МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические указания к практическим занятиям
по математике

Самара
Самарский государственный технический университет
2012

Печатается по решению методического совета факультета СамГТУ

УДК 517.53
Э45

Элементарные функции комплексного переменного: методические указания к практическим занятиям по математике / Сост. С.Н. Кубышкина, Е.Ю. Арланова. — Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2012. — 30 с.

Приведены краткие сведения и формулы по теме «Элементарные функции комплексного переменного», а также большое количество примеров. Представлены задачи для самостоятельного решения. Для самоконтроля все примеры приведены с ответами. Пособие предназначено для студентов первого курса машиностроительного и физико-технологического факультетов.

УДК 517.53
Э45

Составители: канд. физ.-мат. наук С.Н. Кубышкина,
канд. физ.-мат. наук Е.Ю. Арланова

Рецензент: канд. техн. наук Т.А. Бенгина

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемые методические указания к практическим занятиям по высшей математике «Элементарные функции комплексного переменного» предназначены для студентов инженерных специальностей машиностроительного и физико-технологического факультетов. Цель этого пособия — помочь студентам самостоятельно или с помощью преподавателя овладеть методами решения задач по теме «Элементарные функции комплексного переменного». В каждом разделе приводятся основные теоретические сведения и необходимые формулы. Внимание уделено как решению типовых задач по данной тематике, так и примерам для самостоятельной работы.

В пособии использована сквозная нумерация задач. Задачи расположены по мере возрастания их сложности. Ко всем задачам приведены ответы.

1. Основные понятия о функции комплексного переменного

Пусть E есть некоторое множество точек, расположенных на комплексной плоскости.

Если каждому комплексному числу $z \in E$, по некоторому правилу поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w, то говорят, что на множестве E определена (задана) функция, для которой точки $z \in E$ являются независимой переменной (аргументом), а точки w — значения функции. Символически этот факт записывают так:

$$w = f(z).$$

Если любому $z \in E$ соответствует лишь одно определенное значение w, то функция $w = f(z)$ называется *однозначной*, в противном случае функция $w = f(z)$ называется *многозначной*.

Множество E называется *множеством определения* функции $w = f(z)$, а совокупность всех значений w (обозначим ее G), которые функция $w = f(z)$ принимает на E, называется *множеством значений* функции $f(z)$.

Если $f(z) = u + iv$, то задание функции $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ $(z \in E)$ равносильно заданию на E двух действительных функций $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ действительных переменных x и y. Следовательно, функция $f(z)$ может быть записана в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Очевидно, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ — действительная часть $f(z)$,
$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ — мнимая часть $f(z)$.

Пример 1.
Пусть $w = z^3 + 2z$, где $z = x + iy$. Найти $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$.

Решение.
$w = (x + iy)^3 + 2 \cdot (x + iy) = x^3 + 3i^2xy^2 + 3ix^2y + i^3y^3 + 2x + 2iy = (x^3 - 3xy^2 + 2x) + i(3x^2y - y^3 + 2y)$.

Следовательно, $\operatorname{Re} w = x^3 - 3xy^2 + 2x$; $\operatorname{Im} w = 3x^2y - y^3 + 2y$.

Геометрическая интерпретация понятия функции $f(z)$ заключается в том, что равенством $w = f(z)$ $(w \in G)$ устанавливается закон соответствия между точками множества E комплексной плоскости $\mathbb{Z}$ и точками множества G комплексной плоскости $\mathbb{W}$ (рис. 1).

Точки w называют *образами* точек z, а множество G — *образом множества* E. О функции $w = f(z)$ говорят, что она отображает множество E на множество G.

Очевидно, что можно установить и обратное соответствие — каждой точке $w \in G$ ставится в соответствие одна или несколько точек $z \in E$.

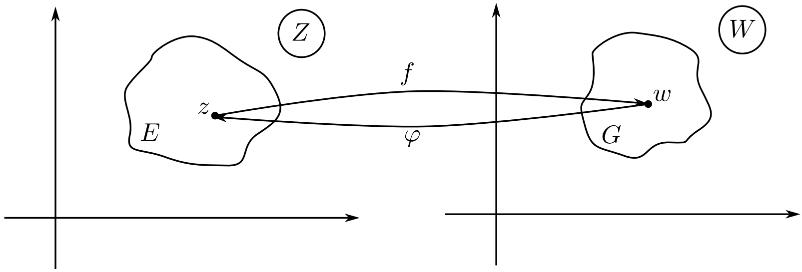


Рис. 1.

Это означает, что на множестве G задана *обратная функция* к функции $f(z)$: $z = \varphi(w)$.

Если функция $z = \varphi(w)$, обратная к однозначной функции $w = f(z)$, также является однозначной, то говорят, что между множествами E и G *установлено взаимно однозначное соответствие.*

Комплексное число A называется *пределом однозначной функции* $w = f(z)$ при $z \to a$, что обозначается $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|z - a| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной в области* D, если она непрерывна в каждой точке $z \in D$.

Область D называется *односвязной*, если она ограничена замкнутой не самопересекающейся линией Γ (рис. 2).

Если область D ограничена двумя замкнутыми не пересекающимися и не самопересекающимися линиями Γ_1 и Γ_2, то она называется *двусвязной* (рис. 3).

Пусть Γ_1 — внешняя линия, а Γ_2 — внутренняя. Область является *двусвязной* и в том случае, если линия Γ_2 вырождается в точку или в дугу непрерывной линии. Аналогично могут быть определены трехсвязные, четырехсвязные и так далее области. На рис. 4 изображена четырехсвязная область.

Пример 2.

Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

а) $w = 2\overline{z} - iz^3$;

б) $w = i - 4z^2$;

в) $w = \dfrac{2}{\overline{z}}$;

г) $w = \dfrac{iz+1}{1+\overline{z}}$.

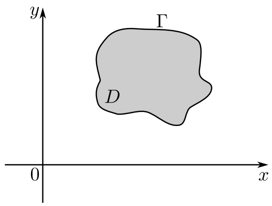


Рис. 2.

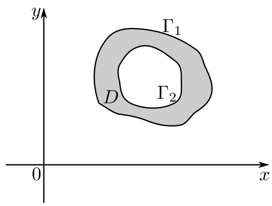


Рис. 3.

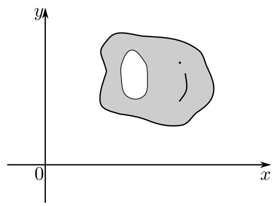


Рис. 4.

Решение.

а) $w = 2(x - iy) - i(x + iy)^3 = 2x - 2iy - i(x^3 + 3x^2 iy + 3i^2 y^2 x + i^3 y^3) =$
$= 2x - 2iy - ix^3 + 3x^2 y + 3iy^2 x - y^3 = (2x + 3x^2 y - y^3) + i(-2y - x^3 + 3y^2 x)$.

Следовательно, $\operatorname{Re} w = 2x + 3x^2 y - y^3$, $\operatorname{Im} w = -2y - x^3 + 3y^2 x$.

б) $w = i - 4(x + iy)^2 = i - 4(x^2 + 2ixy + i^2 y^2) = i - 4x^2 - 8ixy + 4y^2 =$
$= (-4x^2 + 4y^2) + i(1 - 8xy)$;

$\operatorname{Re} w = 4y^2 - 4x^2$, $\operatorname{Im} w = 1 - 8xy$.

в) $w = \dfrac{2}{\overline{z}} = \dfrac{2}{x - iy} = \dfrac{2(x + iy)}{(x - iy)(x + iy)} = \dfrac{2x + 2iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{2y}{x^2 + y^2}$;

$\operatorname{Re} w = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} w = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$.

г) $w = \dfrac{iz + 1}{1 + \overline{z}} = \dfrac{i(x + iy) + 1}{1 + (x - iy)} = \dfrac{(ix - y + 1)(1 + x + iy)}{(1 + (x - iy))(1 + x + iy)} =$

$= \dfrac{x - 2xy - y + 1 + i(x^2 + y - y^2 + x)}{(1 + x)^2 + y^2}$;

$\operatorname{Re} w = \dfrac{x - 2xy - y + 1}{(1 + x)^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} w = \dfrac{x^2 + y - y^2 + x}{(1 + x)^2 + y^2}$.

Пример 3.

Дана функция $w = z^2 + 3$. Найти значения функции при

а) $z = 1 - i$; б) $z = 2i$; в) $z = -3$.

Решение.

а) $w = (1 - i)^2 + 3 = 1 - 2i + i^2 + 3 = 4 - 2i + 1 = 3 - 2i$;

б) $w = (2i)^2 + 3 = -4 + 3 = -1$;

в) $w = (-3)^2 + 3 = 9 + 3 = 12$.

Пример 4.

Дана функция $f(z) = 2x^2 + 3iy^2$, где $z = x + iy$. Найти:

а) $f(3 - 2i)$; б) $f(1 + 4i)$; в) $f(0)$; г) $f(-2i)$.

Решение.

Имеем

а) $x = 3$, $y = -2$, $f(3 - 2i) = 2 \cdot 9 + 3i \cdot 4 = 18 + 12i$;

б) $x=1,\ y=4,\ f(1+4i)=2\cdot 1+3i\cdot 16=2+48i$;
в) $x=0,\ y=0,\ f(0)=2\cdot 0+3i\cdot 0=0$;
г) $x=0,\ y=-2,\ f(-2i)=2\cdot 0+3i\cdot 4=12i$.

Пример 5.
Найти пределы:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{n+5}+i\dfrac{5n^2-4n+1}{2+n^2}\right)$;
б) $\lim\limits_{z\to 1-2i}\dfrac{\operatorname{Re}(2z^2)}{|3z|^2}$;
в) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}$.

Решение. Находим:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{n+5}+i\dfrac{5n^2-4n+1}{2+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{n+5}+i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-4n+1}{2+n^2}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(4-\frac{3}{n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}+i\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(5-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2}+1\right)}=4+5i$;
б) $\lim\limits_{z\to 1-2i}\dfrac{\operatorname{Re}(2z^2)}{|3z|^2}$, найдем $\operatorname{Re}(2z^2)$ и $|3z|$:
$\operatorname{Re}(2z^2)=\operatorname{Re}(2(x+iy)^2)=\operatorname{Re}(2(x^2+2ixy-y^2))=2x^2-2y^2$;
$|3z|=|3(x+iy)|=3\sqrt{x^2+y^2}$,
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\frac{2x^2-2y^2}{\left(3\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\frac{2(x^2-y^2)}{9(x^2+y^2)}=\frac{2(1-4)}{9(1+4)}=-\frac{2}{15};$$
в) $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$, разложим числитель дроби на множители:
$z^2+3iz-2=(z+i)(z+2i)$
$z^2+3iz-2=0$
$D=-9+8=-1$
$z_{1,2}=\dfrac{-3i\pm\sqrt{-1}}{2}=\dfrac{-3i\pm i}{2}$
$z_1=-i,\ z_2=-2i$
$$\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z+2i)}{z+i}=\lim_{z\to -i}(z+2i)=i.$$

Пример 6.
Исследовать на непрерывность функции:

а) $w=4\overline{z}+5z$;
б) $w=3\operatorname{Im}z$;
в) $w=z\cdot\operatorname{Re}\overline{z}+i\cdot\operatorname{Im}(2z^2)$;
г) $w=\dfrac{2z^2-4z+1}{|z-3i|-3}$.

Решение.

а) $w = 4(x - iy) + 5(x + iy) = 4x - 4ixy + 5x + 5iy = 9x + i(5y - 4xy)$, отсюда следует $u(x, y) = 9x$, $v(x, y) = 5y - 4xy$ — непрерывны на плоскости XOY, значит данная функция также непрерывна.

б) $w = 3\mathrm{Im}\,(x + iy) = 3y$, $u(x, y) = 3y$, $v(x, y) = 0$ — непрерывны на плоскости XOY, значит и w также непрерывна.

в) $w = (x + iy) \cdot \mathrm{Re}\,(x - iy) + i \cdot \mathrm{Im}\,(2(x + iy)^2) =$
$= (x + iy) \cdot x + i\mathrm{Im}\,(2(x^2 + 2ixy - y^2)) = x^2 + ixy + i \cdot 2 \cdot 2xy =$
$= x^2 + i \cdot 5xy$, $u(x, y) = x^2$, $v(x, y) = 5xy$ — непрерывны на плоскости XOY, значит данная функция также непрерывна.

г) Функция $w = \dfrac{2z^2 - 4z + 1}{|z - 3i| - 3}$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{Z}$, за исключением точек окружности $|z - 3i| = 3$, в которых знаменатель обращается в нуль.

1.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Основные понятия о функции комплексного переменного»

1. Дана функция $f(z) = 4x^3 + 3iy$, где $z = x + iy$. Найти:

а) $f(2i)$; б) $f(2 + 3i)$; в) $f(1)$; г) $f(-i)$.

Ответ: а) $6i$;
б) $32 + 9i$;
в) 4;
г) $-3i$.

Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

2. $w = iz^2 + 2\overline{z}$.
Ответ: $u(x, y) = 2x - 2xy$, $v(x, y) = x^2 - y^2 - y$.

3. $w = 3z^3 + 1$.
Ответ: $u(x, y) = 3x^3 - 9xy^2 + 1$, $v(x, y) = 9x^2y - 3y^3$.

4. $w = \dfrac{4}{z}$.
Ответ: $u(x, y) = \dfrac{4x}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \dfrac{-4y}{x^2 + y^2}$.

5. $w = \dfrac{z}{\overline{z}}$.
Ответ: $u(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$.

Найдите пределы:

6. $\lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{z+3}{z+2i}$.
Ответ: $\dfrac{2-3i}{4}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{n+2} - i\dfrac{n^2-2}{n^2+3}\right)$.
Ответ: $2-i$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2}{3n^2+2} - i\dfrac{3n^3-2n}{n^3+n}\right)$.
Ответ: $\dfrac{4}{3} - 3i$.

9. $\lim\limits_{z\to 3i} \dfrac{z^2+3}{z-3i}$.
Ответ: $6i$.

10. $\lim\limits_{z\to 2+i} \dfrac{z^2-4z+5}{z^2-2iz-5}$.
Ответ: $0,5i$.

Исследуйте на непрерывность функции:

11. $w = \operatorname{Re}(2z+1)$.
Ответ: непрерывна всюду на $\mathbb{Z}$.

12. $w = \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} \overline{z}$.
Ответ: непрерывна всюду на $\mathbb{Z}$.

13. $w = z\operatorname{Re} z - 2z^2$.
Ответ: непрерывна всюду на $\mathbb{Z}$.

14. $w = \dfrac{4z+1}{|z|-4}$.
Ответ: непрерывна всюду на $\mathbb{Z}$, за исключением точек откружности $|z| = 4$.

15. $w = \dfrac{2-3z}{2-|z|}$.
Ответ: непрерывна всюду на $\mathbb{Z}$, за исключением точек откружности $|z| = 2$.

16. $w = \dfrac{2z-1}{z^2-6z+10}$.
Ответ: непрерывна при любом $z \neq 3 \pm i$.

2. Основные элементарные функции комплексного переменного

1. *Показательная функция* e^z определяется для любого $z = x + iy$ соотношением
$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{1}$$
Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1 и z_2 — любые комплексные величины;

б) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, т. е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

2. *Тригонометрические функции* $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной плоскости выражаются через показательную функцию. Для функций комплексного переменного справедливы *формулы Эйлера*:
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$
откуда
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{2}$$
Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \tag{3}$$
Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

3. *Гиперболические функции* $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ в комплексной плоскости определяются равенствами
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{4}$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{5}$$

4. Тригонометрические и гиперболические функции связаны следующими соотношениями:
$$\begin{aligned} \sin z &= -i \operatorname{sh} iz; & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz; \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz; & \operatorname{ch} z &= \cos iz; \\ \operatorname{tg} z &= -i \operatorname{th} iz; & \operatorname{th} z &= -i \operatorname{tg} iz; \\ \operatorname{ctg} z &= i \operatorname{cth} iz; & \operatorname{cth} z &= i \operatorname{ctg} iz. \end{aligned}$$

5. *Логарифмическая функция* $\mathrm{Ln}\, z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная к показательной, причем

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{6}$$

где $\mathrm{Arg}\, z$ — аргумент комплексного числа z, $\arg z$ — главное значение $\mathrm{Arg}\, z$. Эта функция является *многозначной.* Главным значением $\mathrm{Ln}\, z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$; оно обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{8}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2, \quad \mathrm{Ln}\, \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

6. *Обратные тригонометрические функции* $\mathrm{Arcsin}\, z$, $\mathrm{Arccos}\, z$, $\mathrm{Arctg}\, z$, $\mathrm{Arcctg}\, z$ определяются как функции, обратные соответственно к функциям $\sin w$, $\cos w$, $\mathrm{tg}\, w$, $\mathrm{ctg}\, w$.

Например, если $z = \cos w$, то w называется арккосинусом числа z и обозначается $w = \mathrm{Arccos}\, z$.

Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции:

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}\, \left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right); \tag{9}$$

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}\, \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right); \tag{10}$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\, \frac{1 + iz}{1 - iz}; \tag{11}$$

$$\mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\, \frac{z + i}{z - i}. \tag{12}$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg}\, z$, $\mathrm{arcctg}\, z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

7. *Общая степенная функция* $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ — любое комплексное число, определяется равенством

$$z^a = e^{a\mathrm{Ln}\, z}. \tag{13}$$

Эта функция многозначная, ее главное значение равно

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

8. *Общая показательная функция* $w = a^z$ ($a \neq 0$ — любое комплексное число) определяется равенством

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} \tag{14}$$

Главное значение этой многозначной функции $a^z = e^{z \ln a}$.

9. Функции комплексного переменного e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ можно определить как суммы следующих рядов, сходящихся во всей плоскости комплексного переменного:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Пример 7.

Выделить действительную и мнимую части у следующих функций:

а) $w = e^{4i+2}$;
б) $w = \sin(5 - 2i)$;
в) $w = \cos(i)$;
г) $w = \operatorname{ch}(2 - i)$.

Решение.

а) Используя формулу (1), находим $w = e^{4i+2} = e^2(\cos 4 + i \sin 4) = e^2 \cos 4 + ie^2 \sin 4$, откуда $\operatorname{Re} w = e^2 \cos 4$, $\operatorname{Im} w = e^2 \sin 4$.

б) Применяя формулу (2), получаем

$$w = \sin(5 - 2i) = \frac{e^{i(5-2i)} - e^{-i(5-2i)}}{2i} = \frac{e^{2+5i} - e^{-2-5i}}{2i} =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[e^2(\cos 5 + i \sin 5) - e^{-2}(\cos(-5) + i \sin(-5))\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[e^2 \cos 5 + ie^2 \sin 5 - e^{-2} \cos 5 + ie^{-2} \sin 5\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}\left[\cos 5 \left(e^2 - e^{-2}\right) + i \sin 5 \left(e^2 + e^{-2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{i}{2} \cos 5 \left(e^2 - e^{-2}\right) + \frac{1}{2} \sin 5 \left(e^2 + e^{-2}\right),$$

$$\operatorname{Re} w = \frac{1}{2} \sin 5 \left(e^2 + e^{-2}\right) = \sin 5 \operatorname{ch} 2,$$

$$\operatorname{Im} w = -\frac{i}{2} \cos 5 \left(e^2 - e^{-2}\right) = -\cos 5 \operatorname{sh} 2.$$

в) По формуле (2) имеем $w=\cos i=\dfrac{e^{i\cdot i}+e^{-i\cdot i}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{-1}+e^{1}\right)$,
$\operatorname{Re} w=\dfrac{1}{2}\left(e^{-1}+e^{1}\right)=\operatorname{ch}1$, $\operatorname{Im} w=0$.

г) Полагая в формуле (4) $z=2-i$, получаем

$$w=\operatorname{ch}(2-i)=\frac{e^{2-i}+e^{-(2-i)}}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^{2}(\cos(-1)+i\sin(-1))+e^{-2}(\cos 1+i\sin 1)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos 1\left(e^{2}+e^{-2}\right)+i\sin 1(e^{-2}-e^{2})\right],$$
$$\operatorname{Re} w=\frac{1}{2}\cos 1\left(e^{2}+e^{-2}\right)=\cos 1\operatorname{ch}2,$$
$$\operatorname{Im} w=\frac{1}{2}\sin 1\left(e^{-2}-e^{2}\right)=-\sin 1\operatorname{sh}2.$$

Пример 8.

Найти логарифмы следующих чисел:

а) $-3i$; б) $-1+2i$; в) $4-4i$.

Решение.

Согласно формуле (6) имеем:

а) $\operatorname{Ln}(-3i)=\ln|-3i|+i(\arg(-3i)+2\pi k)=$
$$=\left|\begin{array}{l}|-3i|=\sqrt{0^{2}+(-3)^{2}}=3\\ \arg(-3i)=-\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\ln 3+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

б) $\operatorname{Ln}(-1+2i)=\ln|-1+2i|+i(\arg(-1+2i)+2\pi k)=$
$$=\left|\begin{array}{l}|-1+2i|=\sqrt{(-1)^{2}+2^{2}}=\sqrt{5}\\ \arg(-1+2i)=\pi+\operatorname{arctg}\frac{2}{(-1)}=\pi-\operatorname{arctg}2\end{array}\right|=$$
$$=\ln\sqrt{5}+i\left(\pi-\operatorname{arctg}2+2\pi k\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

в) $\operatorname{Ln}(4-4i)=\ln|4-4i|+i(\arg(4-4i)+2\pi k)=$
$$=\left|\begin{array}{l}|4-4i|=\sqrt{4^{2}+(-4)^{2}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\\ \arg(4-4i)=\operatorname{arctg}\frac{-4}{4}=-\operatorname{arctg}1=-\frac{\pi}{4}\end{array}\right|=\ln 4\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right),$$
$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Пример 9.

Найти:

а) $(2i)^{i}$; б) 3^{i}; в) $(-2)^{\sqrt{3}}$; г) $(2+i)^{2-i}$.

Решение.

а) По формуле (13) находим
$$(2i)^{i}=e^{i\operatorname{Ln}(2i)}=e^{i\left(\ln 2+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{i\ln 2-\frac{\pi}{2}-2\pi k}=$$
$$=e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}(\cos\ln 2+i\sin\ln 2),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$\operatorname{Ln}2i=[\text{по формуле (6)}]=\ln|2i|+i(\arg(2i)+2\pi k)=$
$$=\left|\begin{array}{l}|2i|=\sqrt{0^{2}+2^{2}}=2\\ \arg(2i)=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\ln 2+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots.$$

б) Используя формулу (14), имеем

$3^i = e^{i\mathrm{Ln}\,3} = e^{i(\ln 3 + i(0+2\pi k))} = e^{i\ln 3 - 2\pi k} = e^{-2\pi k}(\cos\ln 3 + i\sin\ln 3)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$\mathrm{Ln}\,3 = [\text{по формуле (6)}] = \ln|3| + i(\arg(3) + 2\pi k) =$
$= \left| \begin{array}{l} |3| = \sqrt{3^2+0^2} = 3 \\ \arg(3) = 0 \end{array} \right| = \ln 3 + i2\pi k,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$

в) Применяя формулу (13), получим

$(-2)^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\mathrm{Ln}\,(-2)} = e^{\sqrt{3}(\ln 2 + i(\pi+2\pi k))} = e^{\sqrt{3}\ln 2 + i\sqrt{3}(\pi+2\pi k)} =$
$= e^{\sqrt{3}\ln 2}(\cos(\sqrt{3}\pi + 2\sqrt{3}\pi k) + i\sin(\sqrt{3}\pi + 2\sqrt{3}\pi k)),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

г) Согласно формуле (13) имеем

$(2+i)^{2-i} = e^{(2-i)\mathrm{Ln}\,(2+i)} = e^{(2-i)\left(\ln\sqrt{5} + i\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi k\right)\right)} =$
$= e^{2\ln\sqrt{5} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi k + i\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi k - ln\sqrt{5}\right)} =$
$= e^{2\ln\sqrt{5} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi k}(\cos\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi k - \ln\sqrt{5}\right) +$
$+ i\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi k - \ln\sqrt{5}\right)),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

$\mathrm{Ln}\,(2+i) = [\text{по формуле (6)}] = \ln|2+i| + i(\arg(2+i) + 2\pi k) =$
$= \left| \begin{array}{l} |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \\ \arg(2+i) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} \end{array} \right| = \ln\sqrt{5} + i\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + 2\pi k\right),\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Пример 10.

Найти значение модуля функции $w = \cos z$ в точке $z = \pi + i\ln 2$.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда $w = \cos z = \cos(x+iy) =$
$= \cos x\cos iy - \sin x\sin iy = \cos x \cdot \mathrm{ch}\,y - \sin x \cdot i\,\mathrm{sh}\,y$.

Модуль функции $\cos z$ равен $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x\,\mathrm{ch}^2\,y + \sin^2 x\,\mathrm{sh}^2\,y} =$
$= \sqrt{(1-\sin^2 x)\,\mathrm{ch}^2\,y + \sin^2 x\,\mathrm{sh}^2\,y} = \sqrt{\sin^2 x\left(\mathrm{sh}^2\,y - \mathrm{ch}^2\,y\right) + \mathrm{ch}^2\,y} =$
$= \sqrt{\mathrm{ch}^2\,y - \sin^2 x}$.

Полагая $z = \pi + i\ln 2$, найдем $|\cos(\pi + i\ln 2)| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 \ln 2 - \sin^2\pi} =$
$= \mathrm{ch}\ln 2 = \dfrac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$.

Таким образом, тригонометрическая функция $\cos z$ в комплексной области может принимать значение, по модулю больше единицы.

Пример 11.

Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

а) $\mathrm{Arctg}\,2i$; б) $\mathrm{tg}\,\dfrac{3\pi}{2}i$.

Решение.

а) Полагая в формуле (11) $z = 2i$, получаем

$$\mathrm{Arctg}\,2i = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{1+i\cdot 2i}{1-i\cdot 2i} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\frac{1-2}{1+2} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\,\left(-\frac{1}{3}\right) =$$
$$= -\frac{i}{2}\left(\ln\left|-\frac{1}{3}\right| + i\left(\arg\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi k\right)\right) = -\frac{i}{2}\left(\ln\frac{1}{3} + i(\pi + 2\pi k)\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \pi k - \frac{i}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi k + \frac{i}{2}\ln 3,\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

б) Полагая в формуле (3) $z = \dfrac{3\pi}{2}i$, получаем

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}i = -i\frac{e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}i} - e^{-i\cdot\frac{3\pi}{2}i}}{e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}i} + e^{-i\cdot\frac{3\pi}{2}i}} = -i\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{-\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{3\pi}{2}}} = i\,\mathrm{th}\,\frac{3\pi}{2}.$$

Пример 12.

Решить уравнение:

а) $\sin z = 2$; б) $\cos z - 2i\sin z = 2$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой (9) $\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$;
$z = \operatorname{Arcsin} 2 = -i\operatorname{Ln}(2i + \sqrt{-3})$; учитывая, что $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, получим
$z_1 = -i\operatorname{Ln}(2+\sqrt{3})i$; $\arg((2+\sqrt{3})i) = \dfrac{\pi}{2}$, $|(2+\sqrt{3})i| = 2-\sqrt{3}$,
$z_1 = -i\left((2+\sqrt{3}) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)$;
$z_2 = -i\operatorname{Ln}((2-\sqrt{3})i)$, $\arg((2-\sqrt{3})i) = \dfrac{\pi}{2}$, $|(2-\sqrt{3})i| = 2-\sqrt{3}$,
$z_2 = -\left(\ln(2-\sqrt{3}) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Следовательно, $z = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k - i\ln(2\pm\sqrt{3})$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

б) Подставим вместо $\cos z$ и $\sin z$ их выражение из формулы (2), получим

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} - 2i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2.$$

Обозначим $e^{iz} = t$, получим $\dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) - \left(t - \dfrac{1}{t}\right) = 2$ или
$t^2+4t-3 = 0$, $D = 16+12 = 28$, откуда находим $t_1 = -2+\sqrt{7}$, $t_2 = -2-\sqrt{7}$.

Для нахождения z имеем следующие уравнения:

1. $e^{iz} = -2+\sqrt{7}$, логарифмируя левую и правую части, получим
$iz = \operatorname{Ln}(-2+\sqrt{7}) = \ln|-2+\sqrt{7}| + i(\arg(-2+\sqrt{7}) + 2\pi k) = \ln(-2+\sqrt{7}) + i2\pi k$,
$z = 2\pi k - i\ln(-2+\sqrt{7})$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

2. $e^{iz} = -2-\sqrt{7}$,
$iz = \operatorname{Ln}(-2-\sqrt{7}) = \ln|-2-\sqrt{7}| + i(\arg(-2-\sqrt{7}) + 2\pi m) =$
$= \ln(2+\sqrt{7}) + i(\pi + 2\pi m)$, $z = \pi(1+2m) - i\ln(2+\sqrt{7})$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Таким образом, получаем два множества решений

$$z_1 = 2\pi k - i\ln(\sqrt{7}-2), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$z_2 = \pi(1+2m) - i\ln(2+\sqrt{7}), \quad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

2.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Основные элементарные функции комплексного переменного»

1. Выделить действительную и мнимую части элементарной функции:

а) $w = e^{-2i+5}$;
б) $\sin(3i+1)$;
в) $\operatorname{sh}(3+i)$;
г) $\operatorname{tg}(i+1)$.

Ответ: а) $u(x,y) = e^5\cos 2,\ v(x,y) = -e^5\sin 2$;
б) $u(x,y) = \sin 3\operatorname{ch} 1,\ v(x,y) = -\cos 3\operatorname{sh} 1$;
в) $u(x,y) = \operatorname{ch} 3\cos 1,\ v(x,y) = \operatorname{ch} 3\sin 1$;
г) $u(x,y) = \dfrac{\sin 1\cos 1}{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1},\ v(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} 1\operatorname{ch} 1}{\operatorname{ch}^2 1 - \sin^2 1}$.

2. Найти логарифмы следующих чисел:

а) $-i$; б) i; в) $-1-i$; г) $3-2i$.

Ответ: а) $i\left(2\pi k - \dfrac{\pi}{2}\right)$;
б) $\left(2\pi k + \dfrac{\pi}{2}\right)i$;
в) $\ln\sqrt{2} + i\left(2\pi k - \dfrac{3}{4}\right)$;
г) $\ln\sqrt{13} + i\left(2\pi k - \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Найти:

а) 1^i; б) $(-1)^{\sqrt{2}}$; в) $i^{\frac{1}{i}}$; г) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^{1+i}$.

Ответ: а) $e^{-2\pi k}$;
б) $e^{\sqrt{2}i(2\pi k+\pi)}$;
в) $e^{2\pi k + \frac{1}{2}}$;
г) $e^{(i-1)\left(2\pi k + \frac{\pi}{6}\right)},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. Найти значение модуля:

а) $\operatorname{th}\pi i$; б) 10^i; в) 3^{2-i}.

Ответ: а) 0;
б) $e^{-2\pi k}$;
в) $9e^{2\pi k},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5. Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

а) $\cos \pi i$; б) $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2} i$; в) $\operatorname{Arctg} \dfrac{i}{3}$; г) $\arccos i$; д) $\operatorname{sh} \dfrac{\pi i}{2}$.

Ответ: а) $\operatorname{ch} \pi$;

б) $i \operatorname{th} \dfrac{\pi}{2}$;

в) $2\pi k + \dfrac{\pi}{2} - i \ln(\sqrt{2} + 1),\ 2\pi k - \dfrac{\pi}{2} - i \ln(\sqrt{2} - 1)$;

г) $\pi k + i \dfrac{\ln 2}{2}$;

д) $i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

6. Решить уравнения:

а) $e^{-z} + 1 = 0$;
б) $e^{z} + i = 0$;
в) $\sin z = i$;
г) $4 \cos z + 5 = 0$;
д) $\cos z + 2i \sin z = 3$;
е) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$.

Ответ: а) $i(2\pi k + \pi)$;

б) $i\left(2\pi k - \dfrac{\pi}{2}\right)$;

в) $-i \ln(\sqrt{2} - 1) + 2\pi k,\ -i \ln(1 + \sqrt{2}) + \pi + 2\pi m$;

г) $2\pi k + \pi \pm i \ln 2$;

д) $-i \ln \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3} + 2\pi k,\ -i \ln \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3} + (\pi + 2\pi m)$;

е) $\ln \dfrac{1}{2} + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$

3. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши—Римана

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой окрестности точки z комплексной плоскости, включая и саму точку z.

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z, если существует конечный предел отношения

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \frac{df(z)}{dz}. \tag{15}$$

Этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z.

Условие дифференцируемости функции $w = f(z)$ в терминах действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ выражает следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в этой точке и удовлетворяли в ней условиям Коши—Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{16}$$

С учетом условий (16) производную функции $f(z)$ можно представить в следующих равносильных формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{17}$$

Так как обычные свойства алгебраических действий и предельного перехода сохраняются при переходе к функциям комплексного переменного, то сохраняются и обычные правила дифференцирования:

$$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z), \quad [f(z)\cdot g(z)]' = f'(z)g(z) + g'(z)f(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g^2(z)}, \quad f[g(z)]' = f'[g(z)]\cdot g'(z), \quad f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}.$$

В последней формуле f и φ обозначают взаимно обратные функции, осуществляющие однолистные отображения соответственно точек z и w.

Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в данной точке* $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Производные элементарных функций z^n, e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\mathrm{arctg}\, z$, $\mathrm{arcctg}\, z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$ находятся по тем же формулам, что и для действительного аргумента:

$$\begin{aligned}
&(z^n)' = nz^{n-1}, && (\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\\
&(e^z)' = e^z, && (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},\\
&(\cos z)' = -\sin z, && (\mathrm{arctg}\, z)' = \frac{1}{1+z^2},\\
&(\sin z)' = \cos z, && (\mathrm{arcctg}\, z)' = -\frac{1}{1+z^2},\\
&(\ln z)' = \frac{1}{z}, && (\mathrm{sh}\, z)' = \mathrm{ch}\, z,\\
& && (\mathrm{ch}\, z)' = \mathrm{sh}\, z.
\end{aligned}$$

Если для функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в области D функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны, то выполнение условий (16) достаточно для того, чтобы данная функция была аналитической в этой области, причем в любой точке $z \in D$ производная аналитической функции может быть найдена по правилам дифференцирования функции действительной переменной.

Пример 13.
Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z) = \overline{z} = x - iy$.

Решение.
Легко видеть, что рассматриваемая функция непрерывна на всей комплексной плоскости.

Для данной функции при любых z

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\ = \frac{(x+\Delta x) - i(y+\Delta y) - (x - iy)}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \qquad (18)$$

Из этого следует:

а) если $\Delta y = 0$, т. е. $\Delta z = \Delta x \neq 0$, то $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 1$ (здесь $z + \Delta z \to z$ вдоль прямой, параллельной оси OY);

б) если $\Delta x = 0$, т. е. $\Delta z = i\Delta y \neq 0$, то $\dfrac{\Delta f(z)}{\Delta z} = -1$ (здесь $z + \Delta z \to z$ вдоль прямой, параллельной оси OX).

Таким образом, отношение (18) при $\Delta z \to 0$ предела не имеет ни при каком z (так как предел не должен зависеть от способа приближения к точке z) и функция $f(z) = \overline{z}$, непрерывная на всей комплексной плоскости, не имеет производной ни в одной точке плоскости.

Пример 14.
Дифференцируема ли функция $w = 2y + 3xi$?

Решение.
Находим $u = 2y$, $v = 3x$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 3$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Согласно формулам (16)

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 3 \neq -2. \end{cases}$$

Одно из условий Коши—Римана не выполняется. Таким образом, данная функция не является дифференцируемой.

Пример 15.

Дифференцируема ли функция $f(z) = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi$?

Решение.

Имеем $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$. Условия Коши—Римана (16) в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} 2x = 2x, \\ -2y = -2y. \end{cases}$$

Оба условия выполняются, поэтому функция $f(z)$ дифференцируема, причем $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$.

Пример 16.

Показать, что функция $w = e^{4z}$ является аналитической на всей комплексной плоскости.

Решение.

Имеем $e^{4z} = e^{4(x+iy)} = e^{4x}(\cos 4y + i\sin 4y)$, тогда $u(x,y) = e^{4x}\cos 4y$, $v(x,y) = e^{4x}\sin 4y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4e^{4x}\cos 4y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 4e^{4x}\sin 4y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4e^{4x}\sin 4y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 4e^{4x}\cos 4y.$$

Запишем условие Коши—Римана (16)

$$\begin{cases} 4e^{4x}\cos 4y = 4e^{4x}\cos 4y, \\ -4e^{4x}\sin 4y = -4e^{4x}\sin 4y. \end{cases}$$

Оба условия выполняются при всех значениях x и y, а следовательно функция $w = e^{4z}$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости.

Согласно формуле (17) $\left(e^{4z}\right)' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 4e^{4x}(\cos 4y + i\sin 4y) = 4e^{4z}$.

Пример 17.

Исследовать на дифференцируемость и аналитичность функцию w, найти ее производную, если она существует:

а) $w = (z+1)\mathrm{Re}\,(z-1)$; б) $w = e^{4iz+1}$.

Решение.

а) Так как $z = x + iy$, то $w = (z+1)\mathrm{Re}\,(z-1) =$
$= ((x+1)+iy)\mathrm{Re}\,(x-1+iy) = ((x+1)+iy)(x-1) =$
$= (x^2-1) + iy(x-1) \Rightarrow u(x,y) = x^2-1$, $v(x,y) = y(x-1)$.

Найдем частные производные функций u и v.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x - 1.$$

Проверим выполнение условий Коши—Римана (16)

$$\begin{cases} 2x = x - 1, \\ -y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = -1$, $y = 0$. Следовательно, функция $w = (z+1)\mathrm{Re}\,(z-1)$ дифференцируема только в точке $z = -1$ и нигде не является аналитической, так как не существует окрестности точки $z = -1$, в которой функция была бы дифференируемой. Найдем по формуле (17) производную функции в точке $z = -1$:

$$f'(z)|_{z=-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=-1\\ y=0}} = (2x + iy)|_{\substack{x=-1\\ y=0}} = -2.$$

б) Определим действительную и мнимую части функции $w = e^{4iz+1}$.
$w = e^{4iz+1} = e^{4i(x+iy)+1} = e^{4ix} \cdot e^{1-4y} = e^{1-4y}(\cos 4x + i \sin 4x)$,
$u(x,y) = e^{1-4y}\cos 4x$; $v(x,y) = e^{1-4y}\sin 4x$.

Найдем частные производные этих функций, которые непрерывны на плоскости XOY:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4e^{1-4y}\sin 4x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4e^{1-4y}\cos 4x;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 4e^{1-4y}\cos 4x; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -4e^{1-4y}\sin 4x.$$

Условия Коши—Римана (16) выполняются при всех значениях x и y, следовательно, функция $w = e^{4iz+1}$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости $\mathbb{Z}$, а значит, $f'(z) = (e^{4iz+1})' = 4ie^{4iz+1}$.

Пример 18.

Является ли функция $w = (z+1)(\overline{z}+1)$ аналитической хотя бы в одной точке?

Решение.

Имеем $(z+1)(\overline{z}+1) = (x+iy+1)(x-iy+1) = x^2 - xiy + x + iyx + y^2 + iy + x - iy + 1 = x^2 + 2x + y^2 + 1$, так что $u(x,y) = x^2 + 2x + y^2 + 1$, $v(x,y) = 0$.

Находим частные производные от u и v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Условия Коши—Римана в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} 2x+2=0, \\ 2y=0 \end{cases}$$

и удовлетворяются только в точке $(-1; 0)$.

Следовательно, функция $w = (z+1)(\overline{z}+1)$ дифференцируема только в точке $z=-1$ и нигде не аналитична.

Найдем производную этой функции в точке $z=-1$ по формуле (17)

$$f'(z)|_{z=-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\bigg|_{\substack{x=-1\\ y=0}} = (2x+2+i\cdot 0)|_{\substack{x=-1\\ y=0}} = 0.$$

Пример 19.

Дана действительная часть $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 2x$ дифференцируемой функции $f(z)$, где $z = x+iy$. Найти функцию $f(z)$.

Решение.

Первое условие Коши—Римана дает $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 4x-2$.

Проинтегрируем полученное выражение по переменной y:

$$v(x,y) = \int (4x-2)\,dy = 4xy - 2y + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

Используем второе условие Коши—Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (4xy - 2y + \varphi(x))'_x = 4y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Из условия задачи находим, что $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -4y$.

Следовательно,

$$-4y - \varphi'(x) = -4y, \quad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi(x) = C.$$

Таким образом, $v(x,y) = 4xy - 2y + C$.

Значит, $f(z) = 2x^2 - 2y^2 - 2x + i(4xy - 2y + C) =$
$= 2(x^2 + i2xy - y^2) - 2(x+iy) + Ci$,
или

$$f(z) = 2(x+iy)^2 - 2(x+iy) + Ci = 2z^2 - 2z + C_1.$$

Пример 20.

Найти аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее мнимой части $v(x, y) = 2e^x \sin y$ и при дополнительном условии $f(0) = 2$.

Решение.

Имеем $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$. По первому из условий Коши—Римана должно быть $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, так что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$. Отсюда

$$u(x, y) = \int 2e^x \cos y \, dx = 2e^x \cos y + \varphi(y),$$

где функция $\varphi(y)$ пока неизвестна.

Дифференцируя $u(x, y)$ по y и используя второе из условий Коши—Римана, получим $(2e^x \cos y + \varphi(y))'_y = -2e^x \sin y + \varphi'(y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -2e^x \sin y$, т. е. $-2e^x \sin y + \varphi'(y) = -2e^x \sin y$, откуда $\varphi'(y) = 0$, а значит $\varphi(y) = C$, где $C = \text{const}$.

Итак, $u(x, y) = 2e^x \cos y + C$, и, следовательно,
$f(z) = (2e^x \cos y + C) + i \cdot 2e^x \sin y = 2e^z + C$.

Постоянную C найдем из условия $f(0) = 2$, т. е. $2e^0 + C = 2$; отсюда $C = 0$. $f(z) = 2e^z$.

Пример 21.

Найти $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, если $v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$; $f(0) = 0$.

Решение.

Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2.$$

По второму условию Коши—Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -(3x^2 + 12xy - 3y^2).$$

Интегрируя, находим

$$u(x, y) = -\int (3x^2 + 12xy - 3y^2) \, dy = -(3x^2y + 6xy^2 - y^3) + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — произвольная функция.

Используем другое условие Коши—Римана: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Так как $\dfrac{\partial u}{\partial x} = (-(3x^2y + 6xy^2 - y^3) + \varphi(x))'_x = -6xy - 6y^2 + \varphi'(x)$, то $-6xy - 6y^2 + \varphi'(x) = 6x^2 - 6xy - 6y^2$; $\varphi'(x) = 6x^2$; $\varphi(x) = 2x^3 + C$.

Таким образом, $u(x, y) = -(3x^2y + 6xy^2 - y^3) + 2x^3 + C$.

Значит, $f(z) = -3x^2y - 6xy^2 - y^3 + 2x^3 + C + i(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3)$.

С учетом, что $f(0) = 0$, получим $C = 0$.

Функция $\varphi(x, y)$ называется *гармонической в области* D, если она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x, y)$ и мнимая часть $v(x, y)$ являются гармоническими в этой области функциями.

Однако, если $u_1(x, y)$ и $v_1(x, y)$ — любые две гармонические функции, то функция $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ вовсе не обязана быть аналитической функцией. Для аналитичности $f_1(z)$ нужно, чтобы функции u_1 и v_1 дополнительно удовлетворяли условиям Коши—Римана.

Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям (16), называют *сопряженной парой гармонических функций* (порядок функций в паре существенен).

Пример 22.

Показать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u = x^2 + 2x - y^2$; б) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Решение.

а) Найдем частные производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.$$

Функция u является гармонической, так как имеет непрерывные частные производные до 2 порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

б) Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Функция v является гармонической, так как имеет непрерывные частные производные до 2 порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Пример 23.

Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по заданной мнимой части $v(x,y) = x^2 - y^2 - 1$.

Решение.

Задачу можно решить лишь в том случае, если функция $v = x^2 - y^2 - 1$ гармоническая на всей плоскости. Проверим это:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2.$$

Следовательно, функция v является гармонической на всей плоскости, так как удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Находим $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x$. Используем одно из условий Коши—Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2x.$$

Интегрируя, находим

$$u(x,y) = -\int 2x\,dy = -2xy + \varphi(x).$$

Дифференцируя $u(x,y)$ по x и используя первое условие Коши—Римана, получим

$$(-2xy + \varphi(x))'_x = -2y + \varphi'(x) = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y,$$

$$-2y + \varphi'(x) = -2y, \quad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi(x) = C.$$

Таким образом, $u(x,y) = -2xy + C$.

Значит, $f(z) = -2xy + C + i(x^2 - y^2 - 1) = C + i(z^2 - 1)$.

3.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши—Римана»

1. Исследуйте функции на дифференцируемость и аналитичность; найдите их производные, если они существуют:

а) $w = z\overline{z} - z\mathrm{Im}\, z$;
б) $w = x^2 - 2iy$;
в) $w = 2z^2 - 3iz$;
г) $w = 2\overline{z} + 3z^2$;
д) $w = \overline{z} + z\mathrm{Re}\, z$;
е) $w = |z|\mathrm{Re}\,\overline{z}$.

Ответ: а) дифференцируема в точке $z = 0$, не аналитична ни в одной точке, $f'(0) = 0$;
б) дифференцируема во всех точках z, для которых $\mathrm{Re}\, z = -1$, не аналитична ни в одной точке, $f'(z) = -2$;
в) дифференцируема и аналитична всюду на плоскости $\mathbb{Z}$, $f'(z) = 4z - 3i$;
г) дифференцируема и аналитична всюду на плоскости $\mathbb{Z}$, $f'(z) = 2 + 6z$;
д) дифференцируема в точке $z = 2$, не аналитична ни в одной точке, $f'(2) = 5$;
е) нигде не дифференцируема и не аналитична.

2. При каком значении α функция $f(z) = \alpha\overline{z}$ дифференцируема?
Ответ: $\alpha = 0$.

3. При каком значении β функция $f(z) = y + \beta xi$ дифференцируема?
Ответ: $\beta = -1$, $f(z) = -iz$.

4. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y)$ или мнимой части $v(x, y)$ и значению $f(z_0)$, если оно задано:

а) $u = -y(4x + 1)$;
б) $v = y - e^{2x}\sin 2y$;
в) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = 2i - 1$;
г) $u = 2\sin x\,\mathrm{ch}\, y - x$, $f(0) = 0$;
д) $v = -2\sin 2x\,\mathrm{sh}\, 2y + y$, $f(0) = 2$;
е) $v = \sin x\,\mathrm{sh}\, y$.

Ответ: а) $f(z) = iz(2z + 1) + C$;
б) $f(z) = z - e^{2z} + C$;
в) $f(z) = z^2 + 2z$;
г) $f(z) = 2\sin z - z$;
д) $f(z) = 2\cos 2z + z$;
е) $f(z) = -\cos z + C$.

5. Показать, что следующие функции являются гармоническими:

а) $u = 2e^x \cos y$; б) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

6. Могут ли являться действительной или мнимой частями аналитичной функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ следующие функции:

а) $u = x^2 - y^2 + 2xy$; б) $u = x^2$.

Ответ: а) да;
б) нет.

Приложение

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — любые действительные числа. Число x называется действительной частью комплексного числа и обозначается $\operatorname{Re} z$, число y — мнимой частью комплексного числа и обозначается $\operatorname{Im} z$, i — мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Выражение $z = x + iy$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Из определения следует, что действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных, то есть при $y = 0$ получаем $z = x$ — действительное число. Число $z = iy$ называется чисто мнимым.

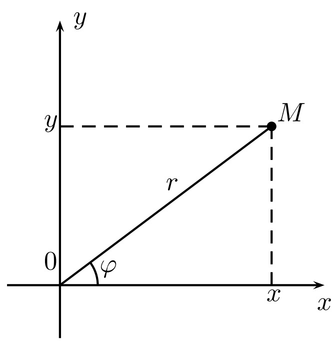
Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $-x - iy$ называется противоположным комплексному числу $x + iy$.

Комплексное число $x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $x + iy$ и обозначается $\overline{z}$. Свойство комплексно сопряженных чисел: $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости XOY точкой M с координатами (x, y) либо вектором, начало которого находится в точке $O(0;0)$, а конец — в точке $M(x, y)$. Плоскость XOY называется комплексной плоскостью. Ось OX называется действительной осью, ось OY — мнимой осью. Длина r вектора $\overline{OM}$ называется модулем числа и обозначается $|z|$, так что

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с осью OX, называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Он определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots),$$

где $\arg z$ есть главное значение $\operatorname{Arg} z$, определяемое условиями $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$, причем

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{ если } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Аргумент числа $z = 0$ — величина неопределенная.

Правила действий с комплексными числами. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ — два комплексных числа.

Сумма z_1+z_2, разность z_1-z_2, произведение $z_1 \cdot z_2$ и частное $\dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ комплексных чисел z_1 и z_2 вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2); \\ z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2); \\ z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{gathered}$$

В зависимости от решаемой задачи применяются различные формы записи комплексного числа.

Алгебраическая форма: $z = x + iy$.

Показательная форма: $z = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — одно из значений $\operatorname{Arg} z$.

Функция $\mathrm{e}^{i\varphi}$ обладает всеми свойствами показательной формы.

Тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r и φ имеют тот же смысл, что и в показательной форме.

Переход от показательной формы к тригонометрической и обратный осуществляется на основе формулы Эйлера:

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

n-я степень комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ вычисляется по формуле Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее уравнению

$$w^n = z.$$

Все решения этого уравнения обозначаются $\sqrt[n]{z}$ и для числа z, записанного в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, вычисляются по

формуле
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$
где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = \sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Список литературы

[1] *Волковысский Л.И., Лунц Г.А., Араманович И.Г.* Сборник задач и упражнений по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2006. 312 с.

[2] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2007. 304 с.

[3] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. СПб.: Лань, 2002. 749 с.

[4] *Пантелеев А.В., Якимова А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2001. 445 с.

[5] *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Физматлит, 2005. 336 с.

[6] *Шабунин М.И, Половинкин Е.С., Карлов М.И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного : учебное пособие для вузов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. 362 с.

Содержание

Учебное издание
Элементарные функции комплексного переменного.

Составители *КУБЫШКИНА Светлана Николаевна*
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка Е.Ю. Арланова

Оригинал-макет подготовлен с помощью
издательской системы LaTeX 2_ε

Подп. в печать 05.12.12.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. п. л. 1,74.
Уч. изд. л. 1,68. Тираж 100 экз. Заказ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8.