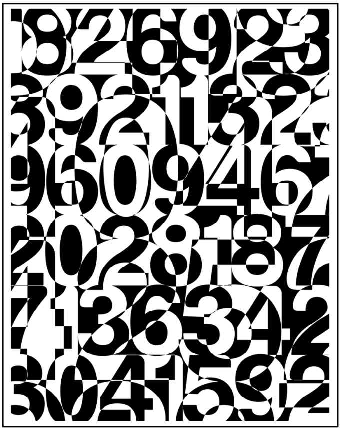
Е. В. Башкинова, Г. Ф. Егорова, А. А. Заусаев

Численные методы
и их реализация в Microsoft Excel

Часть 2



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
и их реализация в Microsoft Excel
Часть 2

Лабораторный практикум по информатике

Самара
Самарский государственный технический университет
2009

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 519.6 (075.8)

Численные методы и их реализация в Microsoft Excel. Ч.2: лабораторный практикум по информатике / Сост. Е.В. Башкинова, Г.Ф. Егорова, А.А. Заусаев. – Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 44 с.

Приведены краткие сведения и формулы по темам «Аппроксимация экспериментальных зависимостей», «Численное интегрирование», «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений», «Линейное программирование». Рассмотрены способы реализации численных методов и решение задач линейного программирования средствами Microsoft Excel. Для самоконтроля даны индивидуальные задания и контрольные вопросы.

Предназначено для студентов первого курса инженерных специальностей факультетов МиАТ и ФТ.

УДК 519.6 (075.8)

Составители: канд. физ.-мат. наук Е.В. Башкинова,
канд. техн. наук Г.Ф. Егорова,
канд. физ.-мат. наук А.А. Заусаев

Рецензент: канд. физ.-мат. наук Л.А. Муратова

Т е м а 4. **АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА, АППРОКСИМАЦИЯ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Аппроксимацией называется замена некоторой функции, заданной аналитически или таблично, другой функцией, близкой к исходной, но более простой и удобной для вычислений.

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Пусть в попарно различных точках x_0, x_1, ..., x_n задана таблица значений y_0, y_1, ..., y_n некоторой функции $y = f(x)$. Задача интерполяции состоит в построении функции $y = g(x)$, удовлетворяющей условию

$$g(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, ..., n).$$

Другими словами, ставится задача построения функции $y = g(x)$, график которой проходит через заданные точки (x_i, y_i). Точки x_i принято называть узлами интерполяции, а указанный способ приближения функций — интерполированием.

Предположим, что в результате эксперимента получена таблица значений некоторой функции $y = f(x)$:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

Построим функцию $y = g(x)$, близкую к $y = f(x)$ и принимающую в точках $x_0, x_1, ..., x_4$ те же значения, что и $y = f(x)$, т.е. такую, что $g(x_0) = y_0$, $g(x_1) = y_1$, ... , $g(x_4) = y_4$.

Указанным условиям удовлетворяет многочлен Лагранжа:

$$L_5(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} +$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} +$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + y_4 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

В случае, если вид изучаемой функции изначально неизвестен, используя данный многочлен, становится возможным найти приближенные значения функции $y = f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполяции.

***Задание* 1.** В результате эксперимента получена таблица значений некоторой функции $y = f(x)$:

x	0,75	1,5	2,25	3	3,75
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Найти приближенные значения функции $y = f(x)$ в точках, смещенных относительно экспериментальных данных на величину h, где $h = (x_1 - x_0)/2$.

Оформить этикетку лабораторной работы, шапку таблицы. Ввести исходные данные (**B4:C8**, рис. 7.1). Вычислить шаг: $h = (x_1 - x_0)/2$. Заполнить столбец **E** искомыми значениями: $x_i^* = x_i + h$ ($i = 0, 1, ..., 4$). Записать первое искомое значение из ячейки **E4** в ячейку **H5** текущего аргумента $x_{\text{тек}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2		Исходные данные			Искомые значения			Текущее значение аргумента	Значение многочлена Лагранжа	
3		Xi	Уi	h	Xi*	L_5(Xi*)				
4	X0	0,75	2,5	0,375	1,125	1,709		Хтек=Xi*	L_5(Хтек)	
5	X1	1,5	1,2		1,875	1,001		1,125	1,709	
6	X2	2,25	1,12		2,625	1,546				
7	X3	3	2,25		3,375	3,184				
8	X4	3,75	4,28		4,125	5,454				
9										
10		Xi	Хтек-Xi	X0-Xi	X1-Xi	X2-Xi	X3-Xi	X4-Xi	П	Уi/П
11	X0	0,75	0,375	0,375	0,75	1,5	2,25	3	2,848	0,878
12	X1	1,5	-0,375	-0,75	-0,375	0,75	1,5	2,25	0,712	1,686
13	X2	2,25	-1,125	-1,5	-0,75	-1,125	0,75	1,5	-1,424	-0,787
14	X3	3	-1,875	-2,25	-1,5	-0,75	-1,875	0,75	3,560	0,632
15	X4	3,75	-2,625	-3	-2,25	-1,5	-0,75	-2,625	-19,934	-0,215
16		П=	0,779					Сумма Уi/П		2,194

значения, полученные в **I5**, *поочередно копируются в* **F4:F8**

=C16*J16

=ПРОИЗВЕД(C11:C15)

=ПРОИЗВЕД(D11:H11)

=C4/I11

Рис. 7.1. Исходные данные и значения интерполяционного многочлена

В ячейках **B11:J16**; **I5** реализуется вычисление значения интерполяционного многочлена Лагранжа при текущем значении аргумента $x_{\text{тек}}$ (см. рис. 7.1—7.3). Рекомендуем сначала заполнить строку **11** формулами (см. рис. 7.2), а затем распространить их до строки **15**. Нули, полученные по диагонали, следует заменить ссылками на ячейки **C11:C15** (см. рис. 7.3).

	B	C	D	E	F	G	H
10	Xi	Xтек-Xi	X0-Xi	X1-Xi	X2-Xi	X3-Xi	X4-Xi
11	=B4	=$H$5-B11	=B$11-B11	=B$12-B11	=B$13-B11	=B$14-B11	=B$15-B11

Рис. 7.2. Вспомогательные формулы

	B	C	D	E	F	G	H
10	Xi	Xтек-Xi	X0-Xi	X1-Xi	X2-Xi	X3-Xi	X4-Xi
11	=B4	=$H$5-B11	=C11	=B$12-B11	=B$13-B11	=B$14-B11	=$B$15-B11
12	=B5	=$H$5-B12	=B$11-B12	=C12	=B$13-B12	=B$14-B12	=$B$15-B12
13	=B6	=$H$5-B13	=B$11-B13	=B$12-B13	=C13	=B$14-B13	=$B$15-B13
14	=B7	=$H$5-B14	=B$11-B14	=B$12-B14	=B$13-B14	=C14	=$B$15-B14
15	=B8	=$H$5-B15	=B$11-B15	=B$12-B15	=B$13-B15	=B$14-B15	=C15

Рис. 7.3. Формулы вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа

Принцип составления остальных формул показан на рис. 7.1.

В итоге, в ячейке **I5** получим значение многочлена Лагранжа $L_5(x_0^*) = 1{,}709$ при $x_0^* = 1{,}125$. Указанный результат копируется в ячейку **F4** (**копировать** > **специальная вставка** > **значения**).

Меняя значение аргумента $x_{\text{тек}}$ в ячейке **H5** на значения из ячеек **E5**, **E6**, **E7**, **E8**, получим остальные значения многочлена Лагранжа, которые поочередно вручную копируются в ячейки **F5:F8**.

Изобразить исходные данные и полученные значения многочлена Лагранжа на графике, используя точечный тип диаграммы (см. рис. 7.4).

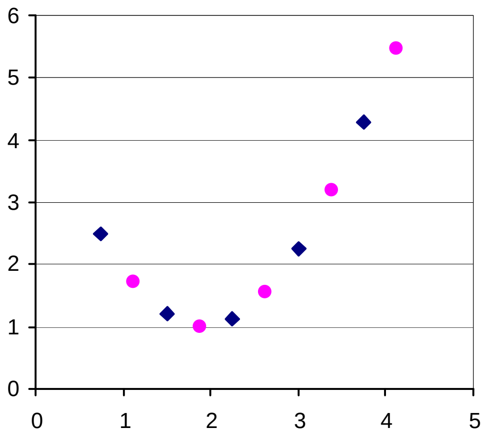


Рис. 7.4. Исходные данные (ромбы) и значения многочлена Лагранжа (круги)

***Задание* 2.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Ввести исходные значения x_i и y_i своего варианта (см. таблицу 1 приложения). Заполнить блок ячеек **F4:F8** значениями многочлена Лагранжа $L_5(x)$.

Метод наименьших квадратов. Мы рассмотрели интерполяцию, то есть такой способ приближения, когда значения приближаемой и приближающей функций совпадают в узлах интерполяции. Однако достаточно часто при аппроксимации большого числа экспериментальных данных, полученных с некоторой погрешностью, интерполяция становится неразумной. В этом случае целесообразно строить приближающую функцию таким образом, чтобы сгладить влияние погрешности измерения. В качестве аппроксимирующих функций могут быть использованы линейные, квадратичные, степенные, показательные, дробно-линейные и другие функции. Вид используемой функции выбирается исходя из расположения экспериментальных данных на графике.

В данной лабораторной работе будут рассмотрены аппроксимации линейной $y^* = A_0 + A_1 x$ и квадратичной $y^* = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$ функциями. Коэффициенты A_0, A_1, A_2 находятся путем решения систем

$$\begin{cases} A_0 n + A_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ A_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + A_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases} \qquad \begin{cases} A_0 n + A_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + A_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ A_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + A_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + A_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ A_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + A_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + A_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \end{cases}$$

соответственно для линейной и для квадратичной функций.

Для решения указанных систем в Microsoft Excel удобно использовать метод обратной матрицы.

***Задание* 3.** Аппроксимировать методом наименьших квадратов функции, заданные таблично:

1)

x_i	0,65	1,07	1,7	2,26	2,78
y_i	1,5	1,8	2,3	2,8	3,8

2)

x_i	0,75	1,5	2,25	3	3,75
y_i	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Пользуясь типовыми экранами (см. рис. 7.7 и 7.10) выполнить два контрольных примера.

Для каждого примера оформить этикетку лабораторной работы (название, имя студента). Ввести исходные данные (**D9:E13**).

Пример 1. Изобразим исходные данные на графике. На рис. 7.5 видно, что расположение точек напоминает прямую, поэтому для аппроксимации используем линейную функцию $y^* = A_0 + A_1 x$.

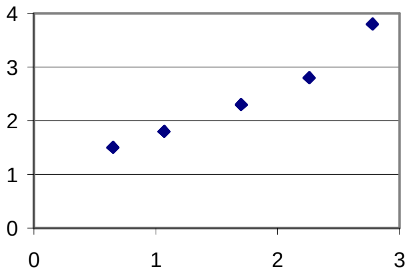


Рис. 7.5. Графическое представление исходных данных

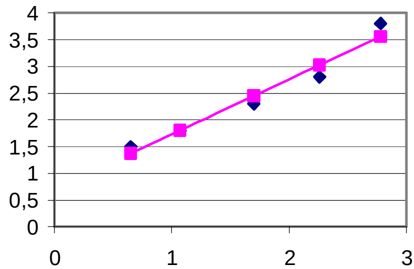


Рис. 7.6. Графическое представление аппроксимирующей функции

	A	B	C	D	E	F	G	H
7			Исходные данные			Вспомогательные вычисления		
8		№		X	У	X^2	У*X	
9		0	X0	0,65	1,5	0,4225	0,975	
10		1	X1	1,07	1,8	1,1449	1,926	
11		2	X2	1,7	2,3	2,89	3,91	
12		3	X3	2,26	2,8	5,1076	6,328	
13		4	X4	2,78	3,8	7,7284	10,564	
14	n=	5	суммы	8,46	12,2	17,2934	23,703	
15								
16		Матр. коэф. системы			Правая часть			
17			5	8,46		12,2		
18			8,46	17,293		23,703		
19								
20		Обратная матрица				Решение		
21			1,161	-0,568	A0	0,7017		
22			-0,568	0,3357	A1	1,0274		
23							Погрешность вычислений	
24								
25				X	У	У*=A0+A1·X	ABS(У-У*)	
26				0,65	1,5	1,3695	0,130513	
27				1,07	1,8	1,8010	0,000979	
28				1,7	2,3	2,4482	0,148219	
29				2,26	2,8	3,0235	0,223543	
30				2,78	3,8	3,5578	0,242228	

=B14
=D14

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{n=0}^{n-1} x_i \\ \sum_{n=0}^{n-1} x_i & \sum_{n=0}^{n-1} x_i^2 \end{pmatrix}$$

Рис. 7.7. Аппроксимация экспериментальных данных линейной функцией

Пример 2. Изобразим исходные данные на графике. На рис. 7.8 видно, что расположение точек напоминает параболу, для аппроксимации используем квадратичную функцию $y^* = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$.

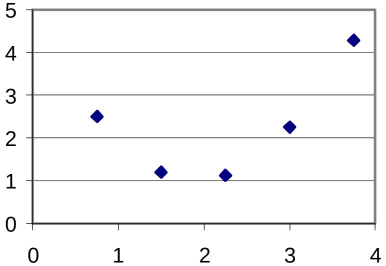


Рис. 7.8. Графическое представление исходных данных

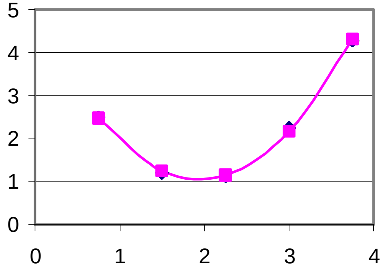


Рис. 7.9. Графическое представление аппроксимирующей функции

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
7			Исходные данные			Вспомогательные вычисления				
8		№		X	У	X^2	X^3	X^4	У*X	У*X^2
9		0	X0	0,75	2,5	0,563	0,422	0,316	1,875	1,406
10		1	X1	1,5	1,2	2,250	3,375	5,063	1,800	2,700
11		2	X2	2,25	1,12	5,063	11,391	25,629	2,520	5,670
12		3	X3	3	2,25	9,000	27,000	81,000	6,750	20,250
13		4	X4	3,75	4,28	14,063	52,734	197,754	16,050	60,188
14	n=	5	суммы	11,25	11,35	30,938	94,922	309,762	28,995	90,214
15										
16				Матрица коэф. системы			Правая часть			
17			=B14	5	11,25	30,938		11,35		=E14
18			=D14	11,25	30,938	94,922		28,995		= I14
19			=F14	30,938	94,922	309,762		90,214		= J14
20				Обратная матрица			Решение			
21				4,6	-4,4	0,889	A0	4,822		
22				-4,4	4,749	-1,016	A1	-3,882		
23				0,889	-1,016	0,226	A2	0,999		
24						У*=A0+A1·X+A2·X^2				
25				X	У	У*	ABS(У-У*)			
26				0,75	2,5	2,472	0,028			
27				1,5	1,2	1,247	0,047			
28				2,25	1,12	1,146	0,026			
29				3	2,25	2,169	0,081			
30				3,75	4,28	4,316	0,036			

Рис. 7.10. Аппроксимация экспериментальных данных квадратичной функцией

В ячейках **F9:J13** выполняются вспомогательные вычисления, в ячейках **D14:J14** формируются суммы, необходимые для составления системы линейных уравнений.

При получении матрицы коэффициентов (**D17:F19**) и правой части (**H17:H19**) системы, используйте ссылки на ранее вычисленные значения.

Далее для решения системы линейных уравнений находится обратная матрица (**D21:F23**). Для нахождения неизвестных A_0, A_1, A_2 следует умножить обратную матрицу на правую часть системы (решение систем методом обратной матрицы средствами Microsoft Excel рассмотрено в лабораторной работе № 6 первой части данного пособия).

В строках **26—30** выполняется анализ полученных результатов. В частности, находится отклонение значений аппроксимирующих функций $y^* = A_0 + A_1 x$ (см. рис.7.7) или $y^* = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$ (см. рис. 7.10) от исходных данных.

Изобразите на графике исходные данные и полученные аппроксимирующие функции (см. рис. 7.6, 7.9). Точки, соответствующие значениям аппроксимирующих функций, соедините линиями (**выделить точки** > **правая кнопка мыши** > **тип диаграммы** > **точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями**).

***Задание* 4.** Ввести исходные данные своего варианта (см. таблицу 1 приложения), изобразить их на графике. По расположению точек определить вид аппроксимирующей функции (линейная или квадратичная), скопировать соответствующий лист контрольного примера, внести изменения в исходные данные. В случае, если контрольный пример выполнен в соответствии с приведенными рекомендациями, остальные вычисления выполнятся автоматически.

Оформите ответ:

По значениям исходных данных

x_i					
y_i					

построена аппроксимирующая функция y*=______________ (*линейного, квадратичного*) вида.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

***Задание* 5.** Функция задана таблично:

x_i	2	3	4
y_i	0	1	4

1) построить интерполяционный многочлен Лагранжа;

2) используя многочлен Лагранжа, вычислить приближенные значения заданной функции в точках $x = 2{,}5$; $x = 3{,}23$.

3) аппроксимировать методом наименьших квадратов заданную функцию (использовать линейный вид аппроксимирующей функции);

4) вычислить отклонения значений аппроксимирующей функции от исходных данных в точках $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Контрольные вопросы

1. Сущность метода интерполяции.
2. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
3. Аппроксимация функций методом наименьших квадратов.
4. Формулы метода наименьших квадратов.

Т е м а 5. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В тех случаях, когда при вычислении определенного интеграла $\int_a^b y(x)dx$ невозможно найти первообразную или она очень сложна для вычислений, прибегают к формулам численного интегрирования.

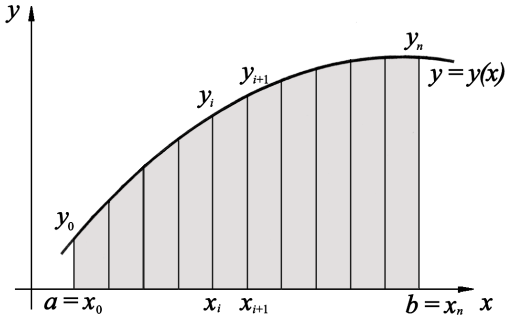


Рис. 8.1. Геометрический смысл определённого интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой $y = y(x)$ ($y(x) \geq 0$) и прямыми x=a, x=b (см. рис. 8.1). Разобьем отрезок [a, b] точками x_0, x_1, ..., x_n на n равных частей — элементарных отрезков. Получим n элементарных криволинейных трапеций.

Формулы прямоугольников. Площадь i-той элементарной криволинейной трапеции можно приближенно вычислить как площадь прямоугольника со сторонами $x_{i+1} - x_i = h$ и y_i (см. рис. 8.2). Тогда $S_i \approx y_i \cdot h$ и значение интеграла:

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y(x_0 = a) = y_0$, $y(x_n = b) = y_n$, $y(x_i = a + ih) = y_i$, $i = 0, 1, ..., n$. Данная формула называется первой формулой прямоугольников или формулой левых прямоугольников.

Незаштрихованная область криволинейной трапеции на рис. 8.2 – погрешность вычисления неопределенного интеграла на i-том элементарном отрезке. Очевидно, что чем больше количество отрезков разбиения n, тем точнее будет найдено значение интеграла.

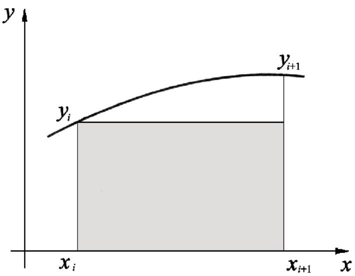


Рис. 8.2. Геометрический смысл первой формулы прямоугольников

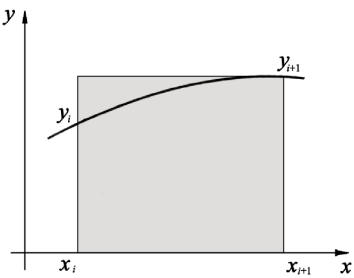


Рис. 8.3. Геометрический смысл второй формулы прямоугольников

Если же построить прямоугольник, используя правую границу элементарной трапеции (рис. 8.3), получим вторую формулу прямоугольников (формулу правых прямоугольников):

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_1 + y_2 + ... + y_n).$$

Следует отметить, что данные формулы не находят широкого применения, так как имеют большую погрешность, пропорциональную величине шага $d \approx O(h)$.

Для повышения точности вычисления интеграла значение площади S_i можно оценить, используя прямоугольник со стороной, равной значению подынтегральной функции в середине $x_{i+1/2}$ элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ (см. рис. 8.4). Тогда $S_i \approx y_{i+1/2} \cdot h$ и интеграл:

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-1/2}).$$

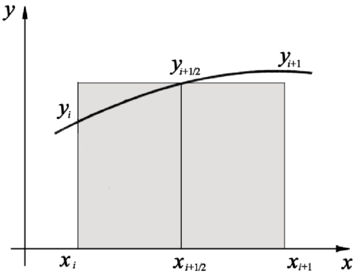


Рис. 8.4. Геометрический смысл усложненной формулы прямоугольников

Указанная формула называется усложненной формулой прямоугольников (формулой центральных прямоугольников), она имеет второй порядок точности относительно h, т.е. $d \approx O(h^2)$.

На практике при вычислении определенного интеграла численными методами часто требуется обеспечить точность вычислений ε.

Для оценки точности решения выполняются два расчета: с числом разбиений n и $2n$. Вычисления заканчивают, если $|I_n - I_{2n}| \leq \varepsilon$. В случае, если полученные результаты отличаются более чем на требуемую точность, число разбиений удваивается и вновь производится сравнение результатов.

***Задание* 1.** Вычислить определенный интеграл $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^4+5}} dx$, используя первую, вторую и усложненную формулы прямоугольников. Обеспечить точность решения $e = 0{,}001$.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); количество отрезков разбиения (**C4**); формулу расчета шага интегрирования h (**D4**) (см. рис. 8.5).

В ячейках **B6:C6** вычислить значения подынтегральной функции в точках начала и конца отрезка интегрирования. Таким образом, получим $y_0 = y(a)$, $y_n = y(b)$.

Заполнить блок **A8:B19**, используя формулы Microsoft Excel самостоятельно (в ячейке **B8** дать ссылку на точку a — начало отрезка интегрирования; в ячейке **B9** при расчете $x_{i+1} = x_i + h$, воспользоваться функцией **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки b). Ввести подынтегральную функцию $y(x) = 1/\sqrt{x^4+5}$ в ячейку **C8** и выполнить заполнение блока **C8:C18**.

=ЕСЛИ(B8>=$B$4;"Интеграл="&ОКРУГЛ(D8-$D$4*$C$6;5);"…")

=ЕСЛИ(B8>=$B$4;"Интеграл="&ОКРУГЛ(D8-$D$4*$B$6;5);"…")

=ЕСЛИ(G8>=$B$4-$D$4/2;"Интеграл="&ОКРУГЛ(I8;5);"…")

=$D$4*C8

=$D$4*C9+D8

=$D$4*H8

=$D$4*H9+I8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3	a	b	n	h						
4	1	4	10	0,3						
5		*y*(*a*)	*y*(*b*)							
6		0,4082	0,0619							
7	№	Xi	Yi	част суммы	1-я. ф-ла	2-я ф-ла	$X_{i+1/2}$	$Y_{i+1/2}$	част суммы	Усл. ф-ла
8	0	1	0,40825	0,12247	…	…	1,15	0,38493	0,11548	…
9	1	1,3	0,35678	0,22951		…	1,45	0,32581	0,21322	
10	2	1,6	0,29420	0,31777	…	…	1,75	0,26372	0,29234	
11	3	1,9	0,23549	0,38841		…	2,05	0,21007	0,35536	
12	4	2,2	0,18756	0,44468		…	2,35	0,16784	0,40571	…
13	5	2,5	0,15065	0,48988	…	…	2,65	0,13569	0,44641	…
14	6	2,8	0,12266	0,52668	…	…	2,95	0,11129	0,47980	…
15	7	3,1	0,10135	0,55708	…	…	3,25	0,09262	0,50759	…
16	8	3,4	0,08493	0,58256	…	…	3,55	0,07813	0,53103	…
17	9	3,7	0,07209	0,60419	…	…	3,85	0,06671	0,55104	Интеграл=0,55104
18	10	4	0,06190	0,62276	Интегр=0,60419	Интегр=0,50028	стоп			
19	11	стоп								
20										

Рис. 8.5. Численное интегрирование по формулам прямоугольников

В столбце **D** накапливается сумма $h(y_0 + y_1 + ... + y_n)$. В силу того, что в первой формуле прямоугольников не используется значение y_n, а во второй — y_0, запишем формулы в виде:

$$\text{1-я формула: } \int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_n) - hy_n,$$

$$\text{2-я формула: } \int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_n) - hy_0.$$

Указанные формулы реализованы в столбцах **E** и **F** соответственно, значение интеграла выведено с пятью десятичными знаками.

В столбцах **G—J** реализована усложненная формула прямоугольников.

В частности, в блоке **G8:G17** рассчитываются значения середин $x_{i+1/2}$ элементарных отрезков; надпись «Стоп» выдается после получения $x_{n-1/2}$. В блоке **H8:H17** вычисляются значения подынтегральной функции $y_{i+1/2}$ при соответствующих значениях $x_{i+1/2}$.

В столбце **I** накапливается сумма $h(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-1/2})$, значение интеграла выдается в столбце **J** с пятью десятичными знаками.

Скопировать полученное решение на тот же лист, выполнить вычисление интеграла по формулам прямоугольников при n=20. Для этого изменить значение n, распространить формулы строки **17** до появления надписей «Стоп».

Оценку точности вычислений рассмотрим на примере усложненной формулы прямоугольников. Нами было получено, что $I^{10}_{\text{усл}} = 0{,}55104$, $I^{20}_{\text{усл}} = 0{,}55134$. Как видим, $\left|I^{10}_{\text{усл}} - I^{20}_{\text{усл}}\right| = 0{,}0003 < 0{,}001$, что соответствует допустимой погрешности $e = 0{,}001$.

В противном случае следовало бы удвоить количество разбиений отрезка интегрирования и установить значение n, при котором выполняется условие $\left|I^{n}_{\text{усл}} - I^{2n}_{\text{усл}}\right| \le e$.

***Задание* 2.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 2 приложения). Для усложненной формулы прямоугольников установить, обеспечена ли точность решения $e = 0{,}001$.

Формула трапеций. В случае если величина S_i вычисляется как площадь трапеции (см. рис. 8.6), значение интеграла можно приближенно получить по формуле

$$\int_a^b y(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right),$$

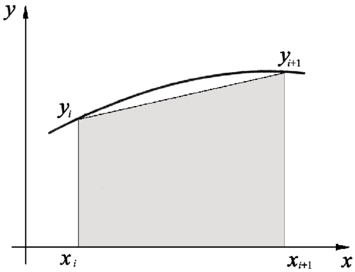


Рис. 8.6. Геометрический смысл формулы трапеций

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y(x_0 = a) = y_0$, $y(x_n = b) = y_n$, $y(x_i = a + ih) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Указанная формула называется <u>формулой трапеций</u> и имеет второй порядок точности относительно h, т.е. $d \approx O(h^2)$.

Задание **3.** Вычислить определенный интеграл $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^4+5}} dx$, используя формулу трапеций.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); количество отрезков разбиения (**C4**); формулу расчета шага интегрирования h (**D4**) (см. рис. 8.7).

В ячейках **B6:C6** вычислить значения $y_0 = y(a)$, $y_n = y(b)$; в ячейке **D6** — значение $h(y_0 + y_n)$.

Заполнить блок **A8:B19**, используя формулы Microsoft Excel самостоятельно (в ячейке **B9** воспользоваться функцией **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки b). Ввести подынтегральную функцию $y(x) = 1/\sqrt{x^4+5}$ в ячейку **C8** и выполнить заполнение блока **C8:C18**.

В столбце **D** накапливается сумма $h(y_0 + y_1 + \ldots + y_n)$.

Представим формулу трапеций в виде:

$$\int_a^b y(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right) = h(y_0 + y_1 + \ldots + y_n) - \frac{h(y_0 + y_n)}{2}.$$

Данная формула реализуется в столбце **E** и выдается значение интеграла с пятью знаками после запятой.

=ЕСЛИ(B8>=$B$4;"Интеграл="&ОКРУГЛ(D8-$D$6/2;5);"…")

	A	B	C	D	E
3	*a*	*b*	*n*	*h*	
4	1	4	10	0,3	
5		*y*(*a*)	*y*(*b*)	*h**(*y*(*a*)+*y*(*b*))	
6		0,4082	0,0619	0,1410	
7	№	Xi	Yi	частичные суммы	Интеграл
8	0	1	0,40825	0,12247	...
9	1	1,3	0,35678	0,22951	...
10	2	1,6	0,29420	0,31777	...
11	3	1,9	0,23549	0,38841	...
12	4	2,2	0,18756	0,44468	...
13	5	2,5	0,15065	0,48988	...
14	6	2,8	0,12266	0,52668	...
15	7	3,1	0,10135	0,55708	...
16	8	3,4	0,08493	0,58256	...
17	9	3,7	0,07209	0,60419	...
18	10	4	0,06190	0,62276	Интеграл=0,55224
19	11	стоп			

=$D$4*C8

=$D$4*C9+D8

Рис. 8.7. Численное интегрирование по методу трапеций

Скопировать полученное решение на тот же лист, выполнить вычисление интеграла по формуле трапеций при n=20.

***Задание* 4.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 2 приложения).

Формула Симпсона. Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на четное число элементарных отрезков.

В основе формулы Симпсона лежит интерполяция подынтегральной функции $y=y(x)$ многочленом второй степени, т.е. подынтегральная функция на каждом элементарном отрезке двойной длины заменяется параболой, построенной по трем точкам — (x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}) и (x_{2i+2}, y_{2i+2}). Тогда значение интеграла можно приближенно получить по формуле

$$\int_a^b y(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2\left(y_2 + y_4 + \mathbf{K} + y_{n-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \mathbf{K} + y_{n-1}\right)\right),$$

где $h=\dfrac{b-a}{n}$, $y\left(x_0=a\right)=y_0$, $y\left(x_n=b\right)=y_n$, $y(x_i=a+ih)=y_i$.

Указанная формула называется <u>формулой Симпсона</u> и имеет четвертый порядок точности относительно h, т.е. $d \approx O(h^4)$.

***Задание* 5.** Вычислить определенный интеграл $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^4+5}} dx$, используя формулу Симпсона.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); количество отрезков разбиения (**C4**); формулу в ячейку **D4** (см. рис. 8.8), которая предупредит об ошибке при задании нечетного *n*.

=ЕСЛИ(ОСТАТ(C4;2)=0; (B4-A4)/C4;"нечетное *n* не допускается")

	A	B	C	D	E
3	*a*	*b*	*n*	*h*	
4	1	4	10	0,3	
5		*y*(*b*)			
6		0,0619			
7	№	Xi	Yi	частичные суммы	Интеграл
8	0	1	0,40825	0,40825	
9	1	1,3	0,35678	1,83536	...
10	2	1,6	0,29420	2,42375	...
11	3	1,9	0,23549	3,36572	...
12	4	2,2	0,18756	3,74085	...
13	5	2,5	0,15065	4,34344	...
14	6	2,8	0,12266	4,58876	...
15	7	3,1	0,10135	4,99416	...
16	8	3,4	0,08493	5,16403	...
17	9	3,7	0,07209	5,45239	...
18	10	4	0,06190	5,57619	Интеграл=0,55143
19	11	стоп			

Рис. 8.8. Численное интегрирование по методу Симпсона

Вычислить значение $y_n = y(b)$ в ячейке **B6**. Заполнить блок **A8:B19** (в ячейке **B9** воспользоваться функцией **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки *b*). Ввести подынтегральную функцию $y(x) = 1/\sqrt{x^4+5}$ в ячейку **C8** и выполнить заполнение блока **C8:C18**.

Преобразуем формулу Симпсона с учетом того, что последнее значение $y_n = y(b)$ всегда будет иметь четный индекс, к виду:

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2\left(y_2 + y_4 + \mathbf{K} + y_{n-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \mathbf{K} + y_{n-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 2\left(y_2 + y_4 + \mathbf{K} + y_{n-2} + y_n\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \mathbf{K} + y_{n-1}\right) - y_n\right)$$

При вычислении частичных сумм в столбце **D** необходимо учесть, что значения подынтегральной функции при четном n умножаются на 2, а при нечетном n — на 4, поэтому для определения нечетности или четности индекса, используем формулу **ОСТАТ(*n*; 2)** (указанная формула выдает значение остатка при делении на 2). Очевидно, что для четных n остаток при делении на 2 будет равен нулю, а при нечетных n — отличен от нуля (см. рис. 8.9).

В столбце **E** вывести значение интеграла с пятью знаками после запятой.

	D	E
7	частичные суммы	Интеграл
8	=C8	
9	=ЕСЛИ(ОСТАТ(A9;2)=0;D8+2*C9; D8+4*C9)	=ЕСЛИ(B9>=$B$4;"Интеграл=" &ОКРУГЛ((D9-$B$6)*$D$4/3;5);"..")

Рис. 8.9. Формулы метода Симпсона

Скопировать полученное решение на тот же лист, выполнить вычисление интеграла по формуле Симпсона при n=20.

***Задание* 6.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 2 приложения).

***Задание* 7.** Составить сравнительную таблицу результатов численного решения определенного интеграла, полученных рассмотренными методами (см. табл. 8.1). Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений, приняв в качестве истинного значения интеграла результат, полученный с помощью формулы Симпсона при $n = 20$.

Обозначим приближенное значение интеграла буквой *I*, тогда

$$\Delta(I) = \left|I - I^{20}_{\text{Симп.}}\right|, \quad d(I) = \frac{\Delta(I)}{|I|}.$$

Указанная таблица составляется средствами Microsoft Excel. Для этого значения интегралов, полученные рассмотренными методами при $n=10$ и $n=20$, переписываются вручную. Значения погрешностей вычисляются по вышеприведенным формулам.

Таблица 8.1

Численное интегрирование. Оценка погрешности

	I_{10}	$\Delta(I)$	$\delta(I)$	I_{20}	$\Delta(I)$	$\delta(I)$
1-я ф-ла прямоуг.	0,60419	0,05275	8,731%	0,57761	0,02617	4,531%
2-я ф-ла прямоуг.	0,50028	0,05116	10,226%	0,52566	0,02578	4,904%
усл. ф-ла прямоуг.	0,55104	0,00040	0,073%	0,55134	0,00010	0,018%
ф-ла трапеций	0,55224	0,00080	0,145%	0,55164	0,00020	0,036%
ф-ла Симпсона	0,55143	0,00001	0,002%	0,55144	—	—

***Задание* 8.** Скопировать таблицу, полученную в задании 7, на новый лист. Составить сравнительную таблицу результатов численного решения определенного интеграла рассмотренными методами для индивидуального варианта (см. таблицу 2 приложения).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

***Задание* 9.** Вычислить интеграл $\int_0^1 (3x^2+1)dx$, приняв шаг интегрирования $h=0{,}1$, с помощью:

1) первой, второй, усложненной формул прямоугольников;
2) формулы трапеций;
3) формулы Симпсона;
4) сравнить полученные результаты с точным решением (найти его самостоятельно), определить абсолютную и относительную погрешности каждого метода.

Контрольные вопросы

1. Формулы прямоугольников, погрешность формул прямоугольников.
2. Формула трапеций, погрешность метода трапеций.
3. Формула Симпсона, погрешность метода Симпсона.

Тема 6. **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть требуется найти на отрезке $[a, b]$ решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при заданном начальном условии $y(a) = y_0$. Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Рассмотрим численные методы решения этой задачи. Отметим, что численные методы дают искомое приближенное решение в виде таблицы значений.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей — элементарных отрезков точками $x_0, x_1, ..., x_n$, причем, $x_0 = a$, $x_n = b$. Величину $h = (b - a)/n$ будем называть шагом интегрирования. Тогда $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, ..., n$.

Метод Эйлера. Согласно методу Эйлера, зная значение искомой функции в начале отрезка $[a, b]$: $y(a) = y_0$, приближенное значение решения уравнения в точке y_1, можно определить по формуле

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Затем в качестве y_0 выступает значение y_1, находится y_2 и т.д.

Общая итерационная формула метода Эйлера имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1.$$

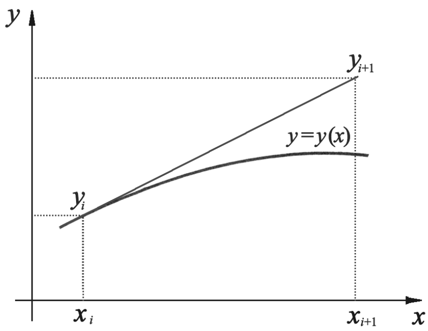


Рис. 9.1. Один шаг метода Эйлера

Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации решения на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ отрезком касательной, проведенной к графику решения в точке x_i (рис. 9.1). Затем строится касательная к кривой $y = y(x)$ в точке x_{i+1} и переносится параллельно самой себе до совмещения с концом касательной, полученной на предыдущей итерации.

Полученная ломаная и будет представлять собой приближенное решение, полученное методом Эйлера.

Формула Эйлера имеет погрешность метода $d \approx O(h^2)$.

Часто при решении дифференциального уравнения численными методами требуется обеспечить точность вычислений ε. Для практического выбора шага h с целью обеспечения заданной точности ε применяется следующий прием.

Выполняются два расчета: с числом разбиений n и $2n$. Вычисления заканчивают, если $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \left| y_i^n - y_i^{2n} \right| \le e$. В случае, если полученные результаты отличаются более чем на требуемую точность, число разбиений удваивается и вновь производится сравнение результатов.

***Задание* 1.** Используя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$ при заданном начальном условии $y(0) = -1$ на отрезке $[0, 1]$. Обеспечить точность решения $e = 0{,}001$.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); начальное значение y_0 (**C4**); количество отрезков разбиения (**D4**); формулу расчета шага интегрирования h (**E4**) (см. рис. 9.2).

	A	B	C	D	E
3	a	b	y0	n	h
4	0	1	-1	10	0,1
5					
6	i	xi	yi	комментарий	
7	0	0	-1,0000	…	
8	1	0,1	-0,9000	…	
9	2	0,2	-0,8180	…	
10	3	0,3	-0,7471	…	
11	4	0,4	-0,6823	…	
12	5	0,5	-0,6197	…	
13	6	0,6	-0,5563	…	
14	7	0,7	-0,4894	…	
15	8	0,8	-0,4164	…	
16	9	0,9	-0,3351	…	
17	10	1	-0,2429	Стоп	

Рис. 9.2. Численное решение дифференциального уравнения методом Эйлера

В блоке (**A7:A17**) указываются номера итераций; в блоке (**B7:B17**) рассчитываются точки разбиения отрезка интегрирования; в ячейках (**C7:C17**) реализуется формула метода Эйлера $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

В столбце комментария используйте функцию **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки b.

Изобразить полученные значения приближенного решения на графике, используя точечный тип диаграммы (см. рис. 9.3). Это и есть ломаная, дающая приближенный вид интегральной кривой — графика точного решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии.

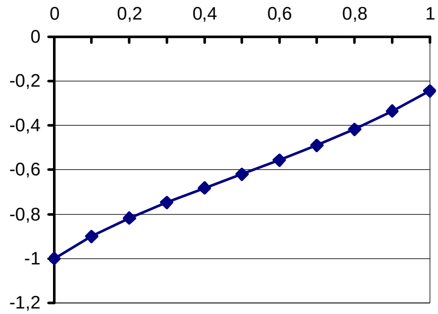


Рис. 9.3. Приближенное решение, полученное методом Эйлера

Скопировать полученный результат на тот же лист, выполнить решение дифференциального уравнения методом Эйлера при n=20. Для этого изменить значение n, распространить формулы строки **17** до появления надписей «Стоп».

Получим $y_n^{20} = -0{,}2380$. Ранее было вычислено $y_n^{10} = -0{,}2429$. Как видим, $\left| y_n^{10} - y_n^{20} \right| = 0{,}049$, что превосходит допустимую погрешность e.

Путем удвоения количества разбиений отрезка интегрирования установите, при каком n выполняется условие $\left| y_n^{n} - y_n^{2n} \right| \le 0{,}001$.

***Задание* 2.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 3 приложения).

Исправленный метод Эйлера. Общая итерационная формула исправленного метода Эйлера имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)) \right], \quad i = 0, 1, ..., n-1.$$

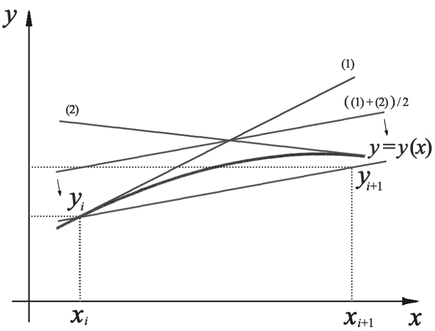


Рис. 9.4. Один шаг исправленного метода Эйлера

Геометрический смысл исправленного метода Эйлера заключается в следующем (см. рис. 9.4). Строится касательная (1) к кривой $y = y(x)$ в точке x_i и касательная (2) в точке x_{i+1}. Находится средняя линия ((1)+(2))/2. Полученная линия переносится параллельно самой себе до совмещения с точкой $(x_i,\, y_i)$. Точка касательной y_{i+1} и будет являться следующим приближением

Исправленный метод Эйлера более точен, нежели метод Эйлера. Погрешность метода $d \approx O(h^3)$.

***Задание* 3.** Используя исправленный метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$ при заданном начальном условии $y(0) = -1$ на отрезке $[0, 1]$. Обеспечить точность решения $e = 0{,}001$.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); начальное значение y_0 (**C4**); количество отрезков разбиения (**D4**); формулу расчета шага интегрирования h (**E4**) (см. рис. 9.5).

В блоке (**A7:A17**) указываются номера итераций; в блоке (**B7:B17**) приводятся точки разбиения отрезка интегрирования; в ячейках (**C7:C17**) реализуется формула исправленного метода Эйлера. Для удобства вычислений данная формула разбивается на несколько составляющих, значения которых вычисляются в блоке **D7:G17**. В частности, в столбце **D** вычисляется $f(x_i,\, y_i)$; в столбце **E** – $x_i + h$; в столбце **F** – $y_i + h \cdot f(x_i,\, y_i))$; в столбце **G** – $f(x_i + h,\, y_i + h \cdot f(x_i,\, y_i))$.

В столбце комментария используйте функцию **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки b.

Изобразить полученные значения приближенного решения на графике, используя точечный тип диаграммы.

	A	B	C	D	E	F	G	H
3	a	b	y_0	n	h			
4	0	1	-1	10	0,1			
5			=C7+$E$4*(D7+G7)/2					
6	i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	x_i+h	y_i+h $f(x_i,y_i)$	f(xi+h, yi+ +h f(xi,yi))	комм.
7	0	0	-1,0000	1,0000	0,1	-0,9000	0,8200	…
8	1	0,1	-0,9090	0,8363	0,2	-0,8254	0,7212	…
9	2	0,2	-0,8311	0,7308	0,3	-0,7580	0,6646	…
10	3	0,3	-0,7614	0,6697	0,4	-0,6944	0,6422	…
11	4	0,4	-0,6958	0,6441	0,5	-0,6314	0,6486	…
12	5	0,5	-0,6311	0,6483	0,6	-0,5663	0,6807	…
13	6	0,6	-0,5647	0,6789	0,7	-0,4968	0,7368	…
14	7	0,7	-0,4939	0,7339	0,8	-0,4205	0,8168	…
15	8	0,8	-0,4164	0,8134	0,9	-0,3350	0,9222	…
16	9	0,9	-0,3296	0,9186	1	-0,2377	1,0565	…
17	10	1	-0,2308	1,0533	1,1	-0,1255	1,2257	Стоп
18								

Рис. 9.5. Численное решение дифференциального уравнения исправленным методом Эйлера

Скопировать полученный результат на тот же лист, выполнить решение дифференциального уравнения исправленным методом Эйлера при n=20. Установить, обеспечена ли требуемая точность ε на конце интервала интегрирования.

***Задание* 4.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 3 приложения).

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Данный метод используется чаще остальных при решении практических задач.

Общая итерационная формула метода имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

где $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$, $k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$, $k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_3)$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

Метод Рунге-Кутта является наиболее точным среди рассмотренных нами методов, его погрешность составляет $d \approx O(h^4)$.

***Задание* 5.** Используя метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности, найти решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$ при заданном начальном условии $y(0) = -1$ на отрезке $[0, 1]$. Обеспечить точность решения $e = 0{,}001$.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); начальное значение y_0 (**C4**); количество отрезков разбиения (**D4**); формулу расчета шага интегрирования h (**E4**) (см. рис. 9.6).

В блоке (**A7:A17**) указываются номера итераций; в блоке (**B7:B17**) рассчитываются точки разбиения отрезка интегрирования; в ячейках (**C7:C17**) реализуется формула метода Рунге-Кутта.

Значения коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_4 вычисляются в блоке **D7:L17**. В частности, в столбце **D** вычисляется $k_1 = f(x_i, y_i)$; в столбце **E** — $x_i + \frac{h}{2}$; в столбце **F** — $y_i + \frac{h}{2}k_1$; в столбце **G** — $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$ и т.д.

Напомним, что $f(x, y) = x^2 + y^2$. Обратите также внимание на то, что ссылки на значение шага интегрирования h, должны иметь абсолютную адресацию (**$E$4**).

Например, формула в ячейке **D7** будет иметь вид **=B7^2+C7^2**, а в ячейке **E7**: **=B7+$E$4/2**.

В столбце комментария используйте функцию **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки b.

Изобразить полученные значения приближенного решения на графике, используя точечный тип диаграммы.

Скопировать полученное результат на тот же лист, выполнить решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности при n=20. Установить, обеспечена ли требуемая точность ε на конце интервала интегрирования.

***Задание* 6.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 3 приложения).

***Задание* 7.** Составить средствами Microsoft Excel сравнительную таблицу результатов численного решения дифференциального уравнения, полученных рассмотренными методами.

=C7+$E$4*(D7+2*G7+2*I7+L7)/6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
3	a	b	y_0	n	h								
4	0	1	-1	10	0,1								
5													
6	i	x_i	y_i	k1	x_i+h/2	y_i+k1*h/2	k2	y_i+k2*h/2	k3	x_i+h	y_i+k3*h	k4	комм.
7	0	0	-1,0000	1,0000	0,05	-0,9500	0,9050	-0,9548	0,9140	0,1	-0,9086	0,8355	…
8	1	0,1	-0,9088	0,8359	0,15	-0,8670	0,7742	-0,8701	0,7795	0,2	-0,8308	0,7303	…
9	2	0,2	-0,8309	0,7304	0,25	-0,7944	0,6935	-0,7962	0,6964	0,3	-0,7612	0,6695	…
10	3	0,3	-0,7612	0,6695	0,35	-0,7277	0,6521	-0,7286	0,6534	0,4	-0,6959	0,6443	…
11	4	0,4	-0,6958	0,6441	0,45	-0,6636	0,6429	-0,6637	0,6430	0,5	-0,6315	0,6488	…
12	5	0,5	-0,6314	0,6487	0,55	-0,5990	0,6613	-0,5983	0,6605	0,6	-0,5653	0,6796	…
13	6	0,6	-0,5652	0,6795	0,65	-0,5312	0,7047	-0,5300	0,7034	0,7	-0,4949	0,7349	…
14	7	0,7	-0,4947	0,7347	0,75	-0,4580	0,7722	-0,4561	0,7705	0,8	-0,4176	0,8144	…
15	8	0,8	-0,4174	0,8143	0,85	-0,3767	0,8644	-0,3742	0,8625	0,9	-0,3312	0,9197	…
16	9	0,9	-0,3310	0,9196	0,95	-0,2850	0,9837	-0,2818	0,9819	1	-0,2328	1,0542	…
17	10	1	-0,2326	1,0541	1,05	-0,1799	1,1349	-0,1758	1,1334	1,1	-0,1192	1,2242	Стоп
18													

Рис. 9.6. Численное решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности

Оценить погрешность на конце интервала интегрирования для каждого метода (см. табл. 9.1). За истинное значение принять результат, полученный методом Рунге-Кутта в точке $x=1$ при $n=20$.

Таблица 9.1

Оценка погрешности численного решения обыкновенного дифференциального уравнения

	y_n^{10}	$\Delta(y_n^{10})$	$d(y_n^{10})$	y_n^{20}	$\Delta(y_n^{20})$	$d(y_n^{20})$
мет. Эйлера	-0,2429	0,0103	4,240%	-0,238	0,0054	2,269%
исправл. мет. Эйлера	-0,2308	0,0018	0,780%	-0,2321	0,0005	0,215%
метод Рунге-Кутта	-0,2326	0	0,000%	-0,2326	—	—

***Задание* 8.** Скопировать таблицу, полученную в задании 7, на новый лист. Составить сравнительную таблицу результатов численного решения обыкновенного дифференциального уравнения рассмотренными методами для индивидуального варианта (см. таблицу 3 приложения).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

***Задание* 9.** Дано дифференциальное уравнение $y'=1-2x-6x^2$ с начальным условием $y(0)=1$. Приняв шаг интегрирования $h=0{,}1$, выполнить две итерации с помощью:

1) метода Эйлера;

2) исправленного метола Эйлера;

3) метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности;

4) сравнить результаты, полученные в точке $x=0{,}2$, с точным решением (найти его самостоятельно), определить абсолютную и относительную погрешности каждого метода.

Контрольные вопросы

1. Итерационная формула метода Эйлера.
2. Итерационная формула исправленного метода Эйлера.
3. Итерационная формула метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

Т е м а 7. **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ**

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Оптимизация — это процесс нахождения экстремума (глобального максимума или минимума) некоторой функции или выбор наилучшего (оптимального) варианта из множества возможных.

В линейном программировании решаются такие задачи как оптимальное управление производством; оптимальное составление смеси; оптимальное распределение ресурсов; транспортные задачи; оптимальное составление бизнес-плана и др.

Пусть требуется определить максимум или минимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max/\min \qquad \text{(целевая функция)}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\,, \quad i = \overline{1, m}\,, \quad m < n\,;$$

$$x_j \ge 0\,, \quad j = \overline{1, n}\,.$$

Вектор $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий ограничениям, называется допустимым решением. Вектор $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, дающий максимум или минимум целевой функции и удовлетворяющий ограничениям, называется оптимальным решением.

Рассмотрим задачу об оптимальном распределении ресурсов.

***Задание* 1.** Для производства двух видов изделия *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида представлены в табл. 10.1. Требуется составить план выпуска изделий *A* и *B*, при котором прибыль предприятия от их реализации максимальна.

Таблица 10.1

Виды сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие, кг		Общее количество сырья, кг
	A	*B*	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль (одно изделие)	30	40	

Составим математическую модель задачи. Пусть x_1 — количество изделий вида A, x_2 — количество изделий вида B.

Тогда целевая функция имеет вид

$$F(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2 \to \max .$$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Графическое решение. Рассмотрим графический способ решения поставленной задачи.

Для построения области допустимых решений, перепишем неравенства системы ограничений в виде равенств и выполним сокращение коэффициентов системы там, где это возможно

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300 \\ 4x_1 + 4x_2 = 120 \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 75 & (1) \\ x_1 + x_2 = 30 & (2) \\ x_1 + 4x_2 = 84 & (3) \end{cases}$$

Получили уравнения трех прямых, построим их на графике (см. рис. 10.1). Прямая (1) проходит через точки (25, 0) и (0, 75); прямая (2) — через точки (30, 0) и (0, 30); прямая (3) — через точки (84, 0) и (0, 21).

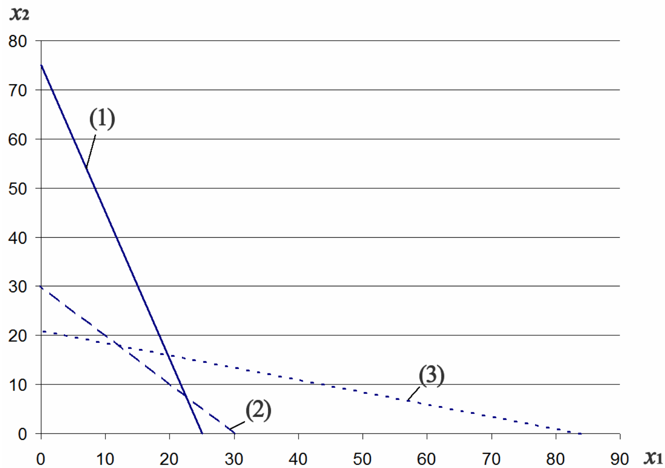


Рис. 10.1. Графическое решение задачи оптимизации

Прямые, соответствующие ограничениям $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, совпадают с осями координат.

Вернемся к неравенствам в системе ограничений и изобразим штриховкой области, определяемые данными неравенствами (см. рис. 10.2). Выделим область, являющуюся пересечением всех полученных полуплоскостей. Получим выпуклый многоугольник, который определяет множество допустимых решений (см. рис. 10.3).

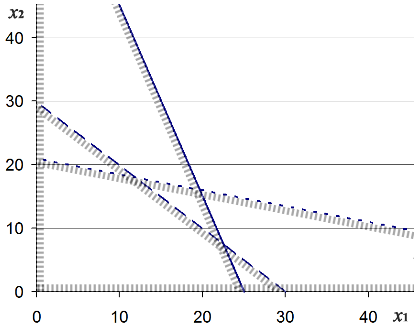


Рис. 10.2. Области, определяемые неравенствами

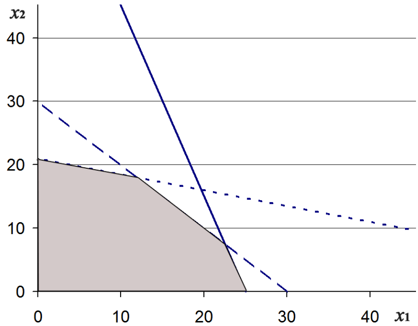


Рис. 10.3. Многоугольник допустимых решений

Построим на графике линию уровня — прямую, определяемую уравнением целевой функции $F(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2$.

Зададим $F(x_1, x_2)$ произвольное значение, удобное для вычислений и построения. Пусть $F(x_1, x_2) = 1200$, тогда $30x_1 + 40x_2 = 1200$, и линия уровня пройдет через точки (40; 0) и (0; 30) (см. рис. 10.4).

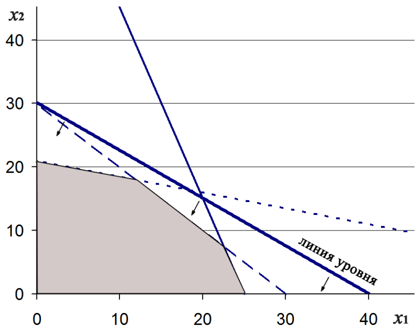


Рис. 10.4. Построение линии уровня

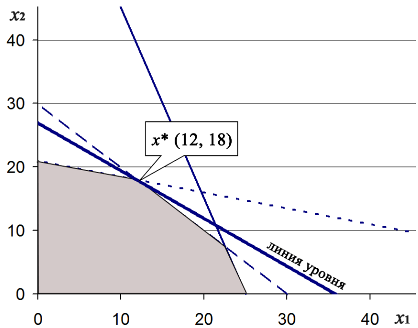


Рис. 10.5. Определение оптимального решения

Задача линейного программирования — вычисление координат точки, дающей экстремум целевой функции

$$F(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2 \to \max .$$

Переместим линию уровня параллельно самой себе до совмещения с одним из «верхних» углов выпуклого многоугольника так, чтобы линия уровня лишь касалась многоугольника.

Координаты вершины определяют искомые величины x_1, x_2.

Заметим, что данная вершина является точкой пересечения прямых (2) и (3). Поэтому для более точного определения x_1, x_2, решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 30 \\ x_1 + 4x_2 = 84. \end{cases}$$

Получим $x_1 = 12$, $x_2 = 18$. Следовательно, оптимальным решением задачи является вектор $\overline{x}^* = (12, 18)$. Таким образом, максимальное значение целевой функции: $F(12, 18) = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$.

Нахождение оптимального решения с использованием пакета «Поиск решения». Microsoft Excel содержит встроенный пакет «Поиск решения», позволяющий автоматизировать решение задач линейного программирования.

Оформить заголовок лабораторной работы, ввести исходные данные в ячейки (**C7:D7**); (**C10:D12**); (**G10:G12**) (см. рис. 10.6).

	A	B	C	D	E	F	G
3		Исходные данные					
4			Переменные				
5			x1	x2			
6		Значения	0	0	Ц.ф. F(x1, x2)		
7		коэф. ц.ф.	30	40	0		
8							
9		вид сырья			Левая часть	Знак	Правая часть
10		I	12	4	0	<=	300
11		II	4	4	0	<=	120
12		III	3	12	0	<=	252
13							
14							

=C7*$C$6+D7*$D$6

=C10*$C$6+D10*$D$6

Рис. 10.6. Таблица исходных данных и решение контрольного примера

В ячейку **E7** ввести формулу вычисления значения целевой функции $F(x_1, x_2) = 30x_1 + 40x_2$, используя ячейки **C6**, **C7** и **D6**, **D7**. В ячейки **E10:E12** ввести формулы вычисления левых частей системы ограничений, на первом этапе эти формулы дадут 0.

В меню **Сервис** выберите команду **Поиск решения**. Если команда **Поиск решения** отсутствует, установите ее: **Сервис** > **Надстройки** > **Поиск решения**.

Появится диалоговое окно (см. рис.10.7).

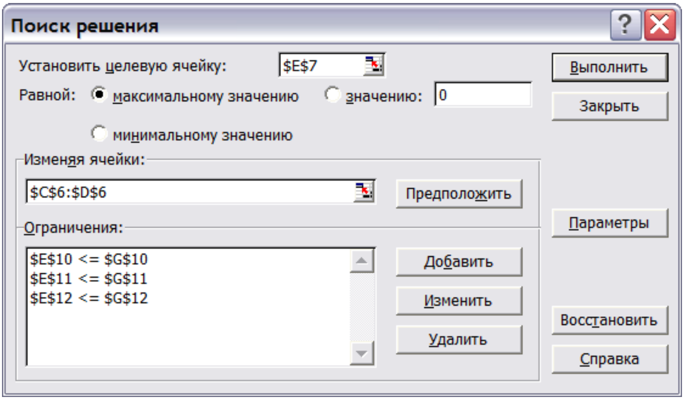


Рис. 10.7. Диалоговое окно пакета «Поиск решения»

— в поле «Установить целевую ячейку» ввести ссылку на ячейку **$E$7**;

— в поле «Изменяя ячейки» указать ссылки на ячейки **$C$6:$D$6**;

— заполнить поле «Ограничения» (см. рис. 10.7);

— открыть окно «Параметры» пакета поиска решения;

— установить флажок «Линейная модель» и флажок «Неотрицательные значения»;

— нажать кнопку «Выполнить».

В ячейках **C6:D6** таблицы исходных данных (см. рис. 10.6) появится решение задачи: $x_1 = 12$, $x_2 = 18$ и значение целевой функции (ячейка **E7**) $F(x_1, x_2) = 1080$, что совпадает с результатом, полученным графическим методом.

***Задание* 2.** Выполнить индивидуальный вариант (см. таблицу 4 приложения).

Решить задачу линейного программирования графическим методом (задание выполняется в тетради вручную).

Решить задачу с использованием пакета «Поиск решения». Для этого скопировать контрольный пример на новый лист, изменить исходные данные, вновь воспользоваться пакетом «Поиск решения»

Контрольные вопросы

1. Составление математической модели задачи линейного программирования.
2. Графическое решение задачи.
3. Решение задачи с помощью пакета «Поиск решения».

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ ТЕСТ

<table>
<tr><th>№</th><th>Задания</th><th>Варианты ответов</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Используя метод наименьших квадратов, найти уравнение прямой, аппроксимирующей данные
<table>
<tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-9</td><td>-4</td><td>0</td><td>3</td><td>8</td></tr>
</table></td><td>А. $y=-2+5x$
Б. $y=-0{,}4+4{,}1x+5x^2$
В. $y=-2x$
Г. $y=10+41x$
Д. $y=-0{,}4+4{,}1x$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Вычислить с помощью многочлена Лагранжа $y(-1)$, если известно, что
<table>
<tr><td>x</td><td>-4</td><td>-2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table></td><td>А. 13/8 Б. 1/8
В. 5/2 Г. 1/2
Д. 7/8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Используя формулу центральных прямоугольников, вычислить интеграл $\int\limits_0^{10}\sqrt{x^3+1}\,dx$. Выбрать шаг $h=2$.</td><td>А. 101,333 Б. 126,993
В. 0,099 Г. 35,444
Д. –0,111</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Используя формулу трапеций, вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{2^x\,dx}{x+1}$. Выбрать шаг $h=0{,}25$.</td><td>А. 7,533 Б. 5,433
В. 4,511 Г. 1,145
Д. 13,533</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Используя формулу Симпсона, вычислить интеграл $\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$. Выбрать шаг $h=0{,}5$.</td><td>А. 0,886 Б. 0,732
В. 2,658 Г. 0,84
Д. 0,283</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Дано дифференциальное уравнение $y'=2xy-x^2$ и начальное условие $y(-1)=0$. Применяя метод Эйлера, найти $y(3)$. Выбрать шаг $h=1$.</td><td>А. –16,64 Б. –20
В. –5 Г. –24
Д. –37</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Найти максимальное значение целевой функции $F(x_1,x_2)=30x_1+45x_2$ при заданной системе ограничений $\begin{cases}40x_1+9x_2\le 900\\ 10x_1+x_2\le 150\\ 9x_1+x_2\le 360\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$</td><td>А. 3000 Б. 1200
В. 2640 Г. 4500
Д. 2700</td></tr>
</table>

Ответы: 1) **Д**; 2) **А**; 3) **Б**; 4) **Г**; 5) **А**; 6) **Г**; 7) **Г**.

Т е м а 4. **АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ**

Таблица 1

Задания к лабораторной работе № 7

1.	*x*	0,43	0,48	0,55	0,62	0,70	11.	*x*	1,23	1,4	1,71	1,8	1,95
	y	1,63	1,73	1,87	2,03	2,22		*y*	5,04	5,17	5,43	5,53	5,62
2.	*x*	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	12.	*x*	2,5	8,3	14,1	20,5	26,1
	y	1,02	1,09	1,14	1,21	1,30		*y*	0,17	0,13	0,1	0,13	0,22
3.	*x*	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	13.	*x*	0,12	0,13	0,14	0,16	0,19
	y	6,61	6,39	6,19	6,00	5,82		*y*	8,65	8,29	7,95	7,64	7,36
4.	*x*	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	14.	*x*	1,35	1,41	1,47	1,51	1,56
	y	5,61	5,46	5,32	5,19	5,06		*y*	2,73	2,30	1,96	1,78	1,59
5.	*x*	1,37	1,38	1,39	1,4	1,42	15.	*x*	1,43	1,48	1,55	1,62	1,7
	y	5,04	5,17	5,27	5,35	5,51		*y*	1,92	1,85	1,79	1,81	2,1
6.	*x*	0,18	0,19	0,20	0,22	0,24	16.	*x*	0,4	0,47	0,51	0,6	0,67
	y	5,61	5,46	5,32	5,19	5,06		*y*	0,21	0,19	0,18	0,16	0,15
7.	*x*	1,37	1,38	1,39	1,40	1,41	17.	*x*	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
	y	5,04	5,17	5,32	5,47	5,62		*y*	8,7	8,2	7,9	7,6	7,3
8.	*x*	1,2	7,5	13,3	19,1	25,2	18.	*x*	3,75	3,8	3,85	3,9	3,95
	y	1,38	1,39	1,37	1,4	1,9		*y*	5,14	5,35	5,52	5,57	5,62
9.	*x*	1,2	7,5	13,3	19,1	25,2	19.	*x*	6,81	7,31	8,03	8,81	9,30
	y	1,38	1,19	1,17	1,4	1,9		*y*	8,08	8,94	10,2	12,3	13,4
10.	*x*	5,1	11,9	17,5	23,1	29,4	20.	*x*	1,10	1,51	2,12	2,91	3,53
	y	0,93	0,79	0,71	0,75	0,91		*y*	9,05	6,61	4,71	3,51	2,71

Окончание табл. 1

21.	*x*	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	31.	*x*	2,4	2,6	2,8	3	3,2
	y	9,05	6,61	4,69	3,35	2,73		*y*	3,53	3,78	3,95	4,04	4,07
22.	*x*	6,3	12,2	18,1	24,2	30,8	32.	*x*	5,45	5,6	5,75	5,9	6,05
	y	0,17	0,28	0,33	0,27	0,18		*y*	4	2,2	1	0,54	1,6
23.	*x*	0,41	0,46	0,52	0,60	0,65	33.	*x*	7,6	8,0	8,4	8,8	9,2
	y	2,57	2,32	2,09	1,86	1,84		*y*	12,6	10,0	8,03	6,2	4,0
24.	*x*	4,3	10,2	16,1	22,8	28,3	34.	*x*	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65
	y	0,62	0,47	0,44	0,54	0,68		*y*	20,1	10,2	4,56	0,97	3,67
25.	*x*	0,35	0,41	0,47	0,51	0,56	35.	*x*	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6
	y	2,73	2,30	1,96	1,78	1,59		*y*	11,7	11,0	10,4	9,63	9,1
26.	*x*	1,1	7,2	13,2	19,1	22,5	36.	*x*	3,8	4	4,2	4,4	4,6
	y	0,7	0,51	0,47	0,63	0,74		*y*	6,3	6,6	7,02	7,35	7,8
27.	*x*	3,2	9,6	15,1	21,8	27,2	37.	*x*	7,4	7,8	8,2	8,6	9,0
	y	0,39	0,45	0,49	0,52	0,43		*y*	9,01	6,04	4,24	3,2	3,01
28.	*x*	0,15	0,17	0,19	0,21	0,25	38.	*x*	-1	0	1	2	3
	y	6,61	6,39	6,19	6	5,82		*y*	1,5	0,01	0,9	3,8	9,35
29.	*x*	3,1	9,2	15,3	21,7	27,2	39.	*x*	5,1	5,4	5,7	6,0	6,3
	y	0,15	0,16	0,17	0,21	0,25		*y*	7,9	7,2	6,5	5,9	4,5
30.	*x*	4,5	10,6	16,7	22,1	28,3	40.	*x*	6,0	6,4	6,8	7,2	7,6
	y	0,18	0,19	0,23	0,31	0,42		*y*	1,2	2,45	4,4	7,2	15

Т е м а 5. **ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

Таблица 2

Задания к лабораторной работе № 8

№ п/п	$y(x)$	a	b	№ п/п	$y(x)$	a	b
1.	$\frac{e^x}{\sqrt{x^2+3}}$	0,4	1,2	14.	$\frac{x^2}{\cos(x)}$	0,3	0,8
2.	$\frac{\cos(x)}{x+2}$	0,2	1,2	15.	$\frac{tg\left(x^2\right)}{x+1}$	0,2	0,7
3.	$\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+2x^2}}$	0,6	1,5	16.	$\frac{2x+0,5}{\sin(x)}$	0,5	1,2
4.	$\frac{tg\left(x^2+0,5\right)}{1+2x^2}$	0,4	0,8	17.	$\frac{\lg\left(x^2+3\right)}{2x}$	0,2	2,2
5.	$\frac{e^{-x}}{\sqrt{2x^2+3}}$	0,8	1,4	18.	$\frac{x^2}{\sin(x)}$	0,8	1,6
6.	$\sqrt{x}\cos\left(x^2\right)$	0,4	1,2	19.	$\lg(x+3)\sqrt{x+1}$	1,2	2,8
7.	$\sqrt{x+1}\cos\left(x^2\right)$	0,02	0,2	20.	$tg(2x)\sqrt{x+1}$	0,06	0,36
8.	$x^2\lg(x)$	1,4	3	21.	$e^{-\sqrt{x}}$	0	0,16
9.	$\frac{1}{\sqrt{1+2x^3}}$	2,2	3	22.	$\frac{\sin(2x)}{x}$	1,5	2,7
10.	$\frac{\sqrt{1+x}}{\ln(x)}$	1,5	2,7	23.	$\sqrt{4-x^3}$	0	0,8
11.	$\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{x}}$	1,3	2,1	24.	$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$	0,2	1,8
12.	$\frac{e^{-x}}{\sqrt{0,2x^2+1}}$	1,3	2,5	25.	$\frac{e^{-x}}{\sin(x)+1}$	0,6	1,6
13.	$\sqrt{x}\sin\left(x^2\right)$	3,2	4	26.	e^{-5x^2}	0,02	0,4

Окончание табл. 2

№ п/п	$y(x)$	a	b	№ п/п	$y(x)$	a	b
27.	$tg\left(x^2\right)\sqrt{x+1}$	0,6	0,9	34.	$\dfrac{x}{\sqrt{2\cos(x)+1}}$	0,4	1,8
28.	$e^x\sqrt{x+1}$	1,4	2,6	35.	$\sqrt{1-4x^3}$	0	0,06
29.	$\dfrac{tg(x^2)}{x+3}$	0,5	1,0	36.	$\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+3}}$	1,8	3
30.	$\ln\left(x^2\right)\sqrt{x+1}$	1,3	2,1	37.	$\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x+1}}$	0,8	1,6
31.	$\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x}}$	1,2	2,5	38.	$\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+2x^2}}$	0,4	2,2
32.	$\dfrac{\lg(1+x)}{2x-1}$	0,15	0,33	39.	$\dfrac{tg(x+3)}{1+2x^2}$	0,4	1
33.	$\dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$	1,2	2,8	40.	$\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^3+1}}$	0	1

Т е м а 6. **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Таблица 3

Задания к лабораторной работе № 9

№ п/п	$f(x, y)$	a	b	y_0	№ п/п	$f(x, y)$	a	b	y_0
1.	$0,5xy$	0	1	1	7.	$1+0,8y\cdot\cos(x)-2y^2$	0	1	0
2.	x^2+y^2	0	1	0	8.	$1+0,2y\cdot\cos(x)-y^2$	0	1	0
3.	$1+xy^2$	0	1	0	9.	$-y^2+x^{-2}$	1	2	1
4.	$\dfrac{y}{x+1}-y^2$	0	1	1	10.	$\dfrac{2}{x}-\dfrac{y}{x+1}-y^2$	1	2	1
5.	$0,4x^{-1}-y^2$	1	2	1	11.	$0,2x^{-2}-yx^{-1}-6y^2$	1	2	1
6.	$(0,2-y)x^{-1}-0,8y^2$	1	2	0,5	12.	$0,5x^{-2}-2y^2$	1	2	1

№ п/п	$f(x, y)$	a	b	y_0	№ п/п	$f(x, y)$	a	b	y_0
13.	$-0,5y^2+0,1x^{-2}$	1	2	1	27.	$\frac{0,5y}{x+2}-0,2y^2$	0	1	0,5
14.	$yx^{-1}-2y^2$	1	2	2	28.	$2+0,1x^2y^2$	0	1	0,6
15.	$1+0,2y\cdot\sin(x)-y^2$	0	1	0	29.	x^2+2y^2	0	1	0,7
16.	$1+0,8y\cdot\sin(x)-2y^2$	0	1	0	30.	$2xy$	0	1	0,8
17.	$x+y^2$	0	1	0,5	31.	$(1-x)^4\,tg(xy)$	-1	1	0
18.	$2x+y^2$	0	1	0,3	32.	$1x^3+\cos(4x)$	0	2	0
19.	$2x+0,1y^2$	0	1	0,2	33.	$y\sqrt{\ln(2x)}-3\cos^2(3x)$	1	3	0
20.	x^2+xy	0	1	0,2	34.	$e^{\frac{8x}{3}}\cos(xy)$	-1	1	-1
21.	$0,2x+y^2$	0	1	0,1	35.	$(\cos(3x)+\ln(4x))^2-y^2$	0,5	2,5	0
22.	$0,1x+0,5y^2$	0	1	0,2	36.	$4(x+2y)^2+(x-2y)^2$	-1	1	1
23.	$x^2+0,5xy$	0	1	0,3	37.	$y^2\sqrt{x^2+1}-3x$	-1	1	1
24.	$x+0,2y^2$	0	1	0,4	38.	$\frac{\cos y}{2\cos x}+yx$	-1	1	0
25.	$0,5x+2y^2$	0	1	0,5	39.	$\frac{3\sin^2(xy)}{x}-y$	-2	0	-2
26.	x^2+2y	0	1	0,6	40.	$2e^{x+2y}-x^y$	1	3	-1

Т е м а 7. **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ**

Таблица 4

Задания к лабораторной работе № 10

№	c_1	c_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2	b_3
1.	4	5	3	2	1	4	3	3	10	11	13
2.	3	4	1	2	1	1	2	1	4	3	8
3.	16	12	2	3	4	1	6	7	180	240	426
4.	3	8	8	60	30	50	50	40	300	420	620
5.	6	8	0,2	0,1	0,1	0,3	1,2	1,5	40	60	371
6.	320	290	0,5	0,2	0,2	0,6	0,3	0,2	600	870	430
7.	14	18	10	8	5	10	6	12	168	180	144
8.	2	3	2	2	1	2	3	1	12	8	16
9.	50	40	2	5	8	5	5	6	20	40	30
10.	3	2	1	3	4	6	3	1	270	600	240
11.	200	400	1,1	1,9	2,3	1,6	0,2	0,8	40	60	10
12.	160	100	0,2	0,1	0,2	0,5	0,17	0,16	100	180	90
13.	5	4	4	3	3	4	5	1	24	24	10
14.	6	7	1,2	1,5	0,2	0,1	0,1	0,3	360	40	60
15.	100	300	0,2	0,8	1,1	1,9	2,3	1,6	10	40	60
16.	11	15	6	7	2	3	4	1	420	180	240
17.	12	18	6	3	3	9	2	1	180	270	40
18.	13	17	6	12	10	8	5	10	140	160	180
19.	40	50	5	6	2	5	8	5	30	20	40
20.	200	100	0,3	0,2	0,5	0,2	0,2	0,6	400	600	900

Окончание табл. 4

№	c_1	c_2	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	a_{31}	a_{32}	b_1	b_2	b_3
21.	30	45	40	9	10	1	9	4	900	150	360
22.	10	2	2	0,4	0,5	0,3	4,5	1,5	36	15	90
23.	8	10	1,5	2,5	8	1	8	2	50	40	54
24.	95	80	3	1	1	3	2	2	60	90	60
25.	35	25	50	10	90	40	80	10	150	360	200
26.	55	40	2,3	1,6	0,2	0,8	3	4	40	10	60
27.	250	150	0,5	0,2	0,3	0,2	0,2	0,6	60	40	90
28.	25	20	8	5	2	5	5	6	40	20	30
29.	8	10	0,2	0,1	1,2	1,5	0,1	0,3	40	360	60
30.	30	10	10	3	12	2	8	5	160	140	240
31.	5	8	3	3	10	14	1	3	240	840	120
32.	10	15	14	3	5	8	10	9	51	40	54
33.	3	6	50	80	135	60	140	30	400	540	510
34.	6	9	3	1	4	6	1	3	240	600	270
35.	80	40	2	2	1	4	3	1	60	90	60
36.	100	200	0,2	0,6	0,5	0,2	0,3	0,2	900	600	400
37.	50	40	8	5	2	5	5	6	40	20	30
38.	4	5	30	70	9	5	1	1	420	60	8
39.	200	450	2,3	1,6	1,1	1,9	0,2	0,8	60	40	10
40.	40	20	60	20	90	40	50	10	200	360	150

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Лабораторная работа № 7. Задание 5.

1) $L_3(x) = x^2 - 4x + 4$; 2) $f(2{,}5) \approx 0{,}25$; $f(3{,}23) \approx 1{,}5129$;

3) $y^* = -\dfrac{13}{3} + 2x$; 4) $\Delta y^*(x_1) = 0{,}333$; $\Delta y^*(x_2) = 0{,}667$; $\Delta y^*(x_3) = 0{,}333$.

Лабораторная работа № 8. Задание 9.

1) $I_{\text{пр.1}} = 1{,}855$; $I_{\text{пр.2}} = 2{,}155$; $I_{\text{усл.}} = 1{,}9975$; 2) $I_{\text{трап.}} = 2{,}005$;

3) $I_{\text{Симп.}} = 2$; 4) $I_{\text{точн.}} = 2$; $\Delta(I_{\text{пр.1}}) = 0{,}145$; $d(I_{\text{пр.1}}) = 7{,}82$ %;

$\Delta(I_{\text{пр.2}}) = 0{,}155$; $d(I_{\text{пр.2}}) = 7{,}19$ %; $\Delta(I_{\text{усл.}}) = 0{,}0025$; $d(I_{\text{усл.}}) = 0{,}125$ %;

$\Delta(I_{\text{трап.}}) = 0{,}005$; $d(I_{\text{трап.}}) = 0{,}25$ %; $\Delta(I_{\text{Симп.}}) = 0$; $d(I_{\text{Симп.}}) = 0$ %.

Лабораторная работа № 9. Задание 9.

1) $y_{\text{Эйл.}}(0{,}2) = 1{,}174$; 2) $y_{\text{испр.}}(0{,}2) = 1{,}142$; 3) $y_{\text{Р.–К.}}(0{,}2) = 1{,}144$;

4) $y_{\text{точн.}} = x - x^2 - 2x^3 + 1$; $y_{\text{точн.}}(0{,}2) = 1{,}144$; $\Delta(y_{\text{Эйл.}}) = 0{,}03$;

$d(y_{\text{Эйл.}}) = 2{,}555$ %; $\Delta(y_{\text{испр.}}) = 0{,}002$; $d(I_{\text{испр.}}) = 0{,}175$ %;

$\Delta(y_{\text{Р.–К.}}) = 0$; $d(y_{\text{Р.–К.}}) = 0$ %.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Изд-во МЭИ, 2003. 595 с.
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
3. *Вержбицкий В.М.* Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: ОНИКС 21 в., 2005. 399 с.
4. *Волков Е.А.* Численные методы. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2007. 248 с.
5. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах задачах. М.: Высш.шк., 2006. 480 с.
6. *Пирумов У.Г.* Численные методы. М.: Дрофа, 2004. 221 с.
7. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: Физматлит, 2006. 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

**Численные методы и их реализация
в Microsoft Excel. Часть 2.**

*БАШКИНОВА Елена Викторовна
ЕГОРОВА Галина Федоровна
ЗАУСАЕВ Артем Анатольевич*

Печатается в авторской редакции

Лицензия ИД № 02651 от 28.08.2000
Подписано в печать 17.03.2009
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. п. л. 2,6.
Уч.-изд.л. 2,44. Тираж 400 экз. Рег. № 72.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отдел типографии и оперативной полиграфии
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8