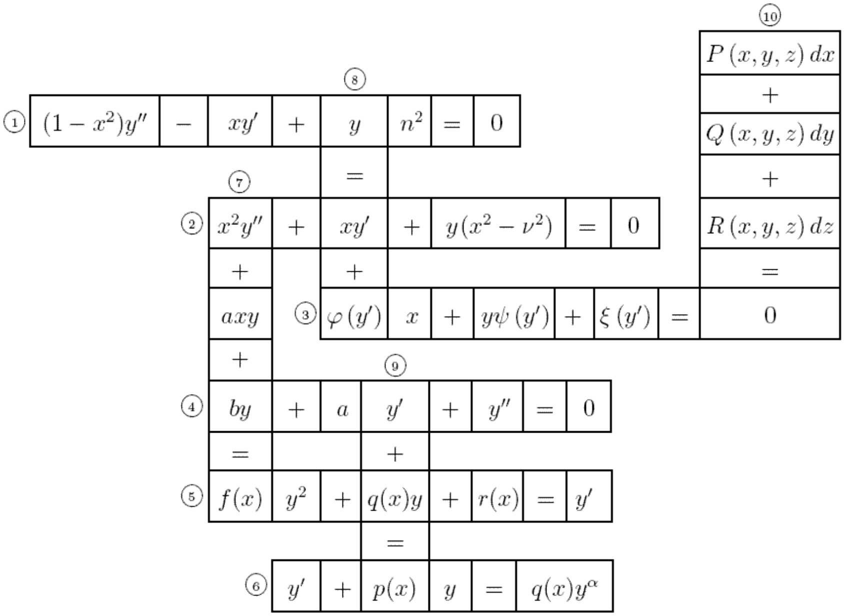
Г. А. ПАВЛОВА, С. В. ГОРБУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ



Самара 2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Г. А. ПАВЛОВА, С. В. ГОРБУНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ

Самара 2010

УДК 517.91 (075.8)

Дифференциальные уравнения: Сборник задач и упражнений / *Г. А. Павлова, С. В. Горбунов*; Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2010. 66 с.

Задачи по курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» предназначены для студентов специальности 01.05.01 «Прикладная математика и информатика».

Библиогр.: 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного технического университета.

Рецензент: к. ф.-м. н. *А. Ю. Смыслов*

Глава I
Дифференциальные уравнения первого порядка

§ 1. Общие понятия

1. Убедиться в том, что функция

$$\varphi(x) = x \int\limits_0^x \sin t^2 \, \mathrm{d}t$$

является решением дифференциального уравнения

$$x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = x^2 \sin x^2.$$

2. Доказать, что функция $y = \varphi(x)$, определяемая соотношением

$$y = \operatorname{arctg}(x + y) + c, \quad c \in \mathbb{R}^1,$$

является решением дифференциального уравнения

$$(x + y)^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1.$$

3. Функция $y = \varphi(x)$ задана параметрически:

$$x = t\mathrm{e}^t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}.$$

Доказать, что эта функция является решением уравнения

$$(1 + xy) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = 0.$$

4. Убедиться в том, что функция

$$y = x + c\sqrt{1 + x^2}$$

при каждом $c \in \mathbb{R}^1$ является решением уравнения

$$(xy + 1) \, \mathrm{d}x = (x^2 + 1) \, \mathrm{d}y.$$

5. Построить интегральные кривые уравнений:

1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{|xy|}{xy}$;

2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x-y}{|x-y|}$;

3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x+|x|}{y+|y|}$;

4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 0, & y \neq x; \\ 1, & y = x. \end{cases}$

6. Решить уравнение

$$y' = k\frac{y}{x}$$

и построить интегральные кривые этого уравнения.

§ 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

7. Решить уравнения:

1) $x(1+y^2) + y(1+x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$;

2) $y' = xy^2 + 2xy$;

3) $2\operatorname{ch} y\,\mathrm{d}x + \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}\right)\mathrm{d}y = 0$.

8. Найти решение уравнения

$$\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - (1+\mathrm{e}^x)y\,\mathrm{d}y = 0,$$

удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

9. Найти решение $y = \varphi(x)$ уравнения

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 1 = \cos 2y,$$

удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \frac{5\pi}{4}.$$

10. Решить уравнения:

1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 2x + 1$;

2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x - y - 1)$.

11. Доказать, что кривая, угловой коэффициент которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

12. Найти решение уравнения

$$(1+\mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{2y}\sin^3 x\,\mathrm{d}y = 0,$$

удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

13. Решить уравнения:

1) $e^{-y}(1+y')=1$;

2) $y'=a^{x+y}, \quad a>0,\ a\neq 1$;

3) $y'=\sin(x-y)$;

4) $(y+y^2-x^2y-x^2y^2)\,dx+(x^3y-8y-x^3+8)\,dy=0$.

14. Найти решение уравнения

$$2y\sqrt{by-y^2}\,dx-(b^2+x^2)\,dy=0, \quad b=\mathrm{const},$$

удовлетворяющее условию $y(0)=b$.

15. Найти решение уравнения

$$y'+\sin(x-y)=\sin(x+y),$$

удовлетворяющее условию $y(\pi)=\frac{\pi}{2}$.

16. Найти кривую, обладающую свойством, что все её нормали проходят через постоянную точку.

17. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

18. Найти решение уравнения

$$3y^2y'+16x=2xy^3,$$

ограниченное при $x\to+\infty$.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения и уравнение Бернулли

19. Решить уравнения:

1) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=2x^4$;

2) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$;

3) $x\dfrac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$;

4) $(2x-y^2)y'=2y$;

5) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$;

6) $y'-2xy=3x^2-2x^4$;

7) $y'+\mathrm{tg}\,y=\dfrac{x}{\cos y}$;

8) $\dfrac{dy}{dx}x^3\sin y+2y=x\dfrac{dy}{dx}$.

20. Найти решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}\sin x-y\cos x=-\frac{\sin^2 x}{x^2},$$

которое стремится к нулю при $x\to\infty$.

21. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Ox, равен отношению квадрата ординаты к абсциссе точки, в которой проведена эта нормаль.

22. Решить уравнения:

1) $\left(\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} - xy\right)\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$;

2) $(1 + x^2)y' - 2xy = 4\sqrt{y(1 + x^2)}\,\mathrm{arctg}\, x$;

3) $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$;

4) $x(\mathrm{e}^y - y') = 2$;

5) $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$.

23. Найти решение уравнения

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \sin 2x = 2(y + \cos x),$$

которое остаётся ограниченным при $x \to \frac{\pi}{2}$.

24. Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси Oy, равен отношению квадрата абсциссы к ординате точки, в которой проведена эта нормаль.

25. Сила тока в электрической цепи с омическим сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L удовлетворяет уравнению

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E,$$

где E — элетродвижущая сила. Найти зависимость силы тока $i(t)$ от времени, если E изменяется по синусоидальному закону $E = E_0 \sin \omega t$ и $i(0) = 0$.

§ 4. Однородные дифференциальные уравнения

26. Решить уравнение

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x + y}{x - y}$$

и построить его интегральные кривые.

27. Решить уравнения:

1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy + y^2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$;

2) $\left(x - y \cos \dfrac{y}{x}\right) \mathrm{d}x + x \cos \dfrac{y}{x}\, \mathrm{d}y = 0$;

3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$;

4) $(y + \sqrt{xy})\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$;

5) $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$;

6) $(2x - 4y + 6)\,\mathrm{d}x + (x + y - 3)\,\mathrm{d}y = 0$.

28. Доказать, что интегральные кривые уравнения

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{2} - \sqrt{5x^4 + y^4 + x^2y^2}$$

пересекают прямую $y = 2x$ под углом $45°$.

29. Решить уравнения:

1) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

2) $x^2\,\mathrm{d}y = (y^2 - xy + x^2)\,\mathrm{d}x$;

3) $2x^2y' = x^2 + y^2$;

4) $(4x - 3y)\,\mathrm{d}x + (2y - 3x)\,\mathrm{d}y = 0$;

5) $xy' = \dfrac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$;

6) $y' = \dfrac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$;

7) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\left(\dfrac{y + 1}{x + y - 2}\right)^2$;

8) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg}\dfrac{y - 2x}{x + 1}$.

30. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

§ 5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

31. Решить уравнения:

1) $(3y^2 + 2xy + 2x)\,\mathrm{d}x + (6xy + x^2 + 3)\,\mathrm{d}y = 0$;

2) $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)\,\mathrm{d}x - \sqrt{x^2 - y}\,\mathrm{d}y = 0$;

3) $(x\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x)y' + y\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} y = 0$;

4) $\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)\,\mathrm{d}x + \left(2xy + \dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$;

5) $xy' = (3x^2\cos y - \sin y)\cos y$;

6) $y\,\mathrm{d}x - (x + x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = 0; \quad \mu(x, y) = \mu(x^2 + y^2)$;

7) $\left(x + y\sqrt{x^2 + y^2}\right)\,\mathrm{d}x + \left(x\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)\,\mathrm{d}y = 0$;

8) $(y^2\cos^2 x + y)\,\mathrm{d}x + \left(2xy\cos^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}y = 0$;

9) $\big(y + \mathrm{e}^x(x^2+y^2)\big)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y; \quad \mu(x,y) = \mu(x^2+y^2)$.

32. Найти интегрирующий множитель для однородного уравнения первого порядка

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

33. Решить уравнения:

1) $(2xy+3y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2+6xy-3y^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

2) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$.

34. Решить уравнение

$$(y^2+x^2-a)x\,\mathrm{d}x + (y^2+x^2+a)y\,\mathrm{d}y = 0$$

и построить интегральную кривую при $c = 0$.

35. Решить уравнения:

1) $(x^2 - \sin^2 y)\,\mathrm{d}x + x\sin 2y\,\mathrm{d}y = 0$;

2) $(2xy^2 - 3y^3)\,\mathrm{d}x + (7 - 3xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

3) $\dfrac{y + \sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)\mathrm{d}y = 0$;

4) $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0, \quad \mu(x,y) = \mu(xy)$;

5) $x\left(4 + \dfrac{1}{x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x - y\left(4 - \dfrac{1}{x^2-y^2}\right)\mathrm{d}y = 0,$
$\mu(x,y) = \mu(x^2-y^2)$;

6) $\left(2\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y, \quad \mu(x,y) = \mu(xy)$.

§ 6. Уравнения Риккати

36. Решить уравнения:

1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay(y-x) = 1$;

2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 = \dfrac{2}{x^2}$;

3) $y' - y^2 + 2\mathrm{e}^x y = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x$;

4) $y' - y^2 + y\sin x - \cos x = 0$.

37. Решить уравнение

$$y' = y^2 - xy - x.$$

Указание. Частное решение уравнения ищите в виде $y = ax + b$.

38. Решить уравнение

$$xy' - \frac{1}{2}y - ay^2 = c, \quad a \neq 0.$$

Указание.
Сделайте замену $y(x) = z(x)\sqrt{x}$, где $z(x)$ — новая неизвестная функция.

39. Решить уравнение
$$y' = -y^2 + x^{-\frac{8}{3}}.$$
Указание. $y' + Ay^2 = Bx^m$ — специальное уравнение Риккати. Если $\frac{m}{2m+4}$ есть целое число, то с помощью замен $y = \frac{z}{x}$ и $x^{m+2} = t$, где z — новая неизвестная функция, t — новая независимая переменная, оно сводится к уравнению вида $tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t$. В свою очередь, это уравнение сводится к уравнению, рассмотренному в задаче 38, при помощи последовательного применения подстановок $z = \frac{t}{a+u}$; $a = \frac{1+\alpha}{\gamma}$ или $z = a + \frac{t}{u}$; $a = -\frac{\alpha}{\beta}$, соответственно увеличивающих или уменьшающих число α на единицу.

40. Решить уравнения:
1) $y' \mathrm{e}^{-x} + y^2 - 2y\mathrm{e}^x = 1 - \mathrm{e}^{2x}$;
2) $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$;
3) $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x$;
4) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$.

41. Найти общий интеграл уравнения Риккати $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$, когда отношение коэффициентов не зависит от x, то есть
$$p(x) : q(x) : r(x) = m_0 : n_0 : p_0,$$
где m_0, n_0, p_0 — постоянные величины.

§ 7. Разные уравнения

42. Определить тип дифференциальных уравнений и указать метод их интегрирования:
1) $(xy^2 + x)\,\mathrm{d}x + (y - x^2 y)\,\mathrm{d}y = 0$;
2) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;
3) $(x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 2xy\,\mathrm{d}x$;
4) $\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x + (x\,\mathrm{e}^y - 2y)\,\mathrm{d}y = 0$;
5) $x' + x = \cos y$;
6) $(1+x^2)\,\mathrm{d}y + \Big(2xy + (1+x^2)^2\Big)\,\mathrm{d}x = 0$;
7) $(x+y)\,\mathrm{d}x + (x+y-1)\,\mathrm{d}y = 0$;

8) $y' - 2xy = 3x^3y^2$;

9) $y' = y^2 - x^2 + 1$;

10) $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x + y\left(\sqrt{x^2+y^2} - 1\right) \mathrm{d}y = 0$;

11) $x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x + y^2(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = 0$;

12) $y' = (8x + 11y + 2)^4 + \mathrm{e}^{8x+11y}\mathrm{e}^2 + 11$;

13) $(41x + 3y + 15)\ \mathrm{d}x + (3x + 14y + 51)\ \mathrm{d}y = 0$;

14) $\left(x\cos\dfrac{y}{x} + y\sin\dfrac{y}{x}\right) y\,\mathrm{d}x + \left(x\cos\dfrac{y}{x} - y\sin\dfrac{y}{x}\right) x\,\mathrm{d}y = 0.$

43. Решить уравнения:

1) $\left(\sqrt{xy} - \sqrt{x}\right)\ \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$;

2) $y = (2xy + y^3)y'$;

3) $y = x\left(y' - \sqrt[x]{\mathrm{e}^y}\right)$.

44. Найти решение уравнения

$$y = x(y' - x\cos x),$$

удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

45. Найти решение уравнения

$$y - xy' = b(1 + x^2y'), \quad b \in \mathbb{R}^1,$$

удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

46. Решить уравнения:

1) $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$;

2) $y' = y\cos x + \sin 2x$;

3) $yy'\sin x = \cos x(\sin x - y^2)$;

4) $(x^2 + y^2 + 1)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}x = 0$;

5) $yx^{y-1}\,\mathrm{d}x + x^y\ln x\,\mathrm{d}y = 0$;

6) $y' + y(2\ln y - \mathrm{e}^x) = 0$;

7) $\dfrac{\mathrm{d}x}{4x - 2y - 4} = \dfrac{\mathrm{d}y}{2x - y - 11}$;

8) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$.

47. Найти решение уравнения

$$xy' + y = y^2,$$

удовлетворяющее условию $y(1) = 0{,}5$.

48. Решить уравнения:

1) $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$;

2) $(xy' - 1)\ln x = 2y$;

3) $(x + 1)(y' + y^2) = -y$;

4) $4\cos y - 2y'\sin y = (1 + \cos 2y)\mathrm{e}^x$;

5) $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2} = 0;$

6) $2xy\ln y\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right)\mathrm{d}y = 0;$

7) $\left(\sqrt{x^2-y} + 2x\right)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y;$

8) $9x^2y' = 2 - 18x^2y^2.$

§ 8. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка

49. Из эксперимента известно, что скорость радиоактивного распада вещества пропорциональна количеству вещества. Найти полупериод распада, то есть время, за которое распадётся половина вещества.

50. На материальную точку массы m действует постоянная сила, сообщающая точке ускорение a. Окружающая среда оказывает движущейся точке сопротивление, пропорциональное скорости её движения с коэффициентом пропорциональности γ. Как изменяется скорость движения со временем, если в начальный момент времени точка находилась в покое?

51. Кусок металла с температурой 20°C помещён в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от 20°C до 260°C. Найти температуру металла через час, если металл нагревается пропорционально разности температур печи и металла.

52. В сосуд, содержащий 50 л воды, непрерывно поступает со скоростью 3 л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,8 кг соли. Поступающий раствор смешивается с водой и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через час?

53. Найти время T (сек.), за которое жидкость, заполняющая коническую воронку высотой H (см) и углом при вершине 2α, вытекает из неё через малое отверстие площадью σ (см^2), вырезанное в вершине конуса, если известно, что скорость v (м/с) вытекания жидкости выражается формулой $v = k\sqrt{2gh}$, где $k = \mathrm{const}$ (для воды $k = 0{,}6$); g (см/с^2) — ускорение силы тяжести; h (см) — высота жидкости над отверстием.

54. В цилиндрическом сосуде объёмом V_0 заключён атмосферный воздух, который адиабатически (без обмена тепла с окружающей средой) сжимается до объёма V_1. Вычислить работу сжатия.

Указание. Воспользоваться уравнением Пуассона

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

где V_0 — первоначальный объём газа, P_0 — первоначальное давление, k — постоянная газа.

55. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала отсчёта пути и имела скорость $v_0 = 20$ м/с. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с после начала движения.

56. Точечный заряд q находится на продолжении оси тонкого стержня длиной l на расстоянии a от его левого конца. Определить силу притяжения стержня и точечного заряда, если на стержне равномерно распределён заряд Q.

57. Сосуд, площадь $S = S(h)$ поперечного сечения которого есть известная функция высоты h, наполнен жидкостью до уровня H. В дне сосуда имеется отверстие площади σ, через которое жидкость вытекает. Определить время t, за которое уровень жидкости понижается от начального положения H до произвольного $0 \leqslant h \leqslant H$, и время T полного опорожнения сосуда. Используя общую формулу времени T, проверить результат решения задачи 53.

58. Сосуд объёмом 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, который непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

59. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадётся половина имеющегося количества радия?

Указание. Количество радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент.

60. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/с. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

Указание. Ускорение силы тяжести считать равным 10 м/с^2.

61. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет вся вода?

§ 9. Изогональные траектории семейства кривых

62. Составить дифференциальные уравнения семейств линий:

1) $y = e^{cx}$;
2) $y = (x - c)^3$;
3) $y = \sin(x + c)$;
4) $x^2 + cy^2 = 2y$;
5) $(x - a)^2 + by^2 = 1$.

63. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

64. Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной оси ординат, и касающихся одновременно прямых $y = 0$ и $y = x$.

65. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся одновременно прямых $x = 0$ и $y = 0$ и расположенных в первой и третьей четвертях.

66. Составить дифференциальное уравнение всех парабол с осью, параллельной оси ординат, и проходящих через начало координат.

67. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся оси абсцисс.

68. Составить дифференциальное уравнение семейства прямых, отстоящих от начала координат на расстояние, равное единице.

69. Найти ортогональные траектории семейств линий:

1) $y = kx$; 2) $y = ax^2$; 3) $cy^2 = x^3$.

70. Найти изогональные траектории семейства полупрямых, выходящих из начала координат. Для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ сделать чертёж.

71. Найти траектории, пересекающие семейство линий под углом α:

1) $y = x\ln x + cx, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 2$; 2) $x^2 = 2c\left(y - x\sqrt{3}\right), \quad \alpha = 60^\circ$.

72. Найти ортогональные траектории семейства кривых:

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2xy.$$

73. Найти ортогональные траектории семейства линий:

1) $x^2 + y^2 = 2ax$;
2) $\cos y = ae^{-x}$;
3) $x^2 + y^2 = 2cy$;
4) $y^2 = 4(x - a)$;
5) $x^2 - y^2 = a^2$;
6) $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$;
7) $x^3 - 3xy^2 + c = 0$;
8) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = c^2$;
9) $\left(x^2 + y^2\right)^3 + c(x^3 - 3xy^2) = 0$.

74. Составить уравнение семейства линий, пересекающих эллипсы $3x^2 + y^2 = c^2$ под углом 45°.

75. Составить уравнение семейства линий, пересекающих семейство парабол $y^2 = 4cx$ под углом 45°.

§ 10. Уравнения, не разрешенные относительно производной

76. Решить уравнения:

1) $(y')^3 - 2x(y')^2 + y' = 2x$;

2) $(y')^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0$;

3) $(y')^2 - (y + x^2)y' + x^2 y = 0$.

77. Решить уравнения:

1) $y = (y')^2 \mathrm{e}^{y'}$;

2) $\ln y' + \sin y' - x = 0$;

3) $x^4 (y')^2 - xy' - y = 0$.

78. Решить уравнение

$$x = \frac{ky'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad k > 0.$$

Имеет ли это уравнение особые решения? Сделать чертёж.

79. Решить уравнение

$$y^2 (y')^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0.$$

Выделить особые решения, если они существуют. Сделать чертёж.

80. Решить уравнение

$$(y')^2 + (x + a)y' - y = 0.$$

Имеет ли это уравнение особое решение?

81. Найти особое решение уравнения

$$y = x + 2y' - (y')^2.$$

82. Решить уравнения:

1) $y' \sin y' + \cos y' - y = 0$;

2) $(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$;

3) $(y')^2 = y^3 - y^2$;

4) $(y')^2 + y^2 (\ln^2 y - 1) = 0$;

5) $\sin y' + y' = x$.

83. Решить уравнение

$$(y')^2 - 2xy' + y = 0.$$

Имеет ли это уравнение особое решение?

84. Решить уравнение

$$8(y')^3 - 12(y')^2 = 27(y - x).$$

Выделить особые решения, если они существуют.

85. Решить уравнение
$$y^{\frac{2}{3}} + (y')^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$
Указание. Сделать замену $y' = a\sin^3 t$, $t \in [\,0, 2\pi)$.

86. Решить уравнение
$$\ln y' + 2(xy' - y) = 0$$
и выяснить, имеет ли оно особые решения?

87. Решить уравнения и установить, имеют ли они особые решения:

1) $\sqrt{(y')^2 + 1} + xy' - y = 0$;

2) $y' + y = x(y')^2$;

3) $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$;

4) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$.

88. Найти ортогональные траектории семейства окружностей
$$(x - c)^2 + y^2 = R^2.$$

89. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, составляющие в сумме $2a$.

90. Найти кривую, у которой отрезок любой её нормали, заключённый между координатными осями, равен a.

91. Решить уравнения:

1) $xy' = y + x\sqrt{1 + (y')^2}$;

2) $2yy' = x\big((y')^2 + 4\big)$;

3) $y = x + (y')^2 - y'$.

92. Найти кривую, у которой отрезок любой её касательной, заключённый между координатными осями, равен a.

93. Найти уравнение семейства линий, ортогональных интегральным кривым дифференциального уравнения
$$yy' + x + y' \sin\frac{1}{y'} = 0.$$

94. Найти кривую, касательная к которой образует с осями координат треугольник площадью $2a^2$.

95. Найти кривые, у которых произведение расстояний касательных от двух данных точек есть величина постоянная, равная a^2.
Указание. Ввести декартову систему координат таким образом, чтобы обе заданные точки находились на оси абсцисс, а начало координат — посередине между ними. Расстояние между точками принять равным $2c$.

Глава II

Дифференциальные уравнения порядка выше первого

§ 1. Уравнения, допускающие понижение порядка

96. Найти решение уравнения

$$y'' = x \ln x,$$

удовлетворяющее условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

97. Решить уравнение

$$y''' = \sqrt{1 - x^2}.$$

Указание. Сделать замену $x = \sin t$.

98. Решить уравнение

$$(y'')^3 - 2y'' - x = 0.$$

Указание. Сделать замену $y'' = t$.

99. Решить уравнение

$$x = \frac{y''}{\sqrt{1 + (y'')^2}}.$$

Указание. Сделать замену $y'' = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

100. Найти решение уравнения

$$y^{\mathsf{IV}}(x + 2)^5 = 1,$$

удовлетворяющее условиям $y(-1) = \frac{1}{12}$; $y'(-1) = -\frac{13}{24}$; $y''(-1) = \frac{1}{12}$; $y'''(-1) = \frac{3}{4}$.

101. Найти решение уравнения

$$y'' = x\mathrm{e}^{2x},$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

102. Решить уравнение

$$(y'')^2 - x^2 = 1.$$

Указание. Сделать замену $x = \operatorname{sh} t$.

103. Решить уравнения:
1) $x - \sin y'' + 2y'' = 0$; 2) $y''' = \sin 2x \sin 3x$.

104. Показать, что функция $x = y^2 + y$ является решением уравнения

$$y'y''' - 3(y'')^2 = 0.$$

105. Используя формулу Коши, найти решение уравнения

$$y'' = \sin x^2,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

106. Решить уравнения:
1) $y'' + 2y' = \mathrm{e}^x (y')^2$; 3) $y' = xy'' + (y'')^2$;
2) $y'' - xy''' + (y'')^2 = 0$; 4) $(y'')^2 + 2xy'' - y' = 0$.

107. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям:
1) $(y'')^2 = 4(y' - 1)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
2) $2y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$; $y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$, $y'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

108. Решить уравнения:
1) $xy'' = y'$; 5) $xy'' \ln x = y'$;
2) $xy'' + y' = 0$; 6) $xy''' - y'' = 0$;
3) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$; 7) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$;
4) $xy'' = y' + x^2$; 8) $y'' = (y')^2$.

109. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям:
1) $y'' + y' + 2 = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$;
2) $4y' + (y'')^2 = 4xy''$; $y(0) = y'(0) = 0$.

110. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям:
1) $4y''\sqrt{y} = 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;
2) $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

111. Решить уравнения:
1) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$; 2) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y')^2 = 0$.

112. Определить кривую, у которой радиус кривизны есть постоянная величина.

113. Решить уравнения:
1) $yy'' = (y')^2$; 3) $yy'' + (y')^2 = 0$;
2) $yy'' = 1 + (y')^2$; 4) $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.

114. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям:
1) $y'' = 2yy'$; $y(0) = y'(0) = 1$;

2) $3y'y'' = 2y; \quad y(0) = y'(0) = 1;$

3) $2y'' = 3y^2; \quad y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1;$

4) $y^3y'' = -1; \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 0;$

5) $y''' = 3yy'; \quad y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = \dfrac{3}{2}.$

115. Найти плоскую кривую, радиус кривизны которой пропорционален кубу длины отрезка нормали, то есть отрезка, соединяющего точку кривой, в которой проведена нормаль, и точку пересечения нормали с осью абсцисс.

116. *Задача о линии погони.* На оси Ox в положительном направлении движется с постоянной скоростью a точка P; на плоскости XOY движется точка M с постоянной скоростью v так, что вектор скорости всегда направлен в точку P. Найти траекторию точки M, координаты точки встречи и время, в течение которого происходила погоня.
Указание. Считать в начальный момент времени вектор скорости точки M перпендикулярным оси абсцисс.

117. Решить уравнения:

1) $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0;$

2) $x^2\big(yy'' - (y')^2\big) + xyy' = y\sqrt{x^2(y')^2 + y^2}.$

118. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным условиям:

1) $yy''' - y'y'' = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 1;$

2) $y'y'' - x^2yy' - xy^2 = 0; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

119. Решить уравнения:

1) $yy'' - (y')^2 = y';$ 2) $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1.$

120. Решить задачу о линии погони при условии, что скорости точек P и M совпадают, то есть $a = v$.

121. Решить уравнения:

1) $xyy'' - x(y')^2 - yy' - \dfrac{bx(y')^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0; \quad a, b \in \mathbb{R}^1;$

2) $x^2yy'' = (y - xy')^2;$

3) $yy'' - (y')^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}};$

4) $\big(1 + (y')^2\big)y''' - 3y'(y'')^2 = 0;$

5) $y'' + y'\cos x - y\sin x = 0;$

6) $y'' = \big(1 + (y')^2\big)^{\frac{3}{2}}.$

122. Найти решение уравнения

$$xy'' - y' - x^2yy' = 0,$$

удовлетворяющее заданным условиям $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

§ 2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

123. Решить уравнения:

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$;
2) $y'' - 8y' = 0$;
3) $y'' - 8y' + 16y = 0$;
4) $y'' + 2y' + 9y = 0$;
5) $y''' + 8y = 0$;
6) $y''' - 8y = 0$;
7) $y''' - 4y'' + 4y' - y = 0$.

124. Найти решение уравнения, удовлетворяющего заданным условиям:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;
2) $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1,\ y'(2) = -2$;
3) $y'' + y = 0$; $y(0) = 4,\ y'(0) = -3$.

125. Решить уравнения:

1) $y^{IV} + y = 0$;
2) $y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + y = 0$;
3) $y^{VI} - 4y^{V} + 8y^{IV} - 8y''' + 4y'' = 0$.

126. Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, если заданы их фундаментальные системы решений:

1) $\operatorname{ch} x,\ \operatorname{sh} x$; 2) $1,\ x,\ \mathrm{e}^x$; 3) $1,\ \sin x,\ \cos x$.

127. Решить уравнения:

1) $y''' - 13y' - 12y = 0$;
2) $y'' - 2y' = 0$;
3) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;
4) $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$;
5) $y'' + 2y' + 2y = 0$;
6) $y'' - y' + y = 0$;
7) $y^{VI} - y = 0$;
8) $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$;
9) $y^{IV} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$;
10) $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$;
11) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$;
12) $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$.

128. Найти решение уравнения, удовлетворяющего заданным условиям:

1) $y^{IV} - y = 0$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 1$;
2) $y'' + y = 0$; $y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Глава III
Разные уравнения

129. Решить уравнения, подобрав подходящую замену:

1) $(x - 2y^3)\,\mathrm{d}x + 3y^2(2x - y^3)\,\mathrm{d}y = 0$;
2) $xy' + 1 = x\,\mathrm{e}^{x-y}$;
3) $y(x + \ln y) + (x - \ln y)y' = 0$;
4) $xy^3 - (x^2y^2 - y^8)y' = 0$;
5) $(x^2 + 1)y' + x\sin y\cos y - x(x^2 + 1)\cos^2 y = 0$.

130. Решить уравнения, применив указанные подстановки:

1) $xy + 1 + (x^2 - x^3y)y' = 0; \quad x = \dfrac{1}{t}$;
2) $xy' - y(\ln xy - 1) = 0; \quad u = xy$;
3) $xy' - y\left(x\ln\dfrac{x^2}{y} + 2\right) = 0; \quad u = \dfrac{x^2}{y}$.

131. Упростить уравнение с помощью указанной подстановки:

1) $xy' + \sin(y - x) = 0; \quad u = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y - x}{2}$;
2) $(ay^3 + bxy^2 + cxy^3) + (a_1x^2y + b_1x^3 + c_1x^3y)y' = 0; \quad x = \dfrac{1}{t},\ u = \dfrac{1}{y}$.

132. Найти решение уравнения

$$x^2y'\cos\frac{1}{x} - y\sin\frac{1}{x} = -1,$$

стремящееся к единице при $x \to \infty$.

133. Решить уравнения:

1) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$;
2) $y' + \sin y + x\cos y + x = 0$;
3) $(2x + 3y - 5)\,\mathrm{d}x + (3x + 2y - 5)\,\mathrm{d}y = 0$;
4) $2xy\ln y\,\mathrm{d}x + \left(x^2 + y^2\sqrt{y^2 + 1}\right)\mathrm{d}y = 0$;
5) $(3y - 7x + 7)\,\mathrm{d}x - (3x - 7y - 3)\,\mathrm{d}y = 0$;
6) $y^{\frac{2}{5}} + (y')^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$;
7) $x = (y')^2 - 2y' + 2$;
8) $y'' + (y')^2 = 2\mathrm{e}^{-y}$;
9) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

134. Решить уравнения:

1) $y' - \operatorname{tg} y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos y}$;

2) $y' = y(\mathrm{e}^x + \ln y)$;

3) $y' = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}$;

4) $(x + y + 1)\,\mathrm{d}x + (2x + 2y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$;

5) $(x - y)\,\mathrm{d}x + (2y - x + 1)\,\mathrm{d}y = 0$;

6) $(x - 2xy + y^2)y' + y^2 = 0$;

7) $y' + \dfrac{x}{1 - x^2}y = x\sqrt{y}$;

8) $2x(1 - \mathrm{e}^y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^y(1 + x^2)\,\mathrm{d}y = 0$;

9) $(1 - x^2y)\,\mathrm{d}x + x^2(y - x)\,\mathrm{d}y = 0$;

10) $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$;

11) $x\big(y''y - (y')^2\big) = yy' + xy^2$;

12) $xy'' - y' = x^2 \sin x$;

13) $(1 + y^2)yy'' = (3y^2 - 1)(y')^2$;

14) $y^{\mathsf{IV}} + 2y'' + y = 0$.

135. Решить уравнения, применив указанные подстановки:

1) $x^3y'' = (y - xy')^2$; $\quad \dfrac{y}{x} = z$;

2) $a^2y'' = 2x\big(1 + (y')^2\big)^{\frac{1}{2}}$, $a \in \mathbb{R}^1$; $\quad y' = \operatorname{sh} p(x)$.

Глава IV
Линейные дифференциальные уравнения

§ 1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейных дифференциальных уравнений

136. Найти фундаментальную систему решений для следующих уравнений:

1) $y^{\mathsf{IV}} - y = 0$;

2) $y'' - y' + y = 0$;

3) $y^{\mathsf{V}} - 10y''' + 9y' = 0$;

4) $y''' - 2y'' = 0$.

137. Найти методом вариации произвольных постоянных решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y = \sin 2x,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

138. Найти методом вариации произвольных постоянных решения следующих уравнений:

1) $y'' + 2y' + y = \dfrac{3\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x+1}}$;

2) $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;

3) $y'' - y = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$;

4) $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$;

5) $y'' - y = \dfrac{1}{x}$.

139. Проинтегрировать уравнения:

1) $y^{IV} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$;

2) $y^{VII} + 4y^{VI} - y''' - 4y'' = 0$.

140. Решить уравнения:

1) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$;

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$;

3) $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$;

4) $y''' + y'' = 3$;

5) $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\ln x$;

6) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x \sin x}$;

7) $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\cos \mathrm{e}^x$;

8) $y''' + y'' = \dfrac{x-1}{x^2}$.

§ 2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

141. Для следующих линейных неоднородных дифференциальных уравнений определить вид частного решения $\bar{y}$:

1) $y'' + 5y' = (2x+1)^2$;

2) $y''' + 3y'' = \mathrm{e}^{2x}$;

3) $y'' - 8y' + 16y = (2-3x)\mathrm{e}^{4x}$;

4) $y'' + 25y = \cos 5x$;

5) $y'' - y = \sin x + 5x\cos x$;

6) $y'' + 6y' + 13y = \mathrm{e}^{-3x}\cos 2x$;

7) $y'' + y' + ky = x$;

8) $y'' + ky = \mathrm{e}^{ax}$;

9) $y'' + k^2 y = \cos wx$.

142. Для уравнения $y''' - y'' = f(x)$ найти частное решение $\bar{y}(x)$, если $f(x)$ имеет вид:

1) 2;
2) $3x^2 - 2x + 5$;
3) $2\mathrm{e}^{-3x}$;
4) $2x\mathrm{e}^{x}$;
5) $3\sin 2x$;
6) $5\cos 2x$;
7) $3\sin 2x + 5\cos 2x$;
8) $3\sin 2x + 5x\cos 2x$.

143. Пользуясь принципом суперпозиции, определить вид частного решения $\bar{y}(x)$ следующих уравнений:

1) $y'' + 4y = x^2 \sin^2 x$;
2) $y''' + 6y'' + 10y' = x(\mathrm{e}^{-3x}\cos x + 1)$;
3) $y^{\mathsf{IV}} - 5y''' + 6y'' = x^2 \operatorname{ch} 3x + \mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + x\mathrm{e}^{-3x}$;
4) $y''' - 4y' = \mathrm{e}^{2x}(1 + \sin 2x)$.

144. Пользуясь принципом суперпозиции, найти решение уравнения:

$$y'' + y = \sin x + \cos 2x.$$

145. Решить уравнения:

1) $y'' + 4y = \cos^2 x$;
2) $y'' - y = \operatorname{ch} x$;
3) $y'' - 7y' = (x-1)^2$;
4) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} - 4\sin 2x$;
5) $y'' + y' + y + 1 = \sin x + x + x^2$.

146. Определить вид частного решения $\bar{y}(x)$ следующих уравнений:

1) $y'' - y = \mathrm{e}^{x} x \sin x$;
2) $y^{\mathsf{IV}} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = \mathrm{e}^{x}(x\cos x + \sin x)$;
3) $y''' + y'' + y' + qy = 2$.

147. Найти решение уравнения

$$y'' + y = x,$$

удовлетворяющее краевым условиям $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

§ 3. Уравнения Эйлера, Лагранжа, Чебышева

148. Решить уравнение Эйлера

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

двумя способами:

1) сведением к определяющему уравнению;
2) с помощью замены $x = \mathrm{e}^{t}$.

149. Решить уравнения:

1) $x^2y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$;
2) $(2x+1)^2y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$;
3) $(1-x^2)y'' - xy' + 3y = 0, \quad |x| < 1$;
4) $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad |x| > 1$.

150. Найти решение уравнения

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$$

удовлетворяющее условиям $y\left(\sqrt{2}\right) = 1$, $y'\left(\sqrt{2}\right) = 0$.

151. Решить уравнения:

1) $x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0$;
2) $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$;
3) $x^2y'' - xy' - 3y = -\dfrac{16\ln x}{x}$;
4) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$;
5) $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$;
6) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$;
7) $(x+2)^3y''' + 9(x+2)^2y'' + 18(x+2)y' + 6y = \ln(x+2)$;
8) $x^2y''' = 2y'$.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами

152. Однородное линейное уравнение вида $p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y = 0$, или $\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = 0$, называется *самосопряжённым.* Показать, что с помощью замены независимой переменной $x = x(t)$, где

$$t = \int \frac{\mathrm{d}x}{p(x)},$$

можно свести самосопряжённое уравнение к однородному уравнению, не содержащему производной y'.

153. Показать, что любое уравнение вида

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

может быть сведено к самосопряжённому путём умножения на интегрирующий множитель

$$\mu(x) = \frac{1}{p_0(x)} \mathrm{e}^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\,\mathrm{d}x}.$$

Указать замену независимой переменной $x = x(t)$, сводящей уравнение

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

к однородному уравнению, не содержащему производную y'.

154. С помощью соответствующей замены искомой функции или независимой переменной свести следующие уравнения к уравнениям с постоянными коэффициентами и найти их решения:

1) $x^4y'' + 2x^3y' + n^2y = 0, \quad x > 0;$
2) $xy'' + \dfrac{1}{2}y' + y = 0, \quad x > 0;$
3) $(1+x^2)^2y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0;$
4) $x^4y'' + 2x^3y' - 4y = \dfrac{1}{x};$
5) $y'' - y' + \mathrm{e}^{2x}y = 0;$
6) $y''\sin x\cos x - y' + m^2y\,\mathrm{tg}\,x\sin^2 x = 0, \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \ m \in \mathbb{R}^1;$
7) $xy'' + 2y' - xy = \mathrm{e}^x;$
8) $(1+x^2)y'' + xy' + y = 0;$
9) $xy'' - y' - 4x^3y = 0.$

155. Проинтегрировать уравнение

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

156. Проинтегрировать уравнение

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0,$$

используя формулу Остроградского–Лиувилля.

157. Проинтегрировать уравнение

$$(x^3 - 3x^2 + 1)y'' - (x^3 - 6x + 1)y' + (3x^2 - 6x)y = 0.$$

Указание. Предварительно найти частное решение в виде полинома $y = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

158. Найти решения следующих уравнений, если известно одно частное решение y_1 уравнения:

1) $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$;

2) $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0, \quad y_1 = \mathrm{e}^x$;

3) $y'' + y' \operatorname{tg} x + y \cos^2 x = 0, \quad y_1 = \cos(\sin x)$.

159. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Указание. Воспользоваться результатами задачи 158 (1) и найти решение уравнения методом вариации произвольных постоянных.

§ 5. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

160. Найти общее решение уравнения

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0,$$

используя степенной ряд. Указать область сходимости полученного решения с помощью теоремы о решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения с голоморфными коэффициентами.

161. Используя обобщённый степенной ряд, найти общее решение уравнения

$$2x^2y'' + (3x - 2x^2)y' - (x+1)y = 0.$$

162. С помощью ряда найти решение уравнения

$$xy'' + y = 0,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

163. Решить уравнение

$$y'' + xy' + y = 0,$$

используя разложение решения в степенной ряд.

164. Найти решение задачи Коши в виде степенного ряда:

1) $y'' + 4x^2y = -2\sin x^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;

2) $y'' + 2xy' - 2y = -4\mathrm{e}^{-x^2}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

165. Построить n членов разложения в степенной ряд решения задачи Коши:

1) $y'' = \mathrm{e}^{xy}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \quad n = 5;$

2) $y'' = \dfrac{y - x}{y + x}, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 1, \quad n = 5;$

3) $y' = \mathrm{e}^{y} + xy, \quad y(0) = 0, \quad n = 7;$

4) $y' = \cos(x + y), \quad y(0) = 0, \quad n = 7;$

5) $y'' + xy' = \mathrm{e}^{-x^2}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0, \quad n = 5;$

6) $y' = \mathrm{e}^{y} + x^2, \quad y(1) = 0, \quad n = 5;$

7) $y' = 1 - xy, \quad y(0) = 0, \quad n = 7;$

8) $y' = \sin xy, \quad y(0) = 1, \quad n = 5;$

9) $y'' \ln x - \sin xy = 0, \quad y(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}},\ y'(\mathrm{e}) = 0, \quad n = 4;$

10) $y''' + x \sin y = 0, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0, \quad n = 7.$

§ 6. Уравнение Бесселя и функции Бесселя

166. Решить уравнения:

1) $y'' + \dfrac{y'}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{9x^2}\right) y = 0;$

2) $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0;$

3) $x^2 y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0;$

4) $y'' + \dfrac{1}{x} y' + \dfrac{1}{9} y = 0.$

167. Решить уравнение

$$y'' + \frac{5}{x} y' + y = 0.$$

Указание. Свести уравнение к уравнению Бесселя с помощью замены

$$y = \frac{u}{x^2},$$

где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция.

168. Решить уравнение

$$x^2 y'' - 3xy' + (x^4 - 12)y = 0.$$

Указание. Сделать замену переменных $y = 2tu$, $x = \sqrt{2t}$.

169. Доказать, что для любого действительного ν справедливы равенства:

1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^{\nu} I_{\nu}(x)\big) = x^{\nu} I_{\nu-1}(x);$ 2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^{-\nu} I_{\nu}(x)\big) = -x^{-\nu} I_{\nu+1}(x).$

Указание. Использовать разложение функции Бесселя в степенной ряд.

170. Доказать, что для любого действительного ν имеют место равенства:

1) $I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = 2I'_v(x)$; 2) $I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = \dfrac{2\nu}{x} I_\nu(x)$.

Указание. Использовать формулы задачи 169.

171. Найти функции Бесселя

$$I_{-\frac{1}{2}}(x),\ I_{\frac{1}{2}}(x),\ I_{\frac{3}{2}}(x).$$

Указание. С помощью разложения функции Бесселя в ряд сначала получить функции $I_{\frac{1}{2}}(x)$ и $I_{-\frac{1}{2}}(x)$, затем, используя формулы задачи 170, определить функцию $I_{\frac{3}{2}}(x)$.

§ 7. Разные задачи

172. Решить уравнения:

1) $2y'' - 3y' - 2y = 5\mathrm{e}^x \operatorname{ch} x$;

2) $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin^2 \dfrac{x}{2}$;

3) $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^x(1 - 2\sin^2 x) + 10x + 1$;

4) $y'' + y = 2\sin x \sin 2x$.

173. Решить следующие задачи Коши:

1) $y^{\mathrm{IV}} - y = 8\mathrm{e}^x, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 0$;

2) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$;

3) $y'' - y' = -5\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x), \quad y(0) = -4,\ y'(0) = 5$;

4) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

174. Решить уравнения:

1) $x^3y''' - x^2y'' + xy' - y = 2\ln x$;

2) $x^2y'' - 6xy' + 12y = x^3$;

3) $x^2y'' + xy' + \left(\dfrac{x^2}{4} - 1\right) y = 0$.

175. Найти пять членов разложения в степенной ряд решений следующих дифференциальных уравнений:

1) $y' = \sin y - \sin x, \quad y(0) = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $y'' = xy^2, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2$.

176. Решить уравнение

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}.$$

177. Проинтегрировать при помощи рядов следующие дифференциальные уравнения:

1) $y'' + x^3 y = 0$;

2) $4xy'' + 2y' + y = 0$;

3) $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$.

Глава V
Системы дифференциальных уравнений

§ 1. Метод исключения решения систем дифференциальных уравнений в нормальной форме

178. Привести следующие дифференциальные уравнения к соответствующим нормальным системам:

1) $xy'' + y' + xy = 0$;

2) $y''' - y = 0$;

3) $y^{\mathrm{IV}} + x^2 y = 0$.

179. Решить следующие системы уравнений, пользуясь методом исключения:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -9y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x - t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x \sin t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x \mathrm{e}^{\cos t}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y^2 + \sin t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{2y}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + y + z; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - \frac{1}{y}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x-t}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y_1' = 4y_1, \\ y_2' = 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 4y_3, \\ y_4' = y_1 + 3y_4, \\ y_5' = y_4 + 3y_5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = z - y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z - x; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - z, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y + t, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + z + t; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{1+x^2} y, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{z}{x} + y + x; \end{cases}$

11) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_2 + 2y_3, \\ y_3' = 4y_3, \\ y_4' = 3y_4, \\ y_5' = 3y_5 + 3y_4, \\ y_6' = 5y_6; \end{cases}$

12) $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - 1\right) y + \left(\frac{2}{x} - 1\right) z; \end{cases}$

13) $\begin{cases} y' = \frac{x}{z}, \\ z' = -\frac{x}{y}; \end{cases}$

14) $\begin{cases} y' = y^2 z, \\ z' = \frac{z}{x} - yz^2; \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1, \\ z' = z + y; \end{cases}$

16) $\begin{cases} y' = z, \\ z' = \frac{z^2}{y}. \end{cases}$

180. Найти решения следующих задач Коши для систем дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x + 4y = 0, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2x + 5y = 0, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 5y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x - 3y, \\ x(0) = -2, \\ y(0) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'' = y^2 + z, \\ z' = -2yy' + y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \\ z(0) = 0. \end{cases}$

§ 2. Метод интегрируемых комбинаций решения систем дифференциальных уравнений

181. Решить системы дифференциальных уравнений, пользуясь методом интегрируемых комбинаций:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{t}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - z, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y + t, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x + z + t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + y^2, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2xy; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{y}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{x}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{y}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{x}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{y}{x-y}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{x-y}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sin x \cos y, \\ \frac{dy}{dt} = \cos x \sin y; \end{cases}$

10) $\begin{cases} y' = \frac{z}{x}, \\ z' = \frac{z}{x} \frac{y+2z-1}{y-1}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} e^t \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, \\ e^t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}; \end{cases}$

11) $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{z-x}, \\ z' = y + 1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} y' = \frac{z+e^y}{z+e^x}, \\ z' = \frac{z^2-e^{x+y}}{z+e^x}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = z. \end{cases}$

182. Решить задачи Коши для систем дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \sin 2x \sin 2y, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'' - z = 0, \\ z'' - y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \\ z(0) = 1, \\ z'(0) = 0. \end{cases}$

183. *Задача о разложении вещества.* Вещество A разлагается на вещества X и Y со скоростью образования каждого из них, пропорциональной количеству неразложившегося вещества. Найти закон изменения количеств x и y веществ X и Y в зависимости от времени, если в начальный момент времени $t = 0$ имеем $x = y = 0$, а через час $x = \frac{a}{8}$, $y = \frac{3a}{8}$, где a — первоначальное количество вещества A.

§ 3. Системы дифференциальных уравнений в симметрической форме

184. Решить системы дифференциальных уравнений:

1) $\dfrac{dx}{2y} = \dfrac{dy}{-\ln x} = \dfrac{dz}{\ln x - 2y};$

2) $\dfrac{dt}{4y - 5x} = \dfrac{dx}{5t - 3y} = \dfrac{dy}{3x - 4t};$

3) $\dfrac{dx}{2z - y} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z};$

4) $\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{yz} = \dfrac{dz}{xy};$

5) $\dfrac{dx}{2xy} = \dfrac{dy}{y^2 - x^2 - z^2} = \dfrac{dz}{2yz};$

6) $\dfrac{\mathrm{d}x}{y+z}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x+z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{x+y}$;

7) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(y-z)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y(z-x)}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z(x-y)}$;

8) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x+y-xy^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x^2y-x-y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{y^2-x^2}$;

9) $\dfrac{\mathrm{d}t}{t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{ty}$;

10) $\dfrac{\mathrm{d}x}{y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-x}=\dfrac{\mathrm{d}p}{q}=\dfrac{\mathrm{d}q}{-p}$;

11) $\dfrac{\mathrm{d}x}{xt}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-yt}=\dfrac{\mathrm{d}t}{xy}$;

12) $\dfrac{t\,\mathrm{d}t}{y^2-2xy-x^2}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x+y}=\dfrac{\mathrm{d}y}{x-y}$.

185. Решить системы дифференциальных уравнений, представив их в симметрической форме:

1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{3t-4y}{2y-3x},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{4x-2t}{2y-3x};\end{cases}$

2) $\begin{cases}t\,\mathrm{d}x=(t-2x)\,\mathrm{d}t,\\ t\,\mathrm{d}y=(tx+ty+2x-t)\,\mathrm{d}t.\end{cases}$

§ 4. Метод Эйлера решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

186. Методом Эйлера найти общее решение следующих систем:

1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=5x+2y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-4x-y;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x-y+z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+5y-z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x-y+3z;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+2z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y-4z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-x-2z;\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x+2y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y;\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-4x+2y+5z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=6x-y-6z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-8x+3y+9z;\end{cases}$

6) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=8y-x,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y;\end{cases}$

7) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y-x;\end{cases}$

8) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-y+z,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+2y-z,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x-y+2z;\end{cases}$

9) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2y.\end{cases}$

187. Решить задачи Коши для систем дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x + y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 8y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2z, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 2x + 8y - 2z, \\ x(0) = -4, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4y - 2x, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 5y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x, \\ x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

§ 5. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

188. Проинтегрировать системы дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y - 5\cos t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y + 2\mathrm{e}^{t}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y - 3\mathrm{e}^{4t}. \end{cases}$

189. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + y - 7t\mathrm{e}^{-t} - 3, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + 2y - 1, \end{cases}$$

которое остаётся ограниченным при $t \to \infty$.

190. Проинтегрировать следующие системы уравнений с помощью метода вариации произвольных постоянных:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2y - x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4y - 3x + \frac{\mathrm{e}^{3t}}{\mathrm{e}^{2t}+1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4x - 2y + \frac{2}{\mathrm{e}^{t}-1}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6x + 3y - \frac{3}{\mathrm{e}^{t}-1}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x - 2y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - y + 15\mathrm{e}^{t}\sqrt{t}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + \operatorname{tg} t; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x + y + \frac{1}{t} - 4\ln t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y + \frac{1}{t}. \end{cases}$

191. Найти общее решение следующих неоднородных систем дифференциальных уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3x + 2y + 3\mathrm{e}^{2t}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y + \mathrm{e}^{2t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + \sin wt, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x + 3y + 4z - 3t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -6x + 7y + 6z + 1 - 7t, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = x - y + z + t. \end{cases}$

192. Решить задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + y - \cos t, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y - 2x + \cos t + \sin t, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

193. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью $\overline{v}_0$. Считая сопротивление воздуха пропорциональным скорости движения, найти закон движения в зависимости от времени, траекторию движения тела, наивысшую точку подъёма и время её достижения.

194. Материальная точка M единичной массы движется на плоскости XOY, притягиваясь точкой $O(0, 0)$ с силой, пропорциональной расстоянию между точкой O и точкой M. Найти закон изменения координат точки M в зависимости от времени t, если $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $y'(0) = v_0$, и траекторию этого движения.

§ 6. Устойчивость решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений

195. Пользуясь определением, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений:

1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 1, \quad x(0) = 1;$

2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -t(x - 1), \quad x(0) = 1;$

3) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2xt, \quad x(0) = 0;$

4) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t, \quad x(0) = 1.$

196. Исследовать на устойчивость невозмущённое движение $x(t) = y(t) \equiv \equiv 0$, соответствующее следующим системам уравнений возмущённого движения, изобразить траектории возмущённого движения и указать направления движения по траекториям:

1) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x - y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + 2y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -4x + 6y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -3x + 5y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 3y. \end{cases}$

197. Исследовать на асимптотическую устойчивость невозмущённое движение $x(t) = y(t) \equiv 0$, соответствующее системе уравнений возмущённого движения:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y. \end{cases}$$

198. Определить значения параметра α, при которых состояние покоя системы устойчиво:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

199. Начертить схему расположения фазовых графиков с указанием направления движения для следующих уравнений:

1) $y'' + 3y' + 2y = 0;$

2) $y'' - 4y' + 4y = 0;$

3) $y'' - y' - 2y = 0;$

4) $y'' + 4y = 0;$

5) $y'' + 2y' + 5y = 0;$

6) $y'' - 2y' = 0.$

200. Используя второй метод Ляпунова, исследовать на устойчивость тривиальное решение систем:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y^3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2. \end{cases}$

201. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем уравнений:

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^{y}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy - x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mathrm{tg}(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = 2^{y} - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right); \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^{x} - e^{-3z}, \\ \frac{dy}{dt} = 4z - 3\sin(x + y), \\ \frac{dz}{dt} = \ln(1 + z - 3x). \end{cases}$

202. При каком значении параметра a асимптотически устойчиво нулевое решение системы

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax + y + x^2, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

203. Исследовать, устойчиво ли решение $x = -t^2$, $y = t$ системы

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y^2 - 2ty - 2y - x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + 2t^2 + \mathrm{e}^{2t-2y}. \end{cases}$$

204. Исследовать, устойчиво ли решение $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ системы

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \ln\left(x + 2\sin^2\frac{t}{2}\right) - \frac{y}{2}, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (4 - x^2)\cos t - 2x\sin^2 t - \cos^3 t. \end{cases}$$

205. Используя условия Рауса–Гурвица, исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциальных уравнений:

1) $y^{\mathsf{IV}} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$;

2) $y^{\mathsf{V}} + y^{\mathsf{IV}} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$;

3) $y^{\mathsf{IV}} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0$.

206. При каких действительных значениях параметров a и b нулевое решение дифференциального уравнения

$$y^{\mathsf{IV}} + ay''' + by'' + ay' + y = 0$$

устойчиво?

207. Найти положения равновесия и определить их характер для уравнений:

1) $\ddot{x} + x^3 = \mathrm{e}^{-\frac{4\dot{x}}{x}}$;

2) $\ddot{x} + 3\dot{x} = \ln(\dot{x} + x^3)$;

3) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x - 2x^2 + 1 = 0$.

208. Найти положения равновесия и определить их характер для следующих систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{e}^{2x+2y} + x, \\ \dot{y} = \arccos(x - x^3) - \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = \ln(5 - 2x - 2y), \\ \dot{y} = \mathrm{e}^{xy} - 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{sh}(y - x^2 - x), \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$

Глава VI

Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка

§ 1. Линейные однородные уравнения первого порядка с частными производными

209. Найти решения уравнения
$$x\frac{\partial U}{\partial x} + yz\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$
Из всех решений выделить то, которое удовлетворяет условиям $U = x^y$, $z = 1$.

210. Решить уравнения:

1) $\dfrac{\partial U}{\partial x} - (y + 2z)\dfrac{\partial U}{\partial y} + (3y + 4z)\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0;$

2) $(mz - ny)\dfrac{\partial U}{\partial x} + (nx - lz)\dfrac{\partial U}{\partial y} + (ly - mx)\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad m, n, l \in \mathbb{R}^1;$

3) $(x^3 + 3xy^2)\dfrac{\partial U}{\partial x} + 2y^3\dfrac{\partial U}{\partial y} + 2y^2 z\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0;$

4) $x(y^2 - z^2)\dfrac{\partial U}{\partial x} - y(x^2 + z^2)\dfrac{\partial U}{\partial y} + z(x^2 + y^2)\dfrac{\partial U}{\partial z} = 0.$

211. Найти решение задачи Коши
$$(z - y)^2\frac{\partial U}{\partial x} + z\frac{\partial U}{\partial y} + y\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad U = 2y(y - z), \quad x = 0.$$

212. Найти интегральные поверхности уравнения
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
проходящие через заданные кривые:

1) $z = y, \quad x = 0;$

2) $z = y^2, \quad x = 0;$

3) $z = \sqrt{R^2 - y^2}, \quad x = 0;$

4) $z = 1, \quad x = 0;$

5) $z^2 - y^2 = 1, \quad x = 0;$

6) $z = x, \quad y = 1;$

7) $\dfrac{x^2}{4} + z^2 = 1, \quad y = 0.$

Сделать рисунки.

213. Решить задачи Коши:

1) $(1 + x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = y^2,\ x = 0;$

2) $y\dfrac{\partial U}{\partial x}+z\dfrac{\partial U}{\partial z}=0;\quad U=\ln z-\dfrac{1}{y},\ x=1.$

214. Найти решение уравнения

$$\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}.$$

215. Найти поверхность, которая пересекает семейство сфер

$$x^2+y^2+z^2=c^2$$

под прямым углом и проходит через кривую $x=1$, $y^2+z^2=x$.

§ 2. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка

216. Найти интегральную поверхность уравнения

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

проходящую через параболу $z=x^2$, лежащую в плоскости $y=1$.

217. Решить задачи Коши:

1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=z,\ z=z(x,y),\quad z=y,\ x=1;$

2) $x\dfrac{\partial U}{\partial x}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}+z\dfrac{\partial U}{\partial z}=U,\quad U=\dfrac{1}{2}(y+z),\ x=2;$

3) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad z=-y,\ x=1;$

4) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z,\quad z=y,\ x=1.$

218. Найти решения следующих уравнений:

1) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=z,\ z=z(x,y);$

2) $(z-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x-y)=0;$

3) $(U+\mathrm{e}^{x_1})\dfrac{\partial U}{\partial x_1}+(U+\mathrm{e}^{x_2})\dfrac{\partial U}{\partial x_2}=U^2-\mathrm{e}^{x_1+x_2};$

4) $(U+x_2-x_1)\dfrac{\partial U}{\partial x_1}+(U+x_1-x_2)\dfrac{\partial U}{\partial x_2}=x_1+x_2+U.$

Глава VII

Разные уравнения

219. Решить уравнения :

1) $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x} \ln x$;

2) $y^{\mathsf{IV}} + 4y'' = 2x^2 + 32x\mathrm{e}^{2x} + 3$;

3) $y^{\mathsf{IV}} - 3y''' + 4y' = -\cos x + 7\sin x + 4$;

4) $y'' - 2y' + 10y = \dfrac{9\mathrm{e}^x}{\cos 3x}$.

220. Найти решение задачи Коши:

1) $y'' - 9y = 2\,\mathrm{sh}\,3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \dfrac{1}{3}$;

2) $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}, \quad y(1) = y'(1) = 0$.

221. Решить уравнения:

1) $x^2y'' - xy' - 8y = 11x^3 \ln x$;

2) $4x^2y'' - 4xy' - 5y = -4\sqrt{x},\ x > 0$;

3) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 18\right) y = 0$;

4) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 25\right) y = 0$;

5) $16x^2y'' + 16xy' + \left(16x^2 - 1\right) y = 0$;

6) $\left(x^2 - 1\right) y'' + xy' - 25y = 0,\ |x| > 1$.

222. Решить системы дифференциальных уравнений методом исключения:

1) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y + \cos 2t, \\ \dot{y} = y - x - \sin 2t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2t\,\mathrm{e}^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t + 6)\,\mathrm{e}^t. \end{cases}$

223. Решить систему дифференциальных уравнений методом Эйлера

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + 3y. \end{cases}$$

224. Решить систему дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y + \frac{1}{2\sin t}. \end{cases}$$

225. Исследовать на устойчивость тривиальное решение дифференциального уравнения

$$y^{\mathsf{IV}} + 2y''' + 5y'' + 4y' + 4y = 0.$$

226. Найти положения равновесия и определить их характер для уравнений:

1) $\ddot{x} - \mathrm{e}^{2\dot{x}} - x^3 = 0$;   2) $\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - \dot{x}}$.

227. Найти положения равновесия и определить их характер для систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1, \\ \dot{y} = \sin x - y^2 + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 6y - 4y^3} - 1, \\ \dot{y} = \ln\left(x^3 - 7y\right) + 2y. \end{cases}$

228. С помощью функции Ляпунова исследовать устойчивость положения равновесия для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

229. Решить уравнение

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2x^3y + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(x + 2x^3z + yz\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

230. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

проходящую через кривую $x = \tau,\ y = \tau^2,\ z = 0$.

231. Решить уравнения:

1) $\left(1 + x^2\right)y'' + xy' - y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$;

2) $\left(2x - x^2\right)y'' + 2y' - \dfrac{2}{x}y = (2 - x)^2 x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Ответы

7. 1) $(1+x^2)(1+y^2)=c$;

2) $y=c(y+2)\mathrm{e}^{x^2}, \quad y=-2$;

3) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c\right)$.

8. $y=\sqrt{1+2\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}}$.

9. $y=\pi+\operatorname{arctg}\left(1-\frac{2}{x}\right)$.

10. 1) $y=2x-1+c\mathrm{e}^{-x}$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{x-y-1}{2}=c-x, \quad x-y-1=2\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$.

12. $\mathrm{e}^y+\ln\frac{2}{1+\mathrm{e}^y}=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+1$.

13. 1) $1-\mathrm{e}^{-y}=c\mathrm{e}^x$;

2) $a^x+a^{-y}=c$;

3) $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=1-\frac{2}{x+c}$;

4) $\ln\frac{(y+1)^2}{y}-\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{3}{8}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}}=c$,
$y=-1, \quad y=0, \quad x=2$.

14. $\operatorname{arctg}\frac{x}{b}+\sqrt{\frac{b-y}{y}}=0, \quad y=b$.

15. $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\mathrm{e}^{2\sin x}$.

16. Окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c^2$.

17. Семейство парабол $y=cx^2$.

18. $y=2$.

19. 1) $y=(x^2+c)x^2$;

2) $y=c\cos x+\sin x$;

3) $y=\frac{1}{1+cx+\ln x}, \quad y=0$;

4) $x=cy-\frac{y^2}{2}, \quad y=0$;

5) $y=(x+c)\mathrm{e}^{-\sin x}$;

6) $y=c\mathrm{e}^{x^2}+x^3$;

7) $\sin y=x-1+c\mathrm{e}^{-x}$;

8) $y=(c-\cos y)x^2, \quad y=0$.

20. $y=\frac{\sin x}{x}$.

21. $y^2=2x^2\big(c-\ln|x|\big)$.

22. 1) $x=(y+c)\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$;

2) $y=(1+x^2)(\operatorname{arctg}^2 x+c)^2, \ y=0$;

3) $xy(c-\ln^2 y)=1$;

4) $\mathrm{e}^{-y}=cx^2+x$;

5) $\cos y=(x^2-1)\ln c(x^2-1)$.

23. $y = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\cos x}$.

24. $x^2 = 2y^2\big(c - \ln|y|\big)$.

25. $i(t) = \dfrac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)}(-\omega\cos\omega t + \alpha\sin\omega t + \omega\,\mathrm{e}^{-\alpha t})$, где $\alpha = \dfrac{R}{L}$.

26. $\sqrt{x^2 + y^2} = c\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}, \quad c > 0.$

27. 1) $\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = c, \quad x = 0;$

2) $\ln|x| + \sin\dfrac{y}{x} = c;$

3) $\arcsin\dfrac{y}{x} = \operatorname{sign} x \ln|x| + c, \quad y = \pm x, \quad x = 0;$

4) $x\ln cx = 2\sqrt{xy}, \quad y = 0, \quad x = 0;$

5) $\ln\dfrac{x+y}{x} = cx;$

6) $(y - 2x)^3 = c(y - x - 1)^2, \quad y = x + 1.$

29. 1) $y = x\,\mathrm{e}^{1+cx};$

2) $(x - y)\ln cx = x, \quad y = x, \quad x = 0;$

3) $(x - y)\ln cx = 2x, \quad y = x;$

4) $y^2 - 3xy + 2x^2 = c;$

5) $y\sqrt{y^2 + 5x^2} = cx^3;$

6) $5(x - 1) = (x - y)\ln c(x - y), \quad y = x;$

7) $(y + 1)\mathrm{e}^{2\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x-3}} = c;$

8) $\sin\dfrac{y - 2x}{x + 1} = c(x + 1).$

30. $x^2 + y^2 = cx.$

31. 1) $3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = c;$

2) $y = x^2 - \left(\dfrac{3}{2}(c - x^2)\right)^{\frac{2}{3}};$

3) $y\operatorname{sh} x + x\operatorname{sh} y = c;$

4) $\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \dfrac{x}{y} = c, \quad x = 0;$

5) $x^3 - x\operatorname{tg} y = c, \quad y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

6) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} - y = c, \quad y = 0;$

7) $\sqrt{x^2 + y^2} + xy = c;$

8) $xy^2 + y\operatorname{tg} x = c, \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$

9) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+e^{x}=c.$

32. $\mu(x,y)=\dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}.$

33. 1) $x^2y+3xy^2-y^3=c;$ 2) $\ln\dfrac{x}{y}+\dfrac{xy}{x-y}=c.$

34. $(x^2+y^2)^2-2a(x^2-y^2)=c$ — семейство овалов Кассини.

35. 1) $x^2+\sin^2 y+cx=0,\quad x=0;$ 4) $x^2y^2+2\ln\dfrac{x}{y}=c,\quad y=0;$

2) $x^2-3xy-\dfrac{7}{y}=c,\quad y=0;$ 5) $2(x^2-y^2)^2+x^2+y^2=c;$

3) $\operatorname{tg}xy-\cos x-\cos y=c;$ 6) $\ln|x|-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=c\quad y=0.$

36. 1) $y=x+\dfrac{\varphi(x)}{a\int\varphi(x)\,dx+c}$, где $\varphi(x)=e^{-\frac{ax^2}{2}},\quad y=x;$

2) $y=\dfrac{2x^3+c}{x(x^3-c)},\quad y=-\dfrac{1}{x};$

3) $y=\dfrac{ce^{x}-xe^{x}+1}{c-x},\quad y=e^{x};$

4) $y=\sin x+\dfrac{e^{-\cos x}}{c-\int e^{-\cos x}\,dx},\quad y=\sin x.$

37. $y=x+1+\dfrac{\varphi(x)}{c-\int\varphi(x)\,dx}$, где $\varphi(x)=e^{\frac{x^2}{2}+2x},\quad y=x+1.$

38. $\varphi\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)=2\sqrt{x}+c_1$, где $\varphi(z)=\displaystyle\int\dfrac{dz}{az^2+c},\quad c_1\in\mathbb{R}^1.$

39. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^{-\frac{5}{3}}}{\frac{1}{3}+x^{-\frac{1}{3}}\varphi(x)}$, где $\varphi(x)=\dfrac{1-ce^{6x^{-\frac{1}{3}}}}{1+ce^{6x^{-\frac{1}{3}}}}.$

40. 1) $y=\dfrac{ce^{x}+e^{2x}+1}{e^{x}+c},\quad y=e^{x};$ 3) $y=\dfrac{cx^2+x+1}{cx+1},\quad y=x;$

2) $y=\dfrac{c\sin x+x\sin x+1}{c+x},\ y=\sin x;$ 4) $y=-\dfrac{1+\ln cx}{x\ln cx},\quad y=-\dfrac{1}{x}.$

41. $\displaystyle\int\dfrac{p_0\,dy}{m_0y^2+n_0y+p_0}=\int r(x)\,dx+c$, где $c\in\mathbb{R}^1.$

43. 1) $\dfrac{2}{3}y\sqrt{y}+y+2\sqrt{y}+2\ln\left|\sqrt{y}-1\right|+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}=c,\quad y=1;$

2) $x=ce^{2y}-\dfrac{1}{4}(2y^2+2y-1),\quad y=0;$

3) $e^{-\frac{y}{x}}+\ln cx=0.$

44. $y = x(1 + \sin x)$.

45. $y = \dfrac{x + b}{bx + 1}$.

46. 1) $y = x \arcsin cx$;

2) $y = c\mathrm{e}^{\sin x} - 2(\sin x + 1)$;

3) $y^2 = \dfrac{c + 2\sin^3 x}{3\sin^2 x}$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = c$;

5) $x^y = c$;

6) $\ln y = c\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$;

7) $2x - y + 1 = c\mathrm{e}^{\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}y}$;

8) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1 + xy}{xy}\right) = c - \dfrac{1}{2}\ln|x|$.

47. $y = \dfrac{x}{3 - x}$.

48. 1) $\sin\dfrac{y}{x} = cx$;

2) $y = \ln x(c\ln x - 1)$;

3) $y = \dfrac{1}{(x + 1)\ln c(x + 1)}$, $\quad y = 0$;

4) $\cos y = \dfrac{1}{c\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x}$;

5) $\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{y}{x} = c$;

6) $x^2 \ln y + \dfrac{1}{3}\sqrt{(y^2 + 1)^3} = c$;

7) $x + 2\sqrt{x^2 - y} = c$, $\quad y = x^2$;

8) $y = \dfrac{4{,}8x^{\frac{5}{3}} - c}{6x(1{,}2x^{\frac{5}{3}} + c)}$.

49. $\dfrac{\ln 2}{k}$, где k — коэффициент пропорциональности.

50. $V(t) = \dfrac{ma}{\gamma}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$, где k — коэффициент пропорциональности.

51. $T = 260^\circ - \dfrac{240^\circ}{k}(1 - \mathrm{e}^{-k})$, где k — коэффициент пропорциональности.

52. 38,9 кг.

53. $T = \dfrac{2H^{\frac{5}{2}}}{5\mu}$ (с), где $\mu = \dfrac{\sigma k\sqrt{2g}}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

54. $A = \dfrac{P_0V_0}{k - 1}\left(\left(\dfrac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right)$.

55. $S = 45$ м, $\quad v = \dfrac{20}{9}$ м/с.

56. $F = \dfrac{kqQ}{a(a + l)}$, где k — коэффициент притяжения.

57. $t = \dfrac{1}{\sigma k\sqrt{2g}}\displaystyle\int\limits_h^H \dfrac{S(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; $\quad T = \dfrac{1}{\sigma k\sqrt{2g}}\displaystyle\int\limits_h^H \dfrac{S(x)}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h$.

58. ≈ 10 мин. **59.** ≈ 1575 лет. **60.** ≈ 23 сек. **61.** ≈ 17 мин.

62. 1) $y = \mathrm{e}^{\frac{xy'}{y}}$;

2) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$;

3) $y^2 + (y')^2 = 1$;

4) $xy + yy' - x^2y' = 0$;

5) $\left((y')^2 + yy''\right)^2 = -y^3y''$.

63. $\left(1 + (y')^2\right)(y - 2x)^2 = (1 + 2y')^2$.

64. $2yy' = x(y')^2 + y$.

65. $(xy' - y)^2 = 2xy\left(1 + (y')^2\right)$.

66. $2y + x^2y'' - 2xy' = 0$.

67. $\left(1+(y')^2\right)^3=\left(1+yy''+(y')^2\right)^2$. **68.** $y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$.

69. 1) $x^2+y^2=R^2$; 2) $\dfrac{x^2}{2}+y^2=c^2$; 3) $2x^2+3y^2=c^2$.

70. $r=c\mathrm{e}^{\frac{\varphi}{k}}$; при $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ коэффициент $k=1$.

71. 1) $3x^2+2xy+2y^2=c$; 2) $y^2=2c\left(x-y\sqrt{3}\right)$.

72. $(x^2+y^2)^2=c(x^2-y^2)$.

73. 1) $x^2+y^2=2cy$;
2) $\sin y=c\mathrm{e}^x$;
3) $x^2+y^2=2cx$;
4) $y=c\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$;
5) $xy=c$;
6) $(x^2+y^2)^2=2cxy$;
7) $3x^2y-y^3=c$;
8) $y=2+c(x-1)$;
9) $(x^2+y^2)^3+c(3x^2-y^2)y=0$.

74. $y^2+2xy+3x^2=c\mathrm{e}^{-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y+x}{\sqrt{2}x}}$. **75.** $\ln|2x^2-xy+y^2|+\dfrac{6}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2y}{\sqrt{7}x}=c$.

76. 1) $y=x^2+c$;
2) $\left(y-c\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y-\dfrac{1}{x+c}\right)=0$;
3) $(y-c\mathrm{e}^x)\left(y-\dfrac{x^3}{3}-c\right)=0$.

77. 1) $\begin{cases}x=\mathrm{e}^p(p+1)+c,\\ y=p^2\mathrm{e}^p,\end{cases}$ $y=0$;

2) $\begin{cases}x=\ln p+\sin p,\\ y=p+p\sin p+\cos p+c;\end{cases}$

3) $y=-\dfrac{1}{4x^2}$, $y=c^2-\dfrac{c}{x}$.

78. Семейство нижних половин окружностей $x^2+(y-c)^2=k^2$. Особые решения $x=\pm k$.

79. $(x+\sqrt{2}c)^2+y^2=c^2$; особые решения $y=\pm x$.

80. $y=c^2+c(x+a)$; $y=-\dfrac{(x+a)^2}{4}$ — особое решение.

81. $y=x+1$.

82. 1) $y=1$, $\begin{cases}x=\sin p+c,\\ y=p\sin p+\cos p;\end{cases}$

2) $(y-\cos x-c)\left(y\mathrm{e}^{-x^2}-c\right)=0$;

3) $y=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x+c}{2}}$, $y=0$, $y=1$;

4) $y=\mathrm{e}^{\sin(x+c)}$, $y=\mathrm{e}$, $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;

5) $\begin{cases}x=p+\sin p,\\ y=\frac{p^2}{2}+p\sin p+\cos p+c.\end{cases}$

83. $\begin{cases}x=\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2},\\ y=2px-p^2,\end{cases}$ $y=0$; особых решений нет.

84. $y = (x-c)^{\frac{3}{2}} + c;$ особое решение $y = x - \dfrac{4}{27}$.

85. $\begin{cases} x = 3(t + \operatorname{ctg} t) + c, \\ y = a\cos^3 t. \end{cases}$

86. $y = \dfrac{1}{2}\ln c + cx;$ особое решение $y = -\dfrac{1}{2}\ln(-2x) - \dfrac{1}{2}$.

87. 1) $y = cx + \sqrt{1+c^2};$ особое решение $y = \sqrt{1-x^2};$

2) $\begin{cases} x = \frac{p - \ln|p| + c}{(p-1)^2}, \\ y = xp^2 - p, \end{cases}$ $y = 0,\ y = x - 1;$ особых решений нет;

3) $y^2 = cx + \dfrac{c^2}{4};$ особых решений нет;

4) $x = cy + c^2;$ особое решение $x = -\dfrac{y^2}{4}$.

88. $\begin{cases} x = \pm R\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{p}{2}\right| + \cos p + c\right), \\ y = \pm R\sin p. \end{cases}$

89. $(y - x - 2a)^2 = 8ax$.

90. $\begin{cases} x = -y\operatorname{tg} p \mp a\sin p, \\ y = c\cos p \pm \frac{a}{2}\cos^3 p. \end{cases}$

91. 1) $(x-c)^2 + y^2 = c;$

2) $y = c + \dfrac{x^2}{c};$ особые решения $y = \pm 2x$.

3) $\begin{cases} x = 2p + \ln|p-1| + c, \\ y = p + p^2 + \ln|p-1| + c, \end{cases}$ $y = x$.

92. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

93. $y = cx + \sin c,$ $\begin{cases} x = -\cos p, \\ y = px + \sin p. \end{cases}$

94. $xy = \pm a^2$.

95. Если точки лежат по разную сторону от касательной, то искомая кривая — гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$; если точки лежат по одну сторону касательной, то искомая кривая — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$.

96. $y = \dfrac{x^3}{6}\ln x - \dfrac{5}{36}x^3 + \dfrac{x}{4} + \dfrac{8}{9}$.

97. $y = \dfrac{2x^2-1}{8}\arcsin x + \dfrac{3}{16}\arcsin x + \dfrac{7}{24}x\sqrt{1-x^2} +$
$+ \dfrac{x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}{48} + c_1(2x^2-1) + c_2 x + c_3$.

98. $\begin{cases} x = t^3 - 2t, \\ y = \frac{9}{28}t^7 - \frac{9}{10}t^5 + \frac{2+3c_1}{3}t^3 - 2c_1 t + c_2. \end{cases}$

99. $y = -\dfrac{1}{2}\arcsin x - \dfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c_1 x + c_2.$

100. $y = \dfrac{1}{24(x+2)} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7}{24}.$ **101.** $y = \dfrac{1}{4}(x\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x} + x + 1).$

102. $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \frac{1}{2}t\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\operatorname{ch} t + \frac{1}{6}\operatorname{ch}^3 t + c_1\operatorname{sh} t + c_2. \end{cases}$

103. 1) $\begin{cases} x = \sin t - 2t, \\ y = \frac{3}{8}\sin 2t - \frac{t}{4}\cos 2t + (c_1 - 2 - t^2)\sin t + \left(\frac{1}{2} - 2c_1\right)t + \\ \qquad + \dfrac{2}{3}t^3 + c_2; \end{cases}$

2) $y = -\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{250}\sin 5x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$

105. $y(x) = x\displaystyle\int\limits_0^x \sin z^2\,\mathrm{d}z + \dfrac{1}{2}\cos x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}.$

106. 1) $y = c_1\ln|c_1 + \mathrm{e}^{-x}| - \mathrm{e}^{-x} + c_2, \quad y = A, \quad A \in \mathbb{R}^1;$

2) $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{c_1} - \dfrac{x}{c_1}\ln|1 - c_1 x| + \dfrac{1}{c_1^2}\ln|1 - c_1 x| + c_2 x + c_3,$

$y = ax + b, \quad y = -\dfrac{x^2}{2} + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}^1, \quad c_1 \neq 0;$

3) $y = c_1\dfrac{x^2}{2} + c_1^2 x + c_2;$ семейство особых решений $y = -\dfrac{x^3}{12} + A,$ $A \in \mathbb{R}^1;$

4) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(\frac{c_1}{p^2} - 2p\right), \\ y = \frac{2}{27}p^3 - \frac{2}{3}c_1\ln|p| + \frac{4c_1^2}{3p^3} + c_2. \end{cases}$

107. 1) $y = \dfrac{x^3}{3} + x, \quad y = x;$ 2) $y = \dfrac{\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{2}}.$

108. 1) $y = c_1 x^2 + c_2;$

2) $y = c_1\ln|x| + c_2;$

3) $y = c_1\mathrm{e}^{x^2} + c_2;$

4) $y = c_1 x^2 + \dfrac{x^3}{3} + c_2;$

5) $y = c_1 x\ln x - c_1 x + c_2;$

6) $y = c_1 x^3 + c_2 x + c_3;$

7) $y = \operatorname{ch}(x + c_1) + c_2;$

8) $y = c_2 - \ln|c_1 - x|, \quad y = A, \quad A \in \mathbb{R}^1.$

109. 1) $y = -2x;$ 2) $y = 0, \quad y = \dfrac{x^3}{3}.$

110. 1) $y = \left(1 - \dfrac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}};$ 2) $y = \dfrac{1}{5}(15x+1)^{\frac{2}{3}} + \dfrac{4}{5}.$

111. 1) $y = \mathrm{e}^{c_1\,\mathrm{e}^{x} + c_2\,\mathrm{e}^{-x}}$; 2) $y = \mathrm{e}^{\frac{c_2+1-c_1x}{c_2-c_1x}}$, $y = A$, $A > 0$.

112. $(x+c_2)^2 + (y+c_1)^2 = k^2$.

113. 1) $y = c_2\mathrm{e}^{c_1x}$;

2) $y = \dfrac{c_2^2\mathrm{e}^{2c_1x}+1}{2c_1c_2\mathrm{e}^{c_1x}}$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$;

3) $y^2 = c_1x + c_2$;

4) $y = \dfrac{c_1c_2\mathrm{e}^{c_1x}}{1-c_2\mathrm{e}^{c_1x}}$, $y = \dfrac{1}{c-x}$.

114. 1) $y = \dfrac{1}{1-x}$;

2) $y = \left(1+\dfrac{x}{3}\right)^3$;

3) $y = \dfrac{4}{(x+4)^2}$;

4) $y = \sqrt{2x-x^2}$;

5) $y = \dfrac{4}{(x-2)^2}$.

115. $c_1y^2 = k + (c_1x+c_2)^2$, где k — коэффициент пропорциональности.

116. Траектория движения точки M

$$x = \frac{y_0}{2\left(1+\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}} - 1\right] - \frac{y_0}{2\left(1-\frac{a}{v}\right)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}} - 1\right] + x_0,$$

где (x_0, y_0) — координаты точки M в начальный момент времени; координаты точки встречи $\left(x_0 + \dfrac{y_0av}{v^2-a^2};\ 0\right)$; время продолжительности погони $T = \dfrac{y_0v}{v^2-a^2}$; $v > a$.

117. 1) $y = c_2\mathrm{e}^{c_1x^2}$; 2) $y = c_2\mathrm{e}^{\frac{c_1}{2}x+\frac{1}{2c_1x}}$, $c_1 \neq 0$.

118. 1) $y = \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$; 2) $y = \mathrm{e}^{\pm\frac{x^2}{2}}$.

119. 1) $y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{\frac{x}{c_1}}$, $c_1 \neq 0$, $y = 0$, $y = -x + A$, $A \in \mathbb{R}^1$;

2) $y = x^2 + c_1x\ln|x| + c_2x$.

120. $x = \dfrac{y^2-y_0^2}{4y_0} - \dfrac{y_0}{2}\ln\dfrac{y}{y_0} + x_0$; при $a = v$ точка M никогда не догонит точку P.

121. 1) $y = c_2\left(c_1 + b\sqrt{a^2-x^2}\right)^{\frac{c_1}{b^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{b}}$, $b \neq 0$;

2) $y = c_2x\mathrm{e}^{-\frac{c_1}{x}}$;

3) $y = c_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{c_1}\mathrm{e}^{c_1x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$;

4) $(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = c_3^2$, $y = cx + d$;

5) $y = \mathrm{e}^{-\sin x}\left(c_2 + c_1\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x\right)$;

6) $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=1.$

122. $y=2\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{2}.$

123. 1) $y=c_1\mathrm{e}^{-2x}+c_2\mathrm{e}^{-x};$

2) $y=c_1+c_2\mathrm{e}^{8x};$

3) $y=\mathrm{e}^{4x}(c_1+c_2x);$

4) $y=\mathrm{e}^{-x}\left(c_1\cos 2\sqrt{2}x+c_2\sin 2\sqrt{2}x\right);$

5) $y=c_1\mathrm{e}^{-2x}+\mathrm{e}^{x}\left(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x\right);$

6) $y=c_1\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-x}\left(c_2\cos\sqrt{3}x+c_3\sin\sqrt{3}x\right);$

7) $y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}+c_3\mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}.$

124. 1) $y=2(\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x});$ 2) $y=\mathrm{e}^{x-2}(7-3x);$ 3) $y=4\cos x-3\sin x.$

125. 1) $y=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}x}{2}}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+c_2\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{2}x}{2}}\left(c_3\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+c_4\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right);$

2) $y=c_1\mathrm{e}^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}+c_2\mathrm{e}^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right);$

3) $y=c_1+c_2x+\mathrm{e}^{x}\left((c_3+c_4x)\cos x+(c_5+c_6x)\sin x\right).$

126. 1) $y''-y=0;$ 2) $y'''-y''=0;$ 3) $y'''+y'=0.$

127. 1) $y=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{-3x}+c_3\mathrm{e}^{4x};$

2) $y=c_1+c_2\mathrm{e}^{2x};$

3) $y=c_1\mathrm{e}^{2x}+c_2\mathrm{e}^{x}+c_3\mathrm{e}^{-x};$

4) $y=c_1+c_2\mathrm{e}^{x}+c_3\mathrm{e}^{-x}+c_4\mathrm{e}^{3x}+c_5\mathrm{e}^{-3x};$

5) $y=\mathrm{e}^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x);$

6) $y=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right);$

7) $y=c_1\mathrm{e}^{x}+c_2\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(c_3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_4\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$

$+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(c_5\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+c_6\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right);$

8) $y=\mathrm{e}^{2x}(c_1+c_2x)+c_3\mathrm{e}^{3x};$

9) $y=\mathrm{e}^{x}(c_1+c_2x)+\mathrm{e}^{-x}(c_3\cos 2x+c_4\sin 2x);$

10) $y=\mathrm{e}^{x}(c_1+c_2x)+c_3\cos x+c_4\sin x;$

11) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left((c_1+c_2x)\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+(c_3+c_4x)\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right);$

12) $y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)\cos x + (c_4 + c_5 x)\sin x$.

128. 1) $y = e^x$; 2) $y = \sin x$.

129. 1) $(x + y^3)^3 = c(x - y^3), \quad x = y^3$;

2) $y = \ln \dfrac{x e^x - e^x + c}{x}$;

3) $(\ln y)^2 - 2x \ln y - x^2 = c$;

4) $6x^2 + 3y^6 + cy^2 = 0, \quad y = 0$;

5) $\operatorname{tg} y = \dfrac{x^2+1}{3} + \dfrac{c}{\sqrt{x^2+1}}$.

130. 1) $\operatorname{arctg} xy = \ln \dfrac{c\sqrt{x^2y^2+1}}{x}, \quad c \neq 0$;

2) $\ln xy = cx$;

3) $\ln \dfrac{x^2}{y} = c e^{-x}$.

131. 1) $2xu' + x^2 + u^2 = 0$; 2) $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{at + bu + c}{a_1 t + b_1 u + c_1}$.

132. $y = \sin \dfrac{1}{x} + \cos \dfrac{1}{x}$.

133. 1) $x = \dfrac{c}{y} + y \ln y$;

2) $\operatorname{tg} \dfrac{y}{2} = 1 - x + c e^{-x}$;

3) $y^2 + 3xy + x^2 - 5x - 5y = c$;

4) $3x^2 \ln y + (y^2+1)^{\frac{3}{2}} = c$;

5) $(x + y - 1)^5 (x - y - 1)^2 = c$;

6) $\begin{cases} x = 5\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t - \operatorname{tg} t + t + c\right), \\ y = a \sin^5 t; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = p^2 - 2p + 2, \\ y = \frac{2}{3}p^3 - p^2 + c; \end{cases}$

8) $e^y + c_1 = (x + c_2)^2$;

9) $y = \dfrac{c_2}{\cos^2(x + c_1)}$.

134. 1) $\sin y = e^x (x + c)$;

2) $\ln y = e^x (x + c)$;

3) $y + \sqrt{y^2 - 4x^2} = cx^2$;

4) $x + 2y + 3 \ln |x + y - 2| + c = 0$;

5) $\dfrac{x^2}{2} - xy + y^2 + y = c$;

6) $x = y^2 \left(c e^{\frac{1}{y}} - 1\right)$;

7) $y = \left(\dfrac{1}{3}(x^2 - 1)^{\frac{3}{4}} + c\right)^2 (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad y = 0$;

8) $e^y - 1 = c(1 + x^2)$;

9) $\dfrac{y^2}{2} - xy - \dfrac{1}{x} = c, \quad x = 0$;

10) $y = c_2 e^{c_1 x^2}$;

11) $\ln |y| = \dfrac{x^2}{2} \ln x - \dfrac{x^2}{4} + c_1 x^2 + c_2, \quad y = 0$;

12) $y = -x\sin x - \cos x + c_1 x^2 + c$;

13) $y^2 = \dfrac{1 - c_1 x - c_2}{c_1 x + c_2}$;

14) $y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$.

135. 1) $y = x\ln\dfrac{c_1 c_2 x}{c_1 x + 1}$, $c_1 \neq 0$, $\quad y = x\ln|cx|$, $c \neq 0$;

2) $y = \displaystyle\int \operatorname{sh}\frac{x^2 + c_1}{a^2}\,dx + c_2$.

136. 1) $y_1 = e^x$, $\quad y_2 = e^{-x}$, $\quad y_3 = \cos x$, $\quad y_4 = \sin x$;

2) $y_1 = e^{\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $\quad y_2 = e^{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$;

3) $y_1 = 1$, $\quad y_2 = e^x$, $\quad y_3 = e^{-x}$, $\quad y_4 = e^{3x}$, $\quad y_5 = e^{-3x}$;

4) $y_1 = 1$, $\quad y_2 = x$, $\quad y_3 = e^{2x}$.

137. $y = \dfrac{1}{8}\sin 2x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x$.

138. 1) $y = e^{-x}(c_1 + c_2 x) + 4e^{-x}\sqrt{(x+1)^3}$;

2) $y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \cos x\ln|\cos x| + x\sin x$;

3) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 4\sqrt{x}$;

4) $y = e^x\left(c_1 + c_2 x + x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{x^2+1}\right)$;

5) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \displaystyle\int_1^x \frac{\operatorname{sh}(x-z)\,dz}{z}$.

139. 1) $y = e^x(c_1 + c_2 x) + e^{-x}(c_3\cos 2x + c_4\sin 2x)$;

2) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-4x} + c_4 e^x + c_5 e^{-x} + c_6\cos x + c_7\sin x$.

140. 1) $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \dfrac{1}{2}x\sin 2x$;

2) $y = e^x(c_1 + c_2 x) + \dfrac{1}{x}$;

3) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \sqrt{\sin 2x}$;

4) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \dfrac{3}{2}x^2 - 3x + 3$;

5) $y = e^{-2x}\left(c_1 x + c_2 + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{3}{4}x^2\right)$;

6) $y = e^{-x}\cos x(c_1 - x) + e^{-x}\sin x\big(\ln|\sin x| + c_2\big)$;

7) $y = c_1 e^x + c_2 - \cos e^x$;

8) $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + 1 - x + x\ln|x|$.

141. 1) $\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$;

2) $\bar{y} = Ae^{2x}$;

3) $\bar{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{4x}$;

4) $\bar{y} = x(A\cos 5x + B\sin 5x)$;

5) $\bar{y} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$;

6) $\bar{y} = x\,e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$;

7) $\bar{y} = \begin{cases} Ax^2 + Bx, & k = 0, \\ Ax + B, & k \neq 0; \end{cases}$

8) $\bar{y} = \begin{cases} Ax\,e^{ax}, & k = -a^2, \\ Ae^{ax}, & k \neq -a^2, \end{cases} \quad k \neq 0;$

9) $\bar{y} = \begin{cases} x(A\cos wx + B\sin wx), & k = w, \\ A\cos wx + B\sin wx, & k \neq w, \end{cases} \quad k \neq 0.$

142. 1) $\bar{y} = -x^2$;

2) $\bar{y} = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2$;

3) $\bar{y} = -\frac{e^{-3x}}{18}$;

4) $\bar{y} = (x^2 - 4x)e^x$;

5) $\bar{y} = \frac{3}{10}\cos 2x + \frac{3}{20}\sin 2x$;

6) $\bar{y} = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x$;

7) $\bar{y} = \frac{11}{20}\cos 2x - \frac{7}{20}\sin 2x$;

8) $\bar{y} = \left(\frac{x}{4} - \frac{7}{20}\right)\cos 2x - \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{10}\right)\sin 2x$.

143. 1) $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + x\big((Dx^2 + Ex + F)\cos 2x +$
$+(Mx^2 + Nx + P)\sin 2x\big)$;

2) $\bar{y}(x) = x\left(Ax + B + \big((Cx + D)\cos x + (Ex + F)\sin x\big)e^{-3x}\right)$;

3) $\bar{y}(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{-3x} + e^{-2x}(D\cos 3x + E\sin 3x) +$
$+e^{3x}(Mx^3 + Nx^2 + Px)$;

4) $\bar{y}(x) = Ax\,e^{2x} + e^{2x}(B\sin 2x + C\cos 2x)$.

144. $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x$.

145. 1) $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{8}(1 + x\sin 2x)$;

2) $y = c_1\,\mathrm{ch}\,x + c_2\,\mathrm{sh}\,x + \frac{x\,\mathrm{sh}\,x}{2}$;

3) $y = c_1 + c_2e^{7x} - \frac{x^3}{21} + \frac{6x^2}{49} - \frac{37x}{343}$;

4) $y = c_1e^x + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{1}{5}x\cos 2x + \frac{2}{5}x\sin 2x$;

5) $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \cos x + x^2 - x - 2$.

146. 1) $\bar{y} = \mathrm{e}^x\big((Ax+b)\cos x + (Cx+D)\sin x\big)$;

2) $\bar{y} = x^2\mathrm{e}^x\big((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\big)$;

3) $\bar{y} = \begin{cases} Ax, & q = 0, \\ A, & q \neq 0. \end{cases}$

147. $y = x + \cos x$. **148.** $y = c_1 x + \dfrac{c_2}{x}$.

149. 1) $y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) + x(3{,}5 - 0{,}5\ln x)$;

2) $y = \big(c_1 + c_2\ln(2x+1)\big)(2x+1)$;

3) $y = c_1\cos\left(\sqrt{3}\arccos x\right) + c_2\sin\left(\sqrt{3}\arccos x\right)$;

4) $y = c_1\operatorname{ch}(n\operatorname{arcch} x) + c_2\operatorname{sh}(n\operatorname{arcch} x)$.

150. $y = 3(2x^2-1) - 4\sqrt{2}x\sqrt{x^2-1}$.

151. 1) $y = c_1 + c_2x^2 + c_3x^4$;

2) $y = \dfrac{c_1}{x} + c_2x^2 + 0{,}1\cos(\ln x) - 0{,}3\sin(\ln x)$;

3) $y = \dfrac{1}{x}(c_1 + c_2x^4 + \ln x + 2\ln^2 x)$;

4) $y = c_1x + c_2x^2 + (x^2+2x)\ln x + 1$;

5) $y = \big(c_1 + c_2\ln(x-2)\big)(x-2)^2 + x - \dfrac{3}{2}$;

6) $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$;

7) $y = \dfrac{c_1}{x+2} + \dfrac{c_2}{(x+2)^2} + \dfrac{c_3}{(x+2)^3} + \dfrac{\ln(x+2)}{6} - \dfrac{11}{36}$;

8) $y = c_1 + c_2x^3 + c_3\ln x$.

154. 1) $y = c_1\cos\dfrac{n}{x} + c_2\sin\dfrac{n}{x}$;

2) $y = c_1\cos 2\sqrt{x} + c_2\sin 2\sqrt{x}$;

3) $y = \dfrac{c_1 + c_2x}{\sqrt{1+x^2}}$;

4) $y = -\dfrac{1}{4x} + c_1\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} + c_2\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$;

5) $y = c_1\cos\mathrm{e}^x + c_2\sin\mathrm{e}^x$;

6) $y = c_1\cos(m\ln\cos x) + c_2\sin(m\ln\cos x)$;

7) $y = \dfrac{c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x}}{x} + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$;

8) $y = c_1\cos\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c_2\sin\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

9) $y = c_1\mathrm{e}^{-x^2} + c_2\mathrm{e}^{x^2}$.

155. $y = \dfrac{c_1x + c_2}{1+x^2}$.

156. $y = c_1 x + c_2 \ln x$.

157. $y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2(x^3 + 1)$.

158. 1) $y = \dfrac{c_1 \cos x + c_2 \sin x}{x}$;

2) $y = c_1(x^2 + 1) + c_2 \mathrm{e}^x$;

3) $y = c_1 \cos(\sin x) + c_2 \sin(\sin x)$.

159. $y = \dfrac{c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1}{x}$.

160. $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где $y_1(x) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_{2m} x^{2m}$, $\quad y_2(x) = x + \sum\limits_{m=1}^{\infty} c_{2m+1} x^{2m+1}$,

$c_{2m} = \dfrac{(1+2^2)(1+4^2)\ldots\big(1+(2m-2)^2\big)}{(2m)!}$,

$c_{2m+1} = \dfrac{2(1+3^2)(1+5^2)\ldots\big(1+(2m-1)^2\big)}{(2m+1)!}$.

Области сходимости рядов $\{x \in \mathbb{R}^1 : \ |x| < 1\}$.

161. $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где $y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(2x)^k}{5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2k+3)}\right)$, $\quad y_2 = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

162. $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1} x^k}{k!(k-1)!}$.

163. $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где $y_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad y_2(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!!}$.

164. 1) $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!} = \cos x^2$; $\quad$ 2) $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \mathrm{e}^{-x^2}$.

165. 1) $y(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$;

2) $y(x) = 2 + (x-1) + \dfrac{1}{6}(x-1)^2 - \dfrac{1}{27}(x-1)^3 + \dfrac{5}{324}(x-1)^4 + \ldots$;

3) $y(x) = x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{11}{24}x^4 + \dfrac{53}{120}x^5 + \dfrac{269}{720}x^6 + \ldots$;

4) $y(x) = x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{5}x^5 - \ldots$;

5) $y(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{6} + \ldots$;

6) $y(x) = 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \dfrac{5}{3}(x-1)^3 + \dfrac{7}{4}(x-1)^4 + \ldots$;

7) $y(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{15}x^5 - \ldots$;

8) $y(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12} + \ldots$;

9) $y(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{\sin 1}{2}(x-\mathrm{e})^2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}}(\cos 1 - \sin 1)\dfrac{(x-\mathrm{e})^3}{6} + \ldots;$

10) $y(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x^4}{24} + \ldots.$

166. 1) $y(x) = c_1 I_{\frac{1}{3}}(x) + c_2 I_{-\frac{1}{3}}(x);$ 3) $y(x) = c_1 I_{\sqrt{2}}(x^2) + c_2 I_{-\sqrt{2}}(x^2);$

2) $y(x) = c_1 I_{\frac{1}{2}}(2x) + c_2 I_{-\frac{1}{2}}(2x);$ 4) $y(x) = c_1 I_0\left(\dfrac{x}{3}\right) + c_2 Y_0\left(\dfrac{x}{3}\right).$

167. $y(x) = \dfrac{1}{x^2}\big(c_1 I_2(x) + c_2 Y_2(x)\big).$

168. $y(x) = x^2\left(c_1 I_2\left(\dfrac{x^2}{2}\right) + c_2 Y_2\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\right).$

171. $I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x,\ I_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x,\ I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\dfrac{\sin x}{x} - \cos x\right).$

172. 1) $y = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{4}(2x\mathrm{e}^{2x} - 5);$

2) $y = \mathrm{e}^x\left(c_1\cos x + c_2\sin x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\sin x\right);$

3) $y = \mathrm{e}^x\left(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \dfrac{x}{4}\sin 2x\right) + 2x + 1;$

4) $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \dfrac{1}{8}\cos 3x + \dfrac{1}{2}x\sin x.$

173. 1) $y = \cos x + 2\sin x + \mathrm{e}^{-x} + (2x-3)\mathrm{e}^x;$

2) $y = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{-x};$

3) $y = 2\mathrm{e}^x + (\sin x - 2\cos x)\mathrm{e}^{-x} - 4;$

4) $y = \left(x + \dfrac{3}{5}\right)\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{5}(4\sin x - 3\cos x).$

174. 1) $y = c_1 x + c_2 x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + c_3 x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} - 2\ln x - 8;$

2) $y = c_1 x^3 + c_2 x^4 - x^3\ln x;$

3) $y = c_1 I_1\left(\dfrac{x}{2}\right) + c_2 Y_1\left(\dfrac{x}{2}\right).$

175. 1) $y = \dfrac{\pi}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{6} + \ldots;$

2) $y = 1 + 2(x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{5}{6}(x-1)^3 + \dfrac{3}{4}(x-1)^4 + \ldots.$

176. $y = (c_1 + c_2 x)\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{x}.$

177. 1) $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{5m}}{4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (5m-1)(5m)},$$

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{5m+1}}{5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (5m)(5m+1)};$$

2) $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k)!} = \cos\sqrt{x}, \quad y_2 = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{(2k+1)!} = \sin\sqrt{x};$$

3) $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, где

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (3k-2) x^k}{3 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3k)}, y_2 = x^{\frac{7}{3}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (3k+5) x^k}{10 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot (3k+7)}\right).$$

178. 1) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 - \frac{y_2}{x}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = -x^2 y_1. \end{cases}$

179. 1) $\begin{cases} x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t, \\ y(t) = \frac{c_1}{3} \sin 3t - \frac{c_2}{3} \cos 3t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{-t} + t - 1, \\ y(t) = c_1 \mathrm{e}^t - c_2 \mathrm{e}^{-t} - t + 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\cos t}, \\ y(t) = c_1 t + c_2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2} \cos t, \\ y^2(t) = c_1 \mathrm{e}^t - c_2 \mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2} \sin t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ y = c_1 \mathrm{e}^t - c_2 \mathrm{e}^{-t}, \\ z = c_3 \mathrm{e}^t + 2c_1 t \mathrm{e}^t; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = t + \frac{\mathrm{e}^{-c_1 t}}{c_1 c_2}, \\ y = c_2 \mathrm{e}^{c_1 t}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y_1 = c_1 \mathrm{e}^{4t}, \\ y_2 = (2c_2 t + c_3) \mathrm{e}^{4t}, \\ y_3 = c_2 \mathrm{e}^{4t}, \\ y_4 = c_1 \mathrm{e}^{4t} + c_4 \mathrm{e}^{3t}, \\ y_5 = c_1 \mathrm{e}^{4t} + c_4 t \mathrm{e}^{3t} + c_5 \mathrm{e}^{3t}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y = c_3 \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}(c_1 - c_2)\cos t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\sin t, \\ z = c_3 \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)\cos t + \frac{1}{2}(c_2 - c_1)\sin t; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = c_1 \mathrm{e}^t + c_2, \\ y = (c_1 t + c_3)\mathrm{e}^t - t - 1 - c_2, \\ z = \mathrm{e}^t(c_1 t + c_3 - c_1) - t - 1 - c_2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} y = c_1(1 + x^2), \\ z = \frac{x^2}{3} + \frac{c_1 x}{2} + \frac{c_1 x^4}{4} + \frac{c_2}{x}; \end{cases}$

11) $\begin{cases} y_1 = (c_1 x^2 + c_4 x + c_5)\mathrm{e}^{4x}, \\ y_2 = (2c_1 x + c_4)\mathrm{e}^{4x}, \\ y_3 = c_1 \mathrm{e}^{4x}, \\ y_4 = c_2 \mathrm{e}^{3x}, \\ y_5 = (3c_2 x + c_6)\mathrm{e}^{3x}, \\ y_6 = c_3 \mathrm{e}^{5x}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} y = c_2 x^2 - c_1 x, \\ z = -c_2 x^2 + (2c_2 + c_1)x - c_1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} y = c_2 \mathrm{e}^{c_1 x^2}, \\ z = \frac{1}{2c_1 c_2}\mathrm{e}^{-c_1 x^2}; \end{cases}$

14) $\begin{cases} y = c_2 \mathrm{e}^{c_1 x^2}, \\ z = \frac{c_1 x \mathrm{e}^{-c_1 x^2}}{2c_2}; \end{cases}$

15) $\begin{cases} y = \frac{c_1}{2}(x + c_2) - \frac{1}{c_1} - \frac{c_1}{4}(x + c_2)^2, \\ z = \frac{1}{c_1} + \frac{c_1}{4}(x + c_2)^2; \end{cases}$

16) $\begin{cases} y = c_2 \mathrm{e}^{c_1 x}, \\ z = c_1 c_2 \mathrm{e}^{c_1 x}. \end{cases}$

180. 1) $\begin{cases} x = 3\mathrm{e}^{-7t} - 2\mathrm{e}^{-t}, \\ y = 3\mathrm{e}^{-7t} + \mathrm{e}^{-t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \mathrm{e}^x, \\ z = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-t}(\sin t - 2\cos t), \\ y = \mathrm{e}^{-t}\cos t; \end{cases}$

181. 1) $\begin{cases} x = \frac{c_1}{t} + c_2 t, \\ y = \frac{c_1}{t} - c_2 t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = c_2 \mathrm{e}^t - c_1, \\ y = \mathrm{e}^t(c_2 t + c_3 + c_2) - t - 1 + c_1, \\ z = \mathrm{e}^t(c_2 t + c_3) - t - 1 + c_1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\frac{c_1+c_2-2t}{(c_1-t)(c_2-t)}, \\ y = \frac{1}{2}\frac{c_2-c_1}{(c_1-t)(c_2-t)}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = c_2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{c_1}}, \\ y = \frac{c_1}{c_2}\,\mathrm{e}^{\frac{t}{c_1}}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \frac{c_2\,\mathrm{e}^{c_1 t}-1}{c_1}, \\ y = \frac{c_2-\mathrm{e}^{-c_1 t}}{c_1 c_2}; \end{cases}$ $\quad c_1 = 0,$ $\begin{cases} x = t+a, \\ y = t+b; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \frac{c_1+(c_2-t)^2}{2(c_2-t)}, \\ y = \frac{c_1-(c_2-t)^2}{2(c_2-t)}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = c_1\,\mathrm{e}^t, \\ \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = c_2\,\mathrm{e}^t; \end{cases}$

8) $\begin{cases} y = c_1 x, \\ c_1 x^2 = c_2 - 2\,\mathrm{e}^{-t}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} z\,\mathrm{e}^{-x} + y = c_1, \\ z\,\mathrm{e}^{-y} + x = c_2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} y = \frac{c_2 x + c_1 + 1}{c_2 x + c_1}, \\ z = -\frac{c_2 x}{(c_2 x + c_1)^2}; \end{cases}$

11) $\begin{cases} y = c_2\,\mathrm{e}^{c_1 x}, \\ z = x + c_2\,\mathrm{e}^{c_1 x}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{2t}(-c_1 t + c_3), \\ y = c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^t, \\ z = c_2\,\mathrm{e}^t. \end{cases}$

182. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg}(x-y) = t, \\ \operatorname{tg}(x+y) = t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\sin x, \\ z = \frac{3}{4}\,\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\sin x. \end{cases}$

183. $\begin{cases} x = \frac{a}{4}(1-2^{-t}), \\ y = \frac{3a}{4}(1-2^{-t}). \end{cases}$

184. 1) $\begin{cases} x(\ln x - 1) + y^2 = c_1, \\ x + y + z = c_2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{y} = c_1, \\ xy - z^2 = c_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3t + 4x + 5y = c_1, \\ t^2 + x^2 + y^2 = c_2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{x}{z} = c_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = c_2 z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{y}{z} = c_1, \\ x + y - 2z = c_2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y + z = \frac{c_1}{(x-y)^2}, \\ x - y = c_2(y-z); \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y+z=c_1, \\ xyz=c_2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2+y^2+2z=c_1, \\ 1-xy=c_2\,\mathrm{e}^{-z}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x=c_1 t, \\ y=c_2\,\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+y^2=c_1^2, \\ p^2+q^2=c_2^2, \\ xp+yq=c_3; \end{cases}$

11) $\begin{cases} xy=c_1, \\ \ln x=c_2+\frac{t^2}{2c_1}; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=c_1, \\ t^2+x^2+y^2=c_2. \end{cases}$

185. 1) $\begin{cases} 2x+3y+4t=c_1, \\ x^2+y^2+t^2=c_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=c_1\,\mathrm{e}^{t}, \\ x=\frac{t}{3}+\frac{c_2}{t^2}. \end{cases}$

186. 1) $\begin{cases} x(t)=c_1\,\mathrm{e}^{t}+c_2\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y(t)=-2c_1\,\mathrm{e}^{t}-c_2\,\mathrm{e}^{3t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t)=c_1\,\mathrm{e}^{3t}+c_2\,\mathrm{e}^{2t}+c_3\,\mathrm{e}^{6t}, \\ y(t)=c_1\,\mathrm{e}^{3t}-2c_3\,\mathrm{e}^{6t}, \\ z(t)=c_1\,\mathrm{e}^{3t}-c_2\,\mathrm{e}^{2t}+c_3\,\mathrm{e}^{6t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t)=c_1\,\mathrm{e}^{-t}+2c_2, \\ y(t)=-2c_1\,\mathrm{e}^{-t}-4c_2+c_3\,\mathrm{e}^{t}, \\ z(t)=-c_1\,\mathrm{e}^{-t}-c_2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^{2t}\big((c_1+c_2)\cos t+(c_2-c_1)\sin t\big), \\ y(t)=-\mathrm{e}^{2t}(c_1\cos t+c_2\sin t); \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(t)=c_1\,\mathrm{e}^{2t}+(c_2 t+c_2+c_3)\,\mathrm{e}^{t}, \\ y(t)=-2c_1\,\mathrm{e}^{2t}+3c_2\,\mathrm{e}^{t}, \\ z(t)=2c_1\,\mathrm{e}^{2t}+(c_2 t+c_3)\,\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x(t)=2c_1\,\mathrm{e}^{3t}-4c_2\,\mathrm{e}^{-3t}, \\ y(t)=c_1\,\mathrm{e}^{3t}+c_2\,\mathrm{e}^{-3t}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x(t)=c_1+c_2\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y(t)=c_1-c_2\,\mathrm{e}^{2t}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x(t)=c_1\,\mathrm{e}^{2t}-c_2\,\mathrm{e}^{3t}, \\ y(t)=c_1\,\mathrm{e}^{2t}-c_3\,\mathrm{e}^{t}, \\ z(t)=c_1\,\mathrm{e}^{2t}-c_2\,\mathrm{e}^{3t}-c_3\,\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x(t)=(c_1+c_2 t)\,\mathrm{e}^{2t}, \\ y(t)=c_2\,\mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$

187. 1) $\begin{cases} x(t) = (1+t)\mathrm{e}^{2t}, \\ y(t) = -t\mathrm{e}^{2t}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t}, \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t} - 2\mathrm{e}^{3t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = -4\mathrm{e}^{-2t} - 2\sin 4t, \\ y(t) = \mathrm{e}^{-2t} - \cos 4t, \\ z(t) = \mathrm{e}^{-2t} + 2\sin 4t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x(t) = -5\mathrm{e}^{2t}\sin t, \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t}(\cos t - 2\sin t). \end{cases}$

188. 1) $\begin{cases} x(t) = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{2t} - 2\sin t - \cos t, \\ y(t) = -c_1\mathrm{e}^{-t} + 2c_2\mathrm{e}^{2t} + \sin t + 3\cos t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{4t}, \\ y(t) = -c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{3t} - (t+1)\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{4t}. \end{cases}$

189. $\begin{cases} x(t) = (2{,}1t + 0{,}56)\mathrm{e}^{-t} + 1, \\ y(t) = (0{,}7t + 0{,}42)\mathrm{e}^{-t} + 1. \end{cases}$

190. 1) $\begin{cases} x(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{-t} - \ln t, \\ y(t) = c_1\mathrm{e}^{t} - c_2\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{t}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + 2c_2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}\ln(\mathrm{e}^{2t}+1) + 2\mathrm{e}^{2t}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{t}, \\ y(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + 3c_2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}\ln(\mathrm{e}^{2t}+1) + 3\mathrm{e}^{2t}\operatorname{arctg}\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t) = c_1 + 2c_2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-t}\ln|\mathrm{e}^{t} - 1|, \\ y(t) = -2c_1 - 3c_2\mathrm{e}^{-t} - 3\mathrm{e}^{-t}\ln|\mathrm{e}^{t} - 1|; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|, \\ y(t) = (c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t + 2\cos t\ln|\cos t| + 2t\sin t; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x(t) = \left(c_1 + 2c_2t - 8t^{\frac{5}{2}}\right)\mathrm{e}^{t}, \\ y(t) = \left(c_1 + 2c_2t - c_2 - 8t^{\frac{5}{2}} + 10t^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{e}^{t}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \operatorname{tg} t, \\ y(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t + 2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x(t) = \left(c_1 + c_2(1+t)\right)\mathrm{e}^{2t} + \ln|t|, \\ y(t) = -(c_1 + c_2t)\mathrm{e}^{2t} + \ln|t|. \end{cases}$

191. 1) $\begin{cases} x(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + 2c_2\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{2t}, \\ y(t) = -c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{4t} - \mathrm{e}^{2t}; \end{cases}$

2) если $w \neq 1$, то $\begin{cases} x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - \frac{w}{w^2-1}\cos wt, \\ y(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t + \frac{1}{w^2-1}\sin wt, \end{cases}$

если $w = 1$, то $\begin{cases} x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{t}{2}\sin t, \\ y(t) = -c_1\sin t + c_2\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{t}{2}\cos t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}, \\ y(t) = c_1 e^t + 3c_3 e^{3t} + t, \\ z(t) = c_2 e^{2t} - c_3 e^{3t}. \end{cases}$

192. $\begin{cases} x(t) = (1-t)\cos t - \sin t, \\ y(t) = (t-2)\cos t + t\sin t. \end{cases}$

193. Закон движения:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{k}\cos\alpha(1 - e^{-kt}), \\ y(t) = \left(\frac{g}{k^2} + \frac{v_0}{k}\sin\alpha\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t, \end{cases}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Траектория движения: $y = \left(\frac{g}{k} + v_0 \sin\alpha\right)\frac{x}{v_0\cos\alpha} + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{kx}{v_0\cos\alpha}\right)$.

Наивысшая точка подъёма: $y(M) = \frac{v_0\sin\alpha}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(1 + \frac{v_0 k\sin\alpha}{g}\right)$.

Время её достижения: $\tau = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0 k\sin\alpha}{g}\right)$.

194. $\begin{cases} x(t) = x_0\cos kt, \\ y(t) = \frac{v_0}{k}\sin kt. \end{cases}$ Траектория движения — эллипс $\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{ky}{v_0}\right)^2 = 1$.

195. 1) асимптотически устойчиво; 2) асимптотически устойчиво; 3) неустойчиво; 4) устойчиво, но не асимптотически.

196. 1) неустойчиво; 2) неустойчиво; 3) устойчиво, но не асимптотически; 4) асимптотически устойчиво; 5) неустойчиво.

197. Асимптотически устойчиво при $-2{,}5 < \alpha < -2$.

198. $\alpha \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$.

200. 1) асимптотически устойчиво; 2) асимптотически устойчиво; 3) асимптотически устойчиво; 4) асимптотически устойчиво.

201. 1) неустойчиво; 2) устойчиво; 3) устойчиво; 4) устойчиво; 5) неустойчиво.

202. $a \in (-\infty, -1)$. **203.** Устойчиво. **204.** Неустойчиво.

205. 1) асимптотически устойчиво; 2) асимптотически устойчиво; 3) асимптотически устойчиво.

206. $a \in (0, +\infty)$; $b \in (2, +\infty)$.

207. 1) $(1,0)$ — устойчивый узел; 2) $(1,0)$ — седло; 3) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ — устойчивый фокус, $(1,0)$ — седло.

208. 1) $(-1,1)$ — седло;
2) $(0,2)$ — устойчивый фокус, $(2,0)$ — седло;

3) $(0,0)$ — седло, $(1,2)$ — устойчивый узел.

209. Общее решение: $U(x,y,z) = \Phi\left(y, \frac{x^y}{z}\right)$, где $\Phi(u_1, v_1)$ — произвольная непрерывно-дифференц. функция; частное решение: $U(x,y,z) = \frac{x^y}{z}$.

210. 1) $U(x,y,z) = \Phi\bigl(\mathrm{e}^{-2x}(y+z), \mathrm{e}^{-x}(3y+2z)\bigr)$;

2) $U(x,y,z) = \Phi(x^2+y^2+z^2, lx+my+nz)$;

3) $U(x,y,z) = \Phi\left(\dfrac{y}{z}, \dfrac{y^3}{x^2}+y\right)$;

4) $U(x,y,z) = \Phi\left(x^2+y^2+z^2, \dfrac{zy}{x}\right)$.

211. $U(x,y,z) = 2y^2 - 2zy + 2x$.

212. 1) $z^2 = x^2 + y^2$ — конус;

2) $z = x^2 + y^2$ — параболоид вращения;

3) $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z > 0$ — верхняя полусфера;

4) $z = 1$ — плоскость;

5) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ — двуполостный гиперболоид;

6) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ — однополостный гиперболоид;

7) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ — эллипсоид.

213. 1) $z = \dfrac{y^2}{1+x^2}$; 2) $U(x,y,z) = \ln z - \dfrac{x}{y}$.

214. $\Phi\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}, \sqrt{y}-z\right) = 0$ или $z = \sqrt{y} + f\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$.

215. $y^2 + z^2 = x^2$.

216. $z = \dfrac{x^2}{y^2}$.

217. 1) $z = xy$;

2) $u = \dfrac{y+z}{2}$;

3) $z = \dfrac{y}{\ln x - 1}$;

4) $z = xy$.

218. 1) $\Phi\left(y, z\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\right) = 0$ или $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} f(y)$;

2) $\Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$;

3) $\Phi(x_2 + U\mathrm{e}^{-x_1}, x_1 + U\mathrm{e}^{-x_2}) = 0$;

4) $\Phi\bigl((x_2-x_1)(x_1+x_2+2U), (x_1+x_2-U)^2(x_1+x_2+2U)\bigr) = 0$.

219. 1) $y(x) = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{x^2}{4}\mathrm{e}^{3x}\,(2\ln x - 3)$;

2) $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3\cos 2x + c_4 \sin 2x + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^2}{4} + \left(x - \dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$;

3) $y(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-x} + (c_3 + c_4 x)\,\mathrm{e}^{2x} - \cos x + x$;

4) $y(x) = \mathrm{e}^{x}\,(c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x) + \mathrm{e}^{x}\,(\cos x \cdot \ln|\cos 3x| + 3x\sin 3x)$.

220. 1) $y(x) = \operatorname{ch} 3x \left(\dfrac{1}{3}x + 1\right);$

2) $y(x) = (1 - x + x\ln x)\,\mathrm{e}^x.$

221. 1) $y(x) = \dfrac{c_1}{x^2} + c_2x^4 - \dfrac{11}{25}x^3\,(5\ln x + 4);$

2) $y(x) = \dfrac{c_1}{\sqrt{x}} + c_3x^2\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2};$

3) $y(x) = c_1J_{3\sqrt{2}}(x) + c_2J_{-3\sqrt{2}}(x);$

4) $y(x) = c_1J_5(x) + c_2Y_5(x);$

5) $y(x) = c_1J_{\frac{1}{4}}(x) + c_2J_{-\frac{1}{4}}(x);$

6) $y(x) = c_1\mathrm{e}^{5\operatorname{arcch} x} + c_2\mathrm{e}^{-5\operatorname{arcch} x}.$

222. 1) $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{2t}\,(c_1\cos 2t + c_2\sin 2t) - \frac{3}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t, \\ y(t) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2t}\,((2c_2 - c_1)\cos 2t - (c_2 + 2c_1)\sin 2t) + \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{9}{4}\sin 2t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x(t) = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t + \mathrm{e}^t, \\ y(t) = \frac{1}{2}\,(c_1 - 3c_2)\cos 3t + \frac{1}{2}\,(3c_1 + c_2)\sin 3t - t\,\mathrm{e}^t. \end{cases}$

223. $\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{2t}\,(c_1 + c_2t)\,, \\ y(t) = \mathrm{e}^{2t}\,(c_1 + c_2 + c_2t)\,. \end{cases}$

224. $\begin{cases} x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + t\cos t - \sin t\cdot\ln|\sin t|, \\ y(t) = \frac{1}{2}\,((c_1 - c_2)\cos t + (c_1 + c_2)\sin t + (t + \ln|\sin t|)\cos t+ \\ +(t - \ln|\sin t|)\sin t)\,. \end{cases}$

225. Асимптотически устойчиво.

226. 1) $(-1, 0)$ — неустойчивый фокус;

2) $(-1, 0)$ — устойчивый узел, $(0, 0)$ — седло.

227. 1) $(0, -1)$ — неустойчивый фокус, $(0, 1)$ — седло;

2) $(1, 0)$ — устойчивый узел.

228. Асимптотически устойчиво, $v(x, y) = 2x^2 + y^2$.

229. $u(x, y, z) = \Phi\left(\dfrac{y}{x} - x^2; x + yz\right).$

230. $\dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y^4}{x^4} = \left(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2$

231. 1) $y(x) = c_1x + c_2\sqrt{1 + x^2} - x\operatorname{arctg} x - 2;$

2) $y(x) = c_1\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) + c_2x + \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{2}{x} - x\right).$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агафонов С. А. и др.* Дифференциальные уравнения. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. — 424 с.
2. *Богданов Ю. С. и др.* Курс дифференциальных уравнений. — Минск: Універсітэцкае, 1996. — 287 с.
3. *Камкэ Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
4. *Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высш. шк., 1978. — 287 с.
5. *Краснов М. Л., Киселёв А. И., Макаренко Г. И.* Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 176 с.
6. *Матвеев Н. М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — С.-П.: Специальная литература, 1996. — 371 с.
7. *Романко В. К.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко. — М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. — 256 с.; ил.
8. *Самойленко А. М. и др.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. — М.: Высш. шк., 1989. — 383 с.
9. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1979. — 128 с.

Оглавление

Глава I. Дифференциальные уравнения первого порядка 3
§ 1. Общие понятия 3
§ 2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными 4
§ 3. Линейные дифференциальные уравнения и уравнение Бернулли 5
§ 4. Однородные дифференциальные уравнения 6
§ 5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 7
§ 6. Уравнения Риккати 8
§ 7. Разные уравнения 9
§ 8. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям первого порядка 11
§ 9. Изогональные траектории семейства кривых 13
§ 10. Уравнения, не разрешенные относительно производной 14
Глава II. Дифференциальные уравнения порядка выше первого 16
§ 1. Уравнения, допускающие понижение порядка 16
§ 2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами 19
Глава III. Разные уравнения 19
Глава IV. Линейные дифференциальные уравнения 21
§ 1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) решения линейных дифференциальных уравнений 21
§ 2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида . . 22
§ 3. Уравнения Эйлера, Лагранжа, Чебышева 23
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами 24
§ 5. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов 26
§ 6. Уравнение Бесселя и функции Бесселя 27
§ 7. Разные задачи 28
Глава V. Системы дифференциальных уравнений 29
§ 1. Метод исключения решения систем дифференциальных уравнений в нормальной форме 29
§ 2. Метод интегрируемых комбинаций решения систем дифференциальных уравнений 30
§ 3. Системы дифференциальных уравнений в симметрической форме 31
§ 4. Метод Эйлера решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 32
§ 5. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 33
§ 6. Устойчивость решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений 34

Глава VI. Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка . . . 36
§ 1. Линейные однородные уравнения первого порядка с частными производными . . . 37
§ 2. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка . . . 38
Глава VII. Разные уравнения . . . 38
Ответы . . . 41
Библиографический список . . . 64

Дифференциальные уравнения

Составители
ПАВЛОВА Галина Александровна,
ГОРБУНОВ Сергей Владимирович

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 9.07.2010
Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,8. Уч.-изд. л. 3,72
Тираж 70 экз. Рег. №155/10

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус № 8.