С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

для технических направлений

Практикум

Самара 2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
для технических направлений

Практикум

Самара 2017

Печатается по решению ученого совета СамГТУ
(протокол №9 от 31.03.2017 г.)

УДК 517.91(076.5)
ББК 22.161.6я73

Кубышкина С. Н.
Д50 Дифференциальные уравнения для технических направлений практикум: 2-е изд. доп. и перераб. / *С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2017. – 68 с.

Приведены краткие сведения и формулы по разделу «Дифференциальные уравнения», а также большое количество примеров. Представлены задачи для самостоятельного решения. Для самоконтроля все примеры приведены с ответами. Практикум предназначен для студентов-бакалавров первого курса, изучающих математику один год.

УДК 517.91(076.5)
ББК 22.161.6я73

Составители: канд. физ.-мат. наук Кубышкина С. Н.,
канд. физ.-мат. наук Арланова Е. Ю.

Рецензент: кан. физ.–мат. наук. Небогина Е. В.

© С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова, составление, 2017
© Самарский государственный технический университет, 2017

Введение

Предлагаемый практикум посвящен методам решения задач из курса обыкновенных дифференциальных уравнений. Цель пособия — помочь студентам-бакалаврам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, описывающих процессы в различных областях естествознания. Это необходимо для понимания теории и практики таких разделов инженерного образования, как сопротивление материалов, физика, теоретическая механика, гидравлика, математическое моделирование в естествознании и др.

Каждый раздел соответствует одному практическому занятию по математике, в нем приводятся основные теоретические сведения, необходимые формулы и методы решения типовых задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделено подбору большого числа задач для самостоятельной работы. Задачи расположены по мере возрастания их сложности. Ко всем задачам приведены ответы. В заключении приведен тренировочный тест для проверки знаний студентов по данному курсу.

1. Основные понятия

Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \text{или} \quad y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

где $y = y(x)$ — искомая функция, а $y'(x)$, $y''(x)$, $\ldots$, $y^{(n)}(x)$ — ее производные, называется ***дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая данное уравнение в тождество, называется его ***решением***, а график функции — ***интегральной кривой***.

Функция $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ называется общим ***решением*** уравнения n-го порядка, если: 1) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных C_1, C_2, $\ldots$, C_n; 2) каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, можно определить такие значения постоянных C_1^0, C_2^0, $\ldots$, C_n^0, что функция

$$y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$$

удовлетворяет этим начальным условиям, т.е. будет ***частным решением*** уравнения.

Равенство $\Phi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$, неявно задающее общее решение, называется ***общим интегралом***, а равенство $\Phi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) = 0$ — ***частным интегралом*** уравнения n-го порядка. Задача отыскания частного решения данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется ***задачей Коши*** для этого уравнения.

Иногда частное решение определяется по так называемым ***краевым условиям***. Эти условия (число которых не должно превышать порядка уравнения) задаются не в одной точке, а на концах некоторого отрезка. Очевидно, что краевые условия ставятся лишь для уравнений порядка выше первого.

Для дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ (или $y' = f(x, y)$) общее и частное решения имеют вид $y = \varphi(x, C)$ и $y = \varphi(x, C_0)$ соответственно.

2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение первого порядка вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

или

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Разделив (2) на $P(x)N(y) \neq 0$, придем к уравнению

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0,$$

которое почленно интегрируется.

В результате получим общий интеграл уравнения (2) в виде

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $3y\,dx - x^2\,dy = 0$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Делим его на x^2y, полагая $x^2y \neq 0$. Получаем

$$\frac{3\,dx}{x^2} - \frac{dy}{y} = 0; \quad \frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x^2}.$$

Интегрируем обе части уравнения: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{3\,dx}{x^2}$;

$$\ln|y| = -\frac{3}{x} + \ln|C|; \tag{3}$$

(для дальнейших преобразований удобнее произвольную постоянную обозначить через $\ln|C|$, т. к. $\ln|C|$ при $C \neq 0$ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$).

Пропотенцируем обе части равенства (3):

$$\mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}+\ln|C|}; \quad \mathrm{e}^{\ln|y|} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} \cdot \mathrm{e}^{\ln|C|}.$$

Пользуясь основным логарифмическим тождеством $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ имеем $|y| = \mathrm{e}^{-\frac{3}{x}} \cdot |C|$ или $y = C\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}$ — общее решение исходного уравнения.

При делении на $x^2 y$ могли быть потеряны корни $x = 0$ и $y = 0$. Если $y = 0$, то и $dy = 0$, поэтому $y = 0$ — решение исходного уравнения, но оно получается из общего решения при $C = 0$, т. е. является частным решением. Если же $x = 0$, то и $dx = 0$, т. е. $x = 0$ — также решение данного уравнения. Но оно не может быть получено из общего решения ни при каком конкретном значении постоянной C. При делении на $x^2 y$ оно было потеряно. Итак, решениями уравнения будут $y = C\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}$, где C — произвольная постоянная, и $x = 0$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$x^2 y^2 y' + 1 = y. \tag{4}$$

Решение. Приведем уравнение к виду $M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0$:

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2 y^2\,dy = (y-1)\,dx.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{y^2}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \int \frac{y^2 - 1 + 1}{y-1}\,dy = \int \frac{dx}{x^2};$$

$$\int \frac{y^2-1}{y-1}\,dy + \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \int (y+1)\,dy + \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2};$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$ и $y-1=0$, т. е. $y=1$. Очевидно, $y=1$ — решение уравнения (4), а $x=0$ — нет.

Таким образом, решениями уравнения будут $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1| = -\frac{1}{x}+C$ и $y=1$.

Пример 3. Решить уравнение: $x(y+1)\,dx-\left(x^2+1\right)\,dy=0$.

Решение. Разделим уравнение на произведение $\left(x^2+1\right)(y+1)\neq 0$, получим

$$\frac{x\,dx}{x^2+1}-\frac{y\,dy}{y+1}=0; \quad \frac{y\,dy}{y+1}=\frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y\,dy}{y+1}=\int\frac{x\,dx}{x^2+1}; \quad \int\frac{y+1-1}{y+1}\,dy=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^2+1};$$

$$\int\frac{y+1}{y+1}\,dy-\int\frac{1}{y+1}\,dy=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1};$$

$$y-\ln|y+1|=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|C|.$$

После потенциирования получим:

$$\mathrm{e}^{y-\ln|y+1|}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{x^2+1}+\ln|C|};$$

$$\mathrm{e}^{y}\cdot\mathrm{e}^{\ln|y+1|^{-1}}=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{x^2+1}}\cdot\mathrm{e}^{\ln|C|};$$

$\frac{\mathrm{e}^y}{y+1}=C\sqrt{x^2+1}$ — общий интеграл.

При делении на $\left(x^2+1\right)(y+1)$ могли быть потеряны корни. Выражение $x^2+1\neq 0$, поэтому $y+1=0$ или $y=-1$. Подставляя $y=-1$ и $dy=0$ в исходное уравнение, убеждаемся, что это его решение. Оно не может быть получено из общего интеграла ни при каком значении постоянной C.

Итак, решениями уравнения будут $\frac{\mathrm{e}^y}{y+1}=C\sqrt{x^2+1}$ и $y=-1$.

Пример 4. Решить уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = xy(y+2)$.

Разделим переменные $\dfrac{dy}{y(y+2)} = x\,dx$.

Проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int x\,dx, \quad \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) dy = \int x\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|y+2|\right) = \frac{x^2}{2} + \ln|C|.$$

Умножим обе части на 2 и к левой части применим свойство логарифмов $\ln\left|\dfrac{a}{b}\right| = \ln|a| - \ln|b|$:

$$\ln\frac{|y|}{|y+2|} = x^2 + 2\ln|C|.$$

Переобозначим $2\ln|C| = \ln|C_1|$: $\ln\dfrac{|y|}{|y+2|} = x^2 + \ln|C_1|$. После потенцирования имеем

$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = \mathrm{e}^{x^2} \cdot C_1.$$

При делении на $y(y+2)$ могли быть потеряны корни $y = 0$ и $y = -2$. Очевидно, они являются решениями исходного уравнения. $y = 0$ содержится в полученном решении (если $C_1 = 0$). Таким образом, решениями уравнения будут $\left|\dfrac{y}{y+2}\right| = \mathrm{e}^{x^2} \cdot C_1$ и $y = -2$.

Пример 5. Найти решение уравнения $y' = -\dfrac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, разделим переменные $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$. Интегрируя $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$, получим $\ln|y| =$

$= -\ln|x| + \ln|C|$. После потенцирования получим общее решение $y = \dfrac{C}{x}$. При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но оно содержится в общем решении при $C = 0$. Используя заданное начальное условие, получим $y(1) = \dfrac{C}{1} = 2 \Rightarrow C = 2$, и, следовательно, частное решение есть $y = \dfrac{2}{x}$.

Пример 6. Найти решение уравнения $\mathrm{e}^x\,dx - (1+\mathrm{e}^x)\,y\,dy = 0$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $y\,dy = \dfrac{\mathrm{e}^x\,dx}{1+\mathrm{e}^x}$. Интегрируя $\displaystyle\int y\,dy = \int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{1+\mathrm{e}^x}$, находим $\dfrac{y^2}{2} = \ln(1+\mathrm{e}^x) + \ln C$; $\dfrac{y^2}{2} = \ln(C\,(1+\mathrm{e}^x))$; $y^2 = 2\ln(C\,(1+\mathrm{e}^x))$; $y^2 = \ln\left(C^2\,(1+\mathrm{e}^x)^2\right)$; $y = \sqrt{\ln\left(C_1\,(1+\mathrm{e}^x)^2\right)}$, где $C_1 = C^2$.

Используя заданное условие, получим

$$y(0) = \sqrt{\ln\left(C_1\,(1+\mathrm{e}^0)^2\right)} = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{\mathrm{e}}{4},$$

и, следовательно, частное решение имеет вид $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\,(1+\mathrm{e}^x)^2\right)}$. Преобразуем его: $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\,(1+\mathrm{e}^x)^2\right) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right) + \ln(1+\mathrm{e}^x)^2 =$ $= \ln\mathrm{e} - \ln 4 + \ln(1+\mathrm{e}^x)^2 = 1 + \ln\frac{(1+\mathrm{e}^x)^2}{2^2} = 1 + 2\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)$, отсюда

$$y = \sqrt{1 + 2\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}.$$

2.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Уравнения с разделяющимися переменными»

В задачах 1—20 решить уравнения. Найти также решение, удовлетворяющее начальным условиям (в тех задачах, где они указаны).

1. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$.
Ответ: $y = C(x+1)\mathrm{e}^{-x}$; $x = -1$.

2. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.
Ответ: $\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$; $x = 0$.

3. $\left(x^2-1\right)y' + 2xy^2 = 0$; $y(0) = 1$.
Ответ: $y\left(\ln\left|x^2-1\right| + C\right) = 1$; $y = 0$; $y\left(\ln\left|x^2-1\right| + 1\right) = 1$.

4. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$; $y(0) = -1$.
Ответ: $y = 2 + C\cos x$; $y = 2 - 3\cos x$.

5. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; $y(2) = 0$.
Ответ: $y = (x+C)^3$; $y = 0$; $y = (x-2)^3$; $y = 0$.

6. $xy' + y = y^2$; $y(1) = 0,5$.
Ответ: $y(1-Cx) = 1$; $y = 0$; $y(1+x) = 1$.

7. $2x^2yy' + y^2 = 2$.
Ответ: $y^2 - 2 = C\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

8. $y' - xy^2 = 2xy$.
Ответ: $\left(C\mathrm{e}^{-x^2} - 1\right)y = 2$; $y = 0$.

9. $y' = 10^{x+y}$.
Ответ: $y = -\lg\left(C - 10^x\right)$.

10. $y\dfrac{dy}{dt} + t = 1$.
Ответ: $y^2 + t^2 - 2t = C$.

11. $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
Ответ: $y = \ln\left(1+x^2\right) + C$.

12. $y' = y \ln y$.
Ответ: $\ln y = C\mathrm{e}^x$.

13. $y' \operatorname{tg} x = y$.
Ответ: $y = C \sin x$.

14. $xyy' = 1 - x^2$.
Ответ: $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$.

15. $xy' - y = y^3$.
Ответ: $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$.

16. $y - xy' = 1 + x^2 y'$.
Ответ: $y = \dfrac{1+Cx}{1+x}$.

17. $2xy' + y^2 = 1$.
Ответ: $\dfrac{1+y}{1-y} = xC$.

18. $xy' + y = y^2$.
Ответ: $Cx = \dfrac{y-1}{y}$.

19. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2 y)\,dy = 0$.
Ответ: $1 + y^2 = C(1 - x^2)$.

20. $\operatorname{tg} x \sin^2 y\,dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\,dy = 0$.
Ответ: $\operatorname{ctg}^2 y = \operatorname{tg}^2 x + C$.

21. $y' \sin x = y \ln y$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

22. $\sin y \cos x\, dy = \cos y \sin x\, dx$; $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $\cos x = \sqrt{2} \cos y$.

3. Однородные уравнения

Функция $F(x,\, y)$ называется ***однородной степени k***, если для всех $\lambda > 0$ выполняется равенство $F(\lambda x,\, \lambda y) = \lambda^k F(x,\, y)$. Примером однородной функции может служить любая форма (однородный многочлен) степени k.

Функции $\dfrac{x-y}{x+y}$, $\dfrac{x^2+xy}{x-y}$, x^2+y^2-xy, $x^{k-1}y+y^k$ являются однородными соответственно степени 0, 1, 2, k.

Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = f(x,\, y)$ называется ***однородным***, если $f(x,\, y)$ — однородная функция степени нуль.

Уравнение $M(x,\, y)\, dx + N(x,\, y)\, dy = 0$ является ***однородным***, если $M(x,\, y)$ и $N(x,\, y)$ — однородные функции одной и той же степени. Замена $y = zx$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $y' = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

Решение. Здесь функция $f(x,\, y) = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ — однородная нулевой степени, так как

$$f(\lambda x,\, \lambda y) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{\lambda y}} + \frac{\lambda x}{\lambda y} = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \lambda^0 \cdot f(x,\, y).$$

Полагаем $y = zx$, тогда $y' = z'x + z$. Подставим в уравнение замену, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$z'x + z = \mathrm{e}^{\frac{zx}{x}} + \frac{zx}{x}; \quad z'x + z = \mathrm{e}^{z} + z;$$

$$z'x = \mathrm{e}^{z}; \quad \frac{dz}{dx}x = \mathrm{e}^{z}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dz}{\mathrm{e}^z} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{\mathrm{e}^z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \mathrm{e}^{-z}\, dz = \int \frac{dx}{x}; \quad -\mathrm{e}^{-z} = \ln|x| + \ln C;$$

$$-\mathrm{e}^{-z} = \ln x \cdot C; \quad \mathrm{e}^{-z} = -\ln x \cdot C.$$

Логарифмируя левую и правую часть, получим

$$\ln \mathrm{e}^{-z} = \ln\left(\ln\frac{1}{x \cdot C}\right); \quad -z = \ln\left(\ln\frac{C_1}{x}\right), \text{ где } C_1 = \frac{1}{C};$$

$$\frac{y}{x} = -\ln\left(\ln\frac{C_1}{x}\right); \quad y = -x\ln\left(\ln\frac{C_1}{x}\right).$$

Пример 2. Решить уравнение: $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Решение. Это однородное уравнение, т. к. $f(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ — однородная функция нулевой степени, т. е.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{\lambda^2\left(y^2 - x^2\right)}{2\lambda^2 xy} = \lambda^0 f(x,y).$$

Полагая $y = zx$, $y' = z'x + z$, получим:

$$z'x + z = \frac{z^2x^2 - x^2}{2xzx}; \quad z'x + z = \frac{x^2\left(z^2 - 1\right)}{2x^2 z};$$

$$z'x + z = \frac{z^2 - 1}{2z}; \quad z'x = \frac{z^2 - 1}{2z} - z = \frac{z^2 - 1 - 2z^2}{2z} = -\frac{1 + z^2}{2z};$$

$$\frac{dz}{dx}x = -\frac{1 + z^2}{2z}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{2z\, dz}{1 + z^2} = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{2z\, dz}{1 + z^2} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2\,d\left(z^2+1\right)}{1+z^2}=-\int\frac{dx}{x};\ln\left|1+z^2\right|=-\ln|x|+\ln C;\quad 1+z^2=\frac{C}{x}.$$

Согласно замене $z=\dfrac{y}{x}$, получим

$$1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{C}{x};\quad x^2+y^2=Cx.$$

Пример 3. Решить уравнение: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy+y^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$.

Решение. Здесь функция $f(x,y)=\dfrac{xy+y^2\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$ — однородная нулевой степени, т. к.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x\lambda y+(\lambda y)^2\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{\lambda y}}}{\lambda x^2}=\lambda^0 f(x,y).$$

Положив $y=zx$, получим

$$x\frac{dz}{dx}+z=z+z^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}};\quad x\frac{dz}{dx}=z^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{z}}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z^2}\,dz=\frac{dx}{x};\quad -\int\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,d\frac{1}{z}=\int\frac{dx}{x};$$

$$-\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\ln|x|+C;\quad \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}+\ln|x|=C;\quad \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+\ln|x|=C.$$

Пример 4. Решить уравнение: $\left(x^2+y^2\right)\,dx-2xy\,dy=0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

Здесь функция $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ — однородная нулевой степени, т. к.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}{2\lambda x\lambda y}=\lambda^0 f(x,y).$$

Введем замену $y = zx$, $y' = z'x + z$:

$$z'x + z = \frac{x^2 + z^2x^2}{2xzx} = \frac{1 + z^2}{2z};$$

$$z'x = \frac{1 + z^2}{2z} - z = \frac{1 + z^2 - 2z^2}{2z} = \frac{1 - z^2}{2z}.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1 - z^2}{2z}; \quad \frac{2z\,dz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}; \quad -\int \frac{d(1 - z^2)}{1 - z^2} = \int \frac{dx}{x};$$

$$-\ln\left|1 - z^2\right| = \ln|x| + \ln C; \quad \ln|x| + \ln\left|1 - z^2\right| = \ln C;$$

$$\ln\left(x\left(1 - z^2\right)\right) = \ln C; \quad x\left(1 - z^2\right) = C.$$

Но $z = \dfrac{y}{x}$, поэтому получаем

$$x\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = C; \quad \frac{x\left(x^2 - y^2\right)}{x^2} = C;$$

$$x^2 - y^2 = Cx; \quad x^2 - y^2 - Cx = 0$$

— общий интеграл данного уравнения.

3.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Однородные уравнения»

В задачах 1—15 решить данные уравнения.

1. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$.
Ответ: $x + y = Cx^2$; $x = 0$.

2. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$.
Ответ: $\ln\left(x^2 + y^2\right) = C - 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3. $\left(y^2 - 2xy\right)\, dx + x^2\, dy = 0.$
Ответ: $x(y - x) = Cy;\ y = 0.$

4. $2x^3 y' = y\left(2x^2 - y^2\right).$
Ответ: $x = \pm y\sqrt{\ln|Cx|};\ y = 0.$

5. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$

6. $\left(x^2 + y^2\right) y' = 2xy.$
Ответ: $y^2 - x^2 = Cy;\ y = 0.$

7. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}.$
Ответ: $\sin\dfrac{y}{x} = Cx.$

8. $xy' = y - x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$
Ответ: $y = -x\ln\left(\ln|Cx|\right).$

9. $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}.$
Ответ: $\ln\left|\dfrac{x + y}{x}\right| = Cx.$

10. $y' = \dfrac{y}{x} - 1.$
Ответ: $y = x\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|.$

11. $y' = -\dfrac{x + y}{x}.$
Ответ: $y = \dfrac{C}{x} - \dfrac{x}{2}.$

12. $(x - y)y\, dx - x^2\, dy = 0.$
Ответ: $x = C\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$

13. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.
Ответ: $\sqrt{\dfrac{x}{y}} + \ln|y| = C$.

14. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.
Ответ: $y - 2x = Cx^3(y + x)$.

15. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.
Ответ: $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

16. $x^2y' = y(x + y)$.
Ответ: $\dfrac{x}{y} + \ln|x| = C$.

17. $(4y^2 + x^2)y' = xy$.
Ответ: $\ln|y| = \dfrac{x^2}{8y^2} + C$.

18. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$.
Ответ: $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.

19. $(xy' - y)\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$; $y(1) = 0$.
Ответ: $e^{\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

20. $y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$; $y(0) = 1$.
Ответ: $(\sqrt{x} - \sqrt{y - x})^2 = 1$.

4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ — функции, непрерывные на $[a, b]$, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. Его решение ищут в виде

$y(x) = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — две неизвестные функции. После подстановки в уравнение выражений для y и y' получаем

$$v\frac{du}{dx} + \left(\frac{dv}{dx} + p(x)v\right)u = q(x).$$

В качестве $v(x)$ выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $\dfrac{dv}{dx} + p(x)v = 0$, тогда функция $u(x)$ определяется из уравнения $v\dfrac{du}{dx} = q(x)$.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \in R$ ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$), называется ***уравнением Бернулли***. Путем подстановки $z = y^{1-\alpha}$ оно сводится к линейному. Его можно решать и непосредственно, применяя подстановку $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение: $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 2x^4$.

Решение. Это линейное уравнение. Ищем решение этого уравнения в виде произведения двух функций: $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + v'u$. Имеем

$$x\left(u'v + v'u\right) - 2uv = 2x^4;$$

$$xu'v + u\left(xv' - 2v\right) = 2x^4.$$

Выберем функцию v так, чтобы $xv' - 2v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решим его, разделяя переменные и интегрируя.

$$x\frac{dv}{dx} = 2v; \quad \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2\,dx}{x};$$

$$\ln v = 2\ln x; v = x^2.$$

Функцию $u(x)$ находим из уравнения

$$xu'v = 2x^4; \quad xu'x^2 = 2x^4;$$

$$x^3u' = 2x^4; \quad \frac{du}{dx} = 2x; \quad u(x) = x^2 + C.$$

Следовательно, все решения исходного уравнения определяются формулой $y = Cx^2 + x^4$.

Пример 2. Решить уравнение: $y' - 2xy = 3x$.

Решение. Это линейное уравнение. Берем замену $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + v'u$. Подставляя выражения для y и y' в данное уравнение, получаем

$$u'v + v'u - 2xuv = 3x; \quad u'v + u\left(v' - 2xv\right) = 3x.$$

Функцию v выбираем так, чтобы

$$v' - 2xv = 0.$$

Решим это уравнение, разделяя переменные

$$\frac{dv}{dx} = 2xv; \quad \int \frac{dv}{v} = \int 2x\,dx; \quad \ln|v| = x^2; \quad v = \mathrm{e}^{x^2}.$$

Для нахождения $u(x)$ имеем уравнение

$$u'v = 3x; \quad u'\mathrm{e}^{x^2} = 3x; \quad u' = 3x\mathrm{e}^{-x^2};$$

$$\int du = \int 3x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx; \quad \int du = -\frac{3}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}\,d(-x^2); \quad u = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C.$$

Следовательно, все решения уравнения определяются формулой

$$y = \mathrm{e}^{x^2}\left(-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + C\right) = -\frac{3}{2} + C\mathrm{e}^{x^2}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$.

Решение. Ищем решение в виде $y(x) = u(x)v(x)$, $y' = u'v + v'u$. Имеем

$$u'v + v'u + uv\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x};$$

$$u'v + u\left(v' + v\cos x\right) = \mathrm{e}^{-\sin x}.$$

Выберем функцию v так, чтобы $v' + v\cos x = 0$. Решаем это уравнение, разделяя переменные

$$\frac{dv}{dx} = -v\cos x; \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \cos x\, dx;$$

$$\ln v = -\sin x; \quad v = \mathrm{e}^{-\sin x}.$$

Функцию $u(x)$ находим из уравнения

$$u'v = \mathrm{e}^{-\sin x}; \quad u'\mathrm{e}^{-\sin x} = \mathrm{e}^{-\sin x};$$

$$u' = 1; \quad \frac{du}{dx} = 1; \quad \int du = \int dx; \quad u = x + C.$$

Таким образом, решение исходного уравнения определяется формулой

$$y = (x + C)\mathrm{e}^{-\sin x}.$$

Пример 4. Решить уравнение: $y' + y = x \cdot y^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Согласно подстановке $z = y^{1-\alpha}$, при $\alpha = \dfrac{1}{2}$, будем иметь $z = y^{\frac{1}{2}}$. Тогда $z' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$. После замены исходное уравнение примет вид

$$z' \cdot 2z + z^2 = xz; \quad z' + \frac{z^2}{2z} = \frac{xz}{2z}; \quad z' + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}x.$$

Это уже уравнение, линейное относительно z и z'. Как обычно, $z = uv$, $z' = u'v + v'u$. После подстановки получаем

$$u'v + v'u + \frac{1}{2}uv = \frac{1}{2}x; \quad u'v + u\left(v' + \frac{1}{2}v\right) = \frac{1}{2}x.$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $v' + \dfrac{1}{2}v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решая его, получим:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}v; \quad \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\int dx;$$

$$\ln v=-\frac{1}{2}x;\quad v=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

Функцию $u(x)$ найдем из уравнения

$$u'v=\frac{1}{2}x;\quad \frac{du}{dx}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}x;\quad \int du=\frac{1}{2}\int x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx.$$

Решим отдельно

$$\int x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}dx=\left[\begin{array}{c}\int u\,dv=uv-\int v\,du\\ \text{(формула интегрирования по частям)}\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}u=x;\quad du=dx;\\ v=\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}dx=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\end{array}\right]=2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\int \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,dx=2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C.$$

Тогда

$$u(x)=\frac{1}{2}\left(2x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C\right)=x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C.$$

Возвращаясь к переменной $y=z^2=(uv)^2$, будем иметь

$$y=\left(\left(x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+C\right)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2=\left(x-2+C\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right)^2$$

— общее решение.

Пример 5. Решить уравнение: $xy'+y=y^2\ln x$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Будем решать его с помощью подстановки $y(x)=u(x)v(x)$. Тогда $y'=u'v+v'u$. Подставим выражения для y и y' в заданное уравнение, получаем

$$xu'v+u\left(xv'+v\right)=u^2v^2\ln x.$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы $xv'+v=0$, откуда

$$\frac{x\,dv}{dx}=-v;\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x};\quad \ln v=-\ln x;\quad v=\frac{1}{x}.$$

Для функции $u(x)$ получаем уравнение

$$xu'\frac{1}{x}=u^2\frac{1}{x^2}\ln x;\quad u'=\frac{u^2\ln x}{x^2};\quad \frac{du}{dx}=\frac{u^2\ln x}{x^2};\int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

Решим отдельно

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = \frac{-\ln x - 1 + C}{x} = -\frac{\ln x + 1 + C}{x}.$$

После интегрирования, получим

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x + 1 + C}{x}; \quad u = \frac{x}{\ln x + 1 + C}.$$

Окончательно имеем

$$y = \frac{x}{\ln x + 1 + C} \cdot \frac{1}{x}; \quad y(\ln x + 1 + C) = 1$$

— общий интеграл данного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение: $y' + 2y = \mathrm{e}^x y^2$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Замена: $z = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y}$; $y = \frac{1}{z}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$, $y' = -z'y^2$. Получим уравнение

$$-z'\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} = \frac{\mathrm{e}^x}{z^2}.$$

Умножим левую и правую части на $(-z^2)$:

$$z' - 2z = -\mathrm{e}^x.$$

Указанная замена привела исходное уравнение к линейному. Будем решать его с помощью подстановки $z = u(x)v(x)$.

$$u'v + v'u - 2uv = -\mathrm{e}^x; \quad u'v + u(v' - 2v) = -\mathrm{e}^x.$$

Функцию v выберем так, чтобы

$$v' - 2v = 0; \quad \int \frac{dv}{v} = 2\int dx; \quad \ln v = 2x; \quad v = \mathrm{e}^{2x}.$$

Функцию u найдем из уравнения

$$u'\mathrm{e}^{2x} = -\mathrm{e}^{x}; \quad u' = -e^{-x}; \quad \int du = -\int \mathrm{e}^{-x}\,dx; \quad u = \left(\mathrm{e}^{-x} + C\right).$$

Учитывая замену, окончательно имеем

$$z = \left(\mathrm{e}^{-x} + C\right) \cdot \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{2x}; \quad y = \frac{1}{\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{2x}}$$

или

$$y\left(\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{2x}\right) = 1$$

— общий интеграл данного уравнения.

4.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $y' + y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.
Ответ: $y = \sin x + C\cos x$.

2. $xy' - xy = \mathrm{e}^{x}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{x}\left(\ln|x| + C\right)$, $x = 0$.

3. $x^2y' + xy + 1 = 0$.
Ответ: $xy = C - \ln|x|$.

4. $y = x\left(y' - x\cos x\right)$.
Ответ: $y = x\left(C + \sin x\right)$.

5. $y' - 2xy = 2x^3$.
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{x^2} - x^2 - 1$.

6. $y' - \dfrac{2y}{x\ln x} = \dfrac{1}{x}$.
Ответ: $y = C\ln^2 x - \ln x$.

7. $y' - \dfrac{2}{x} y = \mathrm{e}^x x^2$.
Ответ: $y = \left(\mathrm{e}^x + C\right) x^2$.

8. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.
Ответ: $y = \dfrac{x + C}{\cos x}$.

9. $y' + 2y = 4x$.
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1$.

10. $y' + \dfrac{1 - 2x}{x^2} y = 1$.
Ответ: $y = Cx^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2$.

11. $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{-x^2} \left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$.

12. $y' + y = \cos x$.
Ответ: $y = C\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2} (\cos x + \sin x)$.

13. $\left(1 + x^2\right) y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$.
Ответ: $y = (x + C) \left(1 + x^2\right)$.

14. $y' - \dfrac{y}{x} = x$.
Ответ: $y = Cx + x^2$.

15. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$.
Ответ: $y = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{C}{x^2}$.

16. $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.
Ответ: $y \left(x^2 + Cx\right) = 1$.

17. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.
Ответ: $\dfrac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

18. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$.
Ответ: $y = \dfrac{1}{(1+x)(C + \ln|1+x|)}$.

19. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.
Ответ: $y(x + C) = \dfrac{1}{\cos x}$.

20. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$.
Ответ: $y = \dfrac{x^4}{4} \ln^2 |Cx|$.

21. $(2 + x^2)y' - 2xy = (2 + x^2)^2$; $y(3) = 22$.
Ответ: $y = (x^2 + 2)(x + C)$, $y = (x^2 + 2)(x - 1)$.

5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. В этом случае уравнение можно записать в виде $du(x, y) = 0$, откуда следует, что соотношение $u(x, y) = C$ является его общим интегралом.

Выражение $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$, где M, N — непрерывные функции вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой области D, есть ***полный дифференциал*** тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ во всей области D.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)\,dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)\,dy = 0.$$

Решение. $M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $N(x, y) = 6x^2y + 4y^3$.

Так как $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 12xy$; $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 12xy$; $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, то данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Значит

$$M\,dx + N\,dy = du.$$

Следовательно

$$M\,dx + N\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = M; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N;$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x, считая y постоянной:

$$u(x, y) = \int \left(3x^2 + 6xy^2\right)\,dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 6y^2\cdot\frac{x^2}{2} + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — произвольная непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y).$$

Определим $\varphi(y)$, используя второе уравнение системы

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3; \quad \varphi'(y) = 4y^3; \quad \varphi(y) = y^4 + C.$$

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C.$$

Общий интеграл дифференциального уравнения: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)\,dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0.$$

Решение.

$$M(x, y) = 2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right), \quad N(x, y) = -\sqrt{x^2 - y};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right); \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y}. \end{cases}$$

Проинтегрируем второе уравнение по y:

$$u(x, y) = -\int \sqrt{x^2 - y}\, dy = \frac{2}{3}\left(x^2 - y\right)^{\frac{3}{2}} + \varphi(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x^2 - y)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x + \varphi'(x);$$

$$2x\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(x) = 2x + 2x\sqrt{x^2 - y};$$

$$\varphi'(x) = 2x; \quad \varphi(x) = x^2 + C; \quad u(x, y) = \frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2 - y\right)^3} + x^2 + C.$$

Общий интеграл $\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2 - y\right)^3} + x^2 + C = 0.$

Пример 3. Решить уравнение:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x - y)^2}\right) dx + \left(\frac{x^2}{(x - y)^2} - \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Решение.

$$M(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x - y)^2}, \quad N(x, y) = \frac{x^2}{(x - y)^2} - \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x - y)^3};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x:

$$u(x, y) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x - y)^2}\right) dx = \ln|x| + \frac{y^2}{(x - y)} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2xy-y^2}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=\frac{x^2-(x^2-2xy+y^2)}{(x-y)^2}+\varphi'(y)=$$
$$=\frac{x^2}{(x-y)^2}-1+\varphi'(y)=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y};$$

$$\varphi'(y)=1-\frac{1}{y};\quad \varphi(y)=y-\ln|y|+C;$$

$$u(x,y)=\ln|x|+\frac{y^2}{(x-y)}+y-\ln|y|+C.$$

Общий интеграл $\ln\left|\frac{x}{y}\right|+\frac{xy}{(x-y)}=C$.

Пример 4. Решить уравнение:

$$\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy=0.$$

Решение.

$$M(x,y)=\frac{x}{\sin y}+2,\quad N(x,y)=\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{x\cos y}{\sin^2 y};$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sin y}+2;\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}.\end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x:

$$u(x,y)=\int\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx=\frac{x^2}{2\sin y}+2x+\varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y}+\varphi'(y);\quad -\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y}+\varphi'(y)=\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1};$$

$$-\frac{x^2\cos y}{2\sin^2 y}+\varphi'(y)=\frac{x^2\cos y}{-2\sin^2 y}+\frac{\cos y}{-2\sin^2 y};$$

$$\varphi'(y) = -\frac{\cos y}{2\sin^2 y}; \quad \varphi(y) = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos y\, dy}{\sin^2 y} = \frac{1}{2\sin y} + C;$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \frac{1}{2\sin y} + C.$$

Общий интеграл $x^2 + 1 + 4x\sin y + C\sin y = 0$.

Пример 5. Решить уравнение: $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x}\right) dy = 0;$$

$$M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}, \quad N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - \frac{1}{x^2};$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Проинтегрируем первое уравнение по x:

$$u(x,y) = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\int \frac{dx}{x^2} = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \varphi'(y); \quad \varphi'(y) = 0; \quad \varphi(y) = C;$$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} + C.$$

Общий интеграл $\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y}{x} + C = 0$.

5.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Уравнения в полных дифференциалах»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$
Ответ: $(3x^2y - y^3) = C.$

2. $(2 - 9xy^2)x\,dx + (4y^2 - 6x^3)y\,dy = 0.$
Ответ: $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C.$

3. $\mathrm{e}^{-y}\,dx - \left(2y + x\mathrm{e}^{-y}\right)\,dy = 0.$
Ответ: $x\mathrm{e}^{-y} - y^2 = C.$

4. $\dfrac{y}{x}\,dx + \left(y^3 + \ln x\right)\,dy = 0.$
Ответ: $4y\ln x + y^4 = C.$

5. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0.$
Ответ: $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C.$

6. $\left(1 + y^2\sin 2x\right)\,dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0.$
Ответ: $x - y^2\cos^2 x = C.$

7. $\left(2x + 3x^2y\right)\,dx + \left(x^3 - 3y^2\right)\,dy = 0.$
Ответ: $x^2 + x^3y - y^3 = C.$

8. $\left(2x^3 - xy^2\right)\,dx + \left(2y^3 - x^2y\right)\,dy = 0.$
Ответ: $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C.$

9. $\dfrac{x\,dy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)\,dx.$
Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} - x + C = 0.$

10. $\mathrm{e}^{y}\,dx + (x\mathrm{e}^{y} - 2y)\,dy = 0.$
Ответ: $x\mathrm{e}^{y} - y^2 = C.$

11. $yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy = 0.$
Ответ: $x^y = C.$

12. $\dfrac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}\,dx + \dfrac{x\,dy}{\cos^2(xy)} + \sin y\,dy = 0.$
Ответ: $\operatorname{tg}(xy) - \cos x - \cos y = C.$

13. $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)\,dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) y\,dy = 0.$
Ответ: $x + \dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3} - \dfrac{y^2}{2} + C = 0.$

14. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$
Ответ: $\dfrac{x^2}{2} + xy + y^2 = C.$

15. $\left(x^2 + y^2 + 2x\right)\,dx + 2xy\,dy = 0.$
Ответ: $\dfrac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C.$

16. $\left(x^3 - 3xy^2 + 2\right)\,dx - \left(3x^2 y - y^2\right)\,dy = 0.$
Ответ: $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 y^2 + 2x + \dfrac{y^3}{3} = C.$

17. $x\,dx + y\,dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$
Ответ: $x^2 + y^2 + 2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = C.$

18. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$
Ответ: $x^2 - y^2 = Cy^3.$

19. $3x^2 y(1 + \ln y)dx + (x^3 - 2y^2)dy = 0.$
Ответ: $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C.$

20. $(x^2 y - 1)y' + xy^2 - 1 = 0.$
Ответ: $x^2 y^2 - 2(x + y) = C.$

6. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Общий вид дифференциальных уравнений высшего порядка

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Допускают понижение порядка следующие типы дифференциальных уравнений.

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решают путем n—кратного интегрирования.
2. Уравнение вида $F\left(x, y', y''\right) = 0$, явно не содержащее искомой функции $y(x)$, сводят к уравнению первого порядка путем введения новой неизвестной функции $z = z(x)$, полагая $y'(x) = z(x)$, $y''(x) = z'(x)$. Тогда уравнение принимает вид $F\left(x, z, z'\right) = 0$.
3. Уравнение вида $F\left(y, y', y''\right) = 0$, явно не содержащее независимой переменной x, интегрируют с помощью подстановки $p = y'$, где $p = p(y)$ — новая неизвестная функция, а за аргумент временно принята переменная y. Тогда $y'' = p \cdot p'$. При этом порядок уравнения понижается на единицу.
4. Если левая часть дифференциального уравнения есть точная производная какой—либо функции, то порядок уравнения так же можно понизить.

Примеры точных производных

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)'; \quad \frac{y''}{y'} = \left(\ln y'\right)';$$

$$xy'' + y' = \left(xy'\right)'; \quad yy'' + (y')^2 = (yy')';$$

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)'$$

и так далее.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение уравнения: $y''' = x^2 + \sin 2x$.

Решение. Правая часть данного уравнения есть функция только переменной x, поэтому оно решается трехкратным интегрированием:

$$y'' = \int \left(x^2 + \sin 2x\right)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\cos 2x + C_1;$$

$$y' = \frac{x^4}{12} - \frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2; \quad y = \frac{x^5}{60} + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Пример 2. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y'' = x\ln x \\ y(1) = 1, y'(1) = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$y' = \int x\ln x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C_1.$$

Найдем C_1 из начальных условий

$$y'(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{4} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4};$$

$$y' = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Проинтегрируем еще раз

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 \ln x\, dx - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x + C_2.$$

Вычислим

$$\int x^2 \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Тогда

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right) - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x + C_2 = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5x^3}{36} + \frac{x}{4} + C_2.$$

Найдем C_2 из начальных условий:

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{6}\ln 1 - \frac{5}{36} + \frac{1}{4} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{8}{9}.$$

Общее решение:

$$y(x) = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{5}{36}x^3 + \frac{x}{4} + \frac{8}{9}.$$

Пример 3. Решить уравнение: $xy'' = y'$.

Решение. В уравнении отсутствует искомая функция y, согласно пункту 2 делаем замену $y' = z$, $y'' = z'$. Получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$xz' = z; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|; \quad z = C_1 x.$$

Вернемся к переменной y: $y' = C_1 x$, интегрируя это уравнение, находим $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2$ или $y = C_1 x^2 + C_2$.

Пример 4. Решить уравнение: $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Решение. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Сделаем замену $z = y'$, $z' = y''$, где $z = z(x)$. Получим линейное уравнение

$$z' + z \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

Сделаем замену переменной: $z = uv$. Тогда $u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \sin 2x$;

$$\begin{cases} v' + v\operatorname{tg} x = 0; \\ u'v = \sin 2x; \end{cases}$$

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x\, dx; \quad \ln v = \ln|\cos x|; \quad v = \cos x;$$

$$u'\cos x = \sin 2x; \quad u = -2\cos x + C_1.$$

Таким образом, решение имеет вид $z(x) = -2\cos^2 x + C_1\cos x$. Возвращаясь к первоначальной переменной y, имеем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = -2\cos^2 x + C_1\cos x,$$

интегрируя которое, находим

$$y = -x - \frac{\sin 2x}{2} + C_1\sin x + C_2.$$

Пример 5. Решить уравнение: $yy'' = (y')^2$.

Решение. В дифференциальном уравнении отсутствует независимая переменная x. Согласно пункту 3, $y' = p(y)$, $y'' = pp'$. Уравнение принимает вид $yp'p = p^2$. Разделив обе части уравнения на p ($p \neq 0$, $y' \neq 0$, значит $y = A$ является решением), получим

$$yp' = p; \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}; \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln C_1; \quad p = yC_1;$$

$$y' = yC_1; \quad \frac{dy}{dx} = yC_1; \quad \frac{dy}{y} = C_1\, dx; \quad \ln|y| = C_1 x + C_2.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$y = \mathrm{e}^{C_1 x + C_2}.$$

$y = A$ входит при $C_1 = 0$.

Пример 6. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} 4y''\sqrt{y} = 1; \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$$

Решение. Дифференциальное уравнение не содержит независимую переменную x. Сделаем замену переменных $y' = p(y)$, $y'' = pp'$, тогда

$$4p'p\sqrt{y} = 1.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$2p\,dp = \frac{dy}{2\sqrt{y}}(y \neq 0); \quad p^2 = \sqrt{y} + C_1; \quad (y')^2 = \sqrt{y} + C_1.$$

Найдем C_1:

$$\big(y'(0)\big)^2 = \sqrt{y(0)} + C_1; \quad 1 = \sqrt{1} + C_1; \quad C_1 = 0.$$

Вернемся к старой переменной:

$$(y')^2 = \sqrt{y}; \quad y' = \pm\sqrt[4]{y}.$$

Так как $y'(0) = -1 < 0$, то

$$y' = -\sqrt[4]{y}; \quad \frac{dy}{\sqrt[4]{y}} = -\,dx; \quad \frac{4}{3}y^{\frac{3}{4}} = -x + C_2.$$

Найдем C_2:

$$\frac{4}{3} \cdot 1 = C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{4}{3}; \quad \frac{4}{3}y^{\frac{3}{4}} = -x + \frac{4}{3};$$

$$y = \left(1 - \frac{3}{4}x\right)^{\frac{4}{3}} \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{4}x\right)^4}$$

— решение задачи Коши.

Пример 7. Решить уравнение: $yy'' = y'^2$.
Решение. Разделим обе части уравнения на yy', получим

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}.$$

Обе части уравнения являются полными производными по x, значит

$$\left(\ln y'\right)' = (\ln y)'\,; \quad \ln y' = \ln y + \ln C; \quad y' = yC;$$

$$\frac{dy}{y} = C\,dx; \quad \ln y = Cx + C_1; \quad y = C_2\mathrm{e}^{Cx}.$$

6.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка»

В задачах 1—20 решить данные уравнения.

1. $y'' = x + \sin x$.
Ответ: $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$.

2. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.
Ответ: $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + C_2$.

3. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.
Ответ: $y = \left(C_1 x - C_1^2\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$.

4. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.
Ответ: $y = \pm\dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1 x - 1)^3} + C_2$.

5. $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$
Ответ: $y = \dfrac{C_1 x + C_2 - 1}{C_1 x + C_2}.$

6. $yy'' + (y')^2 = 1.$
Ответ: $y^2 = (x + C_1)^2 + C_2.$

7. $yy'' - yy' \ln y = (y')^2.$
Ответ: $\dfrac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \dfrac{\ln y}{C_1} = \dfrac{x + C_2}{2}.$

8. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$; $y(2) = 0$; $y'(2) = 4.$
Ответ: $y = \dfrac{2}{5} x^2 \sqrt{2x} - \dfrac{16}{5}.$

9. $2y'' = 3y^2$; $y(-2) = 1$; $y'(-2) = -1.$
Ответ: $y = \dfrac{4}{(x+4)^2}.$

10. $y''' = \dfrac{1}{x}.$
Ответ: $y = x^2 \ln \sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

11. $xy''' - y'' = 0.$
Ответ: $y = C_1 \dfrac{x^3}{6} + C_2 x + C_3.$

12. $y'' = \mathrm{e}^{2y}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1.$
Ответ: $y = -\ln |x - 1|.$

13. $y^3 y'' = 1$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 0.$
Ответ: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$

14. $x^2 y'' = y'^2.$
Ответ: $C_1 x - C_1^2 y = \ln |C_1 x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C.$

15. $y^3y'' = 1$.
Ответ: $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$.

16. $y'^2 + 2yy'' = 0$.
Ответ: $y^3 = C_1(x + C_2)^2$; $y = C$.

17. $y'' = \operatorname{arctg} x$.
Ответ: $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2 - 1) - \dfrac{x}{2}\ln(1 + x^2) + C_1x + C_2$.

18. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)(y'^2) = 0$.
Ответ: $(x + C_2)\ln y = x + C_1$.

19. $y'' = \dfrac{y'}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y'}{x}\right)$; $y(1) = \dfrac{1}{2}$; $y'(1) = 1$.
Ответ: $y = \dfrac{1}{2}x^2$.

20. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y(1) = 1$; $y'(1) = -1$.
Ответ: $y - x = 2\ln|y|$.

7. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

7.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами

Чтобы решить ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \qquad (5)$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (6)$$

и найти все его корни λ_1, ..., λ_n.

Общее решение уравнения (5) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (6) и слагаемых вида

$$\left(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \ldots + C_{m+k}x^{k-1}\right) e^{\lambda x} \tag{7}$$

для каждого кратного корня λ уравнения (6), где k — кратность корня. Все C_i — произвольные постоянные.

Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} — многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (7), их коэффициенты — произвольные постоянные.

Например, вид общего решения уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{8}$$

с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Если λ_1 и λ_2 — различные и действительные корни, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ — двукратный действительный корень, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}.$$

Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексно—сопряженные корни, общее решение записывается в виде

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right).$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение уравнения:

а. $y'' - 7y' + 12y = 0$

б. $y'' + 6y' + 9y = 0$

в. $y'' - 2y' + 2y = 0$

г. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$

д. $y^{V} - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0$

Решение.

а) Характеристическое уравнение данного уравнения имеет вид $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$. Общее решение дифференциального уравнения — $y(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{4x}$.

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2+6\lambda+9 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = -3$, поэтому общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2x\mathrm{e}^{-3x}$.

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет комплексно—сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Общее решение дифференциального уравнения $y(x) = \mathrm{e}^{x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$.

г) Характеристическое уравнение $\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda-1 = 0$. Разлагая левую часть на множители, находим корни: $\left(\lambda^4 - 1\right)+2\left(\lambda^3 - \lambda\right) = 0$; $\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2+1\right) + 2\lambda\left(\lambda^2-1\right) = 0$; $\left(\lambda^2-1\right)\left(\lambda^2+1+2\lambda\right) = 0$; $(\lambda-1)\left(\lambda+1\right)^3 = 0$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Корни действительные, но корень -1 трехкратный. Общее решение данного уравнения $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3x\mathrm{e}^{-x} + C_4x^2\mathrm{e}^{-x}$.

д) Характеристическое уравнение $\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0$. Разлагая левую часть на множители, находим корни: $\lambda^4(\lambda - 2) - 16(\lambda - 2) = 0$; $(\lambda - 2)(\lambda^4 - 16) = 0$; $(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = -2$; $\lambda_4 = 2i$; $\lambda_5 = -2i$. Общее решение уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y'' + 9y = 0$, удовлетворяющее краевым условиям $y(0) = 0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2+9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Удовлетворив краевым условиям

$$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1 \cos\frac{3\pi}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi}{4} = 1,$$

получим $C_1 = 0$, $C_2 = \sqrt{2}$.

Частное решение, удовлетворяющее данным краевым условиям, имеет вид $y(x) = \sqrt{2}\sin 3x$.

7.2. Задания для самостоятельного решения по теме «Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами»

В задачах 1—22 решить данные уравнения.

1. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.
Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$.

2. $y'' + 6y' + 13y = 0$.
Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

3. $4y'' - 20y' + 25y = 0$.
Ответ: $y = e^{\frac{5}{2}x}(C_1 + C_2 x)$.

4. $y'' + y' - 2y = 0$.
Ответ: $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$.

5. $y'' - 4y' + 5y = 0$.
Ответ: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

6. $y'' + 4y' + 3y = 0.$
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x}.$

7. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
Ответ: $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

8. $y''' - 27y = 0.$
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^{3x} + \left(C_2 \cos \dfrac{3\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \dfrac{3\sqrt{3}}{2} x \right) \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}.$

9. $y''' - 8y = 0.$
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-x}(C_2 \cos x\sqrt{3} + C_3 \sin x\sqrt{3}).$

10. $y''' + 8y = 0.$
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x).$

11. $y''' + 64y' = 0.$
Ответ: $y = C_1 + C_2 \cos 8x + C_3 \sin 8x.$

12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$
Ответ: $y = \mathrm{e}^{x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$

13. $y''' - y'' - y' + y = 0.$
Ответ: $y = \mathrm{e}^{x}(C_1 + C_2 x) + C_3 \mathrm{e}^{-x}.$

14. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$

15. $y^{IV} - y = 0.$
Ответ: $y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$

16. $y^{IV} + 4y = 0.$
Ответ: $y = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \mathrm{e}^{-x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$

17. $y^{VI} + 64y = 0.$
Ответ: $y = \mathrm{e}^{x\sqrt{3}}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + {}$
$+ \mathrm{e}^{-x\sqrt{3}}(C_5 \cos x + C_6 \sin x).$

18. $y^{IV}+2y''+y=0.$
Ответ: $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$

19. $y^{IV}-6y''+9y=0.$
Ответ: $y=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}+C_2x\mathrm{e}^{\sqrt{3}x}+C_3\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}+C_4x\mathrm{e}^{-\sqrt{3}x}.$

20. $y^{V}-10y'''+9y'=0.$
Ответ: $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{x}+C_3\mathrm{e}^{-x}+C_4\mathrm{e}^{3x}+C_5\mathrm{e}^{-3x}.$

21. $y^{V}+8y'''+16y'=0.$
Ответ: $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x.$

22. $y''-5y'+4y=0$; $y(0)=5$; $y'(0)=8.$
Ответ: $y=4\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{4x}.$

23. $y''+\pi^2y=0$; $y(0)=0$; $y'(1)=-\pi^2.$
Ответ: $y=\pi\sin\pi x.$

7.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=f(x). \tag{9}$$

Общее решение дифференциального уравнения (9) равно сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (5), то есть

$$y(x)=y_0(x)+\overline{y}(x).$$

Решение однородного уравнения $y_0(x)$ определяется так же, как и в пункте 7.1, $\overline{y}(x)$ — частное решение уравнения (9) в случае, когда правая часть дифференциального уравнения (9) имеет специальный вид, определяется методом неопределенных коэффициентов. Правая часть специального вида

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — полиномы степеней m и n соответственно.

Укажем вид частного решения дифференциального уравнения (9) в двух случаях.

1. Если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (6) дифференциального уравнения (9), то

$$\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(S_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right), \tag{10}$$

где S_l и R_l — полиномы степени $l = \max\{m, n\}$ с неопределенными коэффициентами.

2. Если число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения (6) дифференциального уравнения (9) кратности k, то

$$\overline{y}(x) = x^k\mathrm{e}^{\alpha x}\left(S_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right), \tag{11}$$

то есть частное решение приобретает множитель x^k.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти общее решение уравнения:

а. $2y'' - y' - y = 4x\mathrm{e}^{2x}$

б. $y'' - 2y' + y = x\mathrm{e}^{x}$

в. $y'' + y = x\sin x$

г. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}(x^2 + 1)$

Решение.

а) Характеристическое уравнение $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0 = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Правая часть заданного уравнения $4x\mathrm{e}^{2x}$. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 2 + i\cdot 0 = 2$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому согласно формуле (10), $\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{2x}(Ax + B)$. Дифференцируя $\overline{y}(x)$ два раза и подставляя производные в данное уравнение, получим:

$$2\mathrm{e}^{2x}\left(4Ax + 4B + 4A\right) - \mathrm{e}^{2x}\left(2Ax + 2B + A\right) - \mathrm{e}^{2x}(Ax + B) = 4x\mathrm{e}^{2x}.$$

Сокращая на e^{2x} и приравнивая друг к другу коэффициенты при первых степенях x и свободные члены в левой и правой частях равенства, имеем $5A = 4$ и $7A + 5B = 0$, откуда $A = \frac{4}{5}$ и $B = -\frac{28}{25}$. Таким образом, $\overline{y}(x) = e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)$, а общее решение данного уравнения есть

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = 1$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = xe^x$. Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и число $\alpha + i\beta = 1$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 2$. Согласно формуле (11), $\overline{y}(x) = x^2 e^x (Ax + B)$. Дифференцируя $\overline{y}(x)$ два раза, подставляя производные в уравнение и приравнивая коэффициенты, получим $A = \frac{1}{6}$, $B = 0$. Следовательно, общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения будет $y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Правая часть имеет вид $f(x) = x \sin x$. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 0 + i = i$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$. Согласно формуле (11),

$$\overline{y}(x) = x\left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right).$$

Дифференцируя два раза и подставляя в уравнение, приравниваем коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$ и $x \sin x$. В результате получим четыре уравнения

$$\begin{cases} 2A + 2D = 0; \\ 4C = 0; \\ -2B + 2C = 0; \\ -4A = 1, \end{cases}$$

из которых определяются $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = 0$, $C = 0$, $D = \dfrac{1}{4}$. Поэтому $\overline{y}(x) = -\dfrac{x^2}{4}\cos x + \dfrac{x}{4}\sin x$. Общее решение

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

г) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = 1$. Откуда $y_0 = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x$. Правая часть $f(x) = \mathrm{e}^x\left(x^2+1\right)$. Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Тогда $\alpha + i\beta = 1$ — двукратный корень характеристического уравнения, значит $k = 2$. Согласно формуле (11),

$$\overline{y}(x) = x^2\mathrm{e}^x\left(Ax^2 + Bx + C\right).$$

Дифференцируя $\overline{y}(x)$ дважды и подставляя выражение для $\overline{y}''$, $\overline{y}'$, $\overline{y}$ в исходное уравнение, находим $12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 1$. Сравнив коэффициенты при соответствующих степенях x в правой и левой частях, получим систему из трех уравнений: $12A = 1$, $6B = 0$, $2C = 1$, откуда следует $A = \dfrac{1}{12}$, $B = 0$, $C = \dfrac{1}{2}$. Тогда частное решение примет вид $\overline{y}(x) = \mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^2}{2}\right)$. Общее решение исходного уравнения

$$y = \mathrm{e}^xC_1 + \mathrm{e}^xC_2x + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x + \frac{x^4}{12}\mathrm{e}^x.$$

Пример 2. Решить уравнение: $y'' - 2y' + y = \sin x + \mathrm{e}^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет один двукратный корень $\lambda = 1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x$. Так как правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций специального вида, частное решение ищем в виде $\overline{y}(x) = \overline{y_1}(x) + \overline{y_2}(x)$, где $\overline{y_1}(x)$ — частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \sin x$; $\overline{y_2}(x)$ — частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$. Найдем $\overline{y_1}(x)$. Так как $f(x) = \sin x$, то $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Следовательно,

$\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $k=0$ и $\overline{y_1}(x)=A\cos x+B\sin x$. Подставляя выражение для $\overline{y_1}$, $\overline{y_1}'$, $\overline{y_1}''$ в уравнение $y''-2y'+y=\sin x$ и сравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в правой и левой частях тождества, имеем $A=\dfrac{1}{2}$, $B=0$, следовательно, $\overline{y_1}=\frac{1}{2}\cos x$.

Поступая аналогично, находим частное решение $\overline{y_2}(x)$ уравнения $y''-2y'+y=\mathrm{e}^{-x}$, а именно: $\overline{y_2}(x)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$. Таким образом, $\overline{y}(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}$. Общее решение исходного уравнения

$$y(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x}.$$

Замечание. Частное решение исходного уравнения можно было искать сразу в виде $\overline{y}(x)=A\cos x+B\sin x+C\mathrm{e}^{-x}$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$y''-6y'+5y=-3\mathrm{e}^x+5x^2-12x+2.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$, значит $y_0(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{5x}$. Так как правая часть представляет сумму двух функций, то частное решение ищем в виде $\overline{y}(x)=\overline{y_1}(x)+\overline{y_2}(x)$. Так как $f_1(x)=-3\mathrm{e}^x$, число $\alpha+i\beta=1$ является корнем характеристического уравнения кратности $k=1$, то $\overline{y_1}(x)=Ax\mathrm{e}^x$. Дифференцируя $\overline{y_1}(x)$ дважды и подставляя в уравнение $y''-6y'+5y=-3\mathrm{e}^x$, имеем

$$A\mathrm{e}^x(x+2)-6A\mathrm{e}^x(x+1)+5x\mathrm{e}^x=-3\mathrm{e}^x,$$

откуда $A=\dfrac{3}{4}$ и $\overline{y_1}(x)=\dfrac{3}{4}x\mathrm{e}^x$.

Так как $f_2(x)=5x^2-12x+2$, число $\alpha+i\beta=0$ не является корнем характеристического уравнения, то $\overline{y_2}(x)=Ax^2+Bx+C$. Дифференцируя $\overline{y_2}(x)$ дважды и подставляя в уравнение $y''-6y'+$ $+5y=5x^2-12x+2$, получим

$$5Ax^2+x(-12A+5B)+2A-6B+5C=5x^2-12x+2.$$

Приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при x^2, x и свободные члены, получим систему трех уравнений

$$\begin{cases} 5A = 5; \\ -12A + 5B = -12; \\ 2A - 6B + 5C = 2, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$ и $\overline{y_2}(x) = x^2$. Общее решение исходного уравнения

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y_1}(x) + \overline{y_2}(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{5x} + \frac{3}{4}x\mathrm{e}^x + x^2.$$

7.4. Задания для самостоятельного решения по теме «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида»

В задачах 1—21 решить данные уравнения.

1. $y'' - 2y' - 3y = \mathrm{e}^{4x}$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{4x}$.

2. $y'' + y = 4x\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)\mathrm{e}^x$.

3. $y'' - y = 2\mathrm{e}^x - x^2$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^x + x^2 + 2$.

4. $y'' + y' - 2y = 3x\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}\right)\mathrm{e}^x$.

5. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + 0,1 \sin x + 0,3 \cos x$.

6. $y'' + y = 4\sin x$.
Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x$.

7. $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = \left(C_1 + C_2x + x^3\right)\mathrm{e}^x$.

8. $y'' - 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{2x}$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{2x}\left(C_1 + C_2x + 1,5x^2\right)$.

9. $5y'' - 6y' + 5y = \mathrm{e}^{0,6x}\sin 0,8x$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{0,6x}\left(C_1\cos 0,8x + C_2\sin 0,8x - \dfrac{1}{8}x\cos 0,8x\right)$.

10. $y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + 2\cos x - \sin x$.

11. $y'' + 4y = \sin 2x$.
Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{x}{4}\cos 2x$.

12. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$.
Ответ: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$.

13. $y'' - 3y' = \mathrm{e}^{3x} - 18x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2 + \dfrac{x}{3}\mathrm{e}^{3x} + 3x^2 + 2x$.

14. $y'' - 2y' + y = 4\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^x(C_1 + C_2x) + 2x^2\mathrm{e}^x$.

15. $y'' + y = 4x\cos x$.
Ответ: $y = (C_1 + x)\cos x + (C_2 + x^2)\sin x$.

16. $y'' - 9y = \mathrm{e}^{3x}\cos x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{1}{37}\mathrm{e}^{3x}(6\sin x - cosx)$.

17. $y'' + 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y = \dfrac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

18. $y'' + 4y = \sin 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y = -\dfrac{x}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\sin 2x$.

19. $y'' + y + \sin 2x = 0$; $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.
Ответ: $y = \dfrac{1}{3}\sin 2x - \cos x - \dfrac{1}{3}\sin x$.

20. $y'' + 2y' + 2y = x\mathrm{e}^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{-x}(x - \sin x)$.

21. $y'' + 2y' - 8y = 2\cos x$; $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y = \dfrac{20}{255}\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{34}{255}\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{18}{85}\cos x + \dfrac{4}{85}\sin x$.

8. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{12}$$

есть сумма общего решения y_0 соответствующего ему однородного уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ и какого-нибудь частного решения $\overline{y}$ уравнения (12)

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}.$$

Суть метода Лагранжа вариации произвольных постоянных заключается в следующем. Если $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$ — общее решение однородного уравнения, то частное решение $\overline{y}(x)$ ищется в виде

$$\overline{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные пока функции, производные от которых определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0; \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{13}$$

Решая данную систему, находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда после интегрирования определяем $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Методом вариации произвольных постоянных решить уравнение:

а. $y'' + y' = x$

б. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

в. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

г. $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Решение. а) Решая однородное уравнение $y''+y' = 0$, получаем: $y_0 = C_1 + C_2 e^{-x}$. Следовательно, решение данного уравнения можно искать в виде

$$y = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}.$$

Составим систему (13), получим

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0; \\ -C_2'(x)e^{-x} = x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_2'(x) = -xe^x;$$

$$C_2(x) = -\int xe^x\,dx = \left| \begin{array}{c} x = u \\ du = dx \\ v = \int e^x\,dx = e^x \end{array} \right| = \\ = -\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) = -xe^x + e^x + A;$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x} = x; \quad C_1(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + B$$

и, следовательно,

$$y=\left(\frac{x^2}{2}+B\right)+\left(-x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+A\right)\mathrm{e}^{-x}=B+A\mathrm{e}^{-x}+1-x+\frac{x^2}{2}.$$

б) Решая однородное уравнение $y''-2y'+y=0$, имеем $y_0= = (C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$. Ищем решение исходного уравнения в виде

$$y(x)=\left(C_1(x)+C_2(x)x\right)\mathrm{e}^x.$$

Запишем систему (13):

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)x\mathrm{e}^x=0;\\ C_1'(x)\mathrm{e}^x+C_2'(x)(1+x)\mathrm{e}^x=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}.\end{array}\right.$$

Отсюда

$$C_2'(x)=\frac{1}{x^2+1};\quad C_2(x)=\operatorname{arctg}x+A;$$

$$C_1'(x)=-C_2'(x)x=-\frac{x}{x^2+1};$$

$$C_1(x)=-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+B.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y(x)=\mathrm{e}^x(B+Ax)+\mathrm{e}^x\left(x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right).$$

в) Решая однородное уравнение $y''+4y'+4y=0$, получим $y_0(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$. Ищем решение данного уравнения в виде

$$y(x)=(C_1(x)+C_2(x)x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

Составим систему (13):

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'(x)\mathrm{e}^{-2x}+C_2'(x)x\mathrm{e}^{-2x}=0;\\ C_1'(x)(-2\mathrm{e}^{-2x})+C_2'(x)\left(\mathrm{e}^{-2x}-2x\mathrm{e}^{-2x}\right)=\mathrm{e}^{-2x}\ln x.\end{array}\right.$$

Отсюда

$$C_2'(x) = \ln x;$$

$$C_2(x) = \int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int\, dx = x \end{array} \right| = x\ln x - \int \frac{x\,dx}{x} = x\ln x - x + A;$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)x = -x\ln x;$$

$$C_1(x) = -\int x\ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| =$$
$$= -\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}\right) = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + B.$$

Общее решение:

$$y(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + B\right)\mathrm{e}^{-2x} + (x\ln x - x + A)x\mathrm{e}^{-2x} =$$
$$= (B + Ax)\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\right).$$

г) Решая однородное уравнение $y'' - y' = 0$, получим $y_0(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^x$. Будем искать решение в виде

$$y(x) = C_1(x) + C_2(x)\mathrm{e}^x.$$

Запишем систему (13):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\mathrm{e}^x = 0; \\ C_2'(x)\mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\mathrm{e}^x; \quad C_2'(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x};$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{1+e^x} = \left| \begin{array}{c} 1+\mathrm{e}^x = t \\ \mathrm{e}^x\,dx = dt \\ dx = \frac{dt}{t-1} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t-1)t} = \int \frac{dt}{t^2\left(1-\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= -\int \frac{d\frac{1}{t}}{1-\frac{1}{t}} = \ln\left|1-\frac{1}{t}\right| = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + A = \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right| + A;$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{1+\mathrm{e}^x} = -\int \frac{d(e^x+1)}{1+\mathrm{e}^x} = -\ln|1+\mathrm{e}^x| + B.$$

Общее решение имеет вид

$$y(x) = (-\ln|1+\mathrm{e}^x| + B) + \left(\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right| + A\right)\mathrm{e}^x =$$
$$= A\mathrm{e}^x + B - (1+\mathrm{e}^x)\ln(1+\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x x.$$

8.1. Задания для самостоятельного решения по теме «Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка»

В задачах 1—20 решить данные уравнения. Найти также решение, удовлетворяющее начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + \dfrac{1}{2}x\sin 2x$.

2. $y'' - y = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}$.

Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - 4\sqrt{x}$.

3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$.

Ответ: $y = \mathrm{e}^x\left(C_1 + C_2 x\right) + \dfrac{1}{x}$.

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.
Ответ: $y = e^x\left(x\ln|x| + C_1x + C_2\right)$.

5. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$.
Ответ: $y = \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln|e^x+1| + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.

6. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.
Ответ: $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$.

7. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$.
Ответ: $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.

8. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.
Ответ: $y = e^{-x}\left(\dfrac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C_1 + C_2x\right)$.

9. $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x+1}$.
Ответ: $y = C_1e^x + C_2 + (e^x+1)\ln(1+e^{-x})$.

10. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.
Ответ: $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \dfrac{3}{2}x^2e^{2x}$.

11. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.
Ответ: $y = C_1\sin x + C_2\cos x + \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|\cos x + 2$.

12. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.
Ответ: $y = \dfrac{1}{3}(1 - e^{2x})^{\frac{3}{2}} + C_1 + e^x\left(\dfrac{e^x}{2}\sqrt{1-e^{2x}} + \dfrac{1}{2}\arcsin e^x + C_2\right)$.

13. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$.
Ответ: $y = C_1e^x + C_2 - \cos e^x$.

14. $y'' - y' = 2(1-x)$; $y(0) = y'(0) = 1$.
Ответ: $y = x^2 + \mathrm{e}^x$.

15. $2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^x$.

16. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^{6x} + C_2\mathrm{e}^x + \dfrac{5\sin x + 7\cos x}{74}$.

17. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
Ответ: $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$.

18. $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-2x}$.
Ответ: $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - \dfrac{1}{12}\mathrm{e}^{-2x}$.

19. $2y'' + 5y' = 29\cos x$.
Ответ: $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5x}{2}} + 5\sin x - 2\cos x$.

20. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$.
Ответ: $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1 + C_2x) + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Тренировочный тест

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Ответы</th></tr>
<tr><td>1. Из дифференциальных уравнений первого порядка
1) $y' + xy = x^3$
2) $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$
3) $y\,dx + (2x - y^2)\,dy = 0$
4) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$
5) $3x + 4y - 2 + y'(x-1) = 0$
6) $(x\cos 2y + 1)\,dx - x^2 \sin 2y\,dy = 0$
7) $y' - y\operatorname{ctg} x = \dfrac{y^3}{\sin x}$
8) $y' = \dfrac{1-2x}{y^2}$
9) $\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0$
10) $\left(xy\mathrm{e}^{\frac{y}{x}} + y^2\right)\,dx = x^2\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,dy$
выделить уравнения:
а) с разделяющимися переменными;
б) однородные;
в) линейные;
г) в полных дифференциалах;
д) Бернулли.</td><td>А. Только 1), 3) и 5)
Б. Только 7)
В. Только 6) и 9)
Г. Только 4), 9) и 10)
Д. Только 2), 8) и 9)</td></tr>
</table>

2. Найдите общее решение (или общий интеграл) дифференциального уравнения а) $x(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ б) $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$ в) $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$ г) $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^3}{y}$ д) $(x+y^2)\,dx + (2xy+1)\,dy = 0$	А. $y = \pm x\sqrt{x^2+C}$ Б. $\operatorname{arctg} y + 0,5\ln(1+x^2) = C$ В. $\dfrac{x^2}{2} + xy^2 + y = C$ Г. $y = \mathrm{e}^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$ Д. $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = Cx$
3. Решите задачу Коши $$y'' = 2x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$	А. $y = x^2 + 3;$ Б. $y = \dfrac{x^3}{6} + 2x + 1;$ В. $y = \dfrac{x^3}{3} + x + 1;$ Г. $y = \dfrac{x^3}{3} + 1;$ Д. $y = 2x^2 + 5x + 1.$
4. Найдите общее решение дифференциального уравнения $$y'y'' = 1.$$	А. $y = x^2 + C_1x + C_2;$ Б. $y = \dfrac{\sqrt{x+C_1}}{3} + C_2;$ В. $y = \dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2;$ Г. $y = (\sqrt{2x+C_1})^3 + C_2;$ Д. $y = \pm\dfrac{(2x+C_1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C_2.$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения $$y'' + \frac{y'}{x} = \frac{1}{x^3}.$$	А. $y = C_1 \ln x + \frac{1}{x} + C_2$; Б. $y = C_1 \ln x + x + C_2$; В. $y = \frac{C_1}{x} + \ln x + C_2$; Г. $y = C_1 x \ln x + x^2 + C_2$; Д. $y = C_1 x + \frac{1}{x} + C_2$.
6. Найдите общее решение дифференциального уравнения $$y'' + 3y' = 0.$$	А. $y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}$; Б. $y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-3x}$; В. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$; Г. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin 3x$; Д. $y = C_1 x + C_2 x \mathrm{e}^{-3x}$.
7. Дано линейное дифференциальное уравнение $y'' - 3y' = f(x)$, если $f(x) = \ldots$ а) 1; б) x; в) e^{3x}; г) $(x^2+1)\mathrm{e}^{3x}$; д) $\sin 3x$, то частное решение ищется в виде...	А. $A \cos 3x + B \sin 3x$; Б. Ax; В. $(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\mathrm{e}^{3x}$; Г. $Ax\mathrm{e}^{3x}$; Д. $(Ax + B)x$.

8. Найти общее решение дифференциального уравнения $$y'' - 9y' = \mathrm{e}^{9x}.$$	А. $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{9x} + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{9}$; Б. $y = C_1 + C_2x\mathrm{e}^{9x} + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{9}$; В. $y = C_1\cos 3x + C_2x + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{3}$; Г. $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{9x} + \dfrac{x\mathrm{e}^{9x}}{9}$; Д. $C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{\mathrm{e}^{9x}}{3}$.
9. Решите задачу Коши $$y''+y = 2\cos 2x, y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = 0.$$	А. $y = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{2}{3}\cos 2x$; Б. $y = \cos x - \dfrac{2}{3}\cos 2x$; В. $y = 2\cos 2x + 3x\cos 2x$; Г. $y = \cos x - 3x\cos 2x$; Д. $y = \sin 2x + 2x\cos 2x$.
10. Решите задачу Коши $$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$	А. $y = \cos x + x\sin x$; Б. $y = \operatorname{tg} x + x$; В. $y = \cos x\ln\cos x + x\sin x$; Г. $y = \ln\cos x + x\sin 2x$; Д. $y = x\cos x + \ln\sin x$.

Ответы: 1. а) Д, б) Г, в) А, г) В, д) Б;
2. а) Б, б) Д, в) Г, г) А, д) В;
3. Г;
4. Д;
5. А;
6. Б;
7. а) Б, б) Д, в) Г, г) В, д) А;
8. Г;

9. Б;
10. В.

Приложения

Таблица дифференцирования основных функций

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(\sin x)' = \cos x$;

4) $(\cos x)' = -\sin x$;

5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

8) $(e^x)' = e^x$;

9) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;

10) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

16) $\operatorname{ch} x' = \operatorname{sh} x$;

17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

18) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Правила дифференцирования:

$$(U \pm V)' = U' \pm V' \qquad (CU)' = CU'$$

$$(UV)' = U'V + UV' \qquad \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Если $y = f(g(x))$ является сложной функцией, то $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Таблица основных интегралов

1) $\int x^\alpha\,dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\ \alpha \in R; \\ \ln|x| + C,\ \alpha = -1; \end{array}\right.$

2) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$,

в частности, при $a = \mathrm{e}$: $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$;

3) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

6) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x - a}{x + a} \right| + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

11) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$;

12) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$;

13) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} \right| + C$;

14) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right) \right| + C$;

15) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$;

16) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$

17) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;

18) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C;$

2. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x); \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx;$

3. $\int \left[af(x) \pm bg(x)\right]\,dx = a\int f(x)\,dx \pm b\int g(x)\,dx; \quad a, b \in R.$

Формула интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Краснов М.Л. и др.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 256 с.
2. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.
3. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 240 с.
4. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2. М.: Оникс 21 век, Мир и Образование, 2012. 368 с.
5. *Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 352 с.
6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М.: Интеграл-Пресс, 2008, 544 с.

Оглавление

Дифференциальные уравнения для технических направлений
Практикум

КУБЫШКИНА Светлана Николаевна,
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 28.06.2017
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,95. Уч.–изд. л. 3,92
Тираж 50 экз. Рег. №119/17

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Самарский государственный технический университет”
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Главный корпус

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Корпус № 8