ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практикум по высшей математике

Самара
Самарский государственный технический университет
2008

Печатается по решению Редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517.1 (075.8)

Дифференциальное исчисление функций одной переменной: практикум по высшей математике / Сост. С. Н. Кубышкина, Е. А. Просвиркина. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2008.-28 с.

Приведены краткие сведения и формулы по разделу «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», разобрано большое количество примеров. Пособие содержит также задачи для самостоятельного решения (часть А и часть Б). Примеры части А предназначены для решения в аудитории, части Б – для самостоятельного внеаудиторного решения. С целью осуществления самоконтроля все задания приведены с ответами. Предназначено для студентов первого курса машиностроительного и физико-технологического факультетов.

Составители: С. Н. Кубышкина, Е. А. Просвиркина

1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует и конечен, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta x = x - x_0$ (производная обозначается также $\frac{df(x)}{dx}$).

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $f(x)$ при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – величина угла, образованного касательной с положительным направлением оси Ox. Поэтому уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если функция $x = f(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки (координата x такой точки есть известная функция времени t), то производная $\frac{dx}{dt} = f'(t)$ есть скорость в момент времени t. В этом заключается механический смысл производной.

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

Очевидно, что если $y(x) = c$ $(c = \text{const})$, то $y'(x) = (c)' = 0$.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в некоторой точке x, то основные правила дифференцирования выражаются формулами:

$$(cu)' = cu'; \quad \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c} \ (c = \text{const}); \tag{1.1}$$

$$(u + v)' = u' + v'; \tag{1.2}$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0. \qquad (1.4)$$

Формулы (1.2) и (1.3) обобщаются на случай алгебраической суммы (произведения) любого конечного числа функций $u_k = u_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$, имеющих производную в точке x:

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'; \qquad (1.5)$$

$$(u_1 u_2 .. u_n)' = u_1' u_2 .. u_n + u_1 u_2' .. u_n + \ldots + u_1 u_2 .. u_n'. \qquad (1.6)$$

Приведем таблицу производных основных элементарных функций.

№	$y = y(x)$	$y'(x)$
1	$y = c\,(c = \mathrm{const})$	$y' = 0$
2	$y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in R$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a,\ a \in R, a > 0,\ a \neq 1$
6	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}, a \in R, a > 0, a \neq 1$
7	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
8	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
9	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
10	$y = \mathrm{tg}\, x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11	$y = \mathrm{ctg}\, x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14	$y = \mathrm{arctg}\, x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$

15	$y=\mathrm{arcctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
16	$y=\mathrm{sh}x$	$y'=\mathrm{ch}x$
17	$y=\mathrm{ch}x$	$y'=\mathrm{sh}x$
18	$y=\mathrm{th}x$	$y'=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$
19	$y=\mathrm{cth}x$	$y'=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$
20	$y=u^v$	$y'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+u^{v-1}\cdot v\cdot u'$, $u=u(x), v=v(x)$.

Замечание. Гиперболические функции имеют следующий вид:

$$y=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$$

$$y=\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};$$

$$y=\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};$$

$$y=\mathrm{cth}x=\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

Если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y=f(u)$ – в соответствующей точке u, то производная сложной функции $y=f(\varphi(x))$ определяется равенством

$$y'_x=f'_u\cdot\varphi'_x. \tag{1.7}$$

Аналогично находится производная сложной функции с двумя и большим числом промежуточных аргументов. Например, для сложной функции вида $y(u(v(x)))$ имеет место равенство

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x. \tag{1.8}$$

Примеры с решениями

Пример 1.1. Найти производную функции $y=\sin x$, используя определение.

Решение. Используя формулу для разности синусов двух углов и учитывая, что $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$ при $x \to 0$, находим

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Следовательно, $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 1.2. Найти производную функции $y = (2x+5)^2$.

Решение. С учетом равенства $\left(x^\alpha\right)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}, \alpha\in R$, формул (1.1) и (1.7) получаем $y' = 2\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)' = 2\cdot(2x+5)\cdot\left[(2x)' + 5'\right] = 2\cdot(2x+5)\cdot 2 = 4\cdot(2x+5)$.

Пример 1.3. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg} x + e^x$.

Решение. Учитывая формулу (1.2) и производные для соответствующих функций, находим $y'(x) = (\operatorname{arctg} x)' + \left(e^x\right)' = \frac{1}{1+x^2} + e^x$.

Пример 1.4. Найти производную функции $y = 8xe^x$.

Решение. С учетом формул (1.1) и (1.3) имеем, что

$$y' = 8\cdot\left((x)'\cdot e^x + \left(e^x\right)'\cdot x\right) = 8\cdot\left(1\cdot e^x + e^x\cdot x\right) = 8e^x(1+x).$$

Пример 1.5. Найти производную функции $y = \frac{\ln x}{x}$.

Решение. Учитывая формулу (1.4) и производные для соответствующих функций, находим

$$y' = \frac{(\ln x)'\cdot x - \ln x\cdot(x)'}{(x)^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Пример 1.6. Найти производную функции $f(x) = 2x^3 - \frac{2}{3} - \frac{1}{x^4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} - \frac{4x^2}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Запишем функцию $f(x)$, введя дробные и отрицательные показатели степени x:

$$f(x)=2x^3-\frac{2}{3}-x^{-4}+\frac{x^{1/2}}{\sqrt{5}}-4x^{5/3}.$$

По формулам (1.1) и (1.5) с учетом равенства $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}, \alpha\in R$ получим

$$f'(x)=6x^2-0-(-4)x^{-5}+\frac{x^{-1/2}}{2\sqrt{5}}-4\cdot\frac{5}{3}x^{2/3}=6x^2+\frac{4}{x^5}+\frac{1}{2\sqrt{5x}}-\frac{20}{3}\sqrt[3]{x^2}.$$

Пример 1.7. Найти производную функции $s(t)=\dfrac{e^t\sin t}{2t^2-1}$.

Решение. Последовательно используя формулы (1.3) и (1.4) и принимая во внимание соответствующие табличные производные, находим:

$$s'(t)=\frac{\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)\left(2t^2-1\right)-4te^t\sin t}{\left(2t^2-1\right)^2}=\frac{e^t(\sin t+\cos t)}{\left(2t^2-1\right)}-\frac{4te^t\sin t}{\left(2t^2-1\right)^2}.$$

Пример 1.8. Найти производную функции $y=\sin^4\left(5-x^2\right)$.

Решение. Данная функция является сложной, и ее можно записать в виде $y=u^4$, где $u=\sin v$, $v=5-x^2$. Тогда согласно формуле (1.8), находим:

$$\frac{dy}{dx}=4u^3\cos v\left(5-x^2\right)'=4u^3\cos v(-2x)=-8x\sin^3\left(5-x^2\right)\cos\left(5-x^2\right).$$

Замечание. При дифференцировании сложных функций обычно обходятся без введения промежуточных аргументов $u,v,\ldots,$ их только подразумевают. Например, последовательность нахождения производной функции, рассмотренной в примере 1.8, можно записать так:

$$y'=4\sin^3\left(5-x^2\right)\left(\sin\left(5-x^2\right)\right)'=4\sin^3\left(5-x^2\right)\cos\left(5-x^2\right)\times\left(5-x^2\right)'=4\sin^3\left(5-x^2\right)\times$$
$$\times\cos\left(5-x^2\right)(-2x).$$

Кроме того, нет необходимости последовательно записывать, что сначала взята производная степенной функции с основанием $\sin\left(5-x^2\right)$, затем производная синуса и на последнем этапе производная его аргумента. Результат можно записать сразу, т. е.

$$y'=4\sin^3\left(5-x^2\right)\cos\left(5-x^2\right)(-2x).$$

Пример 1.9. Найти производную функции $y=\ln^3(\cos x)$.

Решение. Данная функция является сложной. Запишем последовательность нахождения производной этой функции

$$y' = 3\ln^2(\cos x)\cdot(\ln(\cos x))' = 3\ln^2(\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' = -3\ln^2(\cos x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = -3\ln^2(\cos x)\cdot$$
$$\cdot\operatorname{tg} x$$

Пример 1.10. Найти производную функции $y = e^{\sin x} + 5^{\cos^2 2x}$.

Решение. Данная функция является сложной. Запишем последовательность нахождения производной этой функции

$$y' = \left(e^{\sin x}\right)' + \left(5^{\cos^2 2x}\right)' = e^{\sin x}\cdot(\sin x)' + 5^{\cos^2 2x}\cdot\ln 5\cdot\left(\cos^2 2x\right)' = e^{\sin x}\cdot\cos x + 5^{\cos^2 2x}\cdot\ln 5\cdot$$
$$\cdot\cos 2x\cdot 4\cdot(-\sin 2x) = e^{\sin x}\cdot\cos x - 4\cdot 5^{\cos^2 2x}\cdot\ln 5\cdot\cos 2x\cdot\sin 2x.$$

Пример 1.11. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$.

Решение. Данная функция является сложной. Заменим кубический корень дробным показателем и по формуле $\left(x^\alpha\right)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}, \alpha\in R$ найдем производную степени $y = \left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}$:

$$y' = \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}-1}\left(x^2-1\right)' = \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Пример 1.12. Найти производную функции $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$ в заданной точке $x_0 = 0$.

Решение.

$$y' = \left(2x^3\right)' - \left(5x^2\right)' + (7x)' + (4)' = 2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 7\cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7,\ y'(0) = 7.$$

Задачи для самостоятельного решения

Часть А

1. Используя определение, найти производную $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$.

В заданиях 2–16 найти производную функции $y = y(x)$.

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

3. $y = x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 0{,}3x + 0{,}1$

4. $y = x^2 + \sin x$

5. $y = 3x\cos x$

6. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

7. $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

8. $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - 5x + 5}$

9. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

10. $y = x\,\mathrm{ctg}\,x$

11. $y = \dfrac{1}{3^x}$

12. $y = 4^{\arcsin x}$

13. $y = \mathrm{th}(\ln x)$

14. $y = \sin\dfrac{1}{x}$

15. $y = \ln(\cos x^2)$

16. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{e^x + x^2}$

В заданиях 17–20 найти производную функции $y = y(x)$ в заданной точке x_0.

17. $y = 2^{x-2x^2-1}$, $x_0 = 0.$

18. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$, $x_0 = 2.$

19. $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$, $x_0 = 1.$

20. $y = x^3\,\mathrm{arctg}\,x$, $x_0 = 1.$

Часть Б

21. Используя определение, найти производную $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

В заданиях 22–36 найти производную функции $y = y(x)$.

22. $y = \mathrm{sh}15x$

23. $y = 5\sin x + 3\cos x$

24. $y = x^5 - 4x^3 + 2x$

25. $y = x\,\mathrm{sh}\,x - \mathrm{ch}\,x$

26. $y = \sqrt{x^2 - 1}$

27. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$

28. $y = 10^{2x-3}$

29. $y = \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,x$

30. $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$

31. $y = xe^x + \dfrac{\sin x}{\ln x}$

32. $y = \sqrt{\sin x}$

33. $y = e^{x^2}$

34. $y = \ln(\arcsin x^4)$

35. $y = e^{\arccos 3x}$

36. $y = \sin^2 x \sin x^2$

В заданиях 37–40 найти производную функции $y = y(x)$ в заданной точке x_0.

37. $y = \sin 4x \cos 4x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$

38. $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

39. $y = \sin^2 x^2$, $x_0 = 0.$

40. $y = \sin\dfrac{\pi}{10} - \ln\dfrac{3}{x}$, $x_0 = 1.$

2. ПРОИЗВОДНЫЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Функцию называют заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ (неявной функцией), если каждое значение ее аргумента x и соответствующее ему значение функции y являются решением данного уравнения.

Если уравнение $F(x, y) = 0$ задает y как неявную функцию аргумента x, т.е. $y = y(x)$, то при нахождении и производной этой функции дифференцируют обе части данного уравнения по x и получают уравнение относительно y'. Затем из данного уравнения находят y'.

Пусть y как функция аргумента x задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $t \in T$. Тогда ее производная записывается в виде

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{2.2}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt}.$$

Примеры с решениями

Пример 2.1. Найти производную неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^3 - 2xy^2 + y^3 = a^3$ $(a = \text{const})$.

Решение. Дифференцируем обе части уравнения по переменной x, считая y функцией аргумента x (тогда $\frac{d}{dx}(y^2) = 2yy'$ и $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 y'$) и учитывая, что $a = \text{const}$, $(a^3)' = 0$. В итоге получаем

$$3x^2 - 2(y^2 + 2xyy') + 3y^2 y' = 0.$$

Отсюда

$$(3y^2 - 4xy)y' = 2y^2 - 3x^2;$$
$$y' = (2y^2 - 3x^2)/(3y^2 - 4xy).$$

Пример 2.2. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Решение. Найдем производную y'_x, исходя из ее представления в виде (2.2). Так как

$$y'_t = \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t;$$

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t,$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Пример 2.3. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = te^{-t}; \\ y = e^{2t}. \end{cases}$$

Решение. Найдем производную y'_x, исходя из ее представления в виде (2.2). Так как

$$y'_t = 2e^{2t};$$

$$x'_t = e^{-t} - te^{-t},$$

то

$$y'_x = \frac{2e^{2t}}{e^{-t} - te^{-t}} = \frac{2e^{3t}}{1-t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Часть А

41. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически в виде $x = e^t$, $y = \cos t$, и вычислить ее значение в точке $x_0 = 1$.

42. Найти производную y'_x в точке $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, если $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

В заданиях 43–46 найти производную y'_x функции, заданной параметрически:

43. $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \cos t. \end{cases}$

44. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1; \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

45. $\begin{cases} x = e^{-t} \sin t; \\ y = e^t \cos t. \end{cases}$

46. $\begin{cases} x = (1-t)^3; \\ y = (2t+1)^2. \end{cases}$

В заданиях 47–52 найти производную неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением:

47. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

48. $x^2 - xy + y^2 = 1$

49. $y \sin x - \cos(x - y) = 0$

50. $2y \ln y = x$

51. $\cos(x + y) = y^2 + x$

52. $\sin(x^2 + y) = x$

Часть Б

53. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически в виде $x = t^3 + 1$, $y = t^2 + t + 1$, где $t \in R$, и вычислить ее значение в точке $x_0 = 0$.

54. Найти y'_x в точке, соответствующей значению $t_0 = \dfrac{\pi}{8}$, если $x = \sin 2t$, $y = \sin^2 t$.

В заданиях 55–57 найти производную y'_x функции, заданной параметрически:

55. $\begin{cases} x = a(1-t); \\ y = at. \end{cases}$

56. $\begin{cases} x = 2t - t^2; \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

57. $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

В заданиях 58–62 найти производную неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением:

58. $y^3 - 3y + 2ax = 0$

59. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

60. $y = x + \operatorname{arctg} y$

61. $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = y^2$

62. $y^x - x^y = 0$

63. Вычислите в точке $M(3,4)$ значение производной неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$.

64. Вычислите при $x_0 = 1$ значение производной неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $\sin(3x + y/2 - 3) - 4y = 0$.

3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, то $\left(f'(x)\right)'$ называется второй производной (или производной второго порядка) функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f''(x)$. Таким образом,

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'.$$

Другие обозначения второй производной: y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка: $f'''(x)=\left(f''(x)\right)'$ (третья производная); $f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'$ (четвертая производная) и т. д.; $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ (производная n – го порядка).

Если функция $x=f(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки, то $\dfrac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$ – ускорение этой точки в момент времени t. В этом заключается механический смысл второй производной.

Для нахождения производной какого – либо высшего порядка данной функции находят последовательно все ее производные низших порядков.

Если функция задана параметрически $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то производные y'_x, y''_{xx},…, вычисляются по формулам

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t},\quad y'''_{xxx}=\frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}\ \text{ и т.д.}$$

Производную второго порядка можно вычислить также по формуле

$$y''_{xx}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Примеры с решениями

Пример 3.1. Доказать, что функция $y=e^{4x}+2e^{-x}$ удовлетворяет соотношению $y'''-13y'-12y=0$.

Решение. Найдем последовательно производные y', y'', y''':

$$y'=4e^{4x}-2e^{-x};$$

$$y'' = 16e^{4x} + 2e^{-x};$$

$$y''' = 64e^{4x} - 2e^{-x}.$$

Подставив в заданное соотношение вместо y', y'', y''' соответствующие выражения, получим тождество

$$\left(64e^{4x} - 52e^{4x} - 12e^{4x}\right) - \left(2e^{-x} - 26e^{-x} + 24e^{-x}\right) = 0,$$

а это и означает, что функция $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ удовлетворяет данному соотношению.

Пример 3.2. Найти вторую производную неявной функции $y = y(x)$, заданной уравнением $y = \ln(x + y)$.

Решение. Дифференцируем по x обе части данного уравнения, считая y функцией аргумента x:

$$y' = (1 + y')/(x + y).$$

Выразим из этого выражения y':

$$y'(x + y) - y' = 1.$$

Отсюда $y' = 1/(x + y - 1)$.

Последнее равенство дифференцируем по x, при этом снова рассматривая y как функцию аргумента x:

$$y'' = -\frac{1 + y'}{(x + y - 1)^2}.$$

Заменив здесь y' на $1/(x + y - 1)$, получим

$$y'' = -\frac{1 + 1/(x + y - 1)}{(x + y - 1)^2} = -\frac{x + y - 1 + 1}{(x + y - 1)^3} = \frac{x + y}{(1 - x - y)^3}.$$

Пример 3.3. Найти y'''_{xxx}, если $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Решение. Найдем указанную производную третьего порядка, исходя из ее представления в виде:

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t}.$$

Первая производная уже была найдена в п. 2 (см. пример 2.2):

$$y'_x = -\operatorname{tg} t.$$

Так как $\left(y'_x\right)'_t = -\dfrac{1}{\cos^2 t}$ и $x'_t = -3a\cos^2 t \sin t$, то в соответствии с формулой

$y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$ будем иметь

$$y''_{xx} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t}$$

Найдем теперь

$$\left(y''_{xx}\right)'_t = -\frac{\cos^5 t - 4\cos^3 t\sin^2 t}{3a\sin^2 t\cos^8 t} = -\frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{3a\sin^2 t\cos^5 t}.$$

Учитывая снова, что $x'_t = -3a\cos^2 t\sin t$, окончательно получаем

$$y'''_{xxx} = \frac{\cos^2 t - 4\sin^2 t}{9a^2\sin^3 t\cos^7 t}.$$

Пример 3.4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right); \\ y = \mathrm{arctg}\, t. \end{cases}$

Решение. Найдем указанную производную второго порядка, используя формулу $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$.

Найдем первую производную по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\mathrm{arctg}\, t\right)'_t}{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)'_t} = \frac{1/\left(1+t^2\right)}{2t/\left(1+t^2\right)} = \frac{1}{2t}$$

Тогда

$$y''_{xx} = \frac{\left(1/(2t)\right)'_t}{\left(\ln\left(1+t^2\right)\right)'_t} = \frac{-1/\left(2t^2\right)}{2t/\left(1+t^2\right)} = -\frac{1+t^2}{4t^3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Часть А

65. Покажите, что $yy'' - \left(y'\right)^2 + \left(y'\right)^3 = 0$, если $y + c_1\ln y = x + c_2$ (здесь c_1, c_2 – постоянные).

В заданиях 66 – 71 найти указанные производные:

66. $y = \sin^3 x,\ y''$

67. $y = \sqrt{1+x^2},\ y''(1)$

68. $y = x^3\ln x,\ y^{(4)}$

69. $y = x\cos x,\ y''(\pi)$

70. $e^y = xy,\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$

71. $y = \mathrm{tg}(x+y),\ \dfrac{d^3y}{dx^3}$

Найти y''_{xx} функции, заданной параметрически в виде:

72. $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$

73. $\begin{cases} x = t^2 + 2t; \\ y = \ln(t+1). \end{cases}$

74. Функция задана параметрически в виде $x = 1 + e^{at}$, $y = at + e^{-at}$. Найти значение производной y'''_{xxx} в точке, соответствующей значению $t = 0$.

Часть Б

75. Доказать, что функция $y = e^x \sin x$ удовлетворяет соотношению $y'' - 2y' + 2y = 0$, а функция $y = e^{-x}\sin x$ – соотношению $y'' + 2y' + 2y = 0.$

В заданиях 76 – 80 найти указанные производные:

76. $y = \mathrm{arctg}x,\ y''(1)$

77. $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x,\ y''$

78. $y = 5x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x,\ y'''$

79. $y = x\sin x,\ y''\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

80. $y = \sin(x+y),\ y''$

81. Найти y''_{xx} функции, заданной параметрически в виде $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

82. Найти y''_{xx} в точке, соответствующей значению $t = 1$, если $x = t^2$, $y = t^3 + t$.

83. Найти y'''_{xxx} в точке, соответствующей значению $t = \dfrac{1}{3}$, если $x = \ln t$, $y = \dfrac{1}{t}$.

84. Найти y''_{xx} в точке, соответствующей значению $t = \dfrac{\pi}{6}$, если $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

4. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ

При раскрытии неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ применяется правило Лопиталя.

Пусть для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ выполняются следующие условия:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \pm\infty;$

2. $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы и, кроме того, $\varphi'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, самой точки x_0);

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ или $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \pm\infty.$

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ или $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \pm\infty.$

Правило Лопиталя имеет место и в случае, когда $x \to \pm\infty.$

Когда отношение производных приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, правило Лопиталя применяют к этому отношению. Перед его повторным применением рекомендуют произвести все допустимые упрощения.

Неопределенность вида $\infty - \infty$ приводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, а неопределенность вида $0 \cdot \infty$ – к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований исследуемой функции.

В случае неопределенности вида 0^0, ∞^0 или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

Замечание. Перед применением правила Лопиталя проверяют выполнимость только того условия, чтобы была неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. В существовании нужных производных и пределов убеждаются в ходе решения. Кроме того, при нахождении предела функции рационально сочетать правило Лопиталя и свойства функций, имеющих пределы, а также теоремы о замене бесконечно малых (б. м.) и бесконечно больших функций (б. б. ф.) им эквивалентными (с учетом таблицы эквивалентных б. м. и б. б. ф.).

Примеры с решениями

Найти пределы:

Пример 4.1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, поскольку $x^3 - 3x + 2\big|_{x=1} = 0$ и

$x^3 - x^2 - x + 1\big|_{x=1} = 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-3x+2\right)'}{\left(x^3-x^2-x+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^2-3\right)'}{\left(3x^2-2x-x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=1{,}5.$$

Здесь правило Лопиталя применялось дважды, так как после применения его в первый раз снова пришли к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Пример 4.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+1/x)}$.

Решение. При $x\to+\infty$ $\operatorname{arctg}x\to\dfrac{\pi}{2}$, а $\dfrac{1}{x}\to 0$, следовательно, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Прежде, чем применить правило Лопиталя, учтем, что $\ln(1+1/x)\sim 1/x$ при $x\to+\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln(1+1/x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\pi-2\operatorname{arctg}x\right)'}{\left(1/x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2/\left(1+x^2\right)}{-1/x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=2,$$

так как в числителе и знаменателе находятся многочлены одинаковой степени.

Пример 4.3. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Находим

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x/\sin x}{\sin x/(1-\cos x)}=\lim_{x\to+0}\cos x\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\left|\begin{matrix}1-\cos x\sim x^2/2,\\ \sin^2 x\sim x^2\end{matrix}\right|=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to+0}\frac{x^2/2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1/\operatorname{sh}x-1/x\right)$.

Решение. Имеем разность двух б. б. ф. при $x\to 0$, т. е. неопределенность вида $\infty - \infty$, которую сведем к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, представив данную разность в виде отношения двух б. м. ф. при $x \to 0$. Далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sh}x}{x\operatorname{sh}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{sh}x)'}{(x\operatorname{sh}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\operatorname{ch}x)'}{(\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+x\operatorname{sh}x}=0$$

(правило Лопиталя применили дважды).

Пример 4.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi - 2\operatorname{arctg}x)$.

Решение. Имеющуюся неопределенность вида $0\cdot\infty$ сведем к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ путем преобразования данного произведения в дробь, затем применим правило Лопиталя. В результате получим

$$\lim_{x\to+\infty} x(\pi-2\operatorname{arctg}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi-2\operatorname{arctg}x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2/(1+x^2)}{-1/x^2}=2.$$

Пример 4.6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\ln(\operatorname{tg}x)$.

Решение. Аналогично примеру 4.5 неопределенность вида $0\cdot\infty$ сведем к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ путем преобразования данного произведения в дробь, затем применим правило Лопиталя.

Имеем

$$\lim_{x\to\pi/4}\operatorname{tg}2x\ln(\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{ctg}2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\pi/4}\frac{[\ln(\operatorname{tg}x)]'}{[\operatorname{ctg}2x]'}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{(1/\operatorname{tg}x)(1/\cos^2 x)}{-2/\sin^2 2x}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin^2 2x}{2\operatorname{tg}x\cos^2 x}=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin^2 2x}{2\sin x\cos x}=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin^2 2x}{\sin 2x}=-\lim_{x\to\pi/4}\sin 2x=-1.$$

Пример 4.7. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида ∞^0. Положим $(\operatorname{tg}x)^{2\cos x}=y$ и прологарифмируем:

$$\ln y = 2\cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = \frac{2\ln(\operatorname{tg} x)}{1/\cos x}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\pi/2} \ln y = 2\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\sec x} = 2\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\ln(\operatorname{tg} x))'}{(\sec x)'} = 2\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x/\operatorname{tg} x}{\sec x\cdot\operatorname{tg} x} = 2\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x\cdot\operatorname{tg} x}{2\cdot\operatorname{tg} x\cdot\sec^2 x} = \lim_{x\to\pi/2}\cos x = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\pi/2} y = \lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^0 = 1.$

Пример 4.8. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 0^0. Положим $x^{\sin x} = y$ и прологарифмируем:

$$\ln y = \sin x \ln x = \frac{\ln x}{1/\sin x}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/\sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\cos x/\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{\cos x + x\cdot(-\sin x)} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1.$

Пример 4.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞. Положим $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = y$ и прологарифмируем:

$$\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\ln(1+1/x^2)}{1/x}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+1/x^2\right)}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(1+1/x^2\right)\right)'}{\left(1/x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2/\left(x^3\cdot\left(x^2+1\right)\right)}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\left(x^2+1\right)x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to\infty}y=e^0=1$.

Задачи для самостоятельного решения

Часть А

В заданиях 85– 96 найти пределы.

85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

86. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+1/x\right)}$

87. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$

88. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

89. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-x}{x^3}$

90. $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$

91. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}$

92. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos ax}{\left(e^{bx}-\cos bx\right)\operatorname{ch}bx}$

94. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$

95. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$

96. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\operatorname{tg}x\right)^{2x-\pi}$

Часть Б

В заданиях 97– 108 найти пределы.

97. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln\left(1+2x\right)}$

98. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\left(\sin x\right)}{\ln\left(\sin 5x\right)}$

99. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\left(\sin x\right)}$

100. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$

101. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-2x\right)}{\arcsin 3x}$

102. $\lim\limits_{x\to 1}\sin\left(x-1\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

103. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln(1+x)}$

104. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{e^x-1}\right)$

105. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

106. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,x\right)$

107. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$

108. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}$

Дифференциальное исчисление функций одной переменной
Тренировочный тест

№ пп	Условие	Ответы
1	$\left(0{,}8\sqrt[4]{x}-\dfrac{x^3}{0{,}3}+\dfrac{1}{5x^2}\right)'$	А. $\dfrac{0{,}2}{\sqrt[4]{x^3}}-10x^2-\dfrac{0{,}4}{x^3}$ Г. $0{,}8\sqrt[4]{x}-10x^3+\dfrac{0{,}4}{x^3}$ Б. $\dfrac{0{,}8}{\sqrt[4]{x^3}}-10x^2-\dfrac{1}{x^3}$ Д. $\sqrt[4]{x}-10x^3+\dfrac{0{,}4}{x^3}$ В. $0{,}8\sqrt[4]{x^3}-10x^3-\dfrac{0{,}4}{x^3}$
2	$\left(\dfrac{1-x^3}{1+x^3}\right)'$	А. $\dfrac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$ Г. $-\dfrac{x^2}{x^3+1}$ Б. $-\dfrac{6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$ Д. $\dfrac{x^3}{\left(x^3+1\right)^2}$ В. $-\dfrac{x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$
3	$\left(\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}\right)'$	А. $\dfrac{1}{2\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}}$ Г. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}\sin^2 x}$ Б. $\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}}$ Д. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}\cos^2 x}$ В. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}x}}$
4	$\left(\log_3\left(x^2-1\right)\right)'$	А. $\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$ Г. $\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)}$ Б. $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\ln 3}$ Д. $\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$ В. $\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)\ln 3}$
5	$\left(\sin(2^x)\right)'$	А. $2^x\ln 2\cdot\sin\left(2^x\right)$ Г. $-2^x\cdot\cos\left(2^x\right)$ Б. $2^x\ln 2\cdot\cos\left(2^x\right)$ Д. $-2^x\ln 2\cdot\cos\left(2^x\right)$ В. $2^x\cos\left(2^x\right)$

6	$\left(x\cdot 10^{\sqrt{x}}\right)'$	А. $1+\sqrt{x}\ln 10$ Г. $10^{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10$ Б. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln 10\right)$ Д. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ В. $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$
7	$\begin{cases} x=\frac{t+1}{t} \\ y=\frac{t-1}{t} \end{cases}$ $y''_{xx}=?$	А. -1 Г. 0 Б. t Д. $\frac{t+1}{t-1}$ В. 1
8	$\cos(x+y)-y=a^2$ $y'=?$	А. $\frac{-\sin(x+y)}{\sin(x+y)+1}$ Г. $\sin(x+y)$ Б. $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+1}$ Д. $-\sin(x+y)$ В. $\frac{1}{\sin(x+y)+1}$
9	$y=\cos^2 x$ $y'''=?$	А. $\sin 2x$ Г. $2\cos 2x$ Б. $4\sin x$ Д. $4\sin 2x$ В. $4\cos 2x$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$	А. 0 Г. 2 Б. ∞ Д. $\frac{1}{2}$ В. 1

ОТВЕТЫ

1. $y'(1)=\frac{1}{2}$
2. $y'=-\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}$
3. $y'=4x^3-x^2+5x-0{,}3$
4. $y'=2x+\cos x$
5. $y'=3(\cos x-x\sin x)$
6. $y'=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$
7. $y'=\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}$
8. $y'=\frac{25-6x-2x^2}{(x^2-5x+5)^2}$
9. $y'=\frac{x(2\ln|x|-1)}{\ln^2|x|}$
10. $y'=\frac{\sin 2x-2x}{2\sin^2 x}$
11. $y'=-\frac{\ln 3}{3^x}$
12. $y'=\frac{4^{\arcsin x}\ln 4}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $y'=\frac{1}{x\,\mathrm{ch}^2(\ln x)}$
14. $y'=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$
15. $y'=-2x\,\mathrm{tg}\,x^2$
16. $y'=\frac{e^x+2x}{2(1+e^x+x^2)\sqrt{e^x+x^2}}$
17. $y'(0)=0{,}5\ln 2$
18. $y'(2)=\frac{4}{9}$
19. $y'(1)=0$
20. $y'(1)=\frac{3\pi+2}{4}$
21. $y'=a^x\ln a$
22. $y'=15\,\mathrm{ch}\,15x$
23. $y'=5\cos x-3\sin x$
24. $y'=5x^4-12x^2+2$
25. $y'=x\,\mathrm{ch}\,x$
26. $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
27. $y'=x^2e^x$
28. $y'=2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$
29. $y'=\frac{\mathrm{arctg}\,x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$
30. $y'=\frac{x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$
31. $y'=e^x+xe^x+\frac{x\cos x\ln x-\sin x}{x\ln^2 x}$
32. $y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
33. $y'=2xe^{x^2}$
34. $y'=\frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}\arcsin x^4}$
35. $y'=-\frac{3e^{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}$
36. $y'=2\sin x(\cos x\sin x^2+x\sin x\cos x^2)$
37. $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2$
38. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

39. $y'(0)=0$

40. $y'(1)=1$

41. 0

42. -1

43. $\begin{cases} y'_x = -\operatorname{tg} t; \\ x = \sin t. \end{cases}$

44. $\begin{cases} y'_x = 5t^2; \\ x = t^3 + 3t + 1. \end{cases}$

45. $\begin{cases} y'_x = e^{2t}; \\ x = e^{-t}\sin t. \end{cases}$

46. $\begin{cases} y'_x = -\dfrac{4(2t+1)}{3(1-t)^2}; \\ x = (1-t)^3. \end{cases}$

47. $y'_x = \dfrac{x^2 - y}{x - y^2}$

48. $y'_x = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$

49. $y'_x = \dfrac{y\cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x}$

50. $y'_x = \dfrac{1}{2(1+\ln y)}$

51. $y'_x = -\dfrac{1+\sin(x+y)}{2y + \sin(x+y)}$

52. $y'_x = \dfrac{1}{\cos(x^2+y)} - 2x$

53. $-\dfrac{1}{3}$

54. $\dfrac{1}{2}$

55. -1

56. $\begin{cases} y'_x = \dfrac{3}{2}(1+t); \\ x = 2t - t^2. \end{cases}$

57. $\begin{cases} y'_x = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}; \\ x = a(t - \sin t). \end{cases}$

58. $y'_x = \dfrac{2a}{3(1-y^2)}$

59. $y'_x = \dfrac{\sqrt{1-y^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)}$

60. $y'_x = \dfrac{1+y^2}{y^2}$

61. $y'_x = \dfrac{y\sin\dfrac{y}{x}}{2x^2y + x\sin\dfrac{y}{x}}$

62. $y'_x = \dfrac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}$

63. $-\dfrac{3}{4}$

64. $\dfrac{6}{7}$

66. $y'' = 6\sin x\cos^2 x - 3\sin^3 x$

67. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

68. $y^{(4)} = \dfrac{6}{x}$

69. π

70. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{y(y^2-2y+2)}{x^2(1-y)^3}$

71. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{-2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}$

72. $y''_{xx} = \dfrac{2}{t^2-1}$

73. $y''_{xx} = -\dfrac{1}{2(t+1)^4}$

74. -4

76. $-\frac{1}{2}$

77. $y'' = -\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$

78. $y''' = 300x^2 + 72x$

79. $\sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

80. $y'' = -\frac{y}{\left(1-\cos(x+y)\right)^3}$

81. $y''_{xx} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$

82. $\frac{1}{2}$

83. -3

84. $\frac{32}{27}$

85. 0

86. 1

87. 0

88. 0

89. $\frac{1}{6}$

90. ∞

91. 0

92. $\frac{1}{2}$

93. $\frac{a}{b}$

94. $\frac{1}{6}$

95. 1

96. 1

97. 1

98. 1

99. $\frac{1}{2}$

100. 0

101. $-\frac{2}{3}$

102. $-\frac{2}{\pi}$

103. ∞

104. ∞

105. 0

106. 1

107. e^2

108. e^{-6}

Правильные ответы по тесту: 1-А; 2-Б; 3-Д; 4-В; 5-Б; 6-В; 7-Г; 8-А; 9-Д; 10-А.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Берман Г. Н*. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособ. – СПб.: Профессия, 2002.
2. *Гурский Е. И.* Руководство к решению задач по высшей математике в двух частях: Учебное пособие. В 2 ч. Ч. 1/ Е. И. Гурский, В. П. Домашов, В. К. Кравцов, А. П. Сильванович. – Минск: Вышейшая школа, 1989.
3. *Гурова З. И., Каролинская С. Н., Осипова А. П.* Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами/ Под ред. Кибзуна А. И. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
4. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 1. – М.:ОНИКС 21 век, 2003.
5. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу.– М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Составители: КУБЫШКИНА Светлана Николаевна
ПРОСВИРКИНА Елена Анатольевна

Печатается в авторской редакции
Технический редактор В. Ф. Е л и с е е в а

Подписано в печать 04.03.08
Формат $60 \times 84 1/16$. Печать офсетная.
Усл. п. л. 1,63 Уч.-изд. л. 1,59
Тираж 200 экз. Рег. .№ 31

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус № 8