ходе которого происходит формирование знаний, умений и навыков в учебной, научно-исследовательской, профессиональной деятельности, формирование общекультурных и профессиональных компетенций будущего магистра.

Учебно-методическое обеспечение создаёт среду актуализации самостоятельной творческой активности студентов, вызывает потребность к самопознанию, самообучению. Таким образом, создаются предпосылки «двойной подготовки» - личностного и профессионального становления.

Для успешного осуществления самостоятельной работы необходимы:

1. Комплексный подход организации самостоятельной работы по всем формам аудиторной работы;
2. Сочетание всех уровней (типов) самостоятельной работы, предусмотренных рабочей программой;
3. Обеспечение контроля за качеством усвоения.

Методические материалы по самостоятельной работе студентов содержат целевую установку изучаемых тем, списки основной и дополнительной литературы для изучения всех тем дисциплины, теоретические вопросы и вопросы для самоподготовки, усвоив которые магистрант может выполнять определенные виды деятельности (предлагаемые на практических, семинарских, лабораторных занятиях), методические указания для студентов.

## **1.1 Виды самостоятельной работы**

Рабочей программой дисциплины предусмотрены следующие виды самостоятельной работы студентов

### **1.2 Самостоятельная работа, обеспечивающая подготовку к текущим аудиторным занятиям;**

- *для овладения знаниями*: чтение текста (учебника, дополнительной литературы, научных публикаций); составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; работа со словарями и справочниками; работа с нормативными документами; учебно-исследовательская работа; использование аудио- и видеозаписей; компьютерной техники, Интернет и др.;

- *для закрепления и систематизации знаний*: работа с конспектом лекции (обработка текста); аналитическая работа с фактическим материалом (учебника, дополнительной литературы, научных публикаций, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; составление таблиц и схем для систематизации фактического материала; изучение нормативных материалов; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии; тестирование и др.;

- *для формирования умений*: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем; выполнение расчетно-



графических работ; решение ситуационных производственных (профессиональных) задач; подготовка к деловым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности; подготовка курсовых и дипломных работ (проектов); экспериментально-конструкторская работа; исследовательская и проектная работа.

### **1.2.1 Проработка теоретического материала (учебниками, первоисточниками, дополнительной литературой);**

При изучении нового материала на лекциях, освещаются наиболее важные и сложные вопросы учебной дисциплины, вводится новый фактический материал.

Поэтому к каждому последующему занятию студенты готовятся по следующей схеме:

- разобраться с основными положениями предшествующей лекции;
- изучить соответствующие темы в учебных пособиях.

### **1.2.2 Работа с дополнительной учебной и научной литературой.**

Включает в себя составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; конспектирование научных статей заданной тематики.

### **1.2.3 Составление презентаций на темы лекций**

#### **Практические рекомендации по созданию презентаций**

Создание презентации состоит из трех этапов:

1. Планирование презентации – это многошаговая процедура, включающая определение целей, изучение аудитории, формирование структуры и логики подачи материала.
2. Разработка презентации – методологические особенности подготовки слайдов презентации, включая вертикальную и горизонтальную логику, содержание и соотношение текстовой и графической информации.
3. Репетиция презентации – это проверка и отладка созданной презентации.

### **1.2.4 Перечень тем, выносимых для самостоятельной работы студентов**

Одним из видов самостоятельной работы, позволяющей студенту более полно освоить учебный материал, является подготовка сообщений (докладов), эссе, реферата.

Доклад – это научное сообщение на семинарском занятии, заседании студенческого научного кружка или студенческой конференции.

Эссе – жанр философской, литературно-критической, историко-биографической, публицистической прозы, сочетающий подчеркнуто индивидуальную позицию автора с непринужденным, часто парадоксальным изложением, ориентированным на разговорную речь.

Реферат – это краткое изложение современной научной и учебной литературы, журнальных и газетных публикаций, статистических материалов по конкретной теме.

Процесс написания реферата включает в себя несколько этапов:

- выбор темы реферата;
- поиск научной и учебной литературы по выбранной теме и ее обзор;
- разработка плана реферата;
- написание содержания реферата;
- оформление реферата в соответствии с требованиями;
- сдача реферата преподавателю и его защита перед аудиторией

оценка реферата (оценивается уровень полноты проведенного исследования; качество оформления работы; самостоятельность студента, творческая инициатива и умение защищать принятые решения).

Следует выделить подготовку к экзаменам, зачетам, защитам как особый вид самостоятельной работы. Основное его отличие от других видов самостоятельной работы состоит в том, что обучающиеся решают задачу актуализации и систематизации учебного материала, применения приобретенных знаний и умений в качестве структурных элементов компетенций, формирование которых выступает целью и результатом освоения образовательной программы.

***По дисциплине «Стохастические краевые задачи реологии и надежность элементов конструкций» применяются следующие виды СРС.***

1. Подготовка к практическим занятиям;
2. Выполнение домашних заданий;
3. Подготовка к контрольной работе;
4. Подготовка к зачету

Задачами СРС по дисциплине «***Стохастические краевые задачи реологии и надежность элементов конструкций***» являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать справочную документацию, специальную литературу и информационные ресурсы Интернет;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

### ***1. Подготовка к практическому занятию.***

При подготовке к практическим занятиям, обучающимся необходимо изучить лекционный материал, основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы.

*Рекомендации по работе с литературой и использованию материалов учебно-методического комплекса*

Рекомендуется использовать методические указания по курсу, текст лекций преподавателя. Однако теоретический материал курса становится более понятным, когда

дополнительно к прослушиванию лекции и изучению конспекта, изучаются и книги. Легче освоить курс придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться состояния понимания изучаемой темы дисциплины. С этой целью рекомендуется после изучения очередного параграфа выполнить несколько простых упражнений на данную тему. Кроме того, очень полезно мысленно задать себе следующие вопросы (и попробовать ответить на них): о чем этот параграф?, какие новые понятия введены, каков их смысл?, что даст это на практике?

*Подготовка к практическим занятиям №1-2 по разделу 1*

### **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ:**

Просмотр конспектов по ранее пройденным дисциплинам;

составление таблиц и схем для систематизации фактического материала.

проработку теоретического материала (учебниками, первоисточниками, дополнительной литературой).

работу с дополнительной учебной и научной литературой.

работу с Интернет ресурсами.

#### **ВОПРОСЫ**

Случайные поля.

Способы задания случайных полей.

Основные числовые характеристики случайных полей.

Однородные случайные поля, их спектральное разложение.

Изотропные случайные поля.

Представление многомерной корреляционной функции через функцию одной переменной.

*Подготовка к практическому занятию №3 по разделу 2.*

### **СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Просмотр конспектов по ранее пройденным дисциплинам;

составление таблиц и схем для систематизации фактического материала.

проработку теоретического материала (учебниками, первоисточниками, дополнительной литературой).

работу с дополнительной учебной и научной литературой.

работу с Интернет ресурсами.

#### **ВОПРОСЫ**

Стохастический характер деформаций пластичности и ползучести.

Разброс экспериментальных данных для первичных кривых ползучести и пластичности.

Неоднородность деформаций пластичности и ползучести на микро- и макроуровне.

Статистический анализ деформаций ползучести при постоянном напряжении.

Корреляционный анализ случайных полей деформаций ползучести и пластичности.

Металлофизические аспекты формирования реологических деформаций.

Основные подходы построения стохастических уравнений ползучести, экспериментальное обоснование гипотез.

Идентификация случайных параметров и функций стохастических уравнений ползучести по

опытным данным, проверка критериев согласия.

Математическое моделирование деформаций ползучести при переменном силовом нагружении методом Монте-Карло в условиях одноосного и сложного напряжённых состояний.

Прогнозирование полосы разброса опытных данных по ползучести.

*Подготовка к практическим занятиям №4-6 по разделу 3.*

### **МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Просмотр конспектов по ранее пройденным дисциплинам;

составление таблиц и схем для систематизации фактического материала.

проработку теоретического материала (учебниками, первоисточниками, дополнительной литературой).

работу с дополнительной учебной и научной литературой.

работу с Интернет ресурсами.

#### **ВОПРОСЫ**

Постановка стохастических краевых задач ползучести.

Основные методы решения нелинейных стохастических краевых задач: метод возмущений, метод малого параметра, метод спектральных представлений.

Обобщение подходов В.В. Болотина и В.А. Ломакина.

Решение одномерных стохастических краевых задач ползучести: стержневые системы, толстостенная труба, толстостенная сфера, пластина с круговым отверстием.

Статистические характеристики случайных полей напряжений, скоростей деформаций и перемещений для элементов конструкций.

Решение двумерных стохастических краевых задач ползучести: растягиваемая пластина, полоса с концентратором.

Статистический анализ случайных полей напряжений и скоростей деформаций.

Исследование краевых эффектов.

Решение пространственных стохастических задач ползучести.

Решение стохастической задачи ползучести с учетом и без учета упругой деформации.

Исследование полей напряжений и скоростей деформаций вблизи границы стохастически неоднородного полупространства.

*Подготовка к практическим занятиям №7-8 по разделу 4.*

### **ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ НА НАДЕЖНОСТЬ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

Просмотр конспектов по ранее пройденным дисциплинам;

составление таблиц и схем для систематизации фактического материала.

проработку теоретического материала (учебниками, первоисточниками, дополнительной литературой).

работу с дополнительной учебной и научной литературой.

работу с Интернет ресурсами.

#### **ВОПРОСЫ**

Общая постановка задачи теории надежности машин и конструкций.

Элементарные модели отказов машин и конструкций.

Кумулятивные модели.

Модели пуассоновского типа.

Модели марковского типа.

Параметрические и катастрофические критерии отказа.

Методы оценки надёжности элементов конструкций на основе решений стохастических краевых задач.

Распределение срока службы элементов конструкций, работающих с ограничением по деформации (напряжению).

Вычисление вероятности безотказной работы элемента конструкции по критерию длительной прочности.

Прогнозирование ресурса элемента конструкции.

Прогнозирование на основе кумулятивных моделей.

Прогнозирование на основе моделей пуассоновского типа

### **Литература для подготовки к занятиям**

1. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. СПб: Лань, 2011. 464 с.
2. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с.
3. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М: Логос, 2004. 1000с.
4. Радченко В.П., Попов Н.Н. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы// Прикладная математика и механика, 2012. Т. 76, № 6. С. 1023-1031.
5. Радченко В.П., Коваленко Л.В., Попов Н.Н. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести // Прикладная математика и механика, 2009. Т. 73, № 6. С. 1009-1016.
6. Радченко В.П., Попов Н.Н. Нелинейная стохастическая задача о ползучести неоднородной плоскости с учетом поврежденности материала // Прикладная механика и техническая физика. 2007. №2 С. 140-146.
7. Попов Н.Н., Коваленко Л.В. Оценка надежности осесимметричных стохастических элементов конструкций при ползучести по теории выбросов // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки, № 2 (27). Самара: СамГТУ, 2012. - С. 72-77.
8. Попов Н.Н. Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием// Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки, № 2 (17). Самара: СамГТУ, 2008. - С. 126-132.
9. Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. СПб: Лань, 2008. 448 с.

## **2. Выполнение домашних заданий**

*Выполнение домашних заданий (решение задач и упражнений) к занятиям №1-2 по разделу 1*

### **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

*по темам*

Вычисление основных характеристик случайных полей

Спектральная теория однородных случайных полей

*Выполнение домашних заданий (решение задач и упражнений) к практическому занятию №3 по разделу 2*

### **СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ**

*по темам*

Статистический анализ деформаций ползучести при постоянном напряжении.

Решение стохастической краевой задачи для толстостенной трубы.

Решение стохастической краевой задачи для пластины с круговым отверстием.

*Выполнение домашних заданий (решение задач и упражнений) к практическим занятиям №4-6 по разделу 3*

### **МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ**

*по темам*

Решение плоской стохастической задачи при установившейся ползучести

Решение пространственной стохастической задачи при установившейся ползучести

Исследование краевых эффектов стохастически неоднородных элементов конструкций при установившейся ползучести

*Выполнение домашних заданий (решение задач и упражнений) к практическим занятиям №7-8 по разделу 4*

### **ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ НА НАДЁЖНОСТЬ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**

*по темам*

Оценки надежности стержневых элементов конструкций по деформационному критерию и критерию длительной прочности.

Оценки надежности распределенных элементов конструкций по деформационному критерию и критерию длительной прочности.

## **3. Подготовка к контрольной работе**

Предварительную подготовку к контрольной работе целесообразно проводить в следующей последовательности:

1. Записать содержание учебных тем,

2. По темам выносимым на контрольную работу, внимательно проработать теоретический материал по конспекту лекций, учебнику или учебному пособию.

3. Внимательно рассмотреть задачи, решенные на практических занятиях, в часы самостоятельной подготовки, а также примеры решения задач, приведенные в задачниках и учебных пособиях, прочитать соответствующие методические рекомендации, приведенные там.

5. Завершающей фазой подготовки может служить самостоятельное решение произвольного числа задач из задачников по соответствующим темам без использования любых вспомогательных материалов и литературы

6. Все вопросы, возникшие при подготовке, целесообразно выписывать на отдельном листе бумаги с последующей консультацией по ним у преподавателя до начала контрольной работы.

#### **4. Подготовка к зачёту:**

При подготовке к зачёту магистрант в короткий срок прорабатывает содержание лекций по своему конспекту и, при необходимости, по рекомендованным учебникам. На каждый вопрос студент должен написать план ответа, кратко перечислить и запомнить основные факты и положения. На этапе подготовки к зачёту магистрант интегрирует информацию, относящуюся к разным разделам лекционного материала, лучше понимает взаимосвязь различных фактов и положений дисциплины, восполняет пробелы в своих знаниях.

#### **Материалы для подготовки студентов к итоговой контрольной работе и к зачету**

1. Дать определение случайного поля.
2. Способы задания случайных полей
3. Каковы свойства корреляционной функции для однородного случайного поля.
4. Каковы свойства корреляционной функции для изотропного случайного поля.
5. Как с помощью тригонометрического ряда строится спектральное представление однородного случайного поля.
6. Что такое спектральная плотность однородного случайного поля с непрерывным спектром. Как через него выражается корреляционная функция поля.
7. Записать обратное косинус-преобразование Фурье, выражающее спектральную плотность через корреляционную функцию процесса.
8. Как на основе опытных данных найти корреляционную функцию деформации ползучести
9. Какие новые эффекты обуславливает появление структурная неоднородность материала, которые не могут быть описаны в рамках классических феноменологических теорий
10. Как влияют стохастические неоднородности материала на случайные поля напряжений и деформаций при установившейся ползучести
11. Указать основные подходы построения стохастических уравнений ползучести
12. Как идентифицировать случайные параметры и функции, входящие в стохастические уравнения ползучести
13. Как моделировать деформацию ползучести при переменном силовом нагружении методом Монте-Карло

14. Дать общую постановку стохастической краевой задачи механики деформируемого твердого тела
15. Как линеаризуется нелинейная стохастическая задача при помощи метода возмущений
16. Как решить нелинейную стохастическую задачу при помощи метода малого параметра.
17. Как оценить погрешность решения стохастической краевой задачи, полученной на основе метода малого параметра
18. Для решения каких стохастических задач можно использовать метод спектрального представления.
19. Дать постановку одномерной стохастической краевой задачи ползучести в цилиндрической системе координат для толстостенной трубы
20. В каком виде берется корреляционная функция микронеоднородностей в двумерной стохастической задаче ползучести толстостенной трубы
21. Дать постановку одномерной стохастической краевой задачи ползучести для пластины с круговым отверстием
22. Как оценить концентрацию напряжения на границе стохастически неоднородной полуплоскости
23. В каком виде нужно искать решение стохастически нелинейной краевой задачи ползучести для плоского напряженного состояния
24. Какие основные статистические характеристики случайных полей напряжений можно найти в результате решения стохастической задачи ползучести. Выписать их для плоской неограниченной среды.
25. Указать вид решения пространственной стохастической краевой задачи ползучести
26. Дать общую постановку задачи теории надежности машин и конструкций
27. Дать определения основных характеристик надежности элементов конструкций
28. Как оценить надежность элемента конструкции на основе кумулятивной модели.
29. Для каких элементов конструкций можно оценивать надежность на основе модели пуассоновского типа.
30. Как в модели пуассоновского типа вычислить математическое ожидание числа отказов.
31. Как оценить надежность элемента конструкции на основе модели марковского типа.
32. Указать основные методы оценки надежности элементов конструкций на основе решения стохастической краевой задачи
33. Как оценить надежность стержневых элементов конструкций по критерию деформационного типа.
34. Как оценить надежность стержневых элементов конструкций по критерию длительной прочности.
35. Как назначить ресурс элемента конструкции по вероятности безотказной работы.
36. Как прогнозировать остаточный ресурс стержневых элементов конструкций на основе условной вероятности безотказной работы

## [СОДЕРЖАНИЕ](#)



**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ  
ДИСЦИПЛИНЫ  
«СТОХАСТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РЕОЛОГИИ И НАДЕЖНОСТЬ  
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛЕКЦИОННЫМ ЗАНЯТИЯМ**

Лекция представляет собой систематическое устное изложение учебного материала. С учетом целей и места в учебном процессе различают лекции вводные, установочные, текущие, обзорные и заключительные. В зависимости от способа проведения выделяют лекции:

- *Информационные;*
- *Проблемные;*
- *Визуальные;*
- *бинарные (лекция-диалог);*
- *лекции-провокации;*
- *лекции-конференции;*
- *лекции-консультации;*
- *лекции-беседы;*
- *лекция с эвристическими элементами;*
- *лекция с элементами обратной связи;*
- *лекция с решением производственных и конструктивных задач;*
- *лекция с элементами самостоятельной работы студентов;*
- *лекция с решением конкретных ситуаций;*
- *лекция с коллективным исследованием;*
- *лекции спецкурсов.*

По дисциплине **«Стохастические краевые задачи реологии и надежность элементов конструкций»** применяется следующие способы проведения лекции:

- ✓ *информационные* – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций;
- ✓ *лекция с эвристическими элементами.* В процессе изложения учебного материала перед студентами ставится задача и они, опираясь на имеющиеся знания, должны: найти собственное (индивидуальное, коллективное) решение; сделать самостоятельное открытие; принять самостоятельное, логически обоснованное решение.
- ✓ *лекция с элементами самостоятельной работы студентов.*

Представляет собой разновидность занятий, когда после теоретического изложения материала требуется практическое закрепление знаний (именно по данной теме занятий) путем самостоятельной работы над определенным заданием. (Часто применяется в спецпредметах).

- ✓ *лекции спецкурсов*

Большое научное и образовательное значение имеют по узкому кругу вопросов, с более глубоким научным содержанием. Главная их задача – поиски новых путей в решении

тех или иных научных проблем. На лекциях спецкурсов преподаватель излагает результаты собственной научной или производственной деятельности.

Очень важно при объяснении выделять основные, опорные моменты, опираясь на которые, студенты справятся с самостоятельным выполнением задания. Следует обратить внимание и на часто встречающиеся (возможные) ошибки при выполнении данной самостоятельной работы.

## **РАЗДЕЛ 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

### ***Лекция 1.***

*Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций*

#### ***вопросы***

Случайные поля.

Способы задания случайных полей.

Основные числовые характеристики случайных полей.

Однородные случайные поля, их спектральное разложение.

Изотропные случайные поля.

Представление многомерной корреляционной функции через функцию одной переменной

## **РАЗДЕЛ 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

### ***Лекция 2.***

*Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций*

#### ***вопросы***

Стохастический характер деформаций пластичности и ползучести.

Разброс экспериментальных данных для первичных кривых ползучести и пластичности.

Неоднородность деформаций пластичности и ползучести на микро- и макроуровне.

Статистический анализ деформаций ползучести при постоянном напряжении.

Корреляционный анализ случайных полей деформаций ползучести и пластичности.

Металлофизические аспекты формирования реологических деформаций.

Анализ экспериментальных данных.

## **РАЗДЕЛ 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

### ***Лекция 3.***

*лекция с эвристическими элементами студенты должны найти (индивидуальное, коллективное) решение поставленной задачи, принять самостоятельное, логически обоснованное решение.*

#### ***вопросы***

Основные подходы построения стохастических уравнений ползучести, экспериментальное обоснование гипотез.

Идентификация случайных параметров и функций стохастических уравнений ползучести по опытным данным, проверка критериев согласия.

Математическое моделирование деформаций ползучести при переменном силовом

нагружении методом Монте-Карло в условиях одноосного и сложного напряжённых состояний.

Адекватность стохастических моделей экспериментальным данным. Прогнозирование полосы разброса опытных данных по ползучести.

### **РАЗДЕЛ 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

#### ***Лекция 4.***

##### ***вопросы***

.Постановка стохастических краевых задач ползучести.

Основные методы решения нелинейных стохастических краевых задач: метод возмущений, метод малого параметра, метод спектральных представлений.

Обобщение подходов В.В. Болотина и В.А. Ломакина.

### **РАЗДЕЛ 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

#### ***Лекция 5.***

*лекция с эвристическими элементами студенты должны найти (индивидуальное, коллективное) решение поставленной задачи, принять самостоятельное, логически обоснованное решение.*

##### ***вопросы***

Решение одномерных стохастических краевых задач ползучести:

стержневые системы,

толстостенная труба,

толстостенная сфера,

пластина с круговым отверстием.

Статистические характеристики случайных полей напряжений, скоростей деформаций и перемещений для элементов конструкций

### **РАЗДЕЛ 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

#### ***Лекция 6.***

*лекция спецкурс преподаватель излагает результаты собственной научной или производственной деятельности.*

##### ***вопросы***

Решение двумерных стохастических краевых задач ползучести: растягиваемая пластина, полоса с концентратором.

Статистический анализ случайных полей напряжений и скоростей деформаций.

Исследование краевых эффектов.

### **РАЗДЕЛ 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

#### **Лекция 7.**

*лекция спецкурс преподаватель излагает результаты собственной научной или производственной деятельности.*

#### **вопросы**

Решение пространственных стохастических задач ползучести.

Решение стохастической задачи ползучести с учетом и без учета упругой деформации.

Исследование полей напряжений и скоростей деформаций вблизи границы стохастически неоднородного полупространства

### **РАЗДЕЛ 4. ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ НА НАДЁЖНОСТЬ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

#### **Лекция 8.**

*Информационная лекция – проводятся с использованием объяснительно иллюстративного метода изложения; это традиционный для высшей школы тип лекций*

#### **вопросы**

Общая постановка задачи теории надежности машин и конструкций.

Элементарные модели отказов машин и конструкций.

Кумулятивные модели.

Модели пуассоновского типа.

Модели марковского типа.

Параметрические и катастрофические критерии отказа.

Методы оценки надёжности элементов конструкций на основе решений стохастических краевых задач.

Распределение срока службы элементов конструкций, работающих с ограничением по деформации (напряжению).

Вычисление вероятности безотказной работы элемента конструкции по критерию длительной прочности

### **РАЗДЕЛ 4. ОСНОВЫ РАСЧЁТОВ НА НАДЁЖНОСТЬ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ.**

#### **Лекция 9.**

*лекция с элементами самостоятельной работы студентов, после теоретического изложения материала требуется практическое закрепление знаний (именно по данной теме занятий) путем самостоятельной работы над определенным заданием.*

#### **вопросы**

Прогнозирование ресурса элемента конструкции.

Прогнозирование на основе кумулятивных моделей.

Прогнозирование на основе моделей пуассоновского типа

### *Написание конспекта лекций:*

Лекции являются эффективным видом занятий для формирования у студентов способности быстро воспринимать новые факты, идеи, обобщать их, а также самостоятельно мыслить.

Лектор излагает теоретический и практический материал, относящийся к основному курсу. Из большого числа монографий, учебников, сборников лектор выбирает самое главное, помогает усвоить логику рассуждений. Интонацией голоса и манерой изложения лектором подчеркивает наиболее существенное, выделяет главное и второстепенное. Наиболее важные положения лекции записываются под диктовку лектора.

Студенту следует научиться понимать и основную идею лекции, а также, следуя за лектором, участвовать в усвоении новых мыслей. Но для этого надо быть подготовленным к восприятию очередной темы. Время, отведенное на лекцию, можно считать использованным полноценно, если студенты понимают задачи лекции, если работают вместе с лектором, а не бездумно ведут конспект.

Подготовленным можно считать такого студента, который, присутствуя на лекции, усвоил ее содержание, а перед лекцией просмотрел конспект предыдущей лекции или учебник. После окончания крупного раздела курса рекомендуется проработать его по конспектам и учебникам.

Для наиболее важных дисциплин, вызывающих наибольшие затруднения, рекомендуется перед каждой лекцией просматривать содержание предстоящей лекции по учебнику с тем, чтобы лучше воспринять материал лекции. В этом случае предмет усваивается настолько, что перед экзаменом остается сделать немного для закрепления знаний.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ (СЕМИНАРСКИМ) ЗАНЯТИЯМ

**Семинар** — это форма организации обучения, доминирующим компонентом которой является самостоятельная исследовательско-аналитическая работа студентов с учебной литературой и последующим активным обсуждением проблемы под руководством педагога.

Семинары проводятся по наиболее сложным вопросам (темам, разделам) учебной дисциплины и имеют целью ее углубленное изучение, привитие обучающимся навыков самостоятельного поиска и анализа учебной информации, формирование и развитие у них научного мышления, умения активно участвовать в творческой дискуссии, делать правильные выводы, аргументировано излагать и отстаивать свое мнение. Подготовка студентов к семинару осуществляется на основе задания, которое разрабатывается преподавателем и доводится до обучающихся перед проведением первых занятий по теме семинара.

Коллективное обсуждение изучаемых вопросов, докладов и рефератов проводится на семинарских занятиях. Отличие семинаров от других форм обучения состоит в том, что они ориентируют обучаемых на большую самостоятельность в учебно-познавательной деятельности. В ходе семинарских занятий знания учащихся углубляются, систематизируются и контролируются в результате самостоятельной внеаудиторной работы с первоисточниками, документами, дополнительной литературой; укрепляются их мировоззренческие позиции; формируются оценочные суждения.

Принципы проведения семинарского занятия:

1. Комментарий основных вопросов плана семинара.
2. Указать обучающимся страницы в конспекте лекций, разделы учебников и учебных пособий, чтобы они получили общее представление о месте и значении темы в изучаемом курсе. Затем следует рекомендовать им поработать с дополнительной литературой, сделать записи по рекомендованным источникам.
3. Развивать у студентов умение сопоставлять источники, продумывать изучаемый материал. Большое значение имеет совершенствование навыков конспектирования у студентов.
4. В ходе семинара студент учится публично выступать, видеть реакцию слушателей, логично, ясно, четко, грамотным литературным языком излагать свои мысли, проводить доводы, формулировать аргументы в защиту своей позиции.

Семинар как развивающая, активная форма учебного процесса способствует выработке самостоятельного мышления студента, формированию информационной культуры. Этому во многом помогают создающиеся спонтанно или создаваемые преподавателем и отдельными студентами в ходе семинара проблемные ситуации.

В заключение преподаватель, как руководитель семинара, подводит итоги семинара. Он может (выборочно) проверить конспекты обучающихся и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения.

Для стимулирования самостоятельного мышления используются различные *активные методики обучения*: проблемные ситуации, задания «закончить предложение»,

тесты, интерактивный опрос, деловая игра. Ряд студентов может получить задание - подготовить рефераты и выступить с тезисами, а затем преподаватель определяет вопросы для постановки перед группой.

**Практическое занятие** — форма организации обучения, которая направлена на формирование практических умений и навыков и является связующим звеном между самостоятельным теоретическим освоением студентами учебной дисциплины и применением ее положений на практике.

Практические занятия проводятся в целях: выработки практических умений и приобретения навыков в решении задач, выполнении заданий, производстве расчетов, разработке и оформлении документов, практического овладения иностранными языками и компьютерными технологиями. Главным их содержанием является практическая работа каждого студента. Подготовка студентов к практическому занятию и его выполнение, осуществляется на основе задания, которое разрабатывается преподавателем и доводится до обучающихся перед проведением и в начале занятия.

Наряду с семинарами, важное значение в подготовке студента к профессиональной деятельности имеют практические занятия. Они составляют значительную часть всего объема аудиторных занятий и имеют важнейшее значение для усвоения программного материала. Выполняемые задания могут подразделяться на несколько групп:

1) иллюстрацией теоретического материала и носят воспроизводящий характер. Они выявляют качество понимания студентами теории.

2) образцы задач и примеров, разобранных в аудитории. Для самостоятельного выполнения требуется, чтобы студент овладел показанными методами решения.

3) вид заданий, содержащий элементы творчества. Одни из них требуют от студента преобразований, реконструкций, обобщений. Для их выполнения необходимо привлекать ранее приобретенный опыт, устанавливать внутрипредметные и межпредметные связи. Решение других требует дополнительных знаний, которые студент должен приобрести самостоятельно. Третьи предполагают наличие у студента некоторых исследовательских умений.

4) может применяться выдача индивидуальных или опережающих заданий на различный срок, определяемый преподавателем, с последующим представлением их для проверки в указанный срок.

### **Основные принципы построения практических/семинарских занятий**

1. Опрос по теоретическому материалу, проверка подготовки студентов к занятию (10-15 минут);

2. Разбор вопросов возникших при выполнении домашней работы. (при необходимости)

3. Решение задач. Разбор алгоритмов. Коллективное обсуждение, сравнение нескольких методов решения.

### **Практическое занятие 1.**

#### **Раздел 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Случайные поля.

Законы распределения и основные характеристики случайных полей.

Вычисление математического ожидания, дисперсии и корреляционной функции случайных полей.

### **Практическое занятие 2.**

#### **Раздел 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ**

Однородные случайные поля.

Вычисление спектральной плотности и корреляционной функции.

Выражение многомерной корреляционной функции изотропного случайного поля через функцию одной переменной.

### **Практическое занятие 3.**

#### **Раздел 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Стохастические уравнения ползучести.

Корреляционный анализ одномерных полей деформаций ползучести.

Построение стохастических уравнений ползучести по опытным данным.

### **Практическое занятие 4.**

#### **Раздел 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Решение одномерных стохастических задач ползучести.

Решение стохастической краевой задачи для толстостенной трубы.

Решение стохастической краевой задачи для пластины с круговым отверстием.

Статистический анализ случайных полей напряжений и деформаций.

### **Практическое занятие 5.**

#### **Раздел 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Решение двумерных и пространственных стохастических задач ползучести.

Вычисление основных статистических характеристик случайных полей напряжений и деформаций.

### **Практическое занятие 6.**

#### **Раздел 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Методы решения стохастических краевых задач с учётом факторов повреждённости и стадии разупрочнения материала. Решение при одноосном и равномерном растяжении.



### Практическое занятие 7.

#### Раздел 4. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА НАДЕЖНОСТЬ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Методы оценки надёжности элементов конструкций на основе решений стохастических краевых задач.

Оценки надёжности по теории выбросов на основе куммулятивной модели и модели пуассоновского типа

### Практическое занятие 8.

#### Раздел 4. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ НА НАДЕЖНОСТЬ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Оценка надёжности элементов конструкций.

Аналитические методы оценки надёжности стержневых элементов конструкций по деформационному критерию и длительной прочности.

Прогнозирование остаточного ресурса стержневых элементов

### Практическое занятие № 1

#### Случайные поля. Вычисление основных характеристик случайных полей

Задачи с решениями

1. Рассматривается случайная функция  $X(t) = W \cos(\omega_1 t - \theta)$ , где  $W$  - центрированная случайная величина с дисперсией  $D_w$ ;  $\theta$  - случайная величина, распределенная с постоянной плотностью в интервале  $(0; 2\pi)$ , а  $\omega_1$  - неслучайный параметр ( $\omega_1 > 0$ ). Случайные величины  $W, \theta$  независимы. Найти характеристики случайной функции  $X(t)$ : математическое ожидание, корреляционную функцию. Определить, является ли случайная функция  $X(t)$  стационарной и эргодической. Если она стационарна, то найти ее спектральную плотность  $S_x(\omega)$ .

Р е ш е н и е. Представим случайную функцию  $X(t)$  в виде

$$X(t) = W \cos(\omega_1 t - \theta) = W \cos \theta \cos \omega_1 t + W \sin \theta \sin \omega_1 t.$$

Обозначим  $W \cos \theta = U$ ;  $W \sin \theta = V$ . Найдем сначала основные характеристики системы случайных величин  $U$  и  $V$ :

$$\begin{aligned} M[U] &= M[W \cos \theta] = M[W]M[\cos \theta] = 0; \\ M[V] &= M[W \sin \theta] = M[W]M[\sin \theta] = 0; \\ D[U] &= M[(W \cos \theta)^2] = M[W^2]M[\cos^2 \theta] = D_w M[\cos^2 \theta]; \\ D[V] &= M[(W \sin \theta)^2] = M[W^2]M[\sin^2 \theta] = D_w M[\sin^2 \theta]; \\ K_{uv} &= M[W \cos \theta W \sin \theta] = D_w M[\sin \theta \cos \theta]. \end{aligned}$$

Так как значение  $\theta$  распределено равномерно в интервале  $(0; 2\pi)$ , то

$$M[\sin^2 \theta] = M[\cos^2 \theta] = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{2};$$

$$M[\sin \theta \cos \theta] = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \frac{1}{2\pi} dx = 0.$$

Итак,  $M[U] = M[V] = 0$ ;  $D[U] = D[V] = \frac{D_\omega}{2}$ ;  $K_{uv} = 0$ . Следовательно,

выражение

$$X(t) = W \cos(\omega_1 t - \theta) = U \cos \omega_1 t + V \sin \omega_1 t$$

представляет собой спектральное разложение стационарной случайной функции :  $m_x = 0$ , а корреляционная функция имеет вид

$$k_x(\tau) = \frac{D_\omega \cos \omega_1 \tau}{2}.$$

Эргодической случайная функция  $X(t)$  не является, так как характеристики, найденные по одной реализации, не совпадают с характеристиками, определенными по множеству реализаций. Действительно, каждая реализация случайной функции  $X(t)$  есть гармоническое колебание, амплитуда которого представляет собой значение, случайно принятое величиной  $W$ . Среднее по времени для каждой такой реализации будет равно нулю и совпадает с математическим ожиданием случайной функции  $X(t)$ , но дисперсия и корреляционная функция, найденные как средние по времени для одной реализации, уже не будут совпадать с соответствующими характеристиками случайной функции  $X(t)$ . Например,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T W^2 \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega_1 t - \tau)] dt = \frac{1}{2} W^2.$$

2. Случайная функция  $X(t)$  имеет характеристики :

$$m_x(t) = 0; K_x(t, t') = [1 - (t' - t)^2]^{-1}.$$

Найти характеристики случайной функции  $Y(t) = \int_0^t X(t) dt$ . Определить, стационарны ли случайные функции  $X(t), Y(t)$ .

Р е ш е н и е. В силу линейности преобразования  $\int_0^t X(t) dt$

$$\begin{aligned} m_y(t) &= \int_0^t m_x(t) dt = 0; \quad K_y(t, t') = \int_0^t dt \int_0^{t'} K_x(t, t') = \\ &= \int_0^t \left( \int_0^{t'} [1 + (t' - t)]^{-1} dt' \right) dt = t \operatorname{arctg} t + t' \operatorname{arctg} t' - \\ &- (t - t') \operatorname{arctg} (t - t') - \frac{1}{2} \ln \left\{ (1 + t^2)(1 + t'^2) [1 + (t - t')^2]^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Случайная функция  $X(t)$  стационарна:  $K_x(t, t') = K_x(t - t')$ ; случайная функция  $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$  нестационарна. Действительно, дисперсия случайной функции равна  $D_y(t) = K_y(t, t') = 2t \operatorname{arctg} t - \ln(1 + t^2)$ , т.е. зависит от  $t$ .

3. Случайная функция  $X(t)$ , имеющая характеристики  $m_x(t) = 0$ ;  $K_x(t, t') = 3e^{-(t+t')}$ , подвергается линейному преобразованию вида

$$Y(t) = -t \frac{d}{dt} X(t) + \int_0^t \tau X(\tau) d\tau + \sin \omega t.$$

Найти корреляционный момент случайных величин  $X(0)$ ,  $Y(1)$  (т.е. двух сечений случайных функций:  $X(t)$  при  $t = 0$  и  $Y(t')$  при  $t' = 1$ ).

Р е ш е н и е. На основании решения предыдущей задачи

$$R_{xy}(\tau') = L_{t'}^{(0)} \{K_x(t, t')\},$$

где  $L_{t'}^{(0)}$  - однородная часть линейного преобразования, примененная к аргументу  $t'$ . В нашем случае

$$\begin{aligned} R_{xy}(t, t') &= -3t' \frac{\partial e^{-(t+t')}}{\partial t'} + 3 \int_0^{t'} \tau' e^{-(t+\tau')} d\tau' = \\ &= 3t' e^{-(t+t')} + 3e^{-t} [e^{-t'}(-t' - 1) + 1] = 3e^{-t} (1 - e^{-t'}). \end{aligned}$$

Полагая  $t = 0$ ,  $t' = 1$ , получаем

$$K_{X(0), Y(1)} = R_{xy}(0, 1) = 3(1 - e^{-1}) \approx 1,90.$$

### Задачи для самостоятельного решения

1. Рассматривая неслучайную функцию времени  $\varphi(t)$  как частный вид случайной функции  $X(t) = \varphi(t)$ , найти ее характеристики: математическое ожидание  $m_x(t)$ , дисперсию  $D_x(t)$  и корреляционную функцию  $K_x(t, t')$ . Является ли случайная функция  $X(t)$  стационарной?

О т в е т.  $m_x(t) = \varphi(t)$ ;  $D_x(t) = 0$ ;  $K_x(t, t') = 0$ .

В общем случае случайная функция  $X(t)$  нестационарна, так как при  $\varphi(t) \neq \text{const}$  имеем  $m_x(t) \neq \text{const}$ .

2. Случайная функция  $X(t)$  в каждом сечении представляет собой непрерывную случайную величину с одномерной плотностью распределения  $f(x, t)$ . Написать выражения для математического ожидания  $m_x(t)$  и дисперсии  $D_x(t)$  случайной функции  $X(t)$ .

О т в е т.  $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx$ ;  $D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x, t) dx$ .

3. Случайная функция  $X(t)$  задана в виде  $X(t) = Vt + b$ , где  $V$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами  $m_v, \sigma_v$ ;  $b$  – неслучайная величина. Найти одномерную плотность распределения  $f(x, t)$  сечения случайной функции  $X(t)$  и ее характеристики:  $m_x(t), D_x(t), K_x(t, t')$ .

О т в е т.  $f(x, t)$  – нормальный закон с параметрами  $m_v t + b$ ;  $|t|\sigma_v$ .

$$f(x, t) = \frac{1}{|t|\sigma_v \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{[x - (m_v t + b)]^2}{2t^2 \sigma_v^2}\right);$$

$$m_x(t) = m_v t + b; \quad D_x(t) = t^2 \sigma_v^2; \quad K_x(t, t') = \sigma_v^2 t t'.$$

4. Задана случайная функция

$$X(t) = V_1 e^{-\alpha_1 t} + V_2 e^{-\alpha_2 t},$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – некоррелированные случайные величины с характеристиками:  $m_{v_1} = m_{v_2} = 0$ ,  $D_{v_1}, D_{v_2}$ . Найти характеристики случайной функции  $X(t)$ .

О т в е т.

$$m_x(t) = 0; \quad K_x(t, t') = D_{v_1} e^{-\alpha_1(t+t')} + D_{v_2} e^{-\alpha_2(t+t')};$$

$$D_x(t) = D_{v_1} e^{-\alpha_1 2t} + D_{v_2} e^{-\alpha_2 2t}.$$

5. Случайная функция  $X(t)$  задана своим каноническим разложением

$$X(t) = \sum_{i=1}^n V_i e^{-\alpha_i t} + a,$$

где  $V_i$  – центрированные случайные величины с дисперсиями  $D_{v_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ );  $M[V_i, V_j] = 0$  при  $i \neq j$ ;  $a$  – не случайная величина. Найти характеристики случайной функции  $X(t)$ .

О т в е т.

$$m_x(t) = a; \quad K_x(t, t') = \sum_{i=1}^n D_{v_i} e^{-\alpha_i(t+t')};$$

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^n D_{v_i} e^{-2\alpha_i t}.$$

6. Случайная функция  $X(t)$  задана каноническим разложением

$$X(t) = t + V_1 \cos \omega t + V_2 \sin \omega t,$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и с дисперсиями  $D_1 = D_2 = 2$ . Определить, является ли стационарной случайная функция  $X(t)$ .

О т в е т.

$$m_x(t) = t; \quad K_x(t, t') = 2(\cos \omega t \cos \omega t' + \sin \omega t \sin \omega t') = 2 \cos \omega(t - t').$$

Случайная функция  $X(t)$  нестационарна, но центрированная случайная функция  $\overset{0}{X}(t)$  стационарна.

7. Имеются две некоррелированные случайные функции  $X(t), Y(t)$  с характеристиками

$$\begin{aligned} m_x(t) &= t^2; & K_x(t, t') &= e^{\alpha_1(t+t')}; \\ m_y(t) &= 1; & K_y(t, t') &= e^{\alpha_2(t-t')^2}. \end{aligned}$$

Найти характеристики случайной функции  $Z(t) = X(t) + tY(t) + t^2$ . Решить ту же задачу, если случайные функции  $X(t), Y(t)$  коррелированы и их взаимная корреляционная функция  $R_{xy}(t, t') = ae^{-\alpha|t-t'|}$ .

О т в е т. В случае, если  $R_{xy}(t, t') = 0$ ,

$$\begin{aligned} m_z &= m_x(t) + tm_y(t) + t^2 = 2t^2 + t; \\ K_z(t, t') &= K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') = e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_2(t-t')^2}. \end{aligned}$$

В случае, когда  $R_{xy}(t, t') = \alpha \exp(-\alpha|t-t'|)$ ,  $m_2(t)$  не меняется;

$$\begin{aligned} K_z(t, t') &= K_x(t, t') + tt'K_y(t, t') + t'R_{xy}(t, t') + tR_{xy}(t', t) = \\ &= e^{\alpha_1(t+t')} + tt'e^{\alpha_1(t-t')^2} + a(t+t')e^{-\alpha|t-t'|}. \end{aligned}$$

8. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию суммы двух некоррелированных случайных функций  $X(t), Y(t)$  с характеристиками

$$\begin{aligned} m_x(t) &= t; & K_x(t, t') &= tt'; \\ m_y(t) &= -t; & K_y(t, t') &= tt'e^{\alpha(t+t')}. \end{aligned}$$

О т в е т.  $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = 0$ ;  $K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') = tt'[1 + e^{\alpha(t+t')}]$ .

9. Имеется комплексная случайная функция  $Z(t) = X(t) + iY(t)$ , где  $i$  - мнимая единица;  $X(t), Y(t)$  - некоррелированные случайные функции с характеристиками

$$\begin{aligned} m_x(t) &= t^2; & K_x(t, t') &= e^{-\alpha_1(t-t')^2}; \\ m_y(t) &= 1; & K_y(t, t') &= e^{2\alpha_2(t+t')}. \end{aligned}$$

Найти характеристики случайной функции  $Z(t)$ :  $m_z(t)$ ;  $K_z(t, t')$ ;  $D_z(t)$ .

О т в е т.  $m_z(t) = t^2 + i$ ;  $K_z(t, t') = e^{-\alpha_1(t-t')^2} + e^{-2\alpha_2(t+t')}$ ;  $D_z(t) = K_z(t, t') = 1 + e^{4\alpha_2 t}$ .

10. Случайная функция  $X(t)$  имеет характеристики  $m_x(t) = 1$ ,  $K_x(t, t') = e^{\alpha(t+t')}$ . Найти характеристики случайной функции  $Y(t) = t \frac{d}{dt} X(t) + 1$ . Определить, являются ли стационарными случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

О т в е т..

$$m_y(t) = t \frac{d}{dt} m_x(t) + 1 = 1;$$

$$K_y(t, t') = tt' \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} K_x(t, t') = tt' \alpha^2 e^{\alpha(t+t')}.$$

Ни одна из случайных функций  $X(t), Y(t)$  не является стационарной,

11. Случайная функция  $X(t)$  с характеристиками  $m_x(t) = t^2 + 3$ ;  $K_x(t, t') = 5tt'$  подвергается линейному преобразованию вида

$$Y(t) = \int_0^t \tau X(\tau) d\tau + t^3.$$

Определить характеристики случайной функции  $Y(t)$ :  $m_y(t)$ ;  $K_y(t, t')$ .

О т в е т..

$$m_y(t) = \int_0^t \tau(\tau^2 + 3) d\tau + t^3 = \frac{t^4}{4} + \frac{3}{2}t^2 + t^3, \quad K_y(t, t') = \frac{5}{9}t^3(t')^3$$

## Практическое занятие № 2

### Однородные случайные поля. Вычисление спектральной плотности и корреляционной функции

1. Определить, обладает ли функция

$$k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( ch \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} sh \beta|\tau| \right), \quad (\alpha > 0; \beta > 0)$$

свойствами корреляционной функции.

Р е ш е н и е. Нужно проверить выполнение следующих свойств:

$$1) \quad k_x(0) > 0; \quad 2) \quad k_x(-\tau) = k_x(\tau); \quad 3) \quad |k_x(\tau)| \leq k_x(0);$$

$$4) \quad S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \geq 0 \text{ при любом } \omega.$$

Свойства «1» и «2» очевидны. Проверим остальные.

3) Функция  $k_x(\tau)$  - четная, поэтому достаточно исследовать ее при  $\tau \geq 0$ :

$$k_x(\tau) = \frac{1}{2} e^{-(\alpha-\beta)\tau} \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) - \frac{1}{2} e^{-(\alpha+\beta)\tau} \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right).$$

Так как  $k_x(0) = 1$ , нужно, чтобы это выражение по модулю не превосходило единицы.

При  $\alpha < \beta$  это условие не выполняется, так как при  $\tau \rightarrow \infty$  выражение  $e^{-(\alpha-\beta)\tau}$  неограниченно возрастает. В случае  $\alpha = \beta$  получаем  $k_x(\tau) \equiv 1$ ; при  $\alpha > \beta$  имеем  $-k_x(\tau) \leq 1$ . Таким образом, свойство «3» выполняется только при  $\alpha \geq \beta$ .

$$\begin{aligned}
S_x^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left( 1 + \frac{\alpha}{\beta} \right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-\beta+i\omega)\tau} d\tau + \right. \\
&+ \left. \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+\beta+i\omega)\tau} d\tau \right\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\beta + \alpha}{\alpha - \beta + i\omega} + \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + i\omega} \right\} = \\
4) \quad &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\pi\beta} \left\{ \frac{1}{(\alpha - \beta)^2 + \omega^2} - \frac{1}{(\alpha + \beta)^2 + \omega^2} \right\} = \\
&= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\pi} \frac{2}{[(\alpha - \beta)^2 + \omega^2][(\alpha + \beta)^2 + \omega^2]}
\end{aligned}$$

при  $\alpha \geq \beta$  (  $\operatorname{Re}$  - действительная часть ). При  $\alpha = \beta$   $S_x^*(\omega) = \delta(\omega)$ .

Таким образом, функция  $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( ch \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} sh \beta|\tau| \right)$  при  $\alpha \geq \beta$  всеми свойствами корреляционной функции.

2. Случайная функция  $X(t)$  имеет характеристики  $m_x; k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ . Найти ее спектральную плотность.

Решение.  $S_x^\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D_x}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau$ . Имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha + i\omega} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d(\alpha + i\omega)\tau = \\
&= \left. \begin{array}{l} (\alpha + i\omega)\tau = y \\ \text{при } \tau = 0; y = 0 \\ \text{при } \tau = \infty; y = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{\alpha + i\omega} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{\alpha + i\omega}; \\
\operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau &= \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha + i\omega} = \operatorname{Re} \frac{1}{\alpha + i\omega} \frac{\alpha - i\omega}{\alpha - i\omega} = \operatorname{Re} \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \\
&= \operatorname{Re} \left( \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно  $S_x^*(\omega) = \frac{D_x}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$ .

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что не существует никакой стационарной случайной функции  $X(t)$ , корреляционная функция которой  $k_x(\tau)$  постоянна в каком-то интервале  $(-\tau_1, \tau_1)$  и равна нулю вне его.

2. Стационарная случайная функция  $X(t)$  имеет характеристики  $m_x, k_x(\tau)$ . Найти взаимную корреляционную функцию  $R_{xy}(t, t')$  случайной функции  $X(t)$  и случайной функции  $Y(t) = 1 - X(t)$ .

О т в е т.  $R_{xy}(t, t') = M \left[ \overset{0}{X}(t) \overset{0}{Y}(t') \right] = M \left[ -\overset{0}{X}(t) \overset{0}{X}(t') \right] = -K_x(t, t') = -k_x(\tau).$

3. Найти спектральную плотность случайной функции  $X(t)$ , если ее корреляционная функция  $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$ .

О т в е т.  $S_x^*(\omega) = \frac{D_x \alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{|\alpha^2 + (\beta - \omega)^2| |\alpha^2 + (\beta + \omega)^2|}.$

4. Спектральная плотность стационарной случайной функции  $X(t)$  на участке  $(-\omega_1; \omega_1)$  постоянна, а вне его равна нулю, т.е. имеет вид

$$S_x^*(\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| < \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases} = a \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_1} \right).$$

Найти корреляционную функцию  $k_x(\tau)$  случайной функции  $X(t)$ .

О т в е т..  $k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = 2a \int_0^{\omega_1} \cos \omega\tau d\omega = \frac{2a \sin \omega_1 \tau}{\tau};$   
 $D_x = k_x(0) = 2a\omega_1.$

5. Стационарная случайная функция  $X(t)$  имеет корреляционную функцию  $k_x(\tau)$ . Случайная функция  $Y(t)$  получается из нее дифференцированием :  $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ . Найти корреляционную функцию  $k_y(\tau)$ , если :

а)  $k'_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|);$

в)  $k_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

О т в е т.

а)  $k_y(\tau) = \alpha^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 - \alpha|\tau|);$

в)  $k_y(\tau) = (\alpha^2 + \beta^2) e^{-\alpha|\tau|} \left( \cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right).$

6. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции с корреляционной функцией

$$k_y(\tau) = \alpha e^{-\alpha|\tau|} [2\delta(\tau) - \alpha(\text{sign } \tau)^2].$$

О т в е т.

$$S_y^*(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{2\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2}{\alpha^2 + 4\omega^2}.$$



7. Имеется стационарная случайная функция  $X(t)$  с корреляционной функцией  $k_x(\tau) = \frac{\sin \tau}{\tau}$ . Найти корреляционную функцию, дисперсию и спектральную плотность ее

производной:  $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ .

О т в е т.  $D_y = k_y(0) = \frac{1}{3}$ .  $S_y^*(\omega) = S_x^*(\omega)\omega^2 = 2\omega^2 \text{sinc}(\omega)$ .

8. Нормальная случайная функция  $X(t)$  имеет характеристики  $m_x$ ;  $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}$ .

Найти характеристики случайной функции  $W(t) = X(t) \frac{dX(t)}{dt}$ .

О т в е т.  $m_w(t) = 0$ .

$$k_w(\tau) = \frac{D_x^2 2\alpha}{\pi} e^{-2\alpha|\tau|} [2\delta(\tau) - 2\alpha(\text{sign } \tau)^2] + \frac{2D_x m_x^2 \alpha}{\pi} e^{-\alpha|\tau|} [2\delta(\tau) - \alpha(\text{sign } \tau)^2].$$

#### Практическое занятие №4

##### Решение плоской стохастической задачи ползучести

Пусть компоненты тензора напряжения  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j=1, 2), \quad (1)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций  $\dot{p}_{ij}$  – условию

$$\Lambda_{ij} \Lambda_{kl} \dot{p}_{jk,il} = 0, \quad (2)$$

которое получается из уравнения совместности для деформаций путем дифференцирования по времени. Здесь  $\Lambda_{ij}$  – единичный антисимметричный псевдотензор. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Уравнения (1) и (2) замыкаются определяющим соотношением, которое принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме:

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) (1 + \alpha U), \quad (3)$$

где  $s$  – интенсивность напряжений:

$$s^2 = \frac{1}{2} (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}),$$

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $U(x_1, x_2)$  – случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала с математическим ожиданием  $\langle U \rangle = 0$  и дисперсией  $\langle U^2 \rangle = 1$ ,  $c, n, \alpha$  – постоянные материала. –

На контуре  $\Gamma$  области  $S$ , занимаемой пластиной, заданы детерминированные поверхностные силы  $q_i$ :

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = q_i, \quad (4)$$

где  $n_i$  – компоненты единичного вектора нормали к контуру  $\Gamma$ .

Соотношения (1) – (3) при граничных условиях (4) задают стохастическую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается приближенно относительно напряжений.

Пусть компоненты тензоров напряжений и деформаций представлены в виде суммы детерминированного слагаемого и флуктуации:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, & \langle \sigma_{ij} \rangle &= \sigma_{ij}^0, & \langle \sigma_{ij}^* \rangle &= 0, \\ p_{ij} &= p_{ij}^0 + p_{ij}^*, & \langle p_{ij} \rangle &= p_{ij}^0, & \langle p_{ij}^* \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Тензоры  $\sigma_{ij}^0$ ,  $p_{ij}^0$  считаются известными и могут быть найдены как решение соответствующей детерминированной задачи (краевые условия здесь не выписаны):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^0 &= 0; & \Lambda_{ij} \Lambda_{kl} \dot{p}_{jk,il}^0 &= 0; \\ \dot{p}_{ij}^0 &= c s_0^{n-1} \left( \sigma_{ij}^0 - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}^0 \right); & s_0^2 &= \frac{1}{2} (3 \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 - \sigma_{ii}^0 \sigma_{jj}^0). \end{aligned}$$

Флуктуации  $\sigma_{ij}^*$  представляют собой высокочастотные возмущения, наложенные на детерминированное решение  $\sigma_{ij}^0$ , причем градиенты  $\sigma_{ij,k}^0$  по модулю значительно меньше  $\sigma_{ij,k}^*$ . Поэтому при изучении флуктуаций в достаточно малой окрестности выбранной точки можно считать, что  $\sigma_{ij}^0 \approx \text{const}$ .

Статистическая линейризация соотношения (3) относительно флуктуаций  $\sigma_{ij}^*$  выполняется с учетом возможности пренебрегать произведениями вида  $\sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^*$ ,  $\alpha U \sigma_{ij}^*$  по сравнению с  $\sigma_{ij}^*$ .

Интенсивность напряжений представим так же в виде суммы двух слагаемых:

$$s^2 = s_0^2 + s_*^2,$$

где

$$\begin{aligned} s_0^2 &= (\sigma_{11}^0)^2 + (\sigma_{22}^0)^2 - \sigma_{11}^0 \sigma_{22}^0 + 3(\sigma_{12}^0)^2, \\ s_*^2 &= l_1 \sigma_{11}^* + l_2 \sigma_{22}^* + 6 \sigma_{12}^0 \sigma_{12}^*, & l_1 &= 2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0, & l_2 &= 2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0. \end{aligned}$$

Используя принятые допущения, систему уравнений (1)-(3) можно привести к линейному дифференциальному уравнению в частных производных относительно  $\sigma_{ij}^*$ :

$$\begin{aligned} (2 + ql_1^2) \sigma_{11,22}^* + (-1 + ql_1 l_2) (\sigma_{11,11}^* + \sigma_{22,22}^*) + (2 + ql_2^2) \sigma_{22,11}^* + \\ + 6q \sigma_{12}^0 (l_1 (\sigma_{12,22}^* - \sigma_{11,12}^*) + l_2 (\sigma_{12,11}^* - \sigma_{22,12}^*)) - \\ - 6(1 + 6q \sigma_{12}^0)^2 \sigma_{12,12}^* = -\alpha (l_1 U_{,22} + l_2 U_{,11} - 6 \sigma_{12}^0 U_{,12}). \end{aligned}$$

(5)

К этому уравнению необходимо добавить уравнения равновесия для флуктуаций

тензора напряжений:

$$\sigma_{ij,j}^* = 0. \quad (6)$$

Если ввести функцию напряжения  $F$  для флуктуаций тензора напряжений с помощью формул

$$\sigma_{11}^* = F_{,22}, \quad \sigma_{22}^* = F_{,11}, \quad \sigma_{12}^* = -F_{,12}, \quad (7)$$

то вместо системы уравнений (5), (6) получим единственное дифференциальное уравнение относительно функции  $F$ :

$$\begin{aligned} & \left(2 + ql_2^2\right)F_{,1111} + \left(2 + ql_1^2\right)F_{,2222} - 12\sigma_{12}^0 q \left(l_1 F_{,1222} + l_2 F_{,1112}\right) + \\ & + 2F_{,1122} \left(2 + ql_1 l_2 + 18q(\sigma_{12}^0)^2\right) = -\alpha \left(l_1 U_{,22} + l_2 U_{,11} - 6\sigma_{12}^0 U_{,12}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть функция  $U(x_1, x_2)$ , с помощью которой задается случайное поле возмущений реологических свойств материала, является однородной и изотропной. Тогда она допускает спектральное представление в виде интеграла Фурье – Стилтеса

$$U(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (9)$$

причем для случайного дифференциала  $d\varphi(\omega_1, \omega_2)$  выполняется условие стохастической ортогональности

$$\left\langle d\varphi(\omega_1, \omega_2) \overline{d\varphi(\omega'_1, \omega'_2)} \right\rangle = S_U(\omega_1, \omega_2) \delta(\omega_1 - \omega'_1) \delta(\omega_2 - \omega'_2) d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2,$$

где  $S_U(\omega_1, \omega_2)$  – спектральная плотность поля,  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака, а черта означает комплексное сопряжение.

При быстро изменяющемся случайном поле микронеоднородностей  $U(x_1, x_2)$  решение линеаризованной задачи (8) также будет однородным и его можно искать в виде:

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} a(\omega_1, \omega_2) d\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (10)$$

где  $a(\omega_1, \omega_2)$  – неизвестная весовая функция, которую можно вычислить из линейного уравнения, получающегося подстановкой представлений (9), (10) в соотношение (8):

$$\begin{aligned} & a\omega_1^4 \left(2 + ql_2^2\right) + 2a\omega_1^2 \omega_2^2 \left(2 + ql_1 l_2 + 18q(\sigma_{12}^0)^2\right) + a\omega_2^4 \left(2 + ql_1^2\right) - \\ & - 12aq\sigma_{12}^0 a\omega_1 \omega_2 \left(l_1 \omega_2^2 + l_2 \omega_1^2\right) = \alpha \left(\omega_2^2 l_1 + \omega_1^2 l_2 - 6\sigma_{12}^0 \omega_1 \omega_2\right). \end{aligned}$$

Из последнего уравнения можно получить

$$a = \frac{\alpha \left(m - 6\sigma_{12}^0 \omega_1 \omega_2\right)}{2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)^2 + qm^2 - 12q\sigma_{12}^0 \omega_1 \omega_2 m + 36q\omega_1^2 \omega_2^2 \left(\sigma_{12}^0\right)^2}, \quad (11)$$

где  $m = l_1 \omega_2^2 + l_2 \omega_1^2$ .

Таким образом, компоненты тензора флуктуаций напряжений согласно (7), (11) можно вычислить по формуле

$$\sigma_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} a_{mn}(\omega_1, \omega_2) d\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (12)$$

где  $a_{11} = -\omega_2^2 a$ ,  $a_{22} = -\omega_1^2 a$ ,  $a_{12} = \omega_1 \omega_2 a$ .

При помощи формулы (12) и известной формулы для вычисления дисперсий напряжений  $\sigma_{mn}$ :

$$D[\sigma_{mn}] = \langle |\sigma_{mn}|^2 \rangle$$

получаем

$$D[\sigma_{mn}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int S_U(\omega_1, \omega_2) a_{mn}^2(\omega_1, \omega_2) d\varphi(\omega_1, \omega_2). \quad (13)$$

Спектральная плотность  $S_U$  изотропного скалярного поля  $U$  зависит только от модуля волнового вектора  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ , а для дисперсии имеет место равенство :

$$D_U = 2\pi \int_0^{\infty} S(\omega_0) \omega_0 d\omega_0 = 1.$$

Если перейти в интеграле (13) к полярной системе координат  $\omega_1 = \omega_0 \cos \varphi$ ,  $\omega_2 = \omega_0 \sin \varphi$ , то он приводится к виду

$$D[\sigma_{mn}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{mn}^2(\sin \varphi, \cos \varphi) d\varphi, \quad (14)$$

где  $R_{mn}$  – известная рациональная функция переменных  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ .

Функции  $R_{ij}$ , входящие в (14), согласно (11) будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\alpha \cdot \frac{\sin^2 \varphi (l_1 \sin^2 \varphi + l_2 \cos^2 \varphi - 6\sigma_{12}^0 \sin \varphi \cos \varphi)}{\Delta} \\ R_{12} &= \alpha \cdot \frac{\cos \varphi \sin \varphi (l_1 \sin^2 \varphi + l_2 \cos^2 \varphi - 6\sigma_{12}^0 \cos \varphi \sin \varphi)}{\Delta} \\ R_{22} &= -\alpha \cdot \frac{\cos^2 \varphi (l_1 \sin^2 \varphi + l_2 \cos^2 \varphi - 6\sigma_{12}^0 \sin \varphi \cos \varphi)}{\Delta}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 + q(l_1 \sin^2 \varphi + l_2 \cos^2 \varphi)^2 - 12q\sigma_{12}^0 \cos \varphi \sin \varphi (l_1 \sin^2 \varphi + l_2 \cos^2 \varphi) + \\ &\quad + 36q \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (\sigma_{12}^0)^2. \end{aligned}$$

### Задание для самостоятельной работы

Вычислить дисперсий случайного поля напряжений согласно формуле (14) с использованием выражения (15):

а) при одноосном растяжении ( $\sigma_{11}^0 = \sigma^0$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{22}^0 = 0$ );

б) при равномерном растяжении ( $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma^0$ ,  $\sigma_{12}^0 = 0$ )

с) при чистом сдвиге ( $\sigma_{12}^0 = \sigma^0$ ,  $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = 0$ ).

О т в е т а) 
$$R_{11} = -2\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\sin^2 \varphi (2\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{4 + (n-1)(2\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)^2},$$

$$R_{12} = 2\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi (2\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{4 + (n-1)(2\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)^2},$$

$$R_{22} = -2\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\cos^2 \varphi (2\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{4 + (n-1)(2\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)^2};$$

в) 
$$R_{11} = -2\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{n+3}, \quad R_{12} = 2\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{n+3}, \quad R_{22} = -2\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{n+3}$$

$$D[\sigma_{11}] = D[\sigma_{22}] = 3D[\sigma_{12}] = \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha\sigma^0}{n+3} \right)^2.$$

с) 
$$R_{11} = 3\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi}{1 + 3(n-1)\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi},$$

$$R_{12} = -3\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{1 + 3(n-1)\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi},$$

$$R_{22} = 3\alpha\sigma^0 \cdot \frac{\sin \varphi \cos^3 \varphi}{1 + 3(n-1)\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi};$$

В случаях а) и с) дисперсии вычисляются численно

### СОДЕРЖАНИЕ

## ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### «Стохастические краевые задачи реологии и надежность элементов конструкций»

1. Случайные поля. Способы задания случайных полей. Основные характеристики.
2. Однородные случайные поля. Корреляционная функция. Спектральное представление однородного случайного поля.
3. Изотропные случайные поля. Представление двумерной и трехмерной корреляционной функции через функцию одной переменной.
4. Стохастический характер деформаций пластичности и ползучести. Статистический анализ деформаций ползучести при постоянном напряжении.
5. Корреляционный анализ одномерных полей деформаций ползучести и пластичности.
6. Основные подходы построения стохастических уравнений ползучести, экспериментальное обоснование гипотез.
7. Идентификация случайных параметров и функций стохастических уравнений ползучести по опытным данным.
8. Построение и линеаризация стохастической одномерной модели ползучести
9. Математическое моделирование деформаций ползучести при переменном силовом нагружении методом Монте-Карло в условиях одноосного напряжённого состояния.
10. Математическое моделирование деформаций ползучести при переменном силовом нагружении методом Монте-Карло в условиях сложного напряжённого состояния.
11. Постановка стохастической краевой задачи механики деформируемого твердого тела.
12. Решения нелинейных стохастических краевых задач методом возмущений, методом малого параметра.
13. Решения нелинейных стохастических краевых задач методом спектральных представлений (дискретный и непрерывный случай)
14. Решение одномерной стохастической краевой задачи ползучести для стержневых систем.
15. Решение одномерной стохастической краевой задач ползучести для толстостенной трубы.
16. Стохастический анализ полей напряжений и скоростей деформаций для толстостенной трубы
17. Решение одномерной стохастической краевой задач ползучести для пластины с круговым отверстием
18. Стохастический анализ полей напряжений и скоростей деформаций для пластины с круговым отверстием
19. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести для пластины
- 20.. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести для полосы с концентратором.
21. Решения плоской стохастической краевой задачи с учётом факторов повреждённости и стадии разупрочнения материала.
22. Исследование краевых эффектов вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости.
23. Исследование краевых эффектов при растяжении стохастически неоднородной полосы.

24. Решение двумерной стохастической краевой задач ползучести для толстостенной трубы.
25. Решение пространственной стохастической задачи ползучести.
26. Исследование полей напряжений и скоростей деформаций вблизи границы стохастически неоднородного полупространства
27. Общая постановка задачи теории надежности машин и конструкций.
28. Элементарные модели отказов машин и конструкций.
29. Кумулятивные модели. Модели пуассоновского типа.
30. Модели марковского типа. Параметрические и катастрофические критерии отказа.
31. Методы оценки надёжности элементов конструкций на основе решений стохастических краевых задач.
32. Распределение срока службы стержневых элементов конструкций, работающих с ограничением по деформации (напряжению).
33. Вычисление вероятности безотказной работы стержневых элемента конструкции по критерию длительной прочности
34. Оценки надежности распределенных элементов конструкций по теории выбросов на основе куммулятивной модели и модели пуассоновского типа
35. Прогнозирование остаточного ресурса стержневых элементов

## [СОДЕРЖАНИЕ](#)

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Выпускник по направлению подготовки 010400 Прикладная математика и информатика Самарского государственного технического университета отвечает следующим требованиям:

- имеет целостное представление о процессах и явлениях, происходящих в неживой и живой природе, понимает возможности современных научных методов познания природы и владеет ими на уровне, необходимом для решения задач, имеющих естественнонаучное содержание и возникающих при выполнении профессиональных функций;
- способен продолжить обучение в аспирантуре, вести профессиональную деятельность в иноязычной среде;
- владеет культурой мышления, знает его общие законы, способен в письменной и устной речи правильно (логически) оформить его результаты;
- умеет на научной основе организовать свой труд, владеет компьютерными методами сбора, хранения и обработки (редактирования) информации, применяемые в сфере его профессиональной деятельности;
- способен в условиях развития науки и изменяющейся социальной практики к переоценке накопленного опыта, анализу своих возможностей, умеет приобретать новые знания, обучаться в аспирантуре, использовать другие формы обучения, включая самостоятельные и информационно образовательные технологии;
- понимает сущность и социальную значимость своей будущей профессии, основные проблемы дисциплин, определяющих конкретную область его деятельности, видит их взаимосвязь в целостной системе знаний;
- способен к проектной деятельности в профессиональной сфере на основе системного подхода, умеет строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ;
- способен поставить цель и сформулировать задачи, связанные с реализацией профессиональных функций, умеет использовать для их решения методы изученных им наук;
- готов к кооперации с коллегами и работе в коллективе, знаком с методами управления, умеет организовать работу исполнителей, находить и принимать управленческие решения в условиях различных мнений, знает основы педагогической деятельности;
- методически и психологически готов к изменению вида и характера своей профессиональной деятельности, работе над междисциплинарными проектами;
- знает основные тенденции развития современными естествознания, принципы математического моделирования и его применения в исследовании физических, химических, биологических, экологических процессов;
- способен к совершенствованию своей профессиональной деятельности в области математики, программирования.

## **СОДЕРЖАНИЕ**



**ЛИТЕРАТУРА**  
**Основная литература**

№ п/п	Учебник, учебное пособие (приводится библиографическое описание учебника, учебного пособия)	Ресурс НТБ СамГТУ	Кол-во экз.
1.	Свешников В.В. Прикладные методы теории случайных функций. Спб: Лань, 2011. 464 с.	ЭБС изд-ва Лань	Электр. ресурс
2	Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004. 264 с	539.3 Р 159	15

**Дополнительная литература**

№ п/п	Учебник, учебное пособие, монография, справочная литература (приводится библиографическое описание)	Ресурс НТБ СамГТУ	Кол-во экз.
1.	Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. М: Логос, 2004. 1000с	519(075.8) П-88	2
2.	Радченко В.П., Коваленко Л.В., Попов Н.Н. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести // Прикладная математика и механика, 2009. Т. 73, № 6. С. 1009-1016.	eLIBRARY.RU	Электр. ресурс
3	Радченко В.П., Попов Н.Н. Аналитическое решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы// Прикладная математика и механика, 2012. Т. 76, № 6. С. 1023-1031.	eLIBRARY.RU	Электр. ресурс
4	Радченко В.П., Попов Н.Н. Нелинейная стохастическая задача о ползучести неоднородной плоскости с учетом поврежденности материала // Прикладная механика и техническая физика. 2007. №2 С. 140-146.	eLIBRARY.RU	Электр. ресурс
5	Попов Н.Н., Коваленко Л.В. Оценка надежности осесимметричных стохастических элементов конструкций при ползучести по теории выбросов // Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки, № 2 (27). Самара: СамГТУ, 2012. - С. 72-77. <a href="http://mi.mathnet.ru/vsgtu1090">http://mi.mathnet.ru/vsgtu1090</a>		2
6	Попов Н.Н. Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием// Вестник СамГТУ. Серия физ.-мат. науки, № 2 (17). Самара: СамГТУ, 2008. - С. 126-132. <a href="http://mi.mathnet.ru/vsgtu630">http://mi.mathnet.ru/vsgtu630</a>		2

**Периодические издания**

перечень отраслевых периодических изданий по профилю дисциплины, имеющих в НТБ СамГТУ:

1. Прикладная механика и техническая физика.
2. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки.

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет»**

Сайт научной электронной библиотеки LIBRARY.RU (<http://elibrary.ru>)

Общероссийский математический портал Math-Net.ru (<http://www.mathnet.ru>)

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Попов Николай Николаевич**

**Методические указания по дисциплине**

**«Стохастические краевые задачи реологии и надежность элементов конструкций»**

Электронные методические указания

Компьютерная верстка Е. В. Башкинова

Подписано для размещения в электронной библиотеке СамГТУ 25.12.2014

Формат 60x84  $\frac{1}{8}$ .

Усл. п. л. 4,53. Уч. -изд. л. 5,00.

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Самарский государственный технический университет»

443100. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Главный корпус.

E-mail [radch@samgtu.ru](mailto:radch@samgtu.ru)