МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а Прикладной математики и информатики

РЯДЫ ФУРЬЕ

Практикум по математическому анализу

Самара
Самарский государственный технический университет
2011

УДК 517 (075.8)

Ряды Фурье: практикум по математическому анализу / *Г.Ф. Егорова, Г.А. Павлова, И.А. Мазуренко*; Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2011. 46 с.

В практикум по математическому анализу включены задания и методические указания к ним по темам "Бесконечные произведения" и "Ряды Фурье".

Пособие предназначено для студентов специальности "Прикладная математика и информатика".

Библиогр.: 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

Рецензент: *к.ф.-м.н. Л.А. Муратова*

Предисловие

Предлагаемый практикум по математическому анализу “Ряды Фурье” предназначен для студентов специальности “Прикладная математика и информатика”, а также для студентов инженерных специальностей.

Целью опубликования этой работы является углубление знаний и выработка навыков решения задач по темам “Ряды Фурье” и “Бесконечные произведения”.

Практикум содержит варианты индивидуальных заданий [3] и методические указания к решению задач на разложение функций в ряды Фурье и исследование сходимости бесконечных произведений [1, 2].

Практикум состоит из двух частей. В первой части представлены основные теоретические положения, относящиеся к данным темам, и приведены примеры решения типовых задач с подробными выкладками, во второй приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов.

1. Общее теоретическое введение к практикуму

1.1. Бесконечные произведения

Определение 1.1 Если

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

есть некоторая заданная последовательность чисел, то составленный из них символ

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \tag{1}$$

называют *бесконечным произведением.*

Частичное произведение обозначается

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Определение 1.2 Конечный или бесконечный предел P частичного произведения P_n при $n \to \infty$:

$$\lim P_n = P,$$

называют *значением произведения* (1) и пишут:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Если бесконечное произведение имеет конечное значение P и притом отличное от нуля, то само произведение называют *сходящимся*, в противном же случае — *расходящимся.*

Сходимость бесконечного произведения (1) положительных сомножителей $p_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, тесно связана со сходимостью ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n, \tag{2}$$

получающегося формальным логарифмированием данного бесконечного произведения [1, 2].

Если $p_n = 1 + a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и a_n не меняет знака, то для сходимости произведения (1) необходимо и достаточно, чтобы был сходящимся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1). \tag{3}$$

В общем случае, когда a_n не сохраняет постоянного знака, а ряд (3) сходится, произведение (1) будет сходиться или расходиться к нулю вместе с рядом [2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2.$$

Необходимый признак сходимости произведения. Если произведение сходиться, то

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

1.2. Абсолютная сходимость

Определение 1.3 Произведение (1) называется *абсолютно* или *условно* (не абсолютно) сходящимся в зависимости от того, абсолютно или условно сходится ряд (2). Необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости произведения (1) является абсолютная сходимость ряда (3).

Пример 1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться [2]

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right) \tag{4}$$

Решение. Очевидно, что $x \neq \sqrt{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, для любого x сомножители в (4), начиная с некоторого конечного номера, будут положительны, а в этом случае бесконечное произведение (4) абсолютно сходится, если абсолютно сходится ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right)\right). \tag{5}$$

Учитывая разложение

$$\ln\Big(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)=-\frac{x}{\sqrt{n}}-\frac{x^2}{2n}-\frac{x^3}{3\sqrt{n^3}}-o(\frac{x^3}{3\sqrt{n^3}})$$

и то, что

$$\ln\bigg(\Big(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\exp\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}\Big)\bigg)=\ln\Big(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)+\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n},$$

получаем, что ряд (5) эквивалентен абсолютно сходящемуся для любого $x\neq\sqrt{k}$, $k\in\mathbb{N}$, ряду

$$-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^3}{\sqrt{n^3}}.$$

Таким образом, произведение (4) абсолютно сходится для любого $x\neq\sqrt{k}$, $k\in\mathbb{N}$.

1.3. Ряды Фурье

Определение 1.4 Система функций

$$\frac{1}{2},\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{k\pi x}{l},\sin\frac{k\pi x}{l},\ldots,\quad x\in[-l,l]\,,$$

называется *основной тригонометрической системой.* Эта система ортогональна на отрезке $[-l,l]$.

Определение 1.5 Пусть $f(x)\in C\,[-l,l]$. Числа

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)dx,\quad a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad k\in\mathbb{N},$$

называются *коэффициентами Фурье* функции f по основной тригонометрической системе [1].

Определение 1.6 Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\Big)$$

называется *рядом Фурье* функции f.

В частности, если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l};$$

ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Определение 1.7 Функция $f:[-l,l]\to R$ называется *кусочно-непрерывной на* $[-l,l]$, если она непрерывна в каждой точке $x\in[-l,l]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода.

Определение 1.8 Функция $f:[-l,l]\to R$ называется *кусочно-гладкой на* $[-l,l]$, если эта функция кусочно-непрерывна и имеет непрерывную производную на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой их которых производная имеет конечные односторонние предельные значения.

Теорема 1.1 (основная). Пусть кусочно-гладкая на отрезке $[-l,l]$ функция f периодически с периодом $2l$ продолжена на всю числовую прямую. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f сходится в каждой точке $x\in(-\infty,\infty)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x-0)+$ $+f(x+0))$.

Теорема 1.2 Если для непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[-l,l]$ функции f выполняется равенство $f(-l)=f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится равномерно на этом отрезке и сумма ее равна значению функции $f\quad\forall x\in[-l,l]$.

Если функция f четная, то

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad b_n=0,\quad n\in\mathbb{N},$$

а если f нечетная, то

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in N, \quad a_n = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Кроме того, если функция имеет период $2l$, то для любого числа $c \in R$ справедливы равенства

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int\limits_{c-l}^{c+l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{c-l}^{c+l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{c-l}^{c+l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, исходя из известного соотношения

$$b\sin A + a\cos A = r\sin(A+B) =$$

$$= r\cos(\frac{\pi}{2} - A - B) = r\cos(A + B - \frac{\pi}{2}),$$

где

$$r = \sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg} B = \frac{a}{b},\ B - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} = -\operatorname{arctg}\frac{b}{a},$$

любая кусочно-гладкая на отрезке $[-l, l]$ функция может быть представлена в виде суммы постоянного члена $\frac{a_0}{2}$ и множества синусоидальных (косинусоидальных) компонент с частотами $\nu_0 = \frac{1}{l}$ (основной частоты), $2\nu_0 = \frac{2}{l}$ (2-ой гармонической частоты), $3\nu_0 = \frac{3}{l}$ (3-ей гармонической частоты), ….

То есть, k-я гармоническая компонента будет $2\,|c_k|\cos(\frac{2\pi kt}{l} + \arg c_k)$, при этом она имеет частоту $k\nu_0 = \frac{k}{l}$, круговую частоту $k\omega_0 = 2\pi k\nu_0 = = \frac{2\pi k}{l}$, амплитуду $2\,|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и фазу $\arg c_k = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ [1].

Пример 2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \frac{4}{3}\,|t| - 1, \quad -\frac{2}{3} < t < \frac{4}{3}.$$

Решение. График функции изображен на рис. 1 [2].

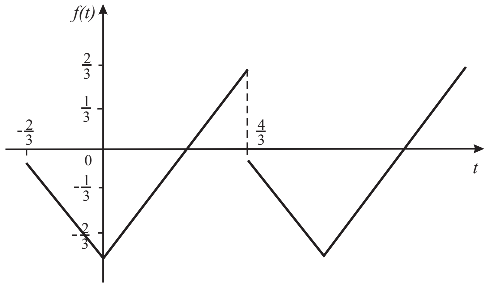

Рис. 1

Данная функция имеет разрывы первого рода на границах интервала, поэтому значение ряда Фурье в этих точках будет равно $\frac{1}{2}\Big(f(-\frac{2}{3}+0)+f(\frac{4}{3}-0)\Big) = \frac{1}{3}$.

В данном случае $l = 1$ и функция аморфная (то есть ни четная, ни нечетная), поэтому коэффициенты будут вычисляться по следующим формулам

$$a_0 = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} f(t)dt = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{0} (-\frac{4}{3}t - 1)dt + \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} (\frac{4}{3}t - 1)dt,$$

$$a_n = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} f(t)\cos \pi n t dt = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{0} (-\frac{4}{3}t - 1)\cos \pi n t dt + \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} (\frac{4}{3}t - 1)\cos \pi n t dt,$$

$$b_n = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} f(t)\sin \pi n t dt = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{0} (-\frac{4}{3}t - 1)\sin \pi n t dt + \int\limits_{0}^{\frac{4}{3}} (\frac{4}{3}t - 1)\sin \pi n t dt.$$

Интегрируя, находим значения коэффициентов:

$$a_0 = -\frac{14}{27} = -0,5185;$$

$$a_n = \frac{12\cos(\frac{4\pi n}{3}) + 7\pi n\sin(\frac{4\pi n}{3}) - 24 + 12\cos(\frac{2\pi n}{3}) - \pi n\sin(\frac{2\pi n}{3})}{9\pi^2 n^2};$$

$$b_n = \frac{-12\sin(\frac{4\pi n}{3}) + 7\pi n\cos(\frac{4\pi n}{3}) + 12\sin(\frac{2\pi n}{3}) + \pi n\cos(\frac{2\pi n}{3})}{9\pi^2 n^2}.$$

С учетом формул

$$\cos\frac{4\pi n}{3} = \cos(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}) = \cos\frac{2\pi n}{3},$$

$$\sin\frac{4\pi n}{3} = \sin(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}) = -\sin\frac{2\pi n}{3},$$

получаем

$$a_n = \frac{24\cos(\frac{2\pi n}{3}) - 8\pi n\sin(\frac{2\pi n}{3}) - 24}{9\pi^2 n^2},$$

$$b_n = \frac{8\cos(\frac{2\pi n}{3}) + 24\pi n\sin(\frac{2\pi n}{3})}{9\pi^2 n^2}.$$

Полагая последовательно n равным 1, затем 2 и 3, находим

$$a_0 = -0,2593; \quad a_1 = -0,6503; \quad a_2 = 0,0212; \quad a_3 = 0;$$

$$b_1 = -0,0925; \quad b_2 = 0,1292; \quad b_3 = -0,0943.$$

Соответствующие амплитудные ($A_k = 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$) и фазовые ($\varphi_k = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$) спектры будут:

$$A_1 = 0,6568; \quad A_2 = 0,1309; \quad A_3 = 0,0943;$$

$$\varphi_1 = -0,141 + \pi; \quad \varphi_2 = -1,41; \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, первые три частичные суммы ряда Фурье для заданной функции будут иметь вид:

$$S_1 = -\frac{1}{\pi} - 0,6568\cos(\pi t - 0,141);$$

$$S_2 = S_1 + 0,1309\cos(2\pi t - 1,41);$$

$$S_3 = S_2 + 0,0943\cos(3\pi t + \frac{\pi}{2});$$

или

$$S_1 = -0,2593 - 0,6503\cos\pi t - 0,0925\sin\pi t;$$

$$S_2 = S_1 + 0,0212\cos 2\pi t + 0,1292\sin 2\pi t;$$

$$S_3 = S_2 - 0,0943\cos 3\pi t;$$

Графики этих сумм представлены на рис. 2.

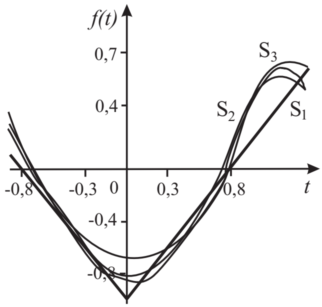

Рис. 2

Пример 3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}\cos t, & -\pi<t<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{2}{\pi}t, & -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},\\ \cos t, & \frac{\pi}{2}<t<\pi.\end{cases}$$

Решение. График функции представлен на рис.3.

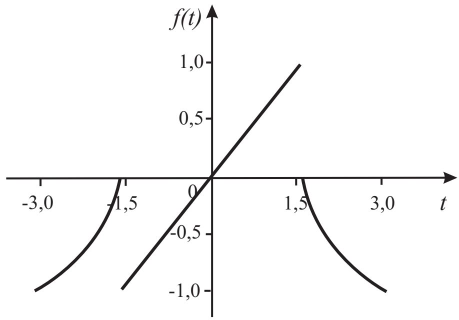

Рис. 3

Так как косинус четная функция, а $\frac{2}{\pi}t$ — нечетная, то формулы для расчета коэффициентов ряда Фурье в данном случае будут иметь вид

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t dt,\quad a_1=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 t dt,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\cos nt dt,$$

$$b_1=\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t dt,\quad b_n=\frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin nt dt.$$

Интегрируя, получаем

$$a_0=-\frac{2}{\pi},\quad a_1=\frac{1}{2},\quad a_n=-\frac{2}{\pi(n^2-1)}\left(n\sin n\pi-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\Rightarrow$$

$$a_n=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ \frac{(-1)^k 2}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k.\end{cases}$$

$$b_1 = -\frac{8}{\pi^2}, \quad b_n = -\frac{4}{\pi^2 n^2}\Big(-2\sin\frac{\pi n}{2} + \pi n\cos\frac{\pi n}{2}\Big) \Rightarrow$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k 8}{\pi^2(2k+1)^2}, & n = 2k+1, \\ \frac{(-1)^{k+1} 2}{\pi k}, & n = 2k. \end{cases}$$

Таким образом, получили ряд Фурье для заданной функции:

$$f(t) \sim -\frac{1}{\pi} + \frac{\cos t}{2} + \frac{8\sin t}{\pi^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{\cos 2kt}{(4k^2-1)} - \frac{\sin 2kt}{k}\Big) +$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

Частота основной гармоники будет $\omega = 1$, частное решение данного уравнения, найденное методом неопределенных коэффициентов и соответствующее такому периодическому воздействию, будет иметь вид

$$\tilde{y} = t\Big(\frac{\sin t}{4} - \frac{4\cos t}{\pi^2}\Big).$$

Очевидно, что это решение неограниченно возрастает. Построим график этого решения.

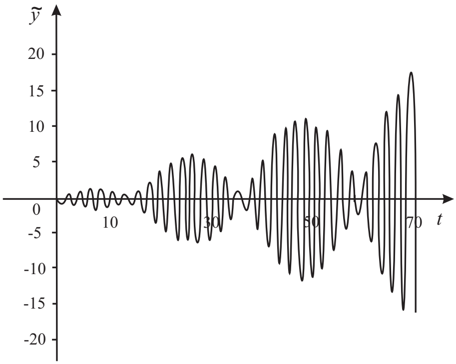

Рис. 4

Кроме того, могут наблюдаться расходящиеся колебания если $\omega = 2$, $\omega = 3, \ldots, \omega = n, \ldots$. Действительно, частное решение данного неоднородного уравнения, найденное методом неопределенных коэффициентов, будет представлять собой сумму бесконечного тригонометрического ряда следующего вида:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{\pi\omega} + \frac{\cos t}{2(1-\omega^2)} + \frac{8\sin t}{\pi^2(1-\omega^2)} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^2\cos 2kt}{(4k^2-1)(\omega^2-4k^2)} - \frac{(-1)^2\sin 2kt}{\pi k(\omega^2-4k^2)} + \frac{(-1)^2\sin(2k+1)t}{(2k+1)^2(\omega^2-(2k+1)^2)}\Big).$$

То есть, при значениях ω, близких к целым числам, амплитуда соответствующей гармоники возрастает (явление резонанса), что отрицательно сказывается на сходимости ряда. При строгом равенстве ω целому числу появляется неограниченно возрастающее решение.

Пример 4. Для функции $f(t)$, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам и косинусам [3].

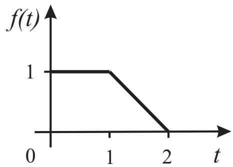

Рис. 5

Решение. Аналитически данная функция будет записываться следующим образом

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 2-t, & 1 < t \leqslant 2. \end{cases}$$

1. Продолжим функцию нечетным образом на интервал $(-2, 0)$ и построим ее периодическое продолжение:

Так как функция $f(t)$ — нечетная и $l = 2$, то формулы для расчета коэффициентов ряда Фурье в данном случае будут иметь вид

$$a_n = 0;$$

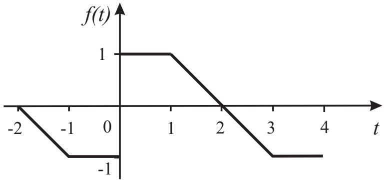

Рис. 6

$$b_n = \int\limits_0^1 \sin\frac{\pi n t}{2}dt + \int\limits_1^2 (2-t)\sin\frac{\pi n t}{2}dt.$$

Интегрируя, получаем

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right) + \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(-2\sin\pi n + \pi n\cos\frac{\pi n}{2} + 2\sin\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n} + \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2}.$$

Ряд Фурье для продолженной таким образом функции будет иметь вид

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi n t}{2}}{n} - \frac{2(-1)^n \sin\frac{\pi(2n-1)t}{2}}{\pi(2n-1)^2}\right).$$

2. Продолжим функцию четным образом на интервал $(-2, 0)$ и построим ее периодическое продолжение

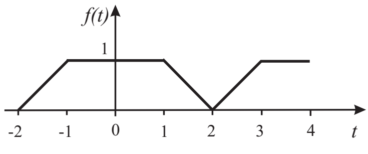

Рис. 7

Так как функция $f(t)$ — четная и $l = 2$, то формулы для расчета коэффициентов ряда Фурье в данном случае будут иметь вид:

$$a_0 = \int\limits_0^1 dt + \int\limits_1^2 (2-t)dt;$$

$$a_n = \int\limits_0^1 \cos\frac{\pi n t}{2} dt + \int\limits_1^2 (2-t)\cos\frac{\pi n t}{2} dt;$$

$$b_n = 0.$$

После интегрирования получаем:

$$a_0 = \frac{3}{2};$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} - \frac{2}{\pi^2 n^2}\left(-2\cos\pi n + \pi n \sin\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2}.$$

Ряд Фурье для продолженной таким образом функции будет иметь вид

$$f(t) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos\frac{\pi n t}{2}}{n^2}.$$

2. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 2, \\ 2, & 2 < t < 4. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant t < -\frac{\pi}{3}, \\ \cos t, & -\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \frac{\pi}{3} < t \leqslant \pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

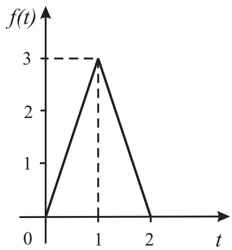

Рис. 8

Вариант 2

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n(n+2)}\Big).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<1,\\ 1, & 1\leqslant t\leqslant 2.\end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} \sin t, & 0<t<\frac{\pi}{2},\\ 1, & \frac{\pi}{2}<t<\pi.\end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

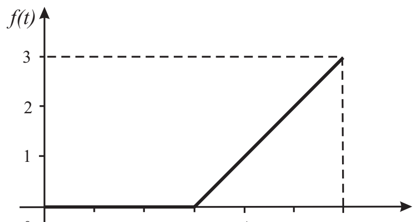

Рис. 9

Вариант 3

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = 3 - t, \quad -2 \leqslant t < 2.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t, & 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

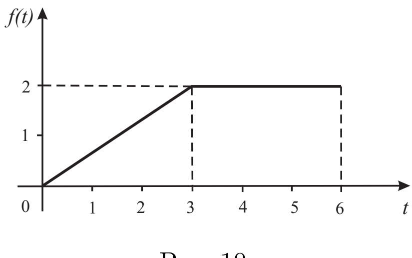

Рис. 10

Вариант 4

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \cos\frac{t}{2}, \quad 0 < t < \pi.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

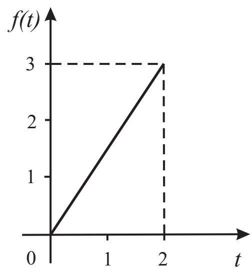

Рис. 11

Вариант 5

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leqslant t < 0, \\ 1, & 0 \leqslant t < 1. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} \cos\frac{t}{2}, & 0 < t \leqslant \pi, \\ 0, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

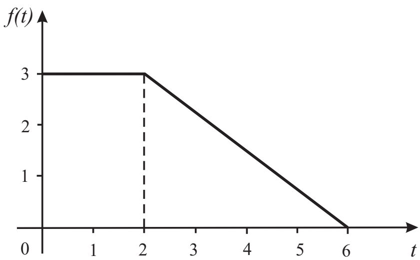

Рис. 12

Вариант 6

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = 2 - t, \quad -1 < t < 1.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

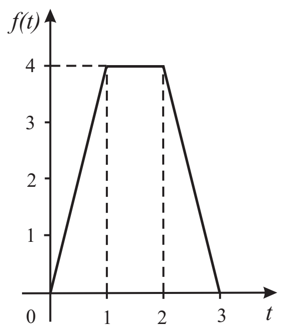

Рис. 13

Вариант 7

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\sin\frac{5}{6}t, \quad -\pi<t<\pi.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} 1, & -1\leqslant t<0,\\ 1-t, & 0\leqslant t<1.\end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

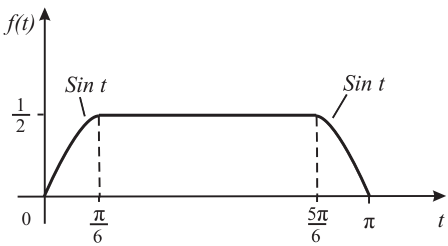

Рис. 14

Вариант 8

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = t - 1, \quad -1 < t < 1.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t < -\frac{\pi}{4}, \\ \cos t, & -\frac{\pi}{4} < t \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < t < \pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

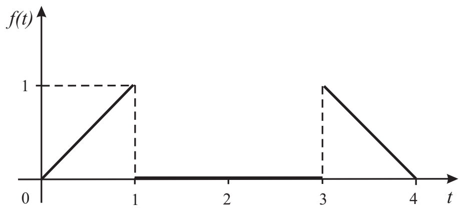

Рис. 15

Вариант 9

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = |t|\,, \quad -2 < t < 2.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & -\pi < t < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi} t, & -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

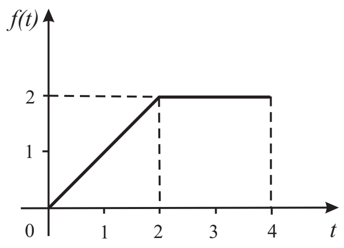

Рис. 16

Вариант 10

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=t-1,\quad 0<t<1.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & 0<t\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -1, & \frac{\pi}{2}<t<\pi.\end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

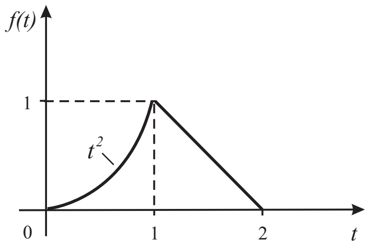

Рис. 17

Вариант 11

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 2, & 2 \leqslant t < 4. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ -\cos 2t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

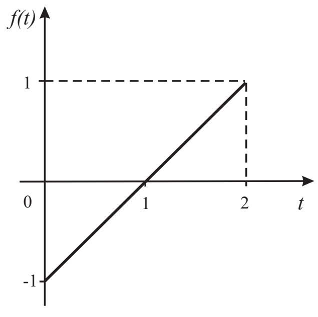

Рис. 18

Вариант 12

1.Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -3 < t \leqslant 0, \\ \ \ 5, & \ \ 0 < t < 3. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = t \sin t, \quad -\pi < t < \pi.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

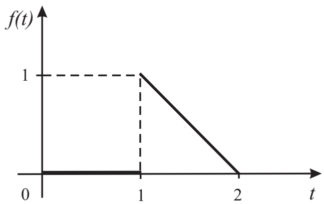

Рис. 19

Вариант 13

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \frac{3}{2}\,|t| - 1, \quad -\frac{1}{2} < t \leqslant \frac{3}{2}.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

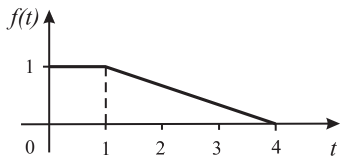

Рис. 20

Вариант 14

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\Big).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\cos\frac{t}{2},\quad 0<t<\pi.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} -\frac{1+t}{3}, & -1\leqslant t\leqslant 0,\\ \frac{1-t}{3}, & 0<t\leqslant 1.\end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

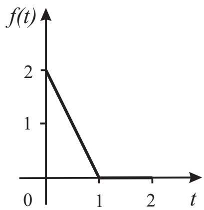

Рис. 21

Вариант 15

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\Big).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\sin\frac{t}{2},\quad 0<t<\pi.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases} -1, & -2<t<0,\\ t, & 0\leqslant t<2.\end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

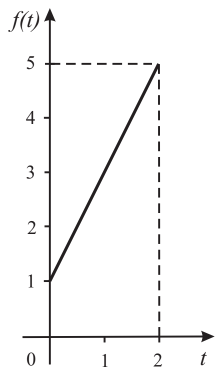

Рис. 22

Вариант 16

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 < t < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \frac{\pi}{2} < t < \pi. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = t, \quad 5 < t < 7.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

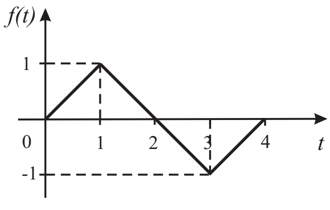

Рис. 23

Вариант 17

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 2, \\ 1, & 2 < t < 4. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = t + 1, \quad 1 < t < 3.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

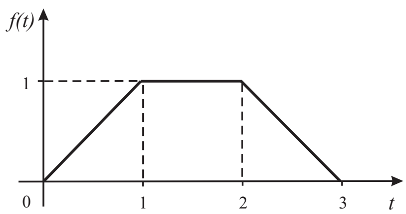

Рис. 24

Вариант 18

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\Big).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=t-1, \quad 0<t<2.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=|\sin t|, \quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

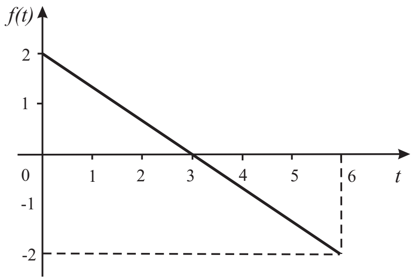

Рис. 25

Вариант 19

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=1-t, \quad -1<t<1.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=|\cos t|, \quad 0<t<\pi.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

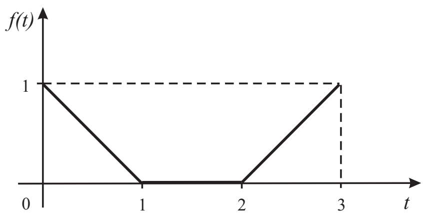

Рис. 26

Вариант 20

1. Исследовать сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1}\frac{3n}{3n+1}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = 4 - 2|t|, \quad -2 < t < 2.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \sin\frac{2}{3}t, \quad -\pi < t < \pi.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

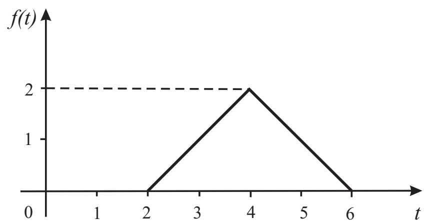

Рис. 27

Вариант 21

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\begin{cases} 2-t, & 0<t<1, \\ 1, & 1\leqslant t<2. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=t\sin\frac{t}{2}, \quad -\pi<t<\pi.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

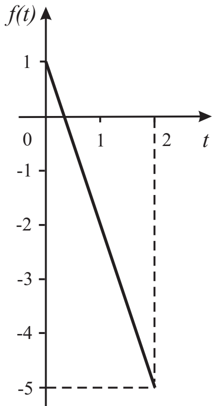

Рис. 28

Вариант 22

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = t^2 + 1, \quad |t| < 2.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \sin\frac{t}{6}, \quad |t| < \pi.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

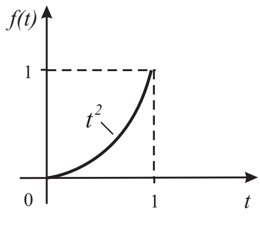

Рис. 29

Вариант 23

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} -t - 2, & -2 < t < 0, \\ 2 - t, & 0 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{\pi}{2} < t < -\frac{\pi}{4}, \\ \sin t, & -\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

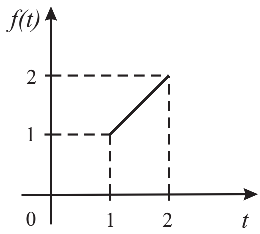

Рис. 30

Вариант 24

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}, \quad c>0.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\cos\frac{t}{2}, \quad |t|<\pi.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=2-|t|, \quad |t|<2.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

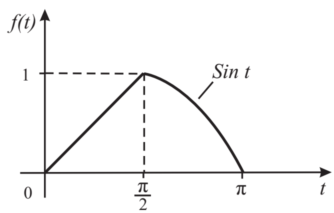

Рис. 31

Вариант 25

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right).$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\sin\frac{5}{6}t,\quad -\pi<t<\pi.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=2t+1,\quad -1<t<1.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

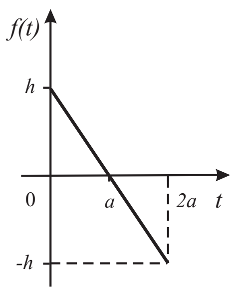

Рис. 32

Вариант 26

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)e^{-\frac{x}{n}}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t)=\frac{\pi-t}{2},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y''+\omega^2 y=f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{4},\\ 0, & \frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по косинусам.

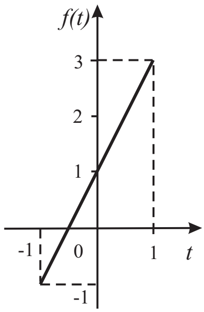

Рис. 33

Вариант 27

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^{p}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = 2t + 2, \quad -1 < t < 1.$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = t^2 + 2, \quad |t| < 2.$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

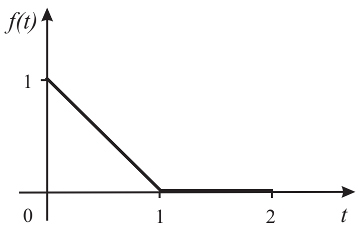

Рис. 34

Вариант 28

1. Выяснить, при каких значениях x бесконечное произведение будет сходиться

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$$

2. Разложить функцию $f(t)$ в ряд Фурье на заданном интервале, вычислить амплитуды и фазы трех первых гармоник. Построить графики функций и частичных сумм S_1, S_2, S_3 ряда Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -3 < t \leqslant 0, \\ 3, & 0 < t < 3. \end{cases}$$

3. Для неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = f(t),$$

используя разложение периодической функции $f(t)$ в ряд Фурье, найти значение параметра ω, при котором данное уравнение не будет иметь ограниченного решения. Построить график этого решения. Функция $f(t)$ внутри одного своего периода имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} t(2-t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

4. Для функции, заданной графически на полупериоде, выполнить разложение в ряд Фурье по синусам.

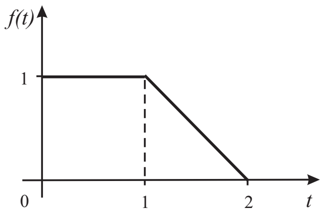

Рис. 35

Библиографический список

1. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Т.2: Интегралы. Ряды. Учеб. пособие/Под редакцией Л.Д. Кудрявцева. М.: Наука, 2003. 504 с.

2. *Ляшко И.И, Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.* Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Ряды. М.: УРСС, 1998. 223 с.

3. Ряды и их применение: Типовой расчет по высшей математике/ Куйбышев. политехн. ин-т., каф. "Высшая математика". *Г.И.Коваленко, Л.Г.Мухина, Ю.П.Поцелуев* и др. Куйбышев, 1985 г.

Содержание