ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практикум по высшей математике

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517.91/.93

Дифференциальные уравнения. Практикум по высшей математике: Учебн. пособ. / С.Н. Кубышкина, Е.Ю. Арланова. — Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2010. — 50 с.

Приведены краткие сведения и формулы по теме «Дифференциальные уравнения», а также большое количество примеров. Представлены задачи для самостоятельного решения. Для самоконтроля все примеры приведены с ответами. Предназначено для студентов первого курса машиностроительного и физико—технологического факультетов.

УДК 517.91/.93

Составители: канд. физ.-мат. наук С.Н. Кубышкина,
канд. физ.-мат. наук Е.Ю. Арланова

Рецензент: канд. техн. наук Т.А. Бенгина

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый практикум по высшей математике «Дифференциальные уравнения» предназначен для студентов инженерных специальностей машиностроительного и физико—технологического факультетов. Его цель — помочь студентам самостоятельно или с помощью преподавателя овладеть методами решения задач по теме «Дифференциальные уравнения». Каждый раздел соответствует одному практическому занятию по высшей математике и в нем приводятся основные теоретические сведения и необходимые формулы. Внимание уделено как решению типовых задач по данной тематике, так и примерам для самостоятельной работы.

В пособии использована сквозная нумерация задач. Задачи расположены по мере возрастания их сложности. Ко всем задачам приведены ответы. В заключении приведен тренировочный тест для проверки знаний учащихся по данной теме.

1. Основные понятия

Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \text{или} \quad y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

где $y = y(x)$ — искомая функция, а $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$ — ее производные, называется ***дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая данное уравнение в тождество, называется его ***решением***, а график функции — ***интегральной кривой***.

Функция $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ называется общим ***решением*** уравнения n-го порядка, если: 1) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных C_1, C_2, ..., C_n; 2) каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, можно определить такие значения постоянных C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0, что функция

$$y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$$

удовлетворяет этим начальным условиям, т.е. будет ***частным решением*** уравнения.

Равенство $\Phi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$, неявно задающее общее решение, называется ***общим интегралом***, а равенство $\Phi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) = 0$ — ***частным интегралом*** уравнения n-го порядка. Задача отыскания частного решения данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется ***задачей Коши*** для этого уравнения.

Иногда частное решение определяется по так называемым ***краевым условиям***. Эти условия (число которых не должно превышать порядка уравнения) задаются не в одной точке, а на концах некоторого отрезка. Очевидно, что краевые условия ставятся лишь для уравнений порядка выше первого.

Для дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ (или $y' = f(x, y)$) общее и частное решения имеют вид $y = \varphi(x, C)$ и $y = \varphi(x, C_0)$ соответственно.

2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение первого порядка вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

или

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0. \tag{2.2}$$

Разделив (2.2) на $P(x)N(y) \neq 0$, придем к уравнению

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0,$$

которое почленно интегрируется.

В результате получим общий интеграл уравнения (2.2) в виде

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $3y\,dx - x^2\,dy = 0$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Делим его на x^2y, полагая $x^2y \neq 0$. Получаем

$$\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x^2}.$$

Интегрируем обе части уравнения: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3\,dx}{x^2}$;

$$\ln|y| = -\frac{3}{x} + \ln|C|; \tag{2.3}$$

(для дальнейших преобразований удобнее произвольную постоянную обозначить через $\ln|C|$, т. к. $\ln|C|$ при $C \neq 0$ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$).

Пропотенцируем обе части равенства (2.3):

$$\mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}+\ln|C|}; \quad \mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} \cdot \mathrm{e}^{\ln|C|}.$$

Пользуясь основным логарифмическим тождеством $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ имеем $|y| = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} \cdot |C|$ или $y = C\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}$ — общее решение исходного уравнения.

При делении на x^2y могли быть потеряны корни $x = 0$ и $y = 0$. Если $y = 0$, то и $dy = 0$, поэтому $y = 0$ — решение исходного уравнения, но оно получается из общего решения при $C = 0$, т. е. является частным решением. Если же $x = 0$, то и $dx = 0$, т. е. $x = 0$ — также решение данного уравнения. Но оно не может быть получено из общего решения ни при каком конкретном значении постоянной C. При делении на x^2y оно было потеряно. Итак, решениями уравнения будут $y = C\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}$, где C — произвольная постоянная, и $x = 0$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$x^2y^2y' + 1 = y. \tag{2.4}$$

Решение. Приведем уравнение к виду $M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0$:

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2y^2\,dy = (y-1)\,dx.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{y-1}\,dy = \int\frac{dx}{x^2}; \quad \int\frac{y^2-1+1}{y-1}\,dy = \int\frac{dx}{x^2};$$

$$\int\frac{y^2-1}{y-1}\,dy + \int\frac{dy}{y-1} = \int\frac{dx}{x^2}; \quad \int(y+1)\,dy + \int\frac{dy}{y-1} = \int\frac{dx}{x^2};$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y - 1 = 0$, т. е. $y = 1$. Очевидно, $y = 1$ — решение уравнения (2.4), а $x = 0$ — нет.

Таким образом, решениями уравнения будут $\dfrac{y^2}{2}+y+\ln|y-1| = -\dfrac{1}{x}+C$ и $y = 1$.

Пример 3. Решить уравнение: $x(y+1)\,dx - \left(x^2+1\right)\,dy = 0$.

Решение. Разделим уравнение на произведение $\left(x^2+1\right)(y+1) \neq 0$, получим

$$\frac{x\,dx}{x^2+1} - \frac{y\,dy}{y+1} = 0; \quad \frac{y\,dy}{y+1} = \frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y\,dy}{y+1} = \int\frac{x\,dx}{x^2+1}; \quad \int\frac{y+1-1}{y+1}\,dy = \frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2+1};$$

$$\int\frac{y+1}{y+1}\,dy - \int\frac{1}{y+1}\,dy = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1};$$

$$y - \ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln|C|.$$

После потенцирования получим:

$$\mathrm{e}^{y-\ln|y+1|} = \mathrm{e}^{\ln\sqrt{x^2+1}+\ln|C|};$$

$$\mathrm{e}^{y}\cdot\mathrm{e}^{\ln|y+1|^{-1}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{x^2+1}}\cdot\mathrm{e}^{\ln|C|};$$

$\dfrac{\mathrm{e}^{y}}{y+1}=C\sqrt{x^2+1}$ — общий интеграл.

При делении на $\left(x^2+1\right)(y+1)$ могли быть потеряны корни. Выражение $x^2+1\neq 0$, поэтому $y+1=0$ или $y=-1$. Подставляя $y=-1$ и $dy=0$ в исходное уравнение, убеждаемся, что это его решение. Оно не может быть получено из общего интеграла ни при каком значении постоянной C.

Итак, решениями уравнения будут $\dfrac{\mathrm{e}^{y}}{y+1}=C\sqrt{x^2+1}$ и $y=-1$.

Пример 4. Решить уравнение: $\dfrac{dy}{dx}=xy^2+2xy$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx}=xy(y+2)$.

Разделим переменные $\dfrac{dy}{y(y+2)}=x\,dx$.

Проинтегрируем

$$\int\frac{dy}{y(y+2)}=\int x\,dx,\quad \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y+2}\right)dy=\int x\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|y|-\ln|y+2|\right)=\frac{x^2}{2}+\ln|C|.$$

Умножим обе части на 2 и к левой части применим свойство логарифмов $\ln\left|\dfrac{a}{b}\right|=\ln|a|-\ln|b|$:

$$\ln\frac{|y|}{|y+2|}=x^2+2\ln|C|.$$

Переобозначим $2\ln|C|=\ln|C_1|$: $\ln\dfrac{|y|}{|y+2|}=x^2+\ln|C_1|$. После потенцирования имеем

$$\left|\frac{y}{y+2}\right|=\mathrm{e}^{x^2}\cdot C_1.$$

При делении на $y(y+2)$ могли быть потеряны корни $y=0$ и $y=-2$. Очевидно, они являются решениями исходного уравнения. $y=0$ содержится в полученном решении (если $C_1=0$). Таким образом, решениями уравнения будут $\left|\dfrac{y}{y+2}\right|=\mathrm{e}^{x^2}\cdot C_1$ и $y=-2$.

Пример 5. Найти решение уравнения $y' = -\dfrac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, разделим переменные $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$, получим $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$. После потенцирования получим общее решение $y = \dfrac{C}{x}$. При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но оно содержится в общем решении при $C = 0$. Используя заданное начальное условие, получим $y(1) = \dfrac{C}{1} = 2$ $\Rightarrow C = 2$, и, следовательно, частное решение есть $y = \dfrac{2}{x}$.

Пример 6. Найти решение уравнения $\mathrm{e}^x\,dx - (1 + \mathrm{e}^x)\,y\,dy = 0$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $y\,dy = \dfrac{\mathrm{e}^x\,dx}{1 + \mathrm{e}^x}$. Интегрируя $\displaystyle\int y\,dy = \int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{1 + \mathrm{e}^x}$, находим $\dfrac{y^2}{2} = \ln(1 + \mathrm{e}^x) + \ln C$; $\dfrac{y^2}{2} = \ln(C(1 + \mathrm{e}^x))$; $y^2 = 2\ln(C(1 + \mathrm{e}^x))$; $y^2 = \ln\left(C^2(1 + \mathrm{e}^x)^2\right)$; $y = \sqrt{\ln\left(C_1(1 + \mathrm{e}^x)^2\right)}$, где $C_1 = C^2$.

Используя заданное условие, получим $y(0) = \sqrt{\ln\left(C_1(1 + \mathrm{e}^0)^2\right)} = 1 \Rightarrow$ $C_1 = \dfrac{\mathrm{e}}{4}$, и, следовательно, частное решение имеет вид $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}(1 + \mathrm{e}^x)^2\right)}$. Преобразуем его: $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}(1 + \mathrm{e}^x)^2\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right) + \ln(1 + \mathrm{e}^x)^2 = \ln\mathrm{e} - \ln 4 +$ $+ \ln(1 + \mathrm{e}^x)^2 = 1 + \ln\dfrac{(1 + \mathrm{e}^x)^2}{2^2} = 1 + 2\ln\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^x}{2}\right)$, отсюда

$$y = \sqrt{1 + 2\ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)}.$$

2.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Уравнения с разделяющимися переменными»

В задачах 1—20 решить данные уравнения. Найти также решение, удовлетворяющее начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

1. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0.$
Ответ: $y = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}$; $x = -1$.

2. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy.$
Ответ: $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$; $x = 0$.

3. $\left(x^2-1\right)y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.
Ответ: $y\left(\ln\left|x^2-1\right| + C\right) = 1$; $y = 0$; $y\left(\ln\left|x^2-1\right| + 1\right) = 1$.

4. $y'\operatorname{ctg}x + y = 2$; $y(0) = -1$.
Ответ: $y = 2 + C\cos x$; $y = 2 - 3\cos x$.

5. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$.
Ответ: $y = (x-C)^3$; $y = 0$; $y = (x-2)^3$; $y = 0$.

6. $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0,5$.
Ответ: $y(1 - Cx) = 1$; $y = 0$; $y(1+x) = 1$.

7. $2x^2yy' + y^2 = 2$.
Ответ: $y^2 - 2 = C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

8. $y' - xy^2 = 2xy$.
Ответ: $\left(C\mathrm{e}^{-x^2} - 1\right)y = 2$; $y = 0$.

9. $y' = 10^{x+y}$.
Ответ: $y = -\lg\left(C - 10^x\right)$.

10. $y\dfrac{dy}{dt} + t = 1$.
Ответ: $y^2 + t^2 - 2t = C$.

11. $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
Ответ: $y = \ln\left(1+x^2\right) + C$.

12. $y' = y\ln y$.
Ответ: $\ln y = C\mathrm{e}^x$.

13. $y'\operatorname{tg}x = y$.

Ответ: $y = C \sin x$.

14. $xyy' = 1 - x^2$.
Ответ: $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$.

15. $xy' - y = y^3$.
Ответ: $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{1 + y^2}}$.

16. $\operatorname{tg} x \sin^2 y \, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y \, dy = 0$.
Ответ: $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$.

17. $(xy^2 + x) \, dx + (y - x^2 y) \, dy = 0$.
Ответ: $1 + y^2 = C(1 - x^2)$.

18. $xy' + y = y^2$.
Ответ: $Cx = \dfrac{y - 1}{y}$.

19. $y' \sin x = y \ln y$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

20. $\sin y \cos x \, dy = \cos y \sin x \, dx$; $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.
Ответ: $\cos x = \sqrt{2} \cos y$.

3. Однородные уравнения

Функция $F(x,\, y)$ называется ***однородной степени k***, если для всех $\lambda > 0$ выполняется равенство $F(\lambda x,\, \lambda y) = \lambda^k F(x,\, y)$. Примером однородной функции может служить любая форма (однородный многочлен) степени k.

Функции $\dfrac{x - y}{x + y}$, $\dfrac{x^2 + xy}{x - y}$, $x^2 + y^2 - xy$, $x^{k-1} y + y^k$ являются однородными соответственно степени 0, 1, 2, k.

Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = f(x,\, y)$ называется ***однородным***, если $f(x,\, y)$ — однородная функция степени нуль.

Уравнение $M(x,\, y) \, dx + N(x,\, y) \, dy = 0$ является ***однородным***, если $M(x,\, y)$ и $N(x,\, y)$ — однородные функции одной и той же степени. Замена

$y = zx$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

Решение. Здесь функция $f(x,\, y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ — однородная нулевой степени, так как

$$f(\lambda x,\, \lambda y) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{\lambda y}} + \frac{\lambda x}{\lambda y} = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \lambda^0 \cdot f(x,\, y).$$

Полагаем $y = zx$, тогда $y' = z'x + z$. Подставим в уравнение замену, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$z'x + z = \mathrm{e}^{\frac{zx}{x}} + \frac{zx}{x}; \quad z'x + z = \mathrm{e}^{z} + z;$$

$$z'x = \mathrm{e}^{z}; \quad \frac{dz}{dx}x = \mathrm{e}^{z}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dz}{\mathrm{e}^{z}} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{\mathrm{e}^{z}} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \mathrm{e}^{-z}\, dz = \int \frac{dx}{x}; \quad -\mathrm{e}^{-z} = \ln|x| + \ln C;$$

$$-\mathrm{e}^{-z} = \ln x \cdot C; \quad \mathrm{e}^{-z} = -\ln x \cdot C.$$

Логарифмируя левую и правую часть, получим

$$\ln \mathrm{e}^{-z} = \ln\left(\ln\frac{1}{x \cdot C}\right); \quad -z = \ln\left(\ln\frac{C_1}{x}\right), \text{ где } C_1 = \frac{1}{C};$$

$$\frac{y}{x} = -\ln\left(\ln\frac{C_1}{x}\right); \quad y = -x\ln\left(\ln\frac{C_1}{x}\right).$$

Пример 2. Решить уравнение: $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Решение. Это однородное уравнение, т. к. $f(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ — однородная функция нулевой степени, т. е.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{\lambda^2\left(y^2 - x^2\right)}{2\lambda^2 xy} = \lambda^0 f(x, y).$$

Полагая $y = zx$, $y' = z'x + z$, получим:

$$z'x + z = \frac{z^2x^2 - x^2}{2xzx}; \quad z'x + z = \frac{x^2\left(z^2 - 1\right)}{2x^2z};$$

$$z'x + z = \frac{z^2 - 1}{2z}; \quad z'x = \frac{z^2 - 1}{2z} - z = \frac{z^2 - 1 - 2z^2}{2z} = -\frac{1 + z^2}{2z};$$

$$\frac{dz}{dx}x = -\frac{1 + z^2}{2z}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{2z\,dz}{1 + z^2} = -\frac{dx}{x}; \quad \int\frac{2z\,dz}{1 + z^2} = -\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2\,d\left(z^2 + 1\right)}{1 + z^2} = -\int\frac{dx}{x}; \ln\left|1 + z^2\right| = -\ln|x| + \ln C; \quad 1 + z^2 = \frac{C}{x}.$$

Согласно замене $z = \dfrac{y}{x}$, получим

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{C}{x}; \quad x^2 + y^2 = Cx.$$

Пример 3. Решить уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + y^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Решение. Здесь функция $f(x, y) = \dfrac{xy + y^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$ — однородная нулевой степени, т. к.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x\lambda y + (\lambda y)^2\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{\lambda y}}}{\lambda x^2} = \lambda^0 f(x, y).$$

Положив $y = zx$, получим

$$x\frac{dz}{dx} + z = z + z^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}; \quad x\frac{dz}{dx} = z^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2}\,dz = \frac{dx}{x}; \quad -\int\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,d\frac{1}{z} = \int\frac{dx}{x};$$

$$-\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \ln|x| + C; \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} + \ln|x| = C; \quad \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = C.$$

Пример 4. Решить уравнение: $\left(x^2 + y^2\right) dx - 2xy\, dy = 0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$. Здесь функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ — однородная нулевой степени, т. к.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{2\lambda x \lambda y} = \lambda^0 f(x, y).$$

Введем замену $y = zx$, $y' = z'x + z$:

$$z'x + z = \frac{x^2 + z^2x^2}{2xzx} = \frac{1 + z^2}{2z};$$

$$z'x = \frac{1 + z^2}{2z} - z = \frac{1 + z^2 - 2z^2}{2z} = \frac{1 - z^2}{2z}.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1 - z^2}{2z}; \quad \frac{2z\, dz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}; \quad -\int \frac{d(1 - z^2)}{1 - z^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\ln\left|1 - z^2\right| = \ln|x| + \ln C; \quad \ln|x| + \ln\left|1 - z^2\right| = \ln C;$$

$$\ln\left(x\left(1 - z^2\right)\right) = \ln C; \quad x\left(1 - z^2\right) = C.$$

Но $z = \dfrac{y}{x}$, поэтому получаем

$$x\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = C; \quad \frac{x\left(x^2 - y^2\right)}{x^2} = C;$$

$$x^2 - y^2 = Cx; \quad x^2 - y^2 - Cx = 0$$

— общий интеграл данного уравнения.

3.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Однородные уравнения»

В задачах 1—15 решить данные уравнения.

1. $(x+2y)\,dx - x\,dy = 0$.
Ответ: $x+y=Cx^2$; $x=0$.

2. $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$.
Ответ: $\ln\left(x^2+y^2\right) = C - 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3. $\left(y^2-2xy\right)\,dx + x^2\,dy = 0$.
Ответ: $x(y-x)=Cy$; $y=0$.

4. $2x^3y' = y\left(2x^2-y^2\right)$.
Ответ: $x=\pm y\sqrt{\ln Cx}$; $y=0$.

5. $y^2+x^2y' = xyy'$.
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

6. $\left(x^2+y^2\right)y' = 2xy$.
Ответ: $y^2-x^2=Cy$; $y=0$.

7. $xy'-y = x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.
Ответ: $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$.

8. $xy' = y - x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.
Ответ: $y=-x\ln(\ln Cx)$.

9. $xy'-y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.
Ответ: $\ln\dfrac{x+y}{x} = Cx$.

10. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$.
Ответ: $y = x\ln\dfrac{C}{x}$.

11. $y' = -\dfrac{x+y}{x}$.

Ответ: $y = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x}{2}$.

12. $(x - y)y\,dx - x^2\,dy = 0$.
Ответ: $x = C\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$.

13. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.
Ответ: $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \ln|y| = C$.

14. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.
Ответ: $y - 2x = Cx^3(y + x)$.

15. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.
Ответ: $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ — функции, непрерывные на $[a, b]$, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. Его решение ищут в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — две неизвестные функции. После подстановки в уравнение выражений для y и y' получаем

$$v\frac{du}{dx} + \left(\frac{dv}{dx} + p(x)v\right)u = q(x).$$

В качестве $v(x)$ выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $\dfrac{dv}{dx} + p(x)v = 0$, тогда функция $u(x)$ определяется из уравнения $v\dfrac{du}{dx} = q(x)$.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \in R$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$), называется ***уравнением Бернулли***. Путем подстановки $z = y^{1-\alpha}$ оно сводится к линейному. Его можно решать и непосредственно, применяя подстановку $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$.

Решение. Это линейное уравнение. Ищем решение этого уравнения в виде произведения двух функций: $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + v'u$. Имеем

$$x\left(u'v + v'u\right) - 2uv = 2x^4;$$

$$xu'v + u\left(xv' - 2v\right) = 2x^4.$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' - 2v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решим его, разделяя переменные и интегрируя.

$$x\frac{dv}{dx} = 2v; \quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2\,dx}{x};$$

$$\ln v = 2\ln x; v = x^2.$$

Функцию $u(x)$ находим из уравнения

$$xu'v = 2x^4; \quad xu'x^2 = 2x^4;$$

$$x^3u' = 2x^4; \quad \frac{du}{dx} = 2x; \quad u(x) = x^2 + C.$$

Следовательно, все решения исходного уравнения определяются формулой $y = Cx^2 + x^4$.

Пример 2. Решить уравнение: $y' - 2xy = 3x$.

Решение. Это линейное уравнение. Берем замену $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + v'u$. Подставляя выражения для y и y' в данное уравнение, получаем

$$u'v + v'u - 2xuv = 3x; \quad u'v + u\left(v' - 2xv\right) = 3x.$$

Функцию v выбираем так, чтобы

$$v' - 2xv = 0.$$

Решим это уравнение, разделяя переменные

$$\frac{dv}{dx} = 2xv; \quad \int\frac{dv}{v} = \int 2x\,dx; \quad \ln|v| = x^2; \quad v = \mathrm{e}^{x^2}.$$

Для нахождения $u(x)$ имеем уравнение

$$u'v = 3x; \quad u'\mathrm{e}^{x^2} = 3x; \quad u' = 3x\mathrm{e}^{-x^2};$$

$$\int du = \int 3x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx; \quad \int du = -\frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\,d(-x^2); \quad u = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

Следовательно, все решения уравнения определяются формулой

$$y = \mathrm{e}^{x^2}\left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C\right) = -\frac{3}{2} + C\mathrm{e}^{x^2}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$.

Решение. Ищем решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + v'u$. Имеем

$$u'v + v'u + uv\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x};$$

$$u'v + u\,(v' + v\cos x) = \mathrm{e}^{-\sin x}.$$

Выберем функцию v так, чтобы $v' + v\cos x = 0$. Решаем это уравнение, разделяя переменные

$$\frac{dv}{dx} = -v\cos x; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x\,dx;$$

$$\ln v = -\sin x; \quad v = \mathrm{e}^{-\sin x}.$$

Функцию $u(x)$ находим из уравнения

$$u'v = \mathrm{e}^{-\sin x}; \quad u'\mathrm{e}^{-\sin x} = \mathrm{e}^{-\sin x};$$

$$u' = 1; \quad \frac{du}{dx} = 1; \quad \int du = \int dx; \quad u = x + C.$$

Таким образом, решение исходного уравнения определяется формулой

$$y = (x + C)\mathrm{e}^{-\sin x}.$$

Пример 4. Решить уравнение: $y' + y = x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Согласно подстановке $z = y^{1-\alpha}$, при $\alpha = \dfrac{1}{2}$, будем иметь $z = y^{\frac{1}{2}}$. Тогда $z' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$. После замены исходное уравнение примет вид

$$z' \cdot 2z + z^2 = xz; \quad z' + \frac{z^2}{2z} = \frac{xz}{2z}; \quad z' + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x.$$

Это уже уравнение, линейное относительно z и z'. Как обычно, $z = uv$, $z' = u'v + v'u$. После подстановки получаем

$$u'v + v'u + \frac{1}{2}uv = \frac{1}{2}x; \quad u'v + u\left(v' + \frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}x.$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + \dfrac{1}{2}v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решая его, получим:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}v; \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\int dx;$$

$$\ln v = -\frac{1}{2}x; \quad v = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

Функцию $u(x)$ найдем из уравнения

$$u'v = \frac{1}{2}x; \quad \frac{du}{dx}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}x; \quad \int du = \frac{1}{2}\int x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx.$$

Решим отдельно

$$\int x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx = \left[\begin{array}{c} \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ \text{(формула интегрирования по частям)} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x; \quad du = dx; \\ v = \int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \end{array}\right] = 2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx = 2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C.$$

Тогда

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C\right) = x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C.$$

Возвращаясь к переменной $y = z^2 = (uv)^2$, будем иметь

$$y = \left(\left(x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(x - 2 + C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2$$

— общее решение.

Пример 5. Решить уравнение: $xy' + y = y^2\ln x$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Будем решать его с помощью подстановки $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + v'u$. Подставим выражения для y и y' в заданное уравнение, получаем

$$xu'v + u\,(xv' + v) = u^2v^2\ln x.$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $xv' + v = 0$, откуда

$$\frac{x\,dv}{dx} = -v; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln v = -\ln x; \quad v = \frac{1}{x}.$$

Для функции $u(x)$ получаем уравнение

$$xu'\frac{1}{x} = u^2\frac{1}{x^2}\ln x; \quad u' = \frac{u^2\ln x}{x^2}; \quad \frac{du}{dx} = \frac{u^2\ln x}{x^2}; \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

Решим отдельно

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] =$$
$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = \frac{-\ln x - 1 + C}{x} = -\frac{\ln x + 1 + C}{x}.$$

После интегрирования, получим

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x + 1 + C}{x}; \quad u = \frac{x}{\ln x + 1 + C}.$$

Окончательно имеем

$$y = \frac{x}{\ln x + 1 + C}\cdot\frac{1}{x}; \quad y(\ln x + 1 + C) = 1$$

— общий интеграл данного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение: $y' + 2y = \mathrm{e}^x y^2$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Замена: $z = y^{1-2} = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$; $y = \dfrac{1}{z}$, $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$, $y' = -z'y^2$. Получим уравнение

$$-z'\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{\mathrm{e}^x}{z^2}.$$

Умножим левую и правую части на $(-z^2)$:

$$z' - 2z = -\mathrm{e}^x.$$

Указанная замена привела исходное уравнение к линейному. Будем решать его с помощью подстановки $z = u(x)v(x)$.

$$u'v + v'u - 2uv = -\mathrm{e}^x; \quad u'v + u(v' - 2v) = -\mathrm{e}^x.$$

Функцию v выберем так, чтобы

$$v' - 2v = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int dx; \quad \ln v = 2x; \quad v = \mathrm{e}^{2x}.$$

Функцию u найдем из уравнения

$$u'\mathrm{e}^{2x} = -\mathrm{e}^{x}; \quad u' = -e^{-x}; \quad \int du = -\int \mathrm{e}^{-x}\,dx; \quad u = \left(\mathrm{e}^{-x} + C\right).$$

Учитывая замену, окончательно имеем

$$z = \left(\mathrm{e}^{-x} + C\right)\cdot \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{2x}; \quad y = \frac{1}{\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{2x}}$$

или

$$y\left(\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{2x}\right) = 1$$

— общий интеграл данного уравнения.

4.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$.
Ответ: $y = \sin x + C\cos x$.

2. $xy' - xy = \mathrm{e}^{x}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{x}\left(\ln|x| + C\right)$, $x = 0$.

3. $x^2y' + xy + 1 = 0$.
Ответ: $xy = C - \ln|x|$.

4. $y = x\,(y' - x\cos x)$.
Ответ: $y = x\,(C + \sin x)$.

5. $y' - 2xy = 2x^3$.
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{x^2} - x^2 - 1$.

6. $y' - \dfrac{2y}{x\ln x} = \dfrac{1}{x}$.
Ответ: $y = C\ln^2 x - \ln x$.

7. $y' - \dfrac{2}{x} y = \mathrm{e}^x x^2.$
Ответ: $y = \left(\mathrm{e}^x + C\right) x^2.$

8. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}.$
Ответ: $y = \dfrac{x + C}{\cos x}.$

9. $y' + 2y = 4x.$
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1.$

10. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2} y = 1.$
Ответ: $y = Cx^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2.$

11. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}.$
Ответ: $y = \mathrm{e}^{-x^2} \left(C + \dfrac{x^2}{2}\right).$

12. $y' + y = \cos x.$
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2} \left(\cos x + \sin x\right).$

13. $\left(1 + x^2\right) y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2.$
Ответ: $y = (x + C) \left(1 + x^2\right).$

14. $y' - \dfrac{y}{x} = x.$
Ответ: $y = Cx + x^2.$

15. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3.$
Ответ: $y = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{C}{x^2}.$

16. $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2.$
Ответ: $y \left(x^2 + Cx\right) = 1.$

17. $y' + 2xy = 2x^3 y^3.$
Ответ: $\dfrac{1}{y^2} = C\mathrm{e}^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}.$

18. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0.$
Ответ: $y = \dfrac{1}{(1+x)(C + \ln|1+x|)}.$

19. $y' - y\operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$
Ответ: $y(x+C) = \dfrac{1}{\cos x}.$

20. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$
Ответ: $y = \dfrac{x^4}{4}\ln^2|Cx|.$

5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. В этом случае уравнение можно записать в виде $du(x,y) = 0$, откуда следует, что соотношение $u(x,y) = C$ является его общим интегралом.

Выражение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$, где M, N — непрерывные функции вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой области D, есть ***полный дифференциал*** тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ во всей области D.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $\left(3x^2 + 6xy^2\right)\,dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)\,dy = 0.$
Решение. $M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$, $N(x,y) = 6x^2y + 4y^3$.

Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 12xy$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Значит

$$M\,dx + N\,dy = du.$$

Следовательно

$$M\,dx + N\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N;$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x, считая y постоянной:

$$u(x,y) = \int \left(3x^2 + 6xy^2\right)\, dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 6y^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y).$$

Определим $\varphi(y)$, используя второе уравнение системы

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3; \quad \varphi'(y) = 4y^3; \quad \varphi(y) = y^4 + C.$$

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

Пример 2. Решить уравнение: $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)\, dx - \sqrt{x^2 - y}\, dy = 0$.
Решение.

$$M(x,y) = 2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right), \quad N(x,y) = -\sqrt{x^2 - y};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(1 + \sqrt{x^2 + y}\right); \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{x^2 + y}. \end{cases}$$

Проинтегрируем второе уравнение по y:

$$u(x,y) = -\int \sqrt{x^2 - y}\, dy = \frac{2}{3}\left(x^2 - y\right)^{\frac{3}{2}} + \varphi(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x^2 - y)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x + \varphi'(x);$$

$$2x\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(x) = 2x + 2x\sqrt{x^2 - y};$$

$$\varphi'(x) = 2x; \quad \varphi(x) = x^2 + C; \quad u(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2 - y\right)^3} + x^2 + C.$$

Общий интеграл $\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2 - y\right)^3} + x^2 + C = 0$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)=0.$$

Решение.

$$M(x,y)=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2},\quad N(x,y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x-y)^3};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x:

$$u(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx=\ln|x|+\frac{y^2}{(x-y)}+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2xy-y^2}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=\frac{x^2-(x^2-2xy+y^2)}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=$$
$$=\frac{x^2}{(x-y)^2}-1+\varphi'(y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y};$$

$$\varphi'(y)=1-\frac{1}{y};\quad \varphi(y)=y-\ln|y|+C;$$

$$u(x,y)=\ln|x|+\frac{y^2}{(x-y)}+y-\ln|y|+C.$$

Общий интеграл $\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{xy}{(x-y)}=C$.

Пример 4. Решить уравнение:

$$\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy=0.$$

Решение.

$$M(x,y)=\frac{x}{\sin y}+2,\quad N(x,y)=\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x\cos y}{\sin^2 y};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sin y} + 2; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x:

$$u(x,y) = \int \left(\frac{x}{\sin y} + 2\right) dx = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y} + \varphi'(y); \quad -\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y} + \varphi'(y) = \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1};$$

$$-\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y} + \varphi'(y) = \frac{x^2\cos y}{-2\sin^2 y} + \frac{\cos y}{-2\sin^2 y};$$

$$\varphi'(y) = -\frac{\cos y}{2\sin^2 y}; \quad \varphi(y) = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos y\, dy}{\sin^2 y} = \frac{1}{2\sin y} + C;$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \frac{1}{2\sin y} + C.$$

Общий интеграл $x^2 + 1 + 4x\sin y + C\sin y = 0$.

Пример 5. Решить уравнение: $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x}\right) dy = 0;$$

$$M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}, \quad N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{1}{x^2};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x:

$$u(x,y) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - y \int \frac{dx}{x^2} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \varphi'(y); \quad \varphi'(y) = 0; \quad \varphi(y) = C;$$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} + C.$$

Общий интеграл $\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x} + C = 0$.

5.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Уравнения в полных дифференциалах»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.
Ответ: $(3x^2 y - y^3) = C$.

2. $(2 - 9xy^2)x\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0$.
Ответ: $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$.

3. $\mathrm{e}^{-y}\,dx - \left(2y + x\mathrm{e}^{-y}\right)\,dy = 0$.
Ответ: $x\mathrm{e}^{-y} - y^2 = C$.

4. $\dfrac{y}{x}\,dx + \left(y^3 + \ln x\right)\,dy = 0$.
Ответ: $4y\ln x + y^4 = C$.

5. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3+5y}{y^3}\,dy = 0$.
Ответ: $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C$.

6. $\left(1 + y^2\sin 2x\right)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$.
Ответ: $x - y^2\cos^2 x = C$.

7. $\left(2x + 3x^2 y\right)\, dx + \left(x^3 - 3y^2\right)\, dy = 0.$
Ответ: $x^2 + x^3 y - y^3 = C.$

8. $\left(2x^3 - xy^2\right)\, dx + \left(2y^3 - x^2 y\right)\, dy = 0.$
Ответ: $x^4 - x^2 y^2 + y^4 = C.$

9. $\dfrac{x\, dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx.$
Ответ: $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} - x + C = 0.$

10. $\mathrm{e}^y\, dx + (x\mathrm{e}^y - 2y)\, dy = 0.$
Ответ: $x\mathrm{e}^y - y^2 = C.$

11. $yx^{y-1}\, dx + x^y \ln x\, dy = 0.$
Ответ: $x^y = C.$

12. $\dfrac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\, dx + \dfrac{x\, dy}{\cos^2(xy)} + \sin y\, dy = 0.$
Ответ: $\operatorname{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C.$

13. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\, dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) y\, dy = 0.$
Ответ: $x + \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - \dfrac{y^2}{2} + C = 0.$

14. $(x + y)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0.$
Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 = C.$

15. $\left(x^2 + y^2 + 2x\right)\, dx + 2xy\, dy = 0.$
Ответ: $\dfrac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C.$

16. $\left(x^3 - 3xy^2 + 2\right)\, dx - \left(3x^2 y - y^2\right)\, dy = 0.$
Ответ: $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 y^2 + 2x + \dfrac{y^3}{3} = C.$

17. $x\, dx + y\, dy = \dfrac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}.$
Ответ: $x^2 + y^2 - 2 \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = C.$

18. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2-3x^2}{y^4}\,dy = 0.$
Ответ: $x^2 - y^2 = Cy^3$.

6. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Общий вид дифференциальных уравнений высшего порядка

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Допускают понижение порядка следующие типы дифференциальных уравнений.

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решают путем n—кратного интегрирования.

2. Уравнение вида $F\left(x, y', y''\right) = 0$, явно не содержащее искомой функции $y(x)$, сводят к уравнению первого порядка путем введения новой неизвестной функции $z = z(x)$, полагая $y'(x) = z(x)$, $y''(x) = z'(x)$. Тогда уравнение принимает вид $F\left(x, z, z'\right) = 0$.

3. Уравнение вида $F\left(y, y', y''\right) = 0$, явно не содержащее независимой переменной x, интегрируют с помощью подстановки $p = y'$, где $p = p(y)$ — новая неизвестная функция, а за аргумент временно принята переменная y. Тогда $y'' = p{\cdot}p'$. При этом порядок уравнения понижается на единицу.

4. Если левая часть дифференциального уравнения есть точная производная какой—либо функции, то порядок уравнения так же можно понизить.

Примеры точных производных

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)'\,; \quad \frac{y''}{y'} = (\ln y')'\,;$$

$$xy'' + y' = (xy')'\,; \quad yy'' + (y')^2 = (yy')';$$

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)'$$

и так далее.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение уравнения: $y''' = x^2 + \sin 2x$.

Решение. Правая часть данного уравнения есть функция только переменной x, поэтому оно решается трехкратным интегрированием:

$$y'' = \int \left(x^2 + \sin 2x\right)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cos 2x + C_1;$$

$$y' = \frac{x^4}{12} - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2; \quad y = \frac{x^5}{60} + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Пример 2. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y'' = x\ln x \\ y(1) = 1, y'(1) = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$y' = \int x\ln x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1$$

Найдем C_1 из начальных условий

$$y'(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4};$$

$$y' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Проинтегрируем еще раз

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 \ln x\, dx - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x + C_2$$

Вычислим

$$\int x^2 \ln x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Тогда

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x + C_2 = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5x^3}{36} + \frac{x}{4} + C_2$$

Найдем C_2 из начальных условий:

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{6}\ln 1 - \frac{5}{36} + \frac{1}{4} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{8}{9}.$$

Общее решение:

$$y(x) = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{x}{4} + \frac{8}{9}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $xy'' = y'$.

Решение. В уравнении отсутствует искомая функция y, согласно пункту 2 делаем замену $y' = z$, $y'' = z'$. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xz' = z; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|; \quad z = C_1 x.$$

Вернемся к переменной y: $y' = C_1 x$, интегрируя это уравнение, находим $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$ или $y = C_1 x^2 + C_2$.

Пример 4. Решить уравнение: $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Решение. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Сделаем замену $z = y'$, $z' = y''$, где $z = z(x)$. Получим линейное уравнение

$$z' + z \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Сделаем замену переменной: $z = uv$. Тогда $u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \sin 2x$;

$$\begin{cases} v' + v \operatorname{tg} x = 0; \\ u'v = \sin 2x; \end{cases}$$

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x\, dx; \quad \ln v = \ln|\cos x|; \quad v = \cos x;$$

$$u' \cos x = \sin 2x; \quad u = -2\cos x + C_1.$$

Таким образом, решение имеет вид $z(x) = -2\cos^2 x + C_1 \cos x$. Возвращаясь к первоначальной переменной y, имеем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos^2 x + C_1 \cos x,$$

интегрируя которое, находим

$$y = -x - \frac{\sin 2x}{2} + C_1 \sin x + C_2.$$

Пример 5. Решить уравнение: $yy'' = (y')^2$.

Решение. В дифференциальном уравнении отсутствует независимая переменная x. Согласно пункту 3, $y' = p(y)$, $y'' = pp'$. Уравнение принимает вид $yp'p = p^2$. Разделив обе части уравнения на p ($p \neq 0$, $y' \neq 0$, значит $y = A$ является решением), получим

$$yp' = p; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln C_1; \quad p = yC_1;$$

$$y' = yC_1; \quad \frac{dy}{dx} = yC_1; \quad \frac{dy}{y} = C_1\,dx; \quad \ln|y| = C_1 x + C_2.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = \mathrm{e}^{C_1 x + C_2}.$$

$y = A$ входит при $C_1 = 0$.

Пример 6. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} 4y''\sqrt{y} = 1; \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$$

Решение. Дифференциальное уравнение не содержит независимую переменную x. Сделаем замену переменных $y' = p(y)$, $y'' = pp'$, тогда

$$4p'p\sqrt{y} = 1.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$2p\,dp = \frac{dy}{2\sqrt{y}} (y \neq 0); \quad p^2 = \sqrt{y} + C_1; \quad (y')^2 = \sqrt{y} + C_1.$$

Найдем C_1:

$$\left(y'(0)\right)^2 = \sqrt{y(0)} + C_1; \quad 1 = \sqrt{1} + C_1; \quad C_1 = 0.$$

Вернемся к старой переменной:

$$(y')^2 = \sqrt{y}; \quad y' = \pm\sqrt[4]{y}.$$

Так как $y'(0) = -1 < 0$, то

$$y' = -\sqrt[4]{y}; \quad \frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = -\,dx; \quad \frac{4}{3}y^{\frac{3}{4}} = -x + C_2.$$

Найдем C_2:

$$\frac{4}{3} \cdot 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3}; \quad \frac{4}{3}y^{\frac{3}{4}} = -x + \frac{4}{3};$$

$$y = \left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{4}x\right)^4}$$

— решение задачи Коши.

Пример 7. Решить уравнение: $yy'' = y'^2$.
Решение. Разделим обе части уравнения на yy', получим

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}.$$

Обе части уравнения являются полными производными по x, значит

$$\left(\ln y'\right)' = \left(\ln y\right)'; \quad \ln y' = \ln y + \ln C; \quad y' = yC;$$

$$\frac{dy}{y} = C\,dx; \quad \ln y = Cx + C_1; \quad y = C_2 \mathrm{e}^{Cx}.$$

6.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $y'' = x + \sin x$.

Ответ: $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$.

2. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.

Ответ: $y = C_1 \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + C_2$.

3. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.
Ответ: $y = \left(C_1 x - C_1^2\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{C_1}} + C_2$.

4. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.
Ответ: $y = \pm \dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1 x - 1)^3} + C_2$.

5. $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.
Ответ: $y = \dfrac{C_1 x + C_2 - 1}{C_1 x + C_2}$.

6. $yy'' + (y')^2 = 1$.
Ответ: $y^2 = (x + C_1)^2 + C_2$.

7. $yy'' - yy' \ln y = (y')^2$.
Ответ: $\dfrac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \dfrac{\ln y}{C_1} = \dfrac{x + C_2}{2}$.

8. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$; $y(2) = 0$; $y'(2) = 4$.
Ответ: $y = \dfrac{2}{5} x^2 \sqrt{2x} - \dfrac{16}{5}$.

9. $2y'' = 3y^2$; $y(-2) = 1$; $y'(-2) = -1$.
Ответ: $y = \dfrac{4}{(x+4)^2}$.

10. $y''' = \dfrac{1}{x}$.
Ответ: $y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

11. $xy''' - y'' = 0$.
Ответ: $y = C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 x + C_3$.

12. $y'' = \mathrm{e}^{2y}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.
Ответ: $y = -\ln |x - 1|$.

13. $y^3 y'' = 1$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0$.
Ответ: $y = \sqrt{2x - x^2}$.

14. $x^2y'' = y'^2$.
Ответ: $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$.

15. $y^3y'' = 1$.
Ответ: $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$.

16. $y'^2 + 2yy'' = 0$.
Ответ: $y^3 = C_1(x + C_2)^2$; $y = C$.

17. $y'' = \operatorname{arctg} x$.
Ответ: $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2 - 1) - \dfrac{x}{2}\ln(1 + x^2) + C_1x + C_2$.

18. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y'^2) = 0$.
Ответ: $(x + C_2)\ln y = x + C_1$.

19. $y'' = \dfrac{y}{x} + x$.
Ответ: $y = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1x^2 + C_2$.

20. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y(1) = 1$; $y'(1) = -1$.
Ответ: $y - x = 2\ln|y|$.

7. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

7.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

Чтобы решить ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{7.1}$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{7.2}$$

и найти все его корни λ_1, ..., λ_n.

Общее решение уравнения (7.1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (7.2) и слагаемых вида

$$\left(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \ldots + C_{m+k}x^{k-1}\right) e^{\lambda x} \qquad (7.3)$$

для каждого кратного корня λ уравнения (7.2), где k — кратность корня. Все C_i — произвольные постоянные.

Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2} e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} — многочлены степени $k - 1$, аналогичные многочлену в (7.3), их коэффициенты — произвольные постоянные.

Например, вид общего решения уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (7.4)$$

с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Если λ_1 и λ_2 — различные и действительные корни, общее решение уравнения (7.4) имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ — двукратный действительный корень, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексно—сопряженные корни, общее решение записывается в виде

$$y = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right).$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение уравнения:

а. $y'' - 7y' + 12y = 0$

б. $y'' + 6y' + 9y = 0$

в. $y'' - 2y' + 2y = 0$

г. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$

д. $y^{V} - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0$

Решение.

а) Характеристическое уравнение данного уравнения имеет вид $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$. Общее решение дифференциального уравнения — $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{4x}$.

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = -3$, поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 x \mathrm{e}^{-3x}$.

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет комплексно—сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Общее решение дифференциального уравнения $y(x) = \mathrm{e}^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

г) Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = 0$. Разлагая левую часть на множители, находим корни: $\left(\lambda^4 - 1\right) + 2\left(\lambda^3 - \lambda\right) = 0$; $\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2+1\right)+2\lambda\left(\lambda^2-1\right)=0$; $\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2+1+2\lambda\right)=0$; $(\lambda-1)\left(\lambda+1\right)^3=0$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Корни действительные, но корень -1 трехкратный. Общее решение данного уравнения $y(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} + C_3 x \mathrm{e}^{-x} + C_4 x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

д) Характеристическое уравнение $\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0$. Разлагая левую часть на множители, находим корни: $\lambda^4(\lambda - 2) - 16(\lambda - 2) = 0$; $(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0$; $(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -2$; $\lambda_4 = 2i$; $\lambda_5 = -2i$. Общее решение уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x} + C_3 \mathrm{e}^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y'' + 9y = 0$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0) = 0$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Удовлетворив краевым условиям

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1 \cos\frac{3\pi}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi}{4} = 1,$$

получим $C_1 = 0$, $C_2 = \sqrt{2}$.

Частное решение, удовлетворяющее данным краевым условиям, имеет вид $y(x) = \sqrt{2}\sin 3x$.

7.2. Задания для самостоятельного решения по теме «Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $3y'' - 2y' - 8y = 0.$
Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}.$

2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$
Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

3. $4y'' - 20y' + 25y = 0.$
Ответ: $y = e^{\frac{5}{2}x}(C_1 + C_2 x).$

4. $y'' + y' - 2y = 0.$
Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}.$

5. $y'' - 4y' + 5y = 0.$
Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$

6. $y'' + 4y' + 3y = 0.$
Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$

7. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
Ответ: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

8. $y''' - 8y = 0.$
Ответ: $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3}).$

9. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$
Ответ: $y = e^{x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$

10. $y''' - y'' - y' + y = 0.$
Ответ: $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-x}.$

11. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$
Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$

12. $y^{IV} - y = 0.$
Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

13. $y^{IV} + 4y = 0.$
Ответ: $y = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$

14. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.
Ответ: $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

15. $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + C_2x\mathrm{e}^{\sqrt{3}x} + C_3\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x} + C_4x\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}$.

16. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$.
Ответ: $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{x} + C_3\mathrm{e}^{-x} + C_4\mathrm{e}^{3x} + C_5\mathrm{e}^{-3x}$.

17. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.
Ответ: $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x$.

18. $y^{VI} + 64y = 0$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}}(C_1\cos x + C_2\sin x) + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x + \mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}(C_5\cos x + C_6\sin x)$.

19. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y(0) = 5$; $y'(0) = 8$.
Ответ: $y = 4\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{4x}$.

20. $y'' + \pi^2 y = 0$; $y(0) = 0$; $y(1) = 0$.
Ответ: $y = C\sin\pi x$.

7.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + \ldots + p_ny = f(x). \qquad (7.5)$$

Общее решение дифференциального уравнения (7.5) равно сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (7.1), то есть

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x).$$

Решение однородного уравнения $y_0(x)$ определяется так же, как и в пункте 7.1, $\overline{y}(x)$ — частное решение уравнения (7.5) в случае, когда правая часть дифференциального уравнения (7.5) имеет специальный вид, определяется методом неопределенных коэффициентов. Правая часть специального вида

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — полиномы степеней m и n соответственно.

Укажем вид частного решения дифференциального уравнения (7.5) в двух случаях.

1. Если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (7.2) дифференциального уравнения (7.5), то

$$\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(S_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right), \tag{7.6}$$

где S_l и R_l — полиномы степени $l = \max\{m, n\}$ с неопределенными коэффициентами.

2. Если число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения (7.2) дифференциального уравнения (7.5) кратности k, то

$$\overline{y}(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x}\left(S_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right), \tag{7.7}$$

то есть частное решение приобретает множитель x^k.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение уравнения:

а. $2y'' - y' - y = 4x\mathrm{e}^{2x}$

б. $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^x$

в. $y'' + y = x\sin x$

г. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x(x^2+1)$

Решение.

а) Характеристическое уравнение $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Правая часть заданного уравнения $4x\mathrm{e}^{2x}$. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 2 + i\cdot 0 = 2$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому согласно формуле (7.6), $\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{2x}(Ax+B)$. Дифференцируя $\overline{y}(x)$ два раза и подставляя производные в данное уравнение, получим:

$$2\mathrm{e}^{2x}\left(4Ax + 4B + 4A\right) - \mathrm{e}^{2x}\left(2Ax + 2B + A\right) - \mathrm{e}^{2x}(Ax+B) = 4x\mathrm{e}^{2x}$$

Сокращая на e^{2x} и приравнивая друг к другу коэффициенты при первых степенях x и свободные члены в левой и правой частях равенства, имеем $5A = 4$ и $7A + 5B = 0$, откуда $A = \dfrac{4}{5}$ и $B = -\dfrac{28}{25}$. Таким образом, $\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\dfrac{4}{5}x - \dfrac{28}{25}\right)$, а общее решение данного уравнения есть

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = 1$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и число $\alpha + i\beta = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 2$. Согласно формуле (7.7), $\overline{y}(x) = x^2\mathrm{e}^x(Ax+B)$. Дифференцируя $\overline{y}(x)$ два раза, подставляя производные в уравнение и приравнивая коэффициенты, получим $A = \dfrac{1}{6}$, $B = 0$. Следовательно, общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^x + \frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^x.$$

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения будет $y_0(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$. Правая часть имеет вид $f(x) = x\sin x$. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 0 + i = i$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$. Согласно формуле (7.7),

$$\overline{y}(x) = x\left((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right).$$

Дифференцируя два раза и подставляя в уравнение, приравниваем коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$ и $x\sin x$. В результате получим четыре уравнения

$$\begin{cases} 2A + 2D = 0; \\ 4C = 0; \\ -2B + 2C = 0; \\ -4A = 1, \end{cases}$$

из которых определяются $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \dfrac{1}{4}$. Поэтому $\overline{y}(x) = -\dfrac{x^2}{4}\cos x + \dfrac{x}{4}\sin x$. Общее решение

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

г) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = 1$. Откуда $y_0 = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x$. Правая часть $f(x) = \mathrm{e}^x\left(x^2 + 1\right)$. Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Тогда $\alpha + i\beta = 1$ — двукратный корень характеристического уравнения, значит $k = 2$. Согласно формуле (7.7),

$$\overline{y}(x) = x^2\mathrm{e}^x\left(Ax^2 + Bx + C\right).$$

Дифференцируя $\overline{y}(x)$ дважды и подставляя выражение для $\overline{y}''$, $\overline{y}'$, $\overline{y}$ в исходное уравнение, находим $12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1$. Сравнив коэффициенты при соответствующих степенях x в правой и левой частях, получим систему из трех уравнений: $12A = 1$, $6B = 0$, $2C = 1$, откуда следует $A = \dfrac{1}{12}$, $B = 0$, $C = \dfrac{1}{2}$. Тогда частное решение примет вид $\overline{y}(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^2}{2}\right)$. Общее решение исходного уравнения

$$y = \mathrm{e}^x C_1 + \mathrm{e}^x C_2 x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + \frac{x^4}{12}\mathrm{e}^x.$$

Пример 2. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = \sin x + \mathrm{e}^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет один двукратный корень $\lambda = 1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x$. Так как правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций специального вида, частное решение ищем в виде $\overline{y}(x) = \overline{y_1}(x) + \overline{y_2}(x)$, где $\overline{y_1}(x)$ — частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x$; $\overline{y_2}(x)$ — частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$. Найдем $\overline{y_1}(x)$. Так как $f(x) = \sin x$, то $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Следовательно, $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k = 0$ и $\overline{y_1}(x) = A\cos x + B\sin x$. Подставляя выражение для $\overline{y_1}$, $\overline{y_1}'$, $\overline{y_1}''$ в уравнение $y'' - 2y' + y = \sin x$ и сравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в правой и левой частях тождества, имеем $A = \dfrac{1}{2}$, $B = 0$, следовательно, $\overline{y_1} = \frac{1}{2}\cos x$.

Поступая аналогично, находим частное решение $\overline{y_2}(x)$ уравнения $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$, а именно: $\overline{y_2}(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$. Таким образом, $\overline{y}(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$. Общее решение исходного уравнения

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}.$$

Замечание. Частное решение исходного уравнения можно было искать сразу в виде $\overline{y}(x) = A\cos x + B\sin x + C\mathrm{e}^{-x}$.

Пример 3. Решить уравнение: $y'' - 6y' + 5y = -3\mathrm{e}^x + 5x^2 - 12x + 2$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, значит $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{5x}$. Так как правая часть представляет сумму двух функций, то частное решение ищем в виде $\overline{y}(x) = \overline{y_1}(x) + \overline{y_2}(x)$. Так как $f_1(x) = -3\mathrm{e}^x$, число $\alpha + i\beta = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$, то $\overline{y_1}(x) = Ax\mathrm{e}^x$. Дифференцируя $\overline{y_1}(x)$ дважды и подставляя в уравнение $y'' - 6y' + 5y = -3\mathrm{e}^x$, имеем

$$A\mathrm{e}^x(x+2) - 6A\mathrm{e}^x(x+1) + 5x\mathrm{e}^x = -3\mathrm{e}^x,$$

откуда $A = \dfrac{3}{4}$ и $\overline{y_1}(x) = \dfrac{3}{4}x\mathrm{e}^x$.

Так как $f_2(x) = 5x^2 - 12x + 2$, число $\alpha + i\beta = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то $\overline{y_2}(x) = Ax^2+Bx+C$. Дифференцируя $\overline{y_2}(x)$ дважды и подставляя в уравнение $y'' - 6y' + 5y = 5x^2 - 12x + 2$, получим

$$5Ax^2 + x(-12A + 5B) + 2A - 6B + 5C = 5x^2 - 12x + 2.$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при x^2, x и свободные члены, получим систему трех уравнений

$$\begin{cases} 5A = 5; \\ -12A + 5B = -12; \\ 2A - 6B + 5C = 2, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ и $\overline{y_2}(x) = x^2$. Общее решение исходного уравнения

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y_1}(x) + \overline{y_2}(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{5x} + \frac{3}{4}x\mathrm{e}^x + x^2.$$

7.4. Задания для самостоятельного решения по теме «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4x}$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{4x}$.

2. $y'' + y = 4x\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x - 2)\mathrm{e}^x$.

3. $y'' - y = 2\mathrm{e}^x - x^2$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^x + x^2 + 2$.

4. $y'' + y' - 2y = 3x\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{4x} - (2x^2 - 2x + 3)\mathrm{e}^{2x}$.

5. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + 0,1\sin x + 0,3\cos x$.

6. $y'' + y = 4\sin x$.
Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$.

7. $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = \left(C_1 + C_2x + x^3\right)\mathrm{e}^x$.

8. $y'' - 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{2x}\left(C_1 + C_2x + 1,5x^2\right)$.

9. $5y'' - 6y' + 5y = \mathrm{e}^{0,6x}\sin 0,8x$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{0,6x}\left(C_1\cos 0,8x + C_2\sin 0,8x - \dfrac{1}{8}x\cos 0,8x\right)$.

10. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x - \sin x$.

11. $y'' + 4y = \sin 2x$.
Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{x}{4}\cos 2x$.

12. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$.
Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$.

13. $y'' - 3y' = \mathrm{e}^{3x} - 18x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2 + \dfrac{x}{3}\mathrm{e}^{3x} + 3x^2 + 2x$.

14. $y'' - 2y' + y = 4\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^x(C_1 + C_2x) + 2x^2\mathrm{e}^x$.

15. $y'' + y = 4x\cos x$.
Ответ: $y = (C_1 + x)\cos x + (C_2 + x^2)\sin x$.

16. $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}\cos x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{37}\mathrm{e}^{3x}(6\sin x - cosx)$.

17. $y'' + 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{-x};\ y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y = \dfrac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

18. $y'' + 4y = \sin 2x;\ y(0) = y'(0) = 0$.

Ответ: $y = -\frac{x}{4}\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$.

19. $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.
Ответ: $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \cos x - \frac{1}{3}\sin x$.

20. $y'' + 2y' + 2y = x\mathrm{e}^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{-x}(x - \sin x)$.

8. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{8.1}$$

есть сумма общего решения y_0 соответствующего ему однородного уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ и какого-нибудь частного решения $\overline{y}$ уравнения (8.1)

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}.$$

Суть метода Лагранжа вариации произвольных постоянных заключается в следующем. Если $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$ — общее решение однородного уравнения, то частное решение $\overline{y}(x)$ ищется в виде

$$\overline{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные пока функции, производные от которых определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0; \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{8.2}$$

Решая данную систему, находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда после интегрирования определяем $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Методом вариации произвольных постоянных решить уравнение:

а. $y'' + y' = x$

б. $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$

в. $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}\ln x$

г. $y'' - y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Решение. а) Решая однородное уравнение $y'' + y' = 0$, получаем: $y_0 = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x}$. Следовательно, решение данного уравнения можно искать в виде

$$y = C_1(x) + C_2(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Составим систему (8.2), получим

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0; \\ -C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_2'(x) = -x\mathrm{e}^x;$$

$$C_2(x) = -\int x\mathrm{e}^x\,dx = \left|\begin{array}{c} x = u \\ du = dx \\ v = \int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x \end{array}\right| =$$

$$= -\left(x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx\right) = -x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + A;$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\mathrm{e}^{-x} = x; \quad C_1(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + B$$

и, следовательно,

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + B\right) + \left(-x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + A\right)\mathrm{e}^{-x} = B + A\mathrm{e}^{-x} + 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$

б) Решая однородное уравнение $y''-2y'+y=0$, имеем $y_0 = (C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$. Ищем решение исходного уравнения в виде

$$y(x) = \left(C_1(x) + C_2(x)x\right)\mathrm{e}^x.$$

Запишем систему (8.2):

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)x\mathrm{e}^x = 0; \\ C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)(1+x)\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_2'(x) = \frac{1}{x^2+1}; \quad C_2(x) = \operatorname{arctg} x + A;$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)x = -\frac{x}{x^2+1};$$

$$C_1(x) = -\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + B.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y(x) = \mathrm{e}^x(B+Ax) + \mathrm{e}^x\left(x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right).$$

в) Решая однородное уравнение $y'' + 4y' + 4y = 0$, получим $y_0(x) = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x}$. Ищем решение данного уравнения в виде

$$y(x) = (C_1(x) + C_2(x)x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

Составим систему (8.2):

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^{-2x} + C_2'(x)x\mathrm{e}^{-2x} = 0; \\ C_1'(x)(-2\mathrm{e}^{-2x}) + C_2'(x)\left(\mathrm{e}^{-2x} - 2x\mathrm{e}^{-2x}\right) = \mathrm{e}^{-2x}\ln x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_2'(x) = \ln x;$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int\, dx = x \end{array} \right| = x\ln x - \int \frac{x\,dx}{x} = x\ln x - x + A;$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)x = -x\ln x;$$

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}\right) = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + B.$$

Общее решение:

$$y(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + B\right)\mathrm{e}^{-2x} + (x\ln x - x + A)x\mathrm{e}^{-2x} =$$

$$= (B+Ax)\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right).$$

г) Решая однородное уравнение $y''-y'=0$, получим $y_0(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^x$. Будем искать решение в виде

$$y(x)=C_1(x)+C_2(x)\mathrm{e}^x$$

Запишем систему (8.2):

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)\mathrm{e}^x=0; \\ C_2'(x)\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1'(x)=-C_2'(x)\mathrm{e}^x; \quad C_2'(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x};$$

$$C_2(x)=\int\frac{dx}{1+e^x}=\left|\begin{array}{c} 1+\mathrm{e}^x=t \\ \mathrm{e}^x\,dx=dt \\ dx=\frac{dt}{t-1} \end{array}\right|=\int\frac{dt}{(t-1)t}=\int\frac{dt}{t^2\left(1-\frac{1}{t}\right)}=$$

$$=-\int\frac{d\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}}=\ln\left|1-\frac{1}{t}\right|=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+A=\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right|+A;$$

$$C_1(x)=-\int\frac{\mathrm{e}^x\,dx}{1+\mathrm{e}^x}=-\int\frac{d(e^x+1)}{1+\mathrm{e}^x}=-\ln|1+\mathrm{e}^x|+B.$$

Общее решение имеет вид

$$y(x)=(-\ln|1+\mathrm{e}^x|+B)+\left(\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right|+A\right)\mathrm{e}^x=$$
$$=A\mathrm{e}^x+B-(1+\mathrm{e}^x)\ln(1+\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^x x.$$

8.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка»

В задачах 1—20 решить данные уравнения. Найти также решение, удовлетворяющее начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

1. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\dfrac{1}{2}x\sin 2x$.

2. $y'' - y = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$.
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-x} - 4\sqrt{x}$.

3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^x\,(C_1 + C_2 x) + \dfrac{1}{x}$.

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^x\,(x \ln|x| + C_1 x + C_2)$.

5. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.
Ответ: $y = \left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) \ln|\mathrm{e}^x + 1| + C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$.

6. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.
Ответ: $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$.

7. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.
Ответ: $y = \sin 2x \ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

8. $y'' + 2y' + y = 3\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x+1}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C_1 + C_2 x\right)$.

9. $y'' - y' = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}$.
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 + (\mathrm{e}^x + 1)\ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

10. $y'' - 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.
Ответ: $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{3}{2}x^2 \mathrm{e}^{2x}$.

11. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
Ответ: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| \cos x + 2$.

12. $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}}$.
Ответ: $y = \dfrac{1}{3}(1 - \mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}} + C_1 + \mathrm{e}^x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2x}} + \dfrac{1}{2}\arcsin \mathrm{e}^x + C_2\right)$.

13. $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\cos\mathrm{e}^{x}$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2 - \cos\mathrm{e}^{x}$.

14. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y(0) = y'(0) = 1$.
Ответ: $y = x^2 + \mathrm{e}^{x}$.

15. $2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^{x}$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{x}$.

16. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{6x} + C_2\mathrm{e}^{x} + \dfrac{5\sin x + 7\cos x}{74}$.

17. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
Ответ: $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$.

18. $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x}$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{-2x}$.

19. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.
Ответ: $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5x}{2}} + 5\sin x - 2\cos x$.

20. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1 + C_2x) + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Тренировочный тест

Задание	Ответы
1. Из дифференциальных уравнений первого порядка 1) $y' + xy = x^3$ 2) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$ 3) $y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0$ 4) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ 5) $3x + 4y - 2 + y'(x-1) = 0$ 6) $(x\cos 2y + 1)\,dx - x^2\sin 2y\,dy = 0$ 7) $y' - y\operatorname{ctg} x = \dfrac{y^3}{\sin x}$ 8) $y' = \dfrac{1-2x}{y^2}$ 9) $\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$ 10) $\left(xye^{\frac{y}{x}} + y^2\right)dx = x^2e^{\frac{y}{x}}\,dy$ выделить уравнения: а) с разделяющимися переменными; б) однородные; в) линейные; г) в полных дифференциалах; д) Бернулли.	А. Только 1), 3) и 5) Б. Только 7) В. Только 6) и 9) Г. Только 4), 9) и 10) Д. Только 2), 8) и 9)

2. Найдите общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения а) $x(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ б) $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$ в) $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$ г) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^3}{y}$ д) $(x+y^2)\,dx + (2xy+1)\,dy = 0$	А. $y = \pm x\sqrt{x^2+C}$ Б. $\operatorname{arctg} y + 0,5\ln(1+x^2) = C$ В. $\dfrac{x^2}{2} + xy^2 + y = C$ Г. $y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$ Д. $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = Cx$
3. Решите задачу Коши $y'' = 2x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$	А. $y = x^2 + 3;$ Б. $y = \dfrac{x^3}{6} + 2x + 1;$ В. $y = \dfrac{x^3}{3} + x + 1;$ Г. $y = \dfrac{x^3}{3} + 1;$ Д. $y = 2x^2 + 5x + 1.$
4. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'y'' = 1.$	А. $y = x^2 + C_1x + C_2;$ Б. $y = \dfrac{\sqrt{x+C_1}}{3} + C_2;$ В. $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2;$ Г. $y = (\sqrt{2x+C_1})^3 + C_2;$ Д. $y = \pm\dfrac{(2x+C_1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C_2.$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $$y'' + \frac{y'}{x} = \frac{1}{x^3}.$$	А. $y = C_1 \ln x + \frac{1}{x} + C_2$; Б. $y = C_1 \ln x + x + C_2$; В. $y = \frac{C_1}{x} + \ln x + C_2$; Г. $y = C_1 x \ln x + x^2 + C_2$; Д. $y = C_1 x + \frac{1}{x} + C_2$.
6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $$y'' + 3y' = 0.$$	А. $y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}$; Б. $y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-3x}$; В. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$; Г. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin 3x$; Д. $y = C_1 x + C_2 x \mathrm{e}^{-3x}$.
7. Дано линейное дифференциальное уравнение $y'' - 3y' = f(x)$, если $f(x) = \ldots$ а) 1; б) x; в) e^{3x}; г) $(x^2+1)\mathrm{e}^{3x}$; д) $\sin 3x$, то частное решение ищется в виде...	А. $A \cos 3x + B \sin 3x$; Б. Ax; В. $(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\mathrm{e}^{3x}$; Г. $Ax\mathrm{e}^{3x}$; Д. $(Ax + B)x$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $$y'' - 9y' = \mathrm{e}^{9x}.$$	А. $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{9x} + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{9}$; Б. $y = C_1 + C_2x\mathrm{e}^{9x} + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{9}$; В. $y = C_1\cos 3x + C_2x + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{3}$; Г. $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{9x} + \dfrac{x\mathrm{e}^{9x}}{9}$; Д. $C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{3}$.
9. Решите задачу Коши $$y'' + y = 2\cos 2x, y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = 0.$$	А. $y = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{2}{3}\cos 2x$; Б. $y = \cos x - \dfrac{2}{3}\cos 2x$; В. $y = 2\cos 2x + 3x\cos 2x$; Г. $y = \cos x - 3x\cos 2x$; Д. $y = \sin 2x + 2x\cos 2x$.
10. Решите задачу Коши $$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$	А. $y = \cos x + x\sin x$; Б. $y = \operatorname{tg} x + x$; В. $y = \cos x\ln\cos x + x\sin x$; Г. $y = \ln\cos x + x\sin 2x$; Д. $y = x\cos x + \ln\sin x$.

Ответы: 1. а) Д, б) Г, в) А, г) В, д) Б;
2. а) Б, б) Д, в) Г, г) А, д) В;
3. Г;
4. Д;

5. А;
6. Б;
7. а) Б, б) Д, в) Г, г) В, д) А;
8. Г;
9. Б;
10. В.

Список литературы

[1] *Краснов М.Л. и др.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 256 с.

[2] *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.

[3] *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 240 с.

[4] *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2007. 304 с.

[5] *Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 352 с.

[6] *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М.: Интеграл-Пресс, 2008, 544 с.

Содержание

Дифференциальные уравнения.
Практикум по высшей математике

Составители *КУБЫШКИНА Светлана Николаевна*
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка Е.Ю. Арланова

Оригинал-макет подготовлен с помощью
издательской системы LaTeX 2_ε

Подп. в печать 02.06.08.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. п. л. 2,32.
Уч. изд. л. 2,3. Тираж 200 экз. С. — 120. Заказ 356.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8.