ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Практикум по высшей математике

Самара
Самарский государственный технический университет
2011

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517.53/.57
К 637

Комплексные числа. Практикум по высшей математике: Учебн. пособ. / С.Н. Кубышкина, Е.Ю. Арланова. — Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2011. — 25 с.

Приведены краткие сведения и формулы по теме «Комплексные числа», а также большое количество примеров. Представлены задачи для самостоятельного решения. Для самоконтроля все примеры приведены с ответами. Предназначено для студентов первого курса машиностроительного и физико-технологического факультетов.

УДК 517.53/.57

Составители: канд. физ.-мат. наук С.Н. Кубышкина,
канд. физ.-мат. наук Е.Ю. Арланова

Рецензент: канд. техн. наук Т.А. Бенгина

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый практикум по высшей математике «Комплексные числа» предназначен для студентов инженерных специальностей машиностроительного и физико-технологического факультетов. Его цель — помочь студентам самостоятельно или с помощью преподавателя овладеть методами решения задач по теме «Комплексные числа». В каждом разделе приводятся основные теоретические сведения и необходимые формулы. Внимание уделено как решению типовых задач по данной тематике, так и примерам для самостоятельной работы.

В пособии использована сквозная нумерация задач. Задачи расположены по мере возрастания их сложности. Ко всем задачам приведены ответы.

Комплексные числа

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — любые действительные числа. Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа и обозначается $\operatorname{Re} z$, число y — ***мнимой частью*** комплексного числа и обозначается $\operatorname{Im} z$, i — мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Выражение $z = x + iy$ называется ***алгебраической формой*** записи комплексного числа; знаки между составляющими числа — обычные знаки операций сложения и умножения, которые обладают теми же свойствами, что и в действительной области.

Из определения следует, что действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных, то есть при $y = 0$ получаем $z = x$ — действительное число. Число $z = iy$ называется ***чисто мнимым***.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $-x - iy$ называется ***противоположным*** комплексному числу $x + iy$.

Комплексное число $x - iy$ называется ***сопряженным*** комплексному числу $x + iy$ и обозначается $\overline{z}$. Свойство комплексно сопряженных чисел: $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0; 0)$, а конец — в точке $M(x, y)$ (рис. 1). Плоскость XOY называется комплексной плоскостью. Ось OX называется действительной осью, ось OY — мнимой осью. Длина r вектора $\overline{OM}$ называется ***модулем*** числа и обозначается $|z|$, так что

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

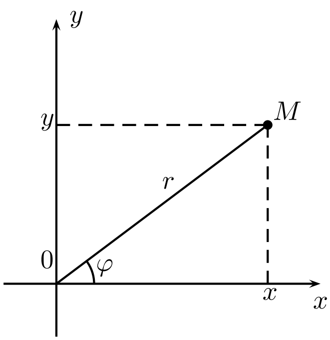

Рис. 1.

Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с осью OX, называется ***аргументом*** комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Он определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots),$$

где $\arg z$ есть ***главное значение*** $\operatorname{Arg} z$, определяемое условиями $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$, причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Аргумент числа $z = 0$ — величина неопределенная.

При решении примеров удобно пользоваться схемой, которая изображена на рис. 2.

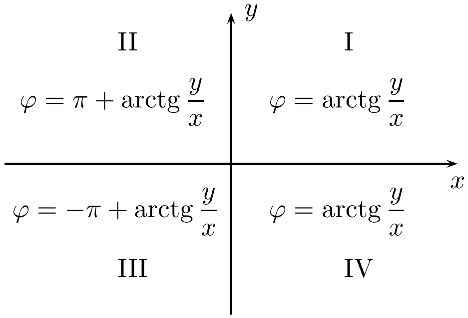

Рис. 2.

Имеют место следующие соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы отличаются на величину, кратную 2π:

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

Правила действий с комплексными числами. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ — два комплексных числа.

Сумма z_1+z_2, разность z_1-z_2, произведение $z_1\cdot z_2$ и частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ комплексных чисел z_1 и z_2 вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2); \\ z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2); \\ z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1); \\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Сложение и умножение комплексных чисел коммутативно и ассоциативно, умножение дистрибутивно относительно сложения.

Действительная часть $\operatorname{Re} z$ и мнимая часть $\operatorname{Im} z$ комплексного числа z выражаются через сопряженные комплексные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re} z=\frac{\overline{z}+z}{2}; \quad \operatorname{Im} z=i\frac{\overline{z}-z}{2}=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

В зависимости от решаемой задачи применяются различные формы записи комплексного числа.

Алгебраическая форма: $z=x+iy$.

Показательная форма: $z=r\mathrm{e}^{i\varphi}$, где $r=|z|$ и $\varphi=\operatorname{Arg} z$ — одно из значений $\operatorname{Arg} z$.

Функция $\mathrm{e}^{i\varphi}$ обладает всеми свойствами показательной формы.

Тригонометрическая форма: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где r и φ имеют тот же смысл, что и в показательной форме.

Переход от показательной формы к тригонометрической и обратный осуществляется на основе ***формулы Эйлера***:

$$\mathrm{e}^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$ $(k\in Z)$.

Произведением и частным двух отличных от нуля комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме, являются числа

$$\begin{gathered} z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right], \\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \end{gathered} \tag{4}$$

n-я степень комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ вычисляется по ***формуле Муавра***

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{5}$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее уравнению

$$w^n=z.$$

Все решения этого уравнения обозначаются $\sqrt[n]{z}$ и для числа z, записанного в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{6}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

1. Действия с комплексными числами

Действия с комплексными числами проводятся по формулам (3). При вычислении произведения или частного комплексных чисел удобно использовать представление комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пример 1.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если:

а) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 2 + i$;

б) $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 3 - 2i$.

Решение.

Согласно формулам (3) имеем:

а) $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (2 + i) = (2 + 2) + i(-3 + 1) = 4 - 2i$.

$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (2 + i) = (2 - 2) + i(-3 - 1) = 0 + i \cdot (-4) = -4i$.

Умножим эти комплексные числа как двучлены, причем i^2 заменим на -1.

$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)\cdot(2+i) = 2\cdot 2 + 2\cdot i + (-3i)\cdot 2 + (-3i)\cdot i = 4 + 2i - 6i - 3i^2 =$
$= 4 - 4i + 3 = 7 - 4i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{2+i} = \left|\begin{array}{l}\text{используем} \\ \text{формулу } \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{(z_2)}}\end{array}\right| = \frac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{используем} \\ \text{формулу } z\overline{z} = x^2 + y^2\end{array}\right| = \frac{2\cdot 2 - 2\cdot i - 3i\cdot 2 + 3i\cdot i}{2^2 + 1^2} = \frac{4 - 8i - 3}{4+1} =$$

$$= \frac{1-8i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i.$$

б) $z_1 + z_2 = (4 + i) + (3 - 2i) = (4 + 3) + i(1 - 2) = 7 - i$.

$z_1 - z_2 = (4 + i) - (3 - 2i) = (4 - 3) + i(1 - (-2)) = 1 + 3i$.

$z_1 \cdot z_2 = (4+i)\cdot(3-2i) = 4\cdot 3 - 4\cdot 2i + 3i - 2i^2 = 12 - 8i + 3i + 2 = 14 - 5i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+i}{3-2i} = \frac{(4+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{12 + 8i + 3i + 2i^2}{3^2 + 2^2} = \frac{12 + 11i - 2}{9+4} =$$

$$= \frac{10 + 11i}{13} = \frac{10}{13} + \frac{11}{13}i.$$

Пример 2.

Изобразить следующие комплексные числа на комплексной плоскости: а) $z_1 = 2 + i$; б) $z_2 = -2 - i$; в) $z_3 = -3i$; г) $z_4 = 1$; д) $z_5 = -2$.

Решение.

Так как комплексное число изображается на плоскости XOY точкой с координатами (x, y), где $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, то

а) $z_1 = 2 + i$; $\operatorname{Re} z = x = 2$; $\operatorname{Im} z = y = 1$;

б) $z_2 = -2 - i$; $\operatorname{Re} z = x = -2$; $\operatorname{Im} z = y = -1$;

в) $z_3 = -3i$; $\operatorname{Re} z = x = 0$; $\operatorname{Im} z = y = -3$;

г) $z_4 = 1$; $\operatorname{Re} z = x = 1$; $\operatorname{Im} z = y = 0$;

д) $z_5 = -2$; $\operatorname{Re} z = x = -2$; $\operatorname{Im} z = y = 0$.

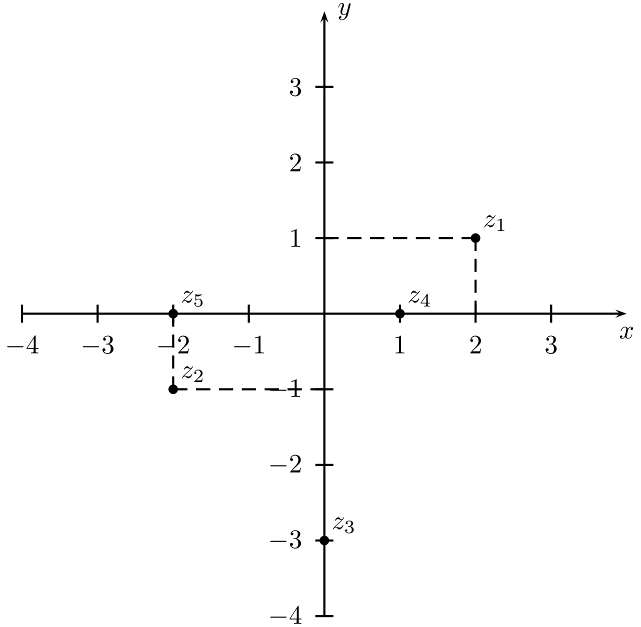

Рис. 3.

Пример 3.

Найти действительную ($\operatorname{Re} z$) и мнимую ($\operatorname{Im} z$) части, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$ следующих комплексных чисел:

а) $z = 3 - i$; б) $z = -i + 1$; в) $z = 5$; г) $z = -4i$.

Решение.

а) $z = 3 - i$, $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(3 - i) = 3$, $y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(3 - i) = -1$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$.

Так как $x = \operatorname{Re} z = 3 > 0$, то

$\arg z = |\text{согласно (2)}| = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \operatorname{arctg} \left(\dfrac{-1}{3} \right) = -\operatorname{arctg} \left(\dfrac{1}{3} \right)$;

$\operatorname{Arg} z = -\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{3} \right) + 2\pi k,\ k \in Z$.

б) $z = -1 + i$, $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} (-1 + i) = -1$, $y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} (-1 + i) = 1$, $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Так как $x = -1 < 0$, $y = 1 > 0$, то согласно (2)

$\arg(-1 + i) = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \operatorname{arctg} 1 = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$;

$\operatorname{Arg} (-1 + i) = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

в) $z = 5$, $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} 5 = 5$, $y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} 5 = 0$, $|z| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$.

Так как $x = 5 > 0$, то согласно (2)

$\arg(5) = \operatorname{arctg} \left(\dfrac{0}{5} \right) = \operatorname{arctg} 0 = 0$;

$\operatorname{Arg} (5) = 0 + 2\pi k = 2\pi k,\ k \in Z$.

г) $z = -4i$, $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} (-4i) = 0$, $y = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} (-4i) = -4$, $|z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$.

Так как $x = 0$, $y = -4 < 0$, то согласно (2)

$\arg(-4i) = -\dfrac{\pi}{2}$;

$\operatorname{Arg} (-4i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k = 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 4.

Найти действительные решения уравнения $(4+2i)x+(5-3i)y = 13+i$.

Решение.

Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i.$$

Отсюда согдасно определению равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13; \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x = 2$, $y = 1$.

Пример 5.

Доказать, что: а) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; б) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Доказательство.

а) По определению имеем

$\overline{z_1 - z_2} = (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

б) По определению имеем

$\overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1x_2 - x_1iy_2) - (y_1y_2 + ix_2y_1) =$
$= x_1(x_2 - iy_2) - y_1(y_2 + ix_2) = x_1(x_2 - iy_2) - iy_1(x_2 - iy_2) =$
$= x_1(x_2 - iy_2) - iy_1(x_2 - iy_2) = (x_2 - iy_2)(x_1 - iy_1) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Пример 6.

Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

а) $z = -3 + i$; б) $z = -1 - i\sqrt{3}$; в) $z = -2$; г) $z = \sin\alpha - i\cos\alpha$ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$.

Решение.

а) По определению модуля комплексного числа имеем $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 1} = \sqrt{10}$, $z \in$ II четверти, по формуле (2) $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{-3}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$.

$z = \sqrt{10}\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}\right)\right)$ — тригонометрическая форма.

$z = \sqrt{10}\cdot \mathrm{e}^{i\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}$ — показательная форма.

б) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $z \in$ III четверти, по формуле (2) $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$.

$z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ — тригонометрическая форма.

$z = 2\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$ — показательная форма.

в) $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$, число z — действительное, расположено на действительной оси, поэтому $\varphi = \pi$.

$z = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$ — тригонометрическая форма.

$z = 2\mathrm{e}^{i\pi}$ — показательная форма.

г) $x = \sin\alpha > 0$, $y = (-\cos\alpha) > 0$ для $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$|z| = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$, число $z \in$ I четверти, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\pi - (\pi - \alpha)))$, $(\pi - \alpha) \in$ I четверти, значит, $\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \pi + \alpha\right)\right) = \dfrac{\pi}{2} - \pi + \alpha = \alpha - \dfrac{\pi}{2}$, при преобразовании использовали формулы

$$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

$z = 1\cdot\left(\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ — тригонометрическая форма.

$z = 1\cdot \mathrm{e}^{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)i}$ — показательная форма.

Пример 7.

Найти модули и аргументы чисел:

а) $z=-3i\left(\cos\dfrac{5\pi}{8}-i\sin\dfrac{5\pi}{8}\right)$; б) $z=(1+i)(\sqrt{3}-i)$.

Решение.

Каждое из заданных чисел записано в виде произведения. Найдем модули и аргументы сомножителей и воспользуемся правилом умножения чисел, заданных в тригонометрической форме:

а) $z=z_1\cdot z_2$, $z_1=-3i$, $z_2=\cos\dfrac{5\pi}{8}-i\sin\dfrac{5\pi}{8}=\cos\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\dfrac{5\pi}{8}\right)$ (использовали свойства тригонометрических функций: $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$, $-\sin\alpha=\sin(-\alpha)$).

Для чисел z_1 и z_2 находим модули и аргументы: $|z_1|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3$; $\arg z_1=\varphi_1=-\dfrac{\pi}{2}$ (число z_1 лежит на мнимой оси, $y<0$).

$|z_2|=\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)}=1$, $\arg z_2=\varphi_2=-\dfrac{5\pi}{8}$.

Используя формулы (4), получаем $|z|=|z_1|\cdot|z_2|=3$, $\operatorname{Arg} z=\arg z_1+\arg z_2=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{8}=\dfrac{-8\pi-10\pi}{16}=-\dfrac{18\pi}{16}=-\dfrac{9\pi}{8}$, $\arg z=2\pi-\dfrac{9\pi}{8}=\dfrac{7\pi}{8}$.

Заметим, что для решения этой задачи можно раскрыть скобки, записать число в алгебраической форме, а затем найти $|z|$ и $\arg z$, используя формулы (1)–(2).

Например, $z=-3i\left(\cos\dfrac{5\pi}{8}-i\sin\dfrac{5\pi}{8}\right)=-3i\cos\dfrac{5\pi}{8}+3i^2\sin\dfrac{5\pi}{8}=-3\sin\dfrac{5\pi}{8}-i3\cos\dfrac{5\pi}{8}$, $\operatorname{Re} z=-3\sin\dfrac{5\pi}{8}<0$, так как $\sin\dfrac{5\pi}{8}>0$ ($\varphi\in$ II четверти), $\operatorname{Im} z=-3\cos\dfrac{5\pi}{8}>0$, так как $\cos\dfrac{5\pi}{8}<0$ ($\varphi\in$ II четверти).

Число $z\in$ II четверти.

$$|z|=\sqrt{\left(-3\sin\frac{5\pi}{8}\right)^2+\left(-3\cos\frac{5\pi}{8}\right)^2}=3$$

$$\arg z=\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{-3\cos\frac{5\pi}{8}}{-3\sin\frac{5\pi}{8}}\right)=\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{8}\right)=$$

$$=\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right)=\left[\varphi=\frac{3\pi}{8}\in\text{I четверти}\right]=$$

$$=\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}\right)=\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\right)=\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}=$$

$=\dfrac{4\pi+3\pi}{8}=\dfrac{7\pi}{8}$ (при преобразовании использованы формулы $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$).

б) $z=z_1\cdot z_2$, $z_1=1+i$, $z_2=\sqrt{3}-i$.

Для числа z_1 имеем: $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (число $z_1 \in$ I четверти);

для числа z_2: $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$, $\arg z_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$ (число $z_2 \in$ IV четверти, $\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha$)

Используя формулы (4), получаем $|z| = \sqrt{2}\cdot 2$, $\arg z = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Пример 8.

Записать в тригонометрической форме число $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Решение.

Обозначим $z = \frac{z_1}{z_2}$, $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}-i$. Для чисел z_1 и z_2 находим модули и аргументы: $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, $|z_2| = 2$, $\arg z_2 = -\frac{\pi}{6}$.

По формуле (4) получаем $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi+2\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$;

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}+2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}+2\pi k\right)\right),\ k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$$

Пример 9.

Найти модуль и аргумент числа $(1+i)^6$.

Решение.

Обозначим $z = z_1^6$, $z_1 = 1+i$. Найдем модуль и аргумент числа z_1: $|z_1| = \sqrt{2}$; $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$. При возведении в степень комплексного числа в эту степень возводится модуль числа, а аргумент умножается на показатель степени: $|z^n| = |z|^n$, $\operatorname{Arg} z^n = n\arg z$. Поэтому $|z| = (\sqrt{2})^6 = 8$ и $\operatorname{Arg} z = 6\cdot\arg z_1 = 6\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$. Так как по определению для главного аргумента выполняется условие $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то $\arg z = \frac{3\pi}{2} - 2\pi = \frac{3\pi-4\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

Пример 10.

Вычислить:

а) $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{50}$; б) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{12}$; в) $(1+i)^5\left(\sqrt{3}-i\right)^6$.

Решение.

а) Представим число $z = -1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$|z| = \sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$,

$\arg z = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

По формуле Муавра (5):

$$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{50} = 2^{50}\left(\cos\frac{100\pi}{3} + i\sin\frac{100\pi}{3}\right) = 2^{50}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -2^{49}\left(1+i\sqrt{3}\right).$$

б) Запишем число $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12}$ в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\arg z = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

По формуле Муавра (5):

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12} = 1^{12}\left(\cos\left(-\frac{12\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{12\pi}{6}\right)\right) = \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 1.$$

в) Вычислим отдельно $(1+i)^5$ и $\left(\sqrt{3}-i\right)^6$, затем найдем произведение этих чисел. Представим числа $z_1 = 1+i$ и $z_2 = \sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме:

$|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$,

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^5\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{2}\right)^5\cdot\sqrt{2}}{2}(1+i) = -4(1+i);$$

$|z_2| = 2$, $\arg z_2 = -\frac{\pi}{6}$,

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^6 = 2^6\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{6}\right)\right) = 2^6\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) =$$

$$= 2^6\left(\cos\pi - i\sin\pi\right) = -2^6.$$

Найдем произведение

$$(1+i)^5\left(\sqrt{3}-i\right)^6 = z_1^5\cdot z_2^6 = -4(1+i)\cdot\left(-2^6\right) = 2^8(1+i).$$

Пример 11.

Найти все значения следующих корней:

а) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{-2+2i}$; в) $\sqrt{1-i}$.

Решение.

а) Запишем комплексное число в тригонометрической форме. Так как $\left|-1+i\sqrt{3}\right| = 2$, $\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, то число $-1+i\sqrt{3}$ имеет тригоно-

метрическую форму
$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$
Отсюда согласно (6), получаем
$$\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)=$$
$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)\right),\quad k=0,1,2,3.$$
При различных k получим следующие значения корней:

$k=0$: $\quad z_0=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=$
$$=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right);$$
$k=1$: $\quad z_1=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$
$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3});$$
$k=2$: $\quad z_2=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{2}\right)\right)=$
$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3}-i);$$
$k=3$: $\quad z_3=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$
$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

Геометрически точки, соответствующие найденным значениям корня, лежат в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[n]{|z|}=\sqrt[4]{2}$ с центром в начале координат (рис. 4). Радиусы–векторы этих точек составляют углы $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{3}$ с положительным направлением оси Ox.

б) Приводим комплексное число к тригонометрическому виду $|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$, $\arg(-2+2i)=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{-2}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$,
$-2+2i=\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Следовательно,
$$\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=$$

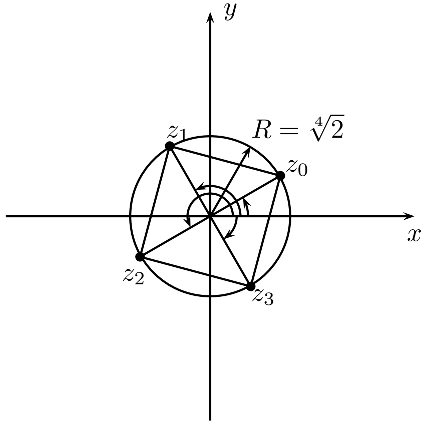

Рис. 4.

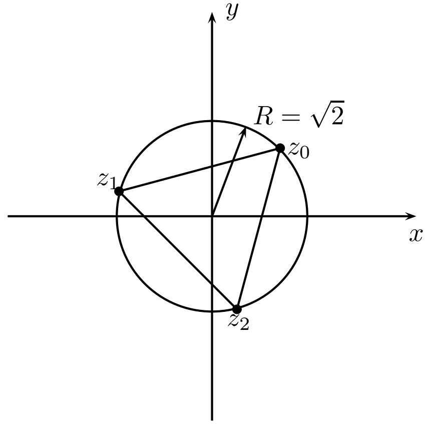

Рис. 5.

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right) \quad k=0,1,2.$$

Полагая $k=0,1,2$, найдем

$k=0$: $\quad z_0=\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i;$

$k=1$: $\quad z_1=\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\approx -1.366+0.366i;$$

$k=2$: $\quad z_2=\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}\right)\approx 0.366-1.366i.$$

Геометрически образы полученных корней представляют собой точки, лежащие в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат (рис. 5).

в) Запишем комплексное число в тригонометрической форме:

$|1-i|=\sqrt{2}$, $\arg(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}$,

$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Согласно формуле (6), получаем

$$\sqrt{1-i} = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{2}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8} + \pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8} + \pi k\right)\right), \quad k = 0, 1.$$

При различных значениях k, получим

$k = 0$: $\quad z_0 = \sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) =$
$\quad = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right);$

$k = 1$: $\quad z_1 = \sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) =$
$\quad = \sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right).$

Пример 12.

Решить уравнение:

а) $z^3 - 8i = 0$; б) $z^6 - 1 = 0$; в) $z^2 - (1+i)z + 5i = 0$.

Решение.

а) Задача равносильна задаче нахождения всех значений корня из комплексного числа. Найдем $z = \sqrt[3]{8i}$, определим модуль и аргумент числа $8i$: $|8i| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$, $\arg(8i) = \frac{\pi}{2}$, следовательно

$$z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Придавая k последовательно значения от 0 до 2, выписываем решения уравнения

$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i;$

$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) =$
$= 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$
$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i;$

$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$
Эти три корня расположены в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в окружность $R = \sqrt{2}$, с центром в начале координат.

б) Множество решений уравнения $z^6 - 1 = 0$ совпадает с множеством возможных различных значений $\sqrt[6]{1}$. Найдем $z = \sqrt[6]{1}$. Определим модуль и аргумент числа 1: $|1| = 1$, $\arg(1) = 0$.

По формуле (6), имеем

$$z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}\right) = \cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Выписываем корни z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5:
$z_0 = \cos 0 + i\sin + = 1;$
$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$
$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} =$
$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$
$z_3 = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$
$z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} =$
$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$
$z_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6} =$
$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$
Геометрически соответствующие точки расположены в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 1$. Комплексные корни этого уравнения являются попарно сопряженными: $z_5 = \overline{z_1}$, $z_4 = \overline{z_2}$, z_0 и z_3 — действительные числа.

в) По формуле корней квадратного уравнения находим

$$z_{1,2} = \frac{1 + i \pm \sqrt{(1+i)^2 - 4\cdot 1\cdot 5i}}{2} = \frac{1 + i \pm \sqrt{-18i}}{2},$$

где под $\sqrt{-18i}$ понимается одно из значений квадратного корня.

Так как $|-18i| = 18$, $\arg(-18i) = -\frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{-18i} = \sqrt{18}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right) =$$

$$= 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right)\right), \quad k = 0, 1.$$

При $k=0$ получим одно из значений квадратного корня
$z_0=\sqrt{-18i}=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$
$=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3-3i.$
Значит,
$z_{1,2}=\dfrac{1+i\pm(3-3i)}{2},$
то есть уравнение имеет корни $z_1=2-i$, $z_2=-1+2i$.

2. Геометрическое изображение множества комплексных чисел

Для геометрического изображения комплексных чисел в системе координат XOY, удовлетворяющих некоторым соотношениям, обычно используется алгебраическая форма комплексного числа.

Пример 13.
Найти множество точек координатной плоскости XOY, изображающих комплексные числа z, для которых

а) $|z+i-2|\leqslant 2$;

б) $\operatorname{Im} z^2>4$;

в) $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arg(z+1-i)\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$;

г) $\begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Re}(iz+1)\leqslant 2;\\ |z-1-i|>2.\end{cases}$

Решение.
а) Запишем комплексное число z в алгебраической форме $z=x+iy$. Тогда
$z+i-2=(x+iy)+i-2=(x-2)+i(y+1)$.
По определению модуля комплексного числа
$|z+i-2|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$,
вследствие чего неравенство $|z+i-2|\leqslant 2$ принимает вид
$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\leqslant 2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2\leqslant 2^2$.
Множество точек координатной плоскости XOY, удовлетворяющих последнему неравенству, представляет собой множество всех точек, лежащих внутри окружности и на окружности радиуса 2 с центром в точке $(2;-1)$ (рис. 6).

б) Пусть $z=x+iy$, тогда
$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy$.
Следовательно, $\operatorname{Im} z^2=2xy$. По условию $2xy>4$ или $xy>2$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем квадрантах, соответственно над и под гиперболой $xy=2$ (рис. 7).

в) Комплексное число $z+1-i=z-(i-1)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом точка z. Угол между

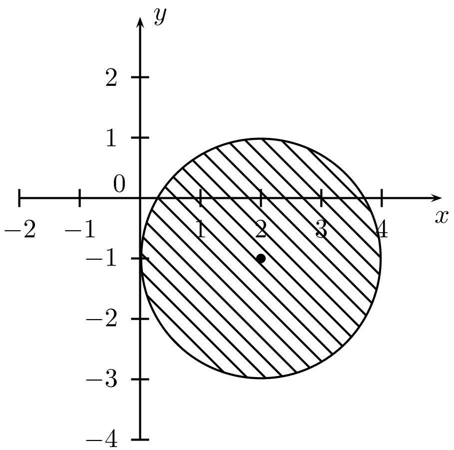

Рис. 6.

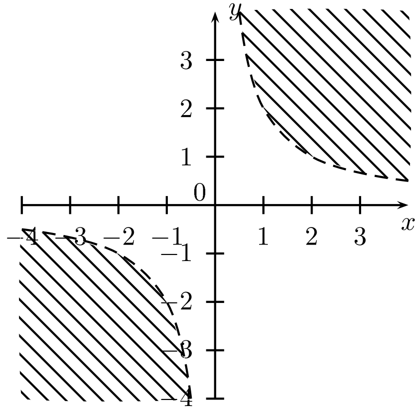

Рис. 7.

этим вектором и осью OX есть $\arg(z+1-i)$, а он меняется в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ до $\dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью OX углы $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{4}$ радианов (рис. 8).

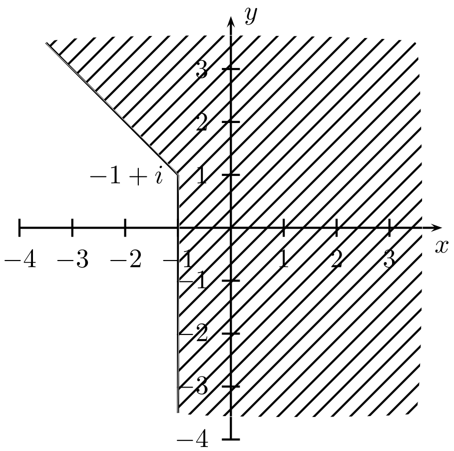

Рис. 8.

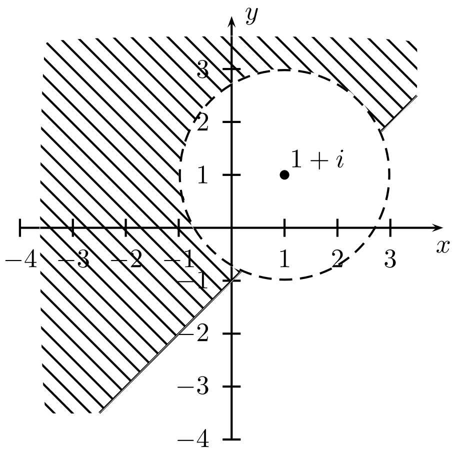

Рис. 9.

г) Так как
$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x+iy) = x$, $\operatorname{Re}(iz+1) = \operatorname{Re}(i(x+iy)+1) = \operatorname{Re}(ix-y+1) = 1-y$, то первое неравенство имеет вид $x-y+1 \leqslant 2$, $y \geq x-1$, то есть определяет

полуплоскость, расположенную выше прямой $y = x - 1$, включая саму прямую.

Во втором неравенстве запишем комплексное число в алгебраической форме
$|x + iy - 1 - i| = |(x - 1) + i(y - 1)|$.
По определению модуля имеем
$|z - 1 - i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$
и неравенство $|z - 1 - i| > 2$ принимает вид
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} > 2; \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 > 2^2.$
Таким образом, второе неравенство определяет внешность окружности радиуса 2 с центром в точке $1 + i$. Значит, решением системы будет внешность этой окружности, расположенная выше прямой $y = x - 1$ (рис. 9).

Пример 14.

Определить вид кривой, заданной соотношением:

а) $|z - 3| = |z + 3i|$; б) $|z + 2| = |z - 4|$;

в) $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{4}$; г) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{\overline{z}} = 1$.

Решение.

а) Запишем комплексное число в алгебраической форме:
$|(x + iy) - 3| = |(x + iy) + 3i|$.
Далее, по определению модуля имеем
$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$,
возведем в квадрат левую и правую части данного равенства, получим
$(x-3)^2 + y^2 = x^2 + (y+3)^2$.
После преобразований имеем
$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9; \quad -6x = 6y; \quad y = -x.$
Это уравнение биссектрисы второго и четвертого координатных углов (рис. 10).

Задачу можно решить иначе, если воспользоваться геометрическим смыслом модуля $|z_1 - z_2|$ как расстояния между точками.

б) Подставив $z = x + iy$, запишем числа в алгебраической форме:
$|x + iy + 2| = |x + iy - 4|; \quad |(x + 2) + iy| = |(x - 4) + iy|;$
$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}; \quad x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2;$
$4x + 8x = 16 - 4; \quad 12x = 12; \quad x = 1.$
Это уравнение прямой (рис. 11).

в) Преобразуем комплексное число $\dfrac{1}{z}$, используя правило деления

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Находим $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z}$:

$$\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \operatorname{Im} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

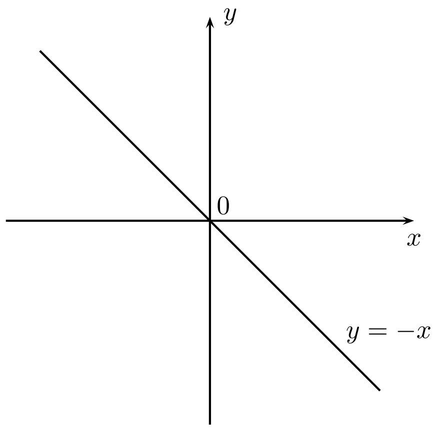

Рис. 10.

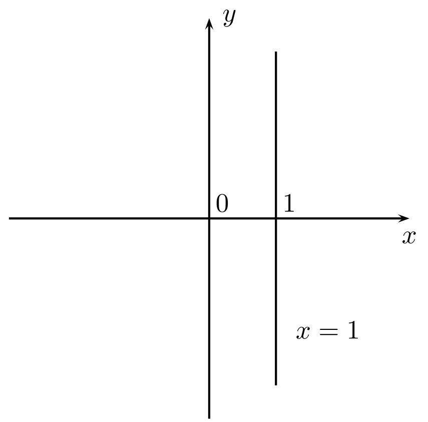

Рис. 11.

Получаем уравнение кривой в действительной форме:
$-\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$; $\quad -4y=x^2+y^2$; $\quad x^2+y^2-4y=0$; $\quad x^2+\left(y^2-4y+4\right)=4$;
$x^2+(y-2)^2=2^2$.
Это уравнение окружности радиуса $R=2$ с центром в точке $(0;2)$(рис. 12).

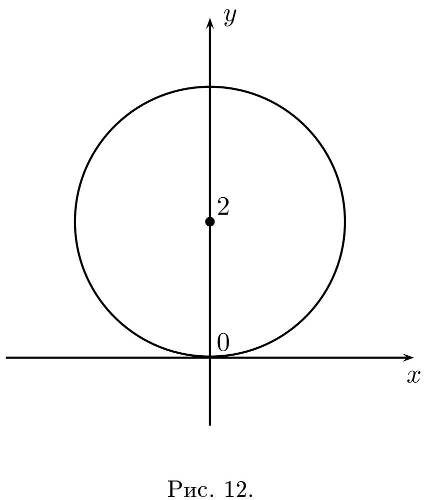

Рис. 12.

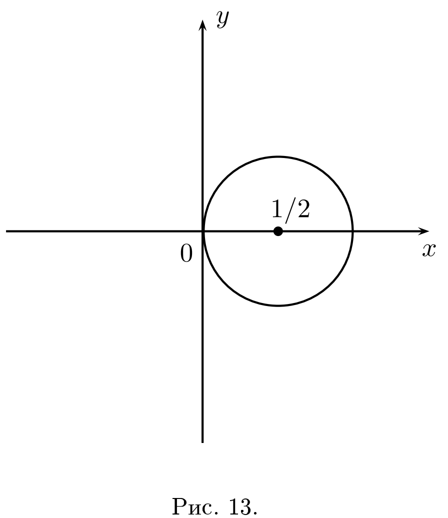

Рис. 13.

г) Используя правило деления, находим $\operatorname{Re}\dfrac{1}{\bar{z}}$:
$$\operatorname{Re}\frac{1}{\bar{z}}=\operatorname{Re}\frac{1}{x-iy}=\operatorname{Re}\frac{x+iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Получаем уравнение кривой в действительной форме:

$$\frac{x}{x^2+y^2}=1; \quad x^2+y^2=x; \quad x^2-x+y^2=0;$$

$$x^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2; \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}.$$

В результате получили уравнение окружности радиуса $R=\dfrac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ (рис. 13).

Задания для самостоятельного решения

1. Найти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$ комплексных чисел:

а) $z = -2 - 5i$;

б) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;

в) $z = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$;

г) $z = 2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}}$;

д) $z = 1 + \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: а) -2; -5; $\sqrt{29}$; $-\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{5}{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{5}{2} + \pi(2k-1)$;

б) -2; $2\sqrt{3}$; 4; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$;

в) 0; 1; 1; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$;

г) $\sqrt{3}$; -1; 2; $-\dfrac{5\pi}{6}$; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$;

д) $1 + \cos\dfrac{\pi}{7}$; $\sin\dfrac{\pi}{7}$; $2\cos\dfrac{\pi}{14}$; $\dfrac{\pi}{14}$; $\dfrac{\pi}{14} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2. Найти $\operatorname{Im}\overline{z}$, если $z = \dfrac{i}{1-2i}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{5}$.

3. Найти $\operatorname{Re}\overline{z}$, если $z = \left(\dfrac{2-i}{1+i}\right)^3$.

Ответ: $-\dfrac{13}{4}$.

4. Доказать следующие соотношения:

а) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

б) $\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2$;

в) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

5. Даны комплексные числа $z_1 = i - 1$, $z_2 = i$, $z_3 = 3i + 2$. Какие из следующих равенств верны:

а) $\operatorname{Re}\overline{z_1} = \operatorname{Im}\overline{z_2}$;

б) $z_1^2 = \dfrac{2}{z_2}$;

в) $z_3 - z_1 = \dfrac{\overline{z_3}}{\overline{z_2}}$.

Ответ: верными являются все указанные равенства.

6. Даны комплексные числа $z_1 = (1+\sqrt{2})i$, $z_2 = (1-\sqrt{2})i$, $z_3 = 2+\sqrt{2}$. Какие из следующих равенств верны:

а) $|z_1 \cdot z_2| = 1$, $\arg \dfrac{z_3}{z_1} = -\dfrac{\pi}{2}$; б) $\arg(z_1 \cdot z_2) = 0$;

в) $|z_2| = 1 - \sqrt{2}$, $\arg z_3 = 0$.

Ответ: верными являются все указанные равенства.

7. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) i; б) -3;

в) $-3-4i$; г) $-\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$;

д) $\sin\alpha - i\cos\alpha$.

Ответ: а) $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\cos\pi + i\sin\pi$;

в) $5\left[\cos\left(-\arccos\dfrac{3}{5}\right) + i\sin\left(-\arccos\dfrac{3}{5}\right)\right]$;

г) $\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

д) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

8. Следующие комплексные числа представить в показательной форме:

а) -2; б) $-i$; в) $-1-i\sqrt{3}$; г) $5+3i$.

Ответ: а) $2\mathrm{e}^{i\pi}$;

б) $1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}i}$;

в) $2\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}i}$;

г) $\sqrt{34}\mathrm{e}^{i\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}}$.

9. Вычислить:

а) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{20}$; б) $\left(\dfrac{1}{i-1}\right)^{100}$;

в) $(2-2i)^7$; г) $\left(\sqrt{3}-3i\right)^6$.

Ответ: а) $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $-\dfrac{1}{2^{50}}$;

в) $2^{10}(1+i)$;

г) 1728.

10. Вычислить $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$.

Ответ: 0.

11. Доказать равенство $\dfrac{6-i}{3+4i} = \dfrac{13+41i}{-25+25i}$.

12. Найти все значения следующих корней:

а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt{3+4i}$; в) $\sqrt[3]{i}$;

г) $\sqrt[4]{-i}$; д) $\sqrt{-8i}$; е) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$;
б) $\pm(2+i)$;
в) $\dfrac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}+i\right)$; $-i$;
г) $\pm\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\pm\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$;
д) $\pm 2(1-i)$;
е) $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$.

13. Решить уравнения:

а) $z^6+8=0$; б) $z^2+2iz+2=0$; в) $z^2+2iz-2=0$.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$, $\pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$, $\pm\sqrt{2}i$;
б) $1-i$, $-1-i$;
в) $-i+\sqrt{3}$, $-i-\sqrt{3}$.

14. Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, заданное условиями:

а) $0 < \operatorname{Re}(z\cdot i) < 1$; б) $|z| = \operatorname{Re}\overline{z} + 1$;

в) $1 < (z-i) < 3$; г) $-\dfrac{3\pi}{4} < \arg(z-i) < \dfrac{\pi}{2}$;

д) $\operatorname{Im}\overline{z}^2 < 1$; е) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) < -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: а) полоса $-1<y<0$;
б) парабола $y^2 = 2x+1$;
в) кольцо, ограниченное окружностями с центром в точке i и радиусами 1 и 3 соответственно;
г) угол с вершиной в точке i, стороны которого образуют с осью соответственно уллы $-\dfrac{3\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{2}$;

д) внутренность гиперболы $xy = -\dfrac{1}{2}$;

е) внутренность окружности $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

15. Указать, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $\operatorname{Re} \overline{z}^2 = 1$;
б) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \overline{z}}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$;
в) $z^2 + \overline{z}^2 = 1$;
г) $|z-i| + |z+i| = 4$;
д) $|z-i| - |z+i| = 2$.

Ответ: а) гипербола $x^2 - y^2 = 1$;

б) гипербола $xy = -1$;

в) гипербола $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2}$;

г) эллипс $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

д) луч на оси OY от -1 до $-\infty$.

Список литературы

[1] *Волковысский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г.* Сборник задач и упражнений по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2006. 312 с.

[2] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002. 688 с.

[3] *Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С.* Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1997. 207 с.

[4] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2007. 304 с.

[5] *Морозова В.Д.* Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГТУ, 2002. 519 с.

[6] *Пантелеев А.В., Якимова А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2001.

[7] Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1977.

[8] *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1999.

Содержание

Комплексные числа.
Практикум по высшей математике

Составители *КУБЫШКИНА Светлана Николаевна*
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка Е.Ю. А р л а н о в а

Оригинал-макет подготовлен с помощью
издательской системы LaTeX 2ε

Подп. в печать 15.08.11.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. п. л. 2,32.
Уч. изд. л. 2,3. Тираж 100 экз. Рег. №174/10. Заказ №356.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8.