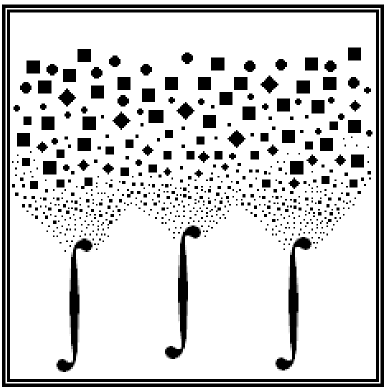
Г. А. Павлова, С. В. Горбунов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПРАКТИКУМ



Самара 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Г. А. Павлова, С. В. Горбунов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПРАКТИКУМ

Самара 2013

Печатается по решению редакционно–издательского совета
Самарского государственного технического университета

УДК 517(075.8)
П12

Павлова, Г. А.
П12 Интегральное исчисление: практикум / Г. А. Павлова, С. В. Горбунов. — 2-е изд. — Самара: Сам. гос. техн. ун-т, 2013. — 64 с.: ил.

Содержит 22 варианта по 20 задач, относящихся к следующим разделам математического анализа: неопределённые интегралы, определённые интегралы, приложения определённых интегралов, несобственные интегралы.

Приведён демонстрационный вариант с решениями всех типов задач.

Практикум предназначен для самостоятельной работы студентов–бакалавров направления 010400 “Прикладная математика и информатика” по курсу “Математический анализ”.

УДК 517(075.8)
П 12

Рецензент: канд. физ.–мат. наук Смыслов А. Ю.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателю учебное пособие “Интегральное исчисление” предназначено для студентов–бакалавров I курса направления 010400 “Прикладная математика и информатика”. Целью пособия является подготовка студентов к решению задач математического анализа, относящихся к такому важнейшему понятию как интеграл. В пособие включены задачи из широко известных изданий, в частности, из сборника задач по математическому анализу Кудрявцева Л. Д. [3] и из сборника задач и упражнений по математическому анализу Садовничего В. А. [1], а также оригинальные задачи авторов пособия.

Пособие состоит из двух частей. В первой части приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов, во второй рассмотрен демонстрационный вариант с подробными решениями всех задач.

В конце приведены списки формул, которые могут помочь студенту при решении задач прикладного характера, и учебных пособий, из которых можно почерпнуть необходимые теоретические сведения из области математического анализа.

Часть 1

Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx$

2. $\int (4x+3)\sin 5x\,dx$

3. $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-e^x+4}dx$

4. $\int \frac{x^3+6x^2+13x+6}{(x-2)(x+2)^3}dx$

5. $\int \frac{4-7\operatorname{tg} x}{2+3\operatorname{tg} x}dx$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[7]{\sin^5 x}}dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x+25}}{(x+25)^2\sqrt{x+1}}dx$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x^5}}dx$

9. $\int \frac{1}{x^3}5^{-\frac{1}{x^2}}dx$

10. $\int \ln(x^2+4)\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
 $y=\sin^2 x$, $y=x\sin x$, $0\le x\le\pi$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
 $r=4\cos 3\varphi$, $r=2$, $r\ge 2$.

13. Вычислить длину дуги кривой
 $$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad 0\le t\le\pi.$$

14. Найти площадь поверхности, образованной при вращении эллипса $x^2+4y^2=36$ вокруг оси ox.

15. Найти момент инерции однородного равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h относительно оси, содержащей его основание.

16. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

17. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{1} \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^{\alpha} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} dx$.

Вариант 2

1. $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$

2. $\int \operatorname{arctg} 2x dx$

3. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx$

4. $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} dx$

5. $\int \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x dx$

6. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} dx$

8. $\int \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$

10. $\int \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{2} dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = -x^2$, $y = x^2 - 2x - 4$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r = \sqrt{3}\cos\varphi$, $r = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = \sin^4 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

14. Прямая $y = a$ пересекает дугу циклоиды
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
в точках A и B. Найти площадь поверхности, образованной при вращении дуги AB циклоиды вокруг прямой $y = a$.

15. Найти координаты x_c и y_c центра масс фигуры, ограниченной линиями
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

16. Вычислить $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x - 2}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3 + \sin x} dx$.

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} \operatorname{ch} x}{x^2 \ln^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} dx$.

Вариант 3

1. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$

2. $\int x \sin(3x+4) dx$

3. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$

4. $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} dx$

5. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x} dx$

6. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} dx$

8. $\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$

9. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$

10. $\int 2^{-\sqrt[3]{x+1}} dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\ln(1+x)$, $y=-xe^{-x}$, $x=1$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат: $r=6\sin 3\varphi$, $r=3$, $r \geq 3$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t), \\ y=a(2\sin t-\sin 2t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

14. Фигура, ограниченная графиком функции $y=a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $0 \leq x \leq a$, отрезками прямых $x=0$, $x=a$ и осью ox, вращается вокруг оси ox. Доказать, что объём v тела вращения этой фигуры

и площадь S поверхности вращения графика данной функции связаны равенством $v=\frac{aS}{2}$.

15. Найти координаты x_c и y_c центра масс фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x$, $y=2$, $x=0$, если плотность фигуры $\rho=x$.

16. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\sin 3x\,dx$.

17. Вычислить $\int\limits_0^{3}\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4x+\ln x}}$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}$.

20. Найти все значения параметров α и β, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}}dx$, $(\beta\ge 0)$.

Вариант 4

1. $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$; $|x|<\frac{\pi}{2}$
2. $\int x^2e^{-3x}dx$
3. $\int\frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$
4. $\int\frac{x-1}{(x-2)\left(x^2+x\right)^2}dx$
5. $\int\sin^4 4x\,dx$
6. $\int\frac{\cos x}{\sin x-5\cos x}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x\cdot\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}\,dx$

10. $\displaystyle\int \operatorname{th}\frac{x}{2}\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = x - x^2$, $y = x\sqrt{1-x}$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r = \cos\varphi$, $r = \sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

14. Определить объём бочки, высота которой равна h, диаметр каждого из оснований d, диаметр среднего сечения D. Осевые сечения боковой поверхности являются параболами с вершинами на окружности среднего сечения.

15. Найти момент инерции однородного полукруга радиуса R относительно его диаметра.

16. Вычислить $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^3}\,dx$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[8]{x^5+2}}\,dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^2 \frac{x-2}{x^3-3x^2+4}dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+x^{-2\alpha}\right)}{\sqrt{x^{\alpha}+x^{-\alpha}}}dx$, $(\alpha>0)$.

Вариант 5

1. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$

2. $\int x^2 \arcsin 2x\, dx$

3. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2}dx$

4. $\int \frac{x^2-2x-5}{x^3-x^2+2x-2}dx$

5. $\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x\, dx$

6. $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx$

7. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\, dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

9. $\int \sqrt{e^{3x}+e^{2x}}\, dx$

10. $\int \sqrt{1+x-x^2}\, dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y=\frac{x^2}{2}$, $y=\frac{1}{1+x^2}$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r^2=2\sin 2\varphi$, $r=1$, $r\ge 1$.

13. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = a\cos^5 t, \\ y = a\sin^5 t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

14. Эксцентриситет эллипса равен e. Хорда эллипса длиной $2d$, перпендикулярная большей оси, разделяет эллипс на два сегмента, меньший из которых имеет высоту h. Найти объём тела, образованного при вращении меньшего сегмента вокруг большей оси эллипса.

15. Определить массу стержня длины l = 10 м, если линейная плотность стержня меняется по закону $\rho = 6 + 0{,}3x$ кг/м, где x – расстояние от одного из концов стержня.

16. Вычислить $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-1|}}$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+2}}\,dx$.

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^{8} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x}}$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^4 - 30}{\sin^\alpha x}\,dx.$$

Вариант 6

1. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$

2. $\int x \operatorname{ch} x \, dx$

3. $\int \frac{3x-2}{2-3x+5x^2} dx$

4. $\int \frac{x^4-4x^3+5x^2+10x-10}{x^3-3x^2+x+5} dx$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}$

6. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{7} dx$

7. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$

8. $\int \frac{(x+1)^2}{x\sqrt{1+3x+x^2}} dx$

9. $\int \frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh} x} dx$

10. $\int \frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}} dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r = 2a\cos\varphi$, $r = a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varphi = 0$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$\begin{cases} x = a(\operatorname{sh} t - t), \\ y = a(\operatorname{ch} t - 1), \end{cases}$ $0 \le y \le 7a$, $x \ge 0$.

14. Найти объём тела, образованного при вращении кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ вокруг оси ox.

15. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой $r = a(1+\cos\varphi)$.

16. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

17. Вычислить $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x-2}}$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[8]{1+x^7}} dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{x+1}}{\operatorname{ch} x - \cos x} dx$.

Вариант 7

1. $\int \frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

2. $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} dx$

3. $\int \frac{4x-7}{3x^2-7x+1} dx$

4. $\int \frac{7x^2-1}{x^4+4x^2-5} dx$

5. $\int \operatorname{tg}^6 2x\, dx$

6. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}$

7. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$

8. $\int (x+2)\sqrt{x^2+x+1}\, dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

10. $\int \frac{dx}{e^{2x}+6}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, \; 2ay = x^2.$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:

$$r = 2 - \cos\varphi, \; r = \cos\varphi.$$

13. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

14. Найти объём тела, ограниченного поверхностями, полученными вращением кривой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = 0$ вокруг оси oy.

15. Найти координаты x_c и y_c центра масс фигуры, ограниченной линиями

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \; x = 0, \; y = 0, \; x \ge 0, \; y \ge 0.$$

16. Вычислить $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_2^{3} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(\cos\frac{2}{x} - 1\right)dx.$

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

20. Найти все значения параметров α и β, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} + x^{\beta}}$.

Вариант 8

1. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x} dx$

2. $\int (x^2 - 2x + 3) \ln(x+1) dx$

3. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2 + 2x - 5}} dx$

4. $\int \frac{5x - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$

5. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}$

6. $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x - 7}$

7. $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{1 + x^7}}$

8. $\int x^2 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

9. $\int \cos^2 \frac{x}{7} dx$

10. $\int 2^{2x} 3^{2x} 5^{2x} dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$$y = \frac{10}{x^2 + 4},\ y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}.$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$$r = \sqrt{3} \sin \varphi,\ r = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},\ r \geq 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{a^2 + 1}} \cos(a \ln t), \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{a^2 + 1}} \sin(a \ln t), \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

14. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг прямой $y = p$ дуги параболы $y^2 = 2px$, отсечённой прямой $x = \frac{p}{2}$.

15. Найти координаты x_c и y_c центра масс фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$
и осью ox.

16. Вычислить $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

17. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x} \ln^2 x \, dx$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1 + 2\sqrt{x} + x^2} dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}(x^3 - 7x^2 + 15x - 9)}}$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 2x - e^{-4x^2}}{x^\alpha \operatorname{tg} x} dx.$$

Вариант 9

1. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x}} dx$

2. $\int x 2^{1-3x} dx$

3. $\int \frac{4x-1}{1-2x-2x^2}dx$

4. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$

5. $\int \cos^2 3x \cdot \sin x\,dx$

6. $\int \mathrm{ctg}^4\, 3x\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

9. $\int \sqrt{x^2+x+2}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{x(3-2\ln x)}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\left(x^2-2x\right)e^x$, $y=0$, $x \le 0$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:

$$r = a\left|\mathrm{tg}\,\varphi\right|,\ r = \frac{b}{\cos\varphi},\ 0 < b < a.$$

13. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = t - \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t, \\ y = 2\,\mathrm{ch}\,t, \end{cases},\ 0 \le t \le t_0.$$

14. Эксцентриситет гиперболы равен *e*. Хорда длиной 2*d*, перпендикулярная действительной оси гиперболы, отсекает от гиперболы сегмент высотой *h*. Найти объём тела, образованного при вращении этого сегмента вокруг действительной оси гиперболы.

15. Определить координаты центра тяжести круговой дуги радиуса *a*, опирающейся на угол α, где $0 < \alpha < \pi$.

16. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$.

17. Вычислить $\int\limits_1^3 x\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}\,dx$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3}\,dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\sin x}{x^2}\,dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{e^2+x^2}-e^{\cos x}}{x^{\alpha}}\,dx$.

Вариант 10

1. $\int \dfrac{dx}{2+\cos^2 x}$; $|x|<\dfrac{\pi}{2}$

2. $\int \arccos(5x-2)\,dx$

3. $\int \dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2+5}\,dx$

4. $\int \dfrac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^3 x}$

6. $\int \cos 3x \cdot \cos^2 2x\,dx$

7. $\int x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,dx$

8. $\int \dfrac{x+1}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+4}}\,dx$

9. $\int \dfrac{dx}{7e^{2x}+3}$

10. $\int \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{3-\sin^4 x}}\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=|x|^3 e^{-x^2}$, $|x|=a$, $a>0$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:

$$r = 2a\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi},\ r = \frac{2b}{\sin\varphi},\ 0 < b < a.$$

13. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

14. Найти объём тела, полученного при вращении фигуры, являющейся общей частью кругов $x^2 + y^2 = 2ax$ и $x^2 + y^2 = 2ay$, вокруг оси ox.

15. Найти координаты x_c и y_c центра масс кривой $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$, $|x| \le a$.

16. Вычислить $\displaystyle\int_{a^2}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\left(x-\cos\frac{\pi}{x}\right)^2}dx$.

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}\,dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}dx$.

Вариант 11

1. $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-4x^{16}}}dx$

2. $\int \frac{x}{\cos^2 4x}dx$

3. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}dx$

4. $\int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{\left(x^2+3\right)\left(x^2-x+1\right)}dx$

5. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}dx$

6. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx;\ \ x\in(0;\pi)$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

8. $\int \sin^4 \frac{x}{3}\,dx$

9. $\int \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y=2x^2e^x$, $y=-x^3e^x$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r^2=2\sin 2\varphi$, $r=1$, $r\geq 1$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x=a\left(\cos t+\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right), \\ y=a\sin t, \end{cases} \quad 0<t_0\leq t\leq \frac{\pi}{2}.$$

14. Найти площадь части гиперболоида вращения $x^2+y^2-z^2=1$, заключённой межу плоскостями $z=-2$ и $z=2$.

15. Найти координаты x_c и y_c центра масс фигуры, ограниченной кривыми
$x^2+y^2=a^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x=0$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

16. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$.

17. Вычислить $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$.

20. Найти все значения параметров α и β, при которых сходится интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x \cdot \cos^{\beta} x\, dx$.

Вариант 12

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

2. $\int x \operatorname{arctg} 2x\, dx$

3. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}dx$

4. $\int \frac{x^2}{(x+1)\left(x^3+1\right)}dx$

5. $\int \sin^2 \frac{x}{3} \cdot \cos^2 \frac{x}{3}\, dx$

6. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

7. $\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$

8. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx$

9. $\int 5^{\sqrt[4]{x}}\, dx$

10. $\int \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{4}\, dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$x^2 + y^2 = 8$, $2y = x^2$, $y \geq 0$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат:
$r^2 = a^2 \cos 4\varphi$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = \mathrm{ch}^3 t, \\ y = \mathrm{sh}^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

14. Найти площадь поверхности, образованной при вращении эллипса $x^2 + 4y^2 = 36$ вокруг оси *oy*.

15. Найти момент инерции относительно оси *ox* одной арки циклоиды
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

16. Вычислить $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}\,dx$.

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{sh}\, x}{e^{x^2} - \cos x}\,dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл
$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{-\frac{5}{3}}}{\mathrm{arctg}^{\alpha}\left(x - x^2\right)}\,dx.$$

Вариант 13

1. $\int 2^x 4^{3x}\,dx$

2. $\int x\sin^2 x\,dx$

3. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

4. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

5. $\int \frac{dx}{\sin^8 2x}$

6. $\int \frac{\cos x}{\sin x-5\cos x}\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

8. $\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx$

9. $\int \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}-1}\,dx$

10. $\int \operatorname{th}\frac{x}{2}\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y=\frac{\sqrt{x}}{x^3+1}$, $y=0$, $x=1$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r^2=a^2(1-2\cos 2\varphi)$, $r=a$, $r\le a$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t), \\ y=e^t(\cos t-\sin t), \end{cases}$ $0\le t\le \pi$.

14. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг прямой $y=\frac{5a}{3}$ дуги цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, отсечённой этой прямой.

15. Найти момент инерции относительно оси *oy* однородной фигуры, ограниченной линиями $y=h\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ($r<a$) и осью *ox*.

16. Вычислить $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$.

17. Вычислить $\int\limits_{-0,5}^{-0,25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg}\frac{x}{2+x}\,dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{1} \frac{\arcsin\left(x^3+x^2\right)}{x\ln^2(x+1)}\,dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^{1} \frac{\sin\left(\arcsin x + x^3\right) - x}{\sin^{\alpha} x}\,dx$.

Вариант 14

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+7x^2}}$

2. $\int x^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$

3. $\int \frac{7x+4}{1-3x+x^2}\,dx$

4. $\int \frac{3x^2-x-2}{(x-1)\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

5. $\int \sin^2 2x \cdot \cos(3x+1)\,dx$

6. $\int \operatorname{tg}^7 2x\,dx$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

8. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$

9. $\int \frac{dx}{x\ln 3x - x}$

10. $\int e^{x+e^x}\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$2y = x^2$, $x^2 + y^2 = 4y$, $2y \geq x^2$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной внешней и внутренней петлями улитки Паскаля $|r - 2\cos\varphi| = 1$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$y = \frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)$, $1 \leq x \leq 8$.

14. Найти площадь поверхности, образованной при вращении петли кривой $9x^2 = y(3-y)^2$ вокруг оси *ox*.

Указание: ввести параметр t, т.е. параметризовать петлю.

15. Из однородного круга радиуса *R* вырезана часть, ограниченная окружностью радиуса *R*, проходящей через центр данного круга. Найти центр масс оставшейся части круга.

Указание:

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\rho(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi, \quad M_y = \frac{1}{3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi.$$

16. Вычислить $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

17. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{1+x}{1-x}\, dx$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{x^2 + \cos x}\, dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x} + \mathrm{arctg}\, x}$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int_1^3 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^{\alpha}}dx$.

Вариант 15

1. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

2. $\int x^3 \operatorname{arctg} x\, dx$

3. $\int \frac{1-2x}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx$

4. $\int \frac{x+2}{x^4-1}dx$

5. $\int \cos^3 x \cdot \cos 2x\, dx$

6. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$

7. $\int \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}dx$

8. $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$

9. $\int 3^{-\sqrt{x-2}}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x - 1}$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 2-4x^2+4x^3-x^4$, $y=0$, $x=x_1$, $x=x_2$, где x_1 и x_2 – точки максимума данной функции.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r = a(1+\cos\varphi)$, $r = 3a\cos\varphi$, $r \ge 3a\cos\varphi$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = a(2\cos 2t\cdot\cos t + \sin 2t\cdot\sin t), \\ y = a(\sin 2t\cdot\cos t - 2\cos 2t\cdot\sin t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$$

14. Две грани шестигранника – прямоугольники, стороны одного из них с длинами a_1 и b_1 параллельны сторонам другого с длинами a_2 и b_2 соответственно. Расстояние между плоскостями этих прямоугольников равно h. Найти объём шестигранника.

15. Найти статический момент одной арки циклоиды
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

16. Вычислить $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos^2 5x}{\sqrt[8]{x^9+1}}\,dx$.

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^{\alpha}}\,dx .$$

Вариант 16

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+4x^2+7}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{\cos x}\,dx$

6. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^3 \tfrac{x}{5}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x}}}{x\sqrt[15]{x^4}}dx$

8. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$

9. $\displaystyle\int (\sin 2x + 2\cos 2x)^2 dx$

10. $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2+x=4$, $y^2-3x=12$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:

$$r=a\sqrt{\cos 2\varphi},\ r=\frac{a}{\sqrt{2}},\ r\ge\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

13. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

14. Эксцентриситет эллипса равен e. Хорда эллипса длины $2d$, перпендикулярная большей оси, разделяет эллипс на два сегмента, меньший из которых имеет высоту h. Найти объём тела, образованного при вращении меньшего сегмента вокруг меньшей оси эллипса.

15. Однородная пластина составлена из прямоугольника со сторонами $2b$ и h и полукруга с диаметром $2b$, приваренного к стороне прямоугольника длиной $2b$. Найти центр масс пластины.

16. Вычислить $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 \ln^2 x dx$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x^8+x+3}}dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch}(\alpha x)-\ln(x^2+1)-1}{\sqrt[3]{8-x^3}-2}\,dx$.

Вариант 17

1. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

2. $\int \frac{x\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

3. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-3e^x+1}\,dx$

4. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)}$

5. $\int \operatorname{tg}^5 \frac{x}{4}\,dx$

6. $\int \frac{3\sin x-4\cos x}{2\sin x+5\cos x}\,dx$

7. $\int \frac{\left(4\sqrt{1-x}-\sqrt{2x+1}\right)dx}{\left(\sqrt{2x+1}+4\sqrt{1-x}\right)(2x+1)^2}$

8. $\int \sqrt{3-4x+4x^2}\,dx$

9. $\int \frac{x^3}{x^2+4}\,dx$

10. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y=\sqrt{x}$, $y=x-2$, $x=0$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r^2=a^2\cos 2\varphi$, $r^2=a^2\sin 2\varphi$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$\begin{cases} x=r(a\cos bt-b\cos at), \\ y=r(a\sin bt+b\sin at), \end{cases}$ $0\le t\le \frac{2\pi}{a+b}$, $a>0$, $b>0$, $r>0$.

14. Найти объём тела, образованного при вращении кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ вокруг оси oy.

15. На каком расстоянии от большего основания однородной трапеции расположен её центр масс, если основания трапеции равны a и b, $a>b$, высота – h.

16. Вычислить $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$.

17. Вычислить $\int\limits_1^{2}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{5x+\ln x}}$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{e^x-\cos x}$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha}\ln(x+2)dx$.

Вариант 18

1. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}x}$

2. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$

3. $\int\frac{x+1}{x^2-6x-6}dx$

4. $\int\frac{(21x^2-13x+18)\,dx}{(3x^2-4x+6)(x^2-2x-3)}$

5. $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$

6. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^5} dx$

7. $\int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx$

8. $\int \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx$

9. $\int \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{5} dx$

10. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$x^2 + y^2 = 2, \; y^2 = 2x - 1, \; x \geq \frac{1}{2}.$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:

$$r^2 = \frac{8}{3}\sin^2 2\varphi, \; r^2 = \frac{1}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi}.$$

13. Вычислить длину дуги кривой

$$\begin{cases} x = \int\limits_1^t \frac{\sin\varphi}{\varphi} d\varphi, \\ y = \int\limits_1^t \frac{\cos\varphi}{\varphi} d\varphi, \end{cases} \quad 1 \leq t \leq t_0.$$

14. Прямая $y = \frac{3a}{2}$ разделяет фигуру, ограниченную циклоидой

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

и осью ox на две фигуры. Найти отношение объёмов тел, образованных при вращении каждой из получившихся фигур вокруг прямой $y = \frac{3a}{2}$.

15. Найти центр масс полукольца, ограниченного концентрическими полуокружностями радиусов r и R, $R > r$, и отрезками диаметра.

16. Вычислить $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x}{x^3-1}dx$.

17. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arccos x}}$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_{2}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{4}{x^2}\right)dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{\operatorname{arctg}\left(x^2+x^{2\alpha}\right)}{x\ln^{\alpha}(x+1)}dx$.

Вариант 19

1. $\int \frac{x^2+\ln\left(x^2\right)}{x}dx$

2. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

3. $\int \frac{(2\sin x+1)\cos x}{4\sin^2 x+4\sin x-3}dx$

4. $\int \frac{2x^3-4x^2-16x-12}{(x-1)^2\left(x^2+4x+5\right)}dx$

5. $\int \sin^2 x\cdot\cos^6 x\,dx$

6. $\int \frac{2\cos x-3\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$

7. $\int \frac{(x+1)^2}{x\sqrt{1+3x+x^2}}dx$

8. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$

9. $\int 7^{\sqrt[3]{x-2}}dx$

10. $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{2}{x}\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярной системе координат:
$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $r^2 = 4a^2 \cos 2\varphi$.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases} \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}.$$

14. Эксцентриситет гиперболы равен *e*. Хорда, длиной $2d$, перпендикулярная действительной оси гиперболы, отсекает от гиперболы сегмент высотой *h*. Найти объём тела, образованного при вращении этого сегмента вокруг мнимой оси гиперболы.

15. Найти статический момент M_y кривой
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

16. Вычислить $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^3}\,dx$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{9-x^2}}$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{2x+3}{x^3\sqrt{7x+8}}\,dx$.

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{(x^2-4x+3)^3}$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\alpha}\right)dx, \quad \alpha \neq 0$.

Вариант 20

1. $\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$

2. $\int \ln^2 x\,dx$

3. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{1-8x-2x^2}}dx$

4. $\int \frac{x(x^2+1)}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$

5. $\int \frac{\cos^5 x+\cos^3 x}{\sin^4 x+\sin^2 x}dx$

6. $\int \operatorname{tg}^8 2x\,dx$

7. $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx$

8. $\int \sqrt{x^2+4x+8}\,dx$

9. $\int \operatorname{tg} x\cdot\ln\cos x\,dx$

10. $\int x^2e^{-3x}dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y=\sqrt{3}x^2$, $y=\sqrt{4-x^2}$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линией
$x^6+y^6=a^2\left(x^4+y^4\right)$.

Указание: перейти к полярным координатам.

13. Вычислить длину дуги кривой
$\begin{cases} x=2a\sin^2 t, \\ y=2a\cos t, \end{cases} \quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

14. Найти площадь вытянутого эллипсоида вращения
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \quad a>b.$$

15. Найти момент инерции отрезка, длина которого l, относительно оси, лежащей с ним в одной плоскости и не пересекающей этот отрезок, если расстояние до оси от одного конца отрезка равно a, а другого – b.

16. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2x}dx$.

17. Вычислить $\int\limits_0^{1}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

18. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos^2 2x}{\sqrt[8]{x^4+2}}dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^{1}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}dx$.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^{1}\frac{\ln^{\alpha}\operatorname{ch}\frac{1}{x}}{\ln^3(x+1)}dx$.

Вариант 21

1. $\int\frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}3x}}{1+9x^2}dx$

2. $\int\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)dx$

3. $\int\frac{2\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}}dx$

4. $\int\frac{5x-3}{(x-2)(3x^2+2x-1)}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - 3\cos x}$

7. $\displaystyle\int \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x\,20^x - 5^x}{4^x}dx$

10. $\displaystyle\int \cos^4 \tfrac{x}{3}\,dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = x^2 + x - 1$, $y = \frac{5}{2}x$, $y \le x^2$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x^6 + y^6 = a^2x^4$.

Указание: перейти к полярным координатам.

13. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = \frac{a}{2}\left(1+2\cos^2 t\right)\sin t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases}$ от точки $A(0; a)$ до точки $B\left(\frac{a}{2}; 0\right)$.

14. Найти объём тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением вокруг оси *ox* линии $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ при $0 < a \le b$.

15. Найти декартовы координаты центра тяжести дуги кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ (от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$).

16. Вычислить $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + \sqrt{e^x}}$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}+2\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3+7}{x^5 - x^2 + 2}dx$.

19. Исследовать на сходимость $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

20. Найти все значения параметров α и β, при которых сходится интеграл $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{\alpha-1} x}{(1+\beta\cos x)^{\alpha}}dx,\ \beta \geq 0$.

Вариант 22

1. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

2. $\int \arcsin^2 x\, dx$

3. $\int \frac{dx}{e^{2x}+3e^x+7}$

4. $\int \frac{x^4}{1-x^4}dx$

5. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x}dx$

6. $\int \sin^4 3x \cdot \cos^4 3x\, dx$

7. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$

9. $\int \frac{11-3\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+3}dx$

10. $\int \frac{8x-\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\ y=\frac{9}{32}x^2,\ y \leq \frac{9}{32}x^2$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^3 = ax^4 y$.
Указание: перейти к полярным координатам.

13. Вычислить длину дуги кривой
$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = 2\operatorname{arctg} t - 2t + 8, \end{cases}$$ от точки $A(0;8)$ до точки $B\left(\ln 2; \frac{\pi}{2} + 6\right)$.

14. Найти объём усечённого конуса, основания которого есть эллипсы с полуосями A, B и a, b, а высота равна h.

15. Фигура ограничена параболой $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, полуокружностью $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$, и осью ox $(r < a)$. Считая фигуру однородной, найти координаты центра масс фигуры.

16. Вычислить $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$.

17. Вычислить $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^3} dx$.

18. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2} dx$.

19. Исследовать на сходимость $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} dx$.

20. Найти все значения параметров m и n, при которых сходится интеграл $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4 + x^n}} dx, \quad n \geq 0$.

Часть 2
Методические указания к решению задач

1. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx$

Можно заметить, что в числителе подынтегрального выражения стоит “почти” дифференциал функции $\cos^2 x$. Действительно,

$$d\left(\cos^2 x\right)=2\cos x\left(-\sin x\right)dx=-\sin 2xdx.$$

Поэтому после введения $\sin 2x$ под знак дифференциала, получим табличный интеграл:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx=-\int \frac{d\left(\cos^2 x\right)}{1+\left(\cos^2 x\right)^2}=-\operatorname{arctg}\left(\cos^2 x\right)+c.$$

2. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

Не будем спешить делать замену $\sqrt{1+x^2}=z$, а вынесем в предположении $x>0$ из под знака квадратного корня x^2, получим

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int \frac{dx}{x^5\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\int \frac{dx}{x^2x^3\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

Заметим, что $\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{x^2}\right)$, и сделаем замену $t=\frac{1}{x^2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt.$$

Далее в числителе прибавляем и отнимаем единицу и разбиваем интеграл на сумму двух интегралов:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt=-\frac{1}{2}\int \frac{(t+1)-1}{\sqrt{t+1}}dt=-\frac{1}{2}\int \sqrt{t+1}dt+\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t+1}}=$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(t+1)^3} + \sqrt{t+1} + c = \sqrt{t+1}\left(-\frac{1}{3}(t+1)+1\right) + c = \frac{2-t}{3}\sqrt{t+1} + c =$$

$$= \frac{2-\frac{1}{x^2}}{3}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + c = \frac{2x^2-1}{3x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x^2-1}{3x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}dx$

Попробуем применить формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

За u возьмём $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, тогда

$$du = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}; \qquad dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, \qquad v = 2\sqrt{1+x};$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{1+x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{x}}dx =$$

$$= 2\sqrt{1+x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{x}}.$$

Последний интеграл сводим к табличному путём введения функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt{x}} = 2\int \frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}} = 2\ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right| + c.$$

Итак,

$$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{1+x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x} + \sqrt{1+x}\right| + c.$$

4. $\int x\,\mathrm{ctg}^2 x\,dx$

Очевидно, что интеграл вычисляется с помощью формулы интегрирования по частям.

$u = x;\qquad dv = \mathrm{ctg}^2 x$, тогда

$$du = dx,\qquad v = \int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int \left(\tfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\,\mathrm{ctg}\,x - x\,;$$

$$\int x\,\mathrm{ctg}^2 x\,dx = -x(\mathrm{ctg}\,x + x) + \int (x + \mathrm{ctg}\,x)dx =$$

$$= -x(\mathrm{ctg}\,x + x) + \int x dx + \int \mathrm{ctg}\,x dx = -\,x(\mathrm{ctg}\,x + x) + \tfrac{x^2}{2} + \ln|\sin x| + c.$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 4}{(x-3)^2(x^2 - 2x + 2)}dx$

Это интеграл от правильной рациональной дроби с разложенным на простейшие множители знаменателем, поэтому сразу приступим к разложению подынтегральной функции на сумму простейших дробей.

$$\frac{x^2 - x + 4}{(x-3)^2(x^2 - 2x + 2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}\,.$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C, D вычислим методом неопределённых коэффициентов. Приводя справа дроби к общему знаменателю и приравнивая числители левой и правой дробей, получим:

$$A(x-3)(x^2 - 2x + 2) + B(x^2 - 2x + 2) + (Cx + D)(x-3)^2 = x^2 - x + 4.$$

Полагая в равенстве $x = 3$, определим $B = 2$. Далее, раскрывая скобки и сравнивая коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x, получим систему:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ -5A + B - 6C + D = 1, \\ 8A - 2B + 9C - 6D = -1, \\ -6A + 2B + 9D = 4. \end{cases}$$

Но одно неизвестное B мы знаем, поэтому система преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ C - D = 1, \\ C - 6D = 3, \\ 6C + 9D = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A = -0{,}6$; $C = 0{,}6$; $D = -0{,}4$ и

$$\frac{x^2 - x + 4}{(x-3)^2(x^2 - 2x + 2)} = -\frac{0{,}6}{x-3} + \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{0{,}6x - 0{,}4}{x^2 - 2x + 2}.$$

$$\int \frac{(x^2 - x + 4)dx}{(x-3)^2(x^2 - 2x + 2)} = -0{,}6\int \frac{dx}{x-3} + 2\int \frac{dx}{(x-3)^2} + 0{,}2\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2 - 2x + 2}.$$

Первые два интеграла практически табличные; для взятия третьего интеграла вычислим дифференциал знаменателя подынтегральной функции

$$d(x^2 - 2x + 2) = (2x-2)dx$$

и представим числитель в виде полученного дифференциала.

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2) + 3 - 2}{x^2 - 2x + 2}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2}dx + \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2 - 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 + 1} = \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - 2x + 2\right| + \operatorname{arctg}(x-1) + c.$$

В итоге получаем:

$$\int \frac{(x^2 - x + 4)dx}{(x-3)^2(x^2 - 2x + 2)} =$$

$$= -0{,}6\ln|x-3| - \frac{2}{x-3} + 0{,}3\ln(x^2 - 2x + 2) + 0{,}2\operatorname{arctg}(x-1) + c.$$

6. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-3\cos x+4\sin^2 x}}dx$

Сведём это интеграл к стандартному интегралу, содержащему квадратный трёхчлен, для чего разложим в числителе синус двойного угла и внесём $\sin x$ под знак дифференциала, а в знаменателе избавимся от $\sin^2 x$ с помощью основного тригонометрического тождества. Получим:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-3\cos x+4\sin^2 x}}dx=-2\int \frac{\cos x}{\sqrt{5-3\cos x-4\cos^2 x}}d\cos x.$$

Введём новую переменную $t=\cos x$ и вычислим стандартный интеграл.

$$\int \frac{t}{\sqrt{5-3t-4t^2}}dt=\left[d\left(5-3t-4t^2\right)=\left(-3-8t\right)dt\right]=$$

$$=\int \frac{-\frac{1}{8}\left(-3-8t\right)-\frac{3}{8}}{\sqrt{5-3t-4t^2}}dt=-\frac{1}{8}\int \frac{d\left(5-3t-4t^2\right)}{\sqrt{5-3t-4t^2}}-\frac{3}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{5-3t-4t^2}}.$$

Первый интеграл табличный, во втором интеграле под корнем выделим полный квадрат.

$$5-3t-4t^2=-4\left(t^2+\tfrac{3}{4}t-\tfrac{5}{4}\right)=-4\left(t^2+2\tfrac{3}{8}t+\tfrac{9}{64}-\tfrac{9}{64}-\tfrac{5}{4}\right)=$$

$$=-4\left(\left(t+\tfrac{3}{8}\right)^2-\tfrac{89}{64}\right)=4\left(\tfrac{89}{64}-\left(t+\tfrac{3}{8}\right)^2\right).$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{5-3t-4t^2}}dt=-\frac{1}{4}\sqrt{5-3t-4t^2}-\frac{3}{16}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{89}{64}-\left(t+\frac{3}{8}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\sqrt{5-3t-4t^2}-\frac{3}{16}\arcsin\frac{8t+3}{\sqrt{89}}+c.$$

Окончательно,

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-3\cos x+4\sin^2 x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5-3\cos x-4\cos^2 x}+\frac{3}{8}\arcsin\frac{8\cos x+3}{\sqrt{89}}+c.$$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[7]{\sin^3 2x \cos^{11} 2x}}$

Соотношение показателей степеней функций $\sin 2x$ и $\cos 2x$ даёт возможность свести данный интеграл к интегралу от функции $\operatorname{tg} 2x$.

Действительно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{\frac{\sin^3 2x}{\cos^3 2x}}\cos^{14} 2x} = \int \frac{dx}{\cos^2 2x \sqrt[7]{\operatorname{tg}^3 2x}} = \frac{1}{2}\int \operatorname{tg}^{-\frac{3}{7}} 2x \, d(\operatorname{tg} 2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}\operatorname{tg}^{\frac{4}{7}} 2x + c = \frac{7}{8}\sqrt[7]{\operatorname{tg}^4 2x} + c.$$

8. $\displaystyle\int \frac{3-5\operatorname{ctg} x}{1+2\operatorname{ctg} x}dx$

$$\int \frac{3-5\operatorname{ctg} x}{1+2\operatorname{ctg} x}dx = \int \frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x + 2\cos x}dx.$$

Представим числитель подынтегральной функции в виде линейной комбинации знаменателя и производной от знаменателя:

$$3\sin x - 5\cos x = A(\sin x + 2\cos x) + B(\cos x - 2\sin x).$$

Найдём коэффициенты *A* и *B*, сравнивая коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ справа и слева. Получим систему

$$\begin{cases} A - 2B = 3, \\ 2A + B = -5; \end{cases}$$

откуда $A = -1{,}4; \quad B = -2{,}2$.

$$\int \frac{3-5\operatorname{ctg} x}{1+2\operatorname{ctg} x}dx = -1{,}4\int \frac{\sin x + 2\cos x}{\sin x + 2\cos x}dx - 2{,}2\int \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x}dx =$$

$$= -1{,}4x - 2{,}2\ln\left|\sin x + 2\cos x\right| + c.$$

9. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x} dx.$$

Последний интеграл решим с помощью формулы интегрирования по частям, приняв $u = \cos x$, тогда $du = -\sin x dx$;

$$dv = \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx \quad \text{и} \quad v = \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4\sin^4 x};$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x} dx = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{1}{4}\int \frac{\sin x}{\sin^4 x} dx = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{dx}{\sin^3 x} - \frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sin^3 x} - \frac{\cos x}{4\sin^4 x}.$$

Оставшийся интеграл решаем таким же образом.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx.$$

Второй интеграл берём с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} dx = \left[\begin{array}{c} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx; \\ dv = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} dx, \quad v = -\dfrac{1}{2\sin^2 x}; \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{dx}{\sin x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + c.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right| - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} - \frac{\cos x}{4\sin^4 x} + c.$$

10.1. $\int \sqrt{4x^2+4x+7}dx$

Обозначим интеграл через I и выделим под знаком квадратного корня полный квадрат, получим:

$$I=\int \sqrt{(2x+1)^2+6}\,dx.$$

Сделаем замену $2x+1=t$, тогда $dx=\frac{1}{2}dt$ и

$$I=\frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+6}dt.$$

Решаем полученный интеграл с помощью формулы интегрирования по частям, приняв за u подынтегральную функцию, тогда

$$du=\frac{t}{\sqrt{t^2+6}}dt;\quad dv=dt,\quad v=t;$$

$$I=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+6}-\frac{1}{2}\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+6}}dt.$$

В числителе интеграла прибавим и отнимем 6 и разобьём интеграл на сумму двух интегралов.

$$I=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+6}-\frac{1}{2}\int \sqrt{t^2+6}dt+3\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+6}}.$$

$$I=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+6}-I+3\ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right|+c.$$

Получим уравнение относительно интеграла I, решим его:

$$2I=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+6}+3\ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right|+c,$$

$$I=\frac{1}{4}t\sqrt{t^2+6}+\frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right|+c.$$

Осталось вернуться к старой переменной.

$$\int \sqrt{4x^2+4x+7}dx=\frac{2x+1}{4}\sqrt{4x^2+4x+7}+\frac{3}{2}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+7}\right|+c.$$

10.2. $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$

Имеем интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx,$$

где m, n, p – рациональные числа. Согласно теореме Чебышёва этот интеграл может быть приведён к интегралу от рациональной функции только в трёх случаях:

1) p – целое, тогда полагаем $x=z^N$, где N – общий знаменатель дробей m и n;
2) $\frac{m+1}{n}$ - целое, тогда полагаем $a+bx^n=z^N$, где N – знаменатель дроби p;
3) $\frac{m+1}{n}+p$ - целое, тогда полагаем $ax^{-n}+b=z^N$, где N – знаменатель дроби p.

$$\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx=-\int x^{\frac{1}{3}}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}dx,$$

поэтому $m=\frac{1}{3}$; $n=2$; $p=\frac{1}{3}$ и у нас случай 3), т.к. $\frac{m+1}{n}+p=1\in \mathbb{Z}$. Замена $\frac{1}{x^2}-1=z^3$ рационализирует интеграл.

$$\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx=-\frac{3}{2}\int \frac{z^3}{\left(z^3+1\right)^2}dz=-\frac{1}{2}\int \frac{z}{\left(z^3+1\right)^2}d\left(z^3+1\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{c} u=z,\quad du=dz; \\ dv=\dfrac{d\left(z^3+1\right)}{\left(z^3+1\right)^2};\quad v=-\dfrac{1}{z^3+1} \end{array}\right]=\frac{z}{2\left(z^3+1\right)}-\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^3+1}.$$

$$\frac{1}{z^3+1}=\frac{A}{z+1}+\frac{Bz+C}{z^2-z+1}.$$

Методом неопределённых коэффициентов вычисляем $A=\frac{1}{3}$; $B=-\frac{1}{3}$; $C=\frac{2}{3}$.

$$\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx=\frac{z}{2\left(z^3+1\right)}-\frac{1}{6}\ln|z+1|+\frac{1}{12}\ln\left(z^2-z+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}+c.$$

Упрощая окончательно, получаем:

$$\int \sqrt[3]{x - x^3}\,dx = \frac{z}{2\left(z^3+1\right)} - \frac{1}{12}\ln\frac{\left(z+1\right)^2}{z^2 - z + 1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + c\,,$$

где $z = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} - 1}$.

11. Найти площадь области, ограниченной кривыми $y = \dfrac{2a^3}{x^2 + a^2}$ и

$y = \frac{4a}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{x}{a}\right|$.

Решение

Заметим, что обе функции являются чётными, поэтому их графики симметричны относительно оси *оу*.

Кривая $y = \dfrac{2a^3}{x^2 + a^2}$ располагается выше оси *ох*, пересекает ось *оу* в точке $\left(0;\, 2a\right)$ и имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2a^3}{x^2 + a^2} = 0$.

График $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ располагается в полосе $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, поэтому график кривой $y = \frac{4a}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ расположен в полосе $-2a \le y \le 2a$.

Учитывая всё вышесказанное, можно изобразить область (рис. 1).

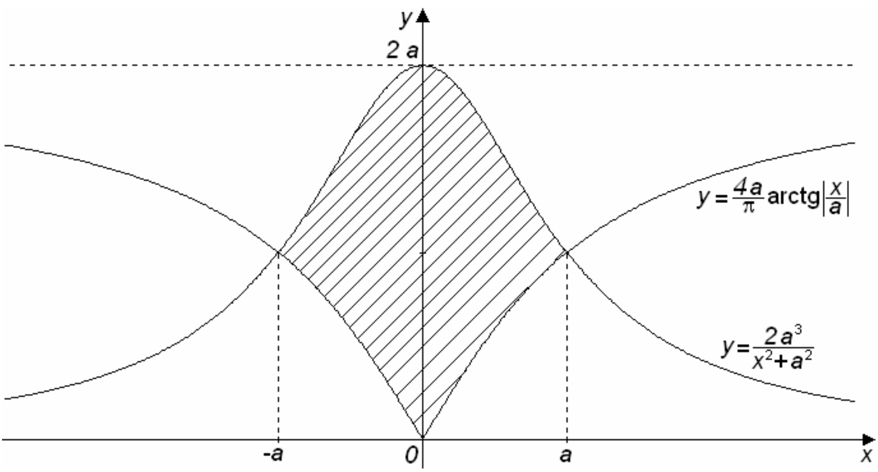


Рис. 1

Кривые пересекаются в точках $(-a; a)$ и $(a; a)$.

Очевидно, площадь области

$$S = 2\int_0^a \left(\frac{2a^3}{x^2 + a^2} - \frac{4a}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} \right) dx = 4a^3 \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} - \frac{8a}{\pi} \int_0^a \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\, dx.$$

Первый интеграл табличный, второй вычисляем с помощью формулы интегрирования по частям.

$$\int_0^a \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}, \quad du = \dfrac{a}{x^2 + a^2} dx; \\ dv = dx, \quad v = x; \end{array} \right] = x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^a - a\int_0^a \frac{x}{x^2 + a^2} dx =$$

$$= \frac{\pi a}{4} - \frac{a}{2} \ln\left(x^2 + a^2\right)\Big|_0^a = \frac{\pi a}{4} - \frac{a}{2}\left(\ln 2a^2 - \ln a^2\right) = \frac{\pi a}{4} - \frac{a}{2} \ln 2.$$

$$S = 4a^3 \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^a - \frac{8a}{\pi}\left(\frac{\pi a}{4} - \frac{a}{2} \ln 2 \right) = \pi a^2 - 2a^2 + \frac{4a^2}{\pi} \ln 2.$$

Окончательно, $S = a^2\left(\pi - 2 + \dfrac{4}{\pi} \ln 2 \right)$.

12. Найти площадь области, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат: $r = \dfrac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}, \quad a > 0.$

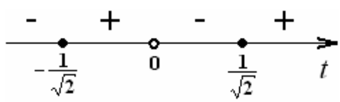
Решение

Начнём с построения кривой; найдём область определения функции, задающей кривую.

$$\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\cos^2\varphi - 1}{\cos\varphi} \geq 0$$

Введём новую переменную $t = \cos\varphi$ и решим неравенство методом интервалов.

$$\frac{2t^2 - 1}{t} \geq 0,$$



$$t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right) \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} \le \cos\varphi < 0; \\ \cos\varphi \ge \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Тригонометрические неравенства решаем графически (рис. 2).

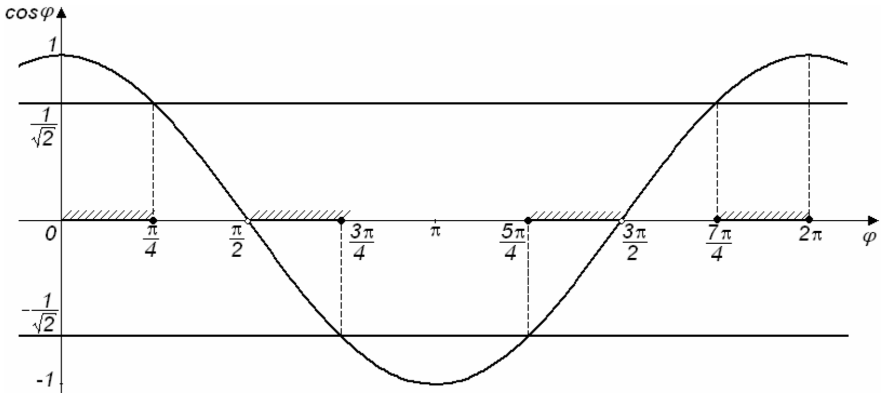


Рис. 2

Итак, область определения функции

$\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right].$

Заметим также, что

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = \lim_{\varphi\to\frac{3\pi}{2}-0}\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = +\infty .$$

После подсчёта значений функции $r(\varphi) = \dfrac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$ в нескольких точках из промежутков области определения, строим кривую (рис. 3).

Кривая образовала петлю. Площадь, ограниченную этой петлёй, нам и надо вычислить.

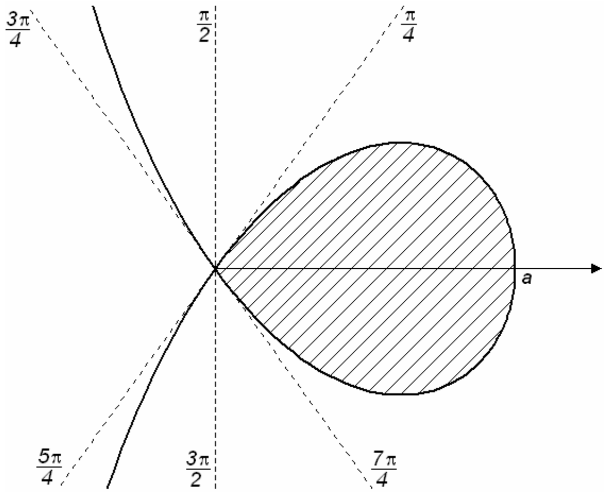


Рис. 3

$$S=\frac{1}{2}a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(2\cos^2\varphi-1\right)^2}{\cos^2\varphi}d\varphi =$$

$$=a^2\left(4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\, d\varphi - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\right)=a^2\left(2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi-4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\operatorname{tg}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=$$

$$=a^2\left(2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\pi+1\right)=\frac{a^2}{2}(4-\pi)\ \text{кв.ед.}$$

13. Найти длину дуги

$$\begin{cases} x(t)=2a\,\mathrm{sh}^3\,t, \\ y(t)=3a\,\mathrm{ch}\,t \end{cases}$$

от точки $A(0;3a)$ до точки $B(x_0;y_0)$.

Решение

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

$$x'(t)=6a\,\mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}\,t; \quad y'(t)=3a\,\mathrm{sh}\,t.$$

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{36a^2\,\mathrm{sh}^4 t\,\mathrm{ch}^2 t+9a^2\,\mathrm{sh}^2 t}=3a\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{ch}^2 t+1}=$$

$$=3a\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{\mathrm{sh}^2 2t+1}=3a\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{\mathrm{ch}^2 2t}=3a\,\mathrm{sh}\,t\cdot\mathrm{ch}\,2t.$$

Найдём начальное значение параметра t из условий

$$\begin{cases}0=2a\,\mathrm{sh}^3 t,\\ 3a=3a\,\mathrm{ch}\,t;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{sh}\,t=0,\\ \mathrm{ch}\,t=1;\end{cases} \Rightarrow \quad t=0.$$

Значение параметра t, соответствующее точке $B(x_0;y_0)$, обозначим t_0, т.е. $x(t_0)=x_0;\ y(t_0)=y_0$.

$$L=\int_0^{t_0}3a\,\mathrm{sh}\,t\cdot\mathrm{ch}\,2t\,dt=3a\int_0^{t_0}\left(2\,\mathrm{ch}^2 t-1\right)d\,\mathrm{ch}\,t=3a\left(\left.\frac{2\,\mathrm{ch}^3 t}{3}\right|_0^{t_0}-\left.\mathrm{ch}\,t\right|_0^{t_0}\right)=$$

$$=2a\,\mathrm{ch}^3 t_0-3a\,\mathrm{ch}\,t_0+a.$$

14. Радиус окружности равен R. Дуга окружности, имеющая угловую величину 2α, вращается вокруг своей хорды. Найти площадь поверхности вращения.

Решение

Помещаем окружность в декартову систему координат, совмещая хорду с осью *ox*, а середину хорды с началом координат (рис. 4). В этом случае центр окружности $O'(0;-R\cos\alpha)$, точки $A(-R\sin\alpha;0)$, $B(R\sin\alpha;0)$. Поверхность образуется путём вращения дуги *ACB* вокруг оси *ox*. Уравнение дуги

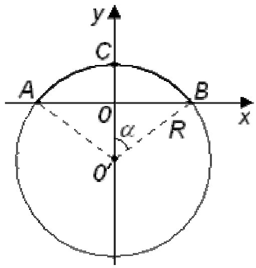


Рис. 4

$$x^2+(y+R\cos\alpha)^2=R^2 \quad \Rightarrow$$

$$y(x)=-R\cos\alpha+\sqrt{R^2-x^2}, \quad x\in[-R\sin\alpha;R\sin\alpha].$$

Для вычисления площади поверхности воспользуемся формулой площади поверхности, образованной вращением дуги *y(x)* вокруг оси *ox*

$$S=2\pi\int_a^b|y(x)|\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

$$S = 4\pi \int_0^{R\sin\alpha} \left(-R\cos\alpha + \sqrt{R^2 - x^2}\right) \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= -4\pi R^2 \cos\alpha \int_0^{R\sin\alpha} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} + 4\pi R \int_0^{R\sin\alpha} dx = -4\pi R^2 \cos\alpha \cdot \arcsin\frac{x}{R}\Bigg|_0^{R\sin\alpha} + 4\pi R x\Big|_0^{R\sin\alpha} =$$

$$= -4\pi R^2 \cos\alpha \cdot \alpha + 4\pi R^2 \sin\alpha = 4\pi R^2 (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

15. Найти момент инерции однородного квадрата со стороной a относительно его диагонали.

Решение

Воспользуемся формулой для вычисления момента инерции плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ относительно оси ox:

$$I_x = \frac{1}{3}\rho \int_a^b \left(y_2^3(x) - y_1^3(x)\right) dx.$$

Плотность $\rho \equiv const$, т. к. квадрат однородный; пусть для определённости $\rho(x) \equiv 1$.

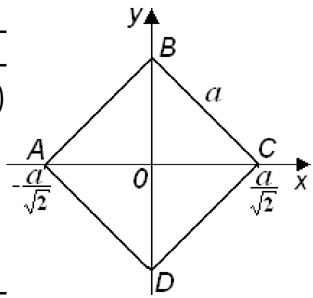


Рис. 5

Надо поместить квадрат в декартову систему следующим образом: диагональ квадрата находится на оси ox, центр квадрата совпадает с началом координат (рис. 5). Тогда ломаная ABC это $y_2(x)$, а ломаная ADC есть $y_1(x)$. Т. к. фигура симметрична относительно оси ox, то $y_1(x) = -y_2(x)$ и

$$I_x = \frac{2}{3} \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{\frac{a}{\sqrt{2}}} y_2^3(x)\, dx.$$

Ломаная ABC образована отрезками двух прямых:

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} - x, \quad 0 \le x \le \frac{a}{\sqrt{2}};$$
$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} + x, \quad -\frac{a}{\sqrt{2}} \le x < 0.$$

Поэтому можно записать $y_2(x) = \frac{a}{\sqrt{2}} - |x|$. Т. к. эта функция чётная, окончательно получаем

$$I_x = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x \right)^3 dx = -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x \right)^3 d\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x \right) = -\frac{1}{3} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x \right)^4 \Bigg|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{a^4}{12}.$$

16. Вычислить $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 8x + 25\right)^2}$.

Решение

Начнём вычисление интеграла с замены $x + 4 = t$, которая не изменяет пределов интегрирования.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(t^2 + 9\right)^2} = 2 \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\left(t^2 + 9\right)^2}.$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\left(t^2 + 9\right)^2} = \frac{1}{9} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^2 + 9 - t^2}{\left(t^2 + 9\right)^2} dt = \frac{1}{9} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 9} - \frac{1}{9} \int\limits_0^{\infty} \frac{t^2}{\left(t^2 + 9\right)^2} dt.$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + 9} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_0^{A} \frac{dt}{t^2 + 9} = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} \Bigg|_0^A = \frac{1}{3} \lim_{A \to +\infty} \operatorname{arctg} A = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Второй интеграл вычисляем с помощью формулы интегрирования по частям, приняв за $u = t, \;\; dv = \frac{t}{\left(t^2 + 9\right)^2} \;\; \Rightarrow \;\; v = -\frac{1}{2\left(t^2 + 9\right)}$.

$$\int\limits_0^{A} \frac{t^2}{\left(t^2 + 9\right)^2} dt = -\frac{t}{2\left(t^2 + 9\right)} \Bigg|_0^A + \frac{1}{2} \int\limits_0^{A} \frac{dt}{t^2 + 9} =$$

$$= -\frac{A}{2\left(A^2+9\right)} + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}\Bigg|_0^A = -\frac{A}{2\left(A^2+9\right)} + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{A}{3}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{\left(t^2+9\right)^2}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{A}{2\left(A^2+9\right)} + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{A}{3}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{108}.$$

$$I = \frac{\pi}{54}.$$

17. Вычислить $I = \int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+3)\sqrt{4-x^2}}$.

Решение

Интеграл несобственный II рода, имеются две особые точки $x=-2$ и $x=2$. Сделаем замену $x = 2\sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), dx = 2\cos t dt$, интеграл получит новые пределы интегрирования $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

$$I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(2\sin t+3)\sqrt{4-4\sin^2 t}}\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(2\sin t+3)2\cos t}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2\sin t+3}.$$

Получили собственный интеграл, который решается с помощью универсальной тригонометрической подстановки $z = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\frac{2z}{z^2+1}+3}\cdot\frac{2}{z^2+1}\,dz = 2\int_{-1}^{1}\frac{dz}{3z^2+4z+3} = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{z^2+\frac{4}{3}z+1} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\frac{dz}{\left(z+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3z+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Преобразуем выражение $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. Вычислим $\operatorname{tg}\alpha$, используя известную формулу тригонометрии $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - \sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{5}}} = \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tfrac{\pi}{2}.$$

Итак, $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$.

18. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x}$.

Решение

Имеем интеграл II рода с особой точкой $x = 0$. На промежутке $[0;1]$ функция $\operatorname{arctg} x$ неотрицательна, поэтому имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x} \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится $\left(p = \frac{1}{2} < 1\right)$, поэтому по признаку сравнения $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x}$ так же сходится.

19. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{5 \operatorname{tg} x - \sin 5x}{\sqrt{\sin^7 x}}\,dx$.

Решение

Имеем несобственный интеграл II рода с особой точкой $x = 0$.

Заметив, что в знаменателе стоит б. м. функция при $x \to 0$, и заменив её на эквивалентную $x^{\frac{7}{2}}$, можно сделать вывод о том, что интеграл расходится, т. к. $p = \frac{7}{2} > 1$. Однако этот вывод неверный в силу того, что в числителе так же стоит б. м. функция при $x \to 0$, и поэтому показатель $p = \frac{7}{2}$ никакой информации о сходимости интеграла нам не даёт.

Найдём порядок б. м. $f(x) = 5\operatorname{tg} x - \sin 5x$, используя разложение этой функции по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

$$f(0) = 0.$$

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2 x} - 5\cos 5x; \quad f'(0) = 0.$$

$$f''(x) = 10\cos^{-3} x \cdot \sin x + 25\sin 5x; \quad f''(0) = 0.$$

$$f'''(x) = 30\cos^{-4} x \cdot \sin^2 x + 10\cos^{-3} x \cdot \cos x + 125\cos 5x; \quad f'''(0) = 135.$$

$$5\operatorname{tg} x - \sin 5x = \frac{135}{6}x^3 + o(x^3).$$

Таким образом,

$$\frac{5\operatorname{tg} x - \sin 5x}{\sqrt{\sin^7 x}} \sim \frac{135x^3}{6x^{\frac{7}{2}}} = \frac{135}{6x^{\frac{1}{2}}}.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, т. к. $p = \frac{1}{2} < 1$. Поэтому по предельному признаку сходимости $\int\limits_0^1 \frac{5\operatorname{tg} x - \sin 5x}{\sqrt{\sin^7 x}}\,dx$ сходится.

20. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int\limits_1^3 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\left(x - \sqrt{x}\right)^\alpha}dx.$$

Решение

Имеем несобственный интеграл II рода с особой точкой $x = 1$. Выпишем подынтегральную функцию и преобразуем её, пользуясь тем, что и числитель, и знаменатель этой функции есть бесконечно малые в особой точке.

$$\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^{\alpha}} \sim \frac{x-1}{\left(\sqrt{x}\right)^{\alpha}\left(\sqrt{x}-1\right)^{\alpha}} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^{\alpha}\left(\sqrt{x}-1\right)^{\alpha}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}\right)^{\alpha}\left(\sqrt{x}-1\right)^{\alpha-1}}.$$

$$\sqrt{x}-1 \sim \frac{x-1}{2} \text{ при } x\to 1.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2\left(\sqrt{x}-1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{2} = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^{\alpha}} \sim \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)2^{\alpha-1}}{\left(\sqrt{x}\right)^{\alpha}(x-1)^{\alpha-1}} \sim \frac{2^{\alpha}}{(x-1)^{\alpha-1}} \text{ при } x\to 1.$$

Интеграл $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\alpha-1}}$ сходится в случае $p=\alpha-1<1 \;\Rightarrow\; \alpha<2.$

По предельному признаку сравнения исходный интеграл также сходится при $\alpha<2$.

Список формул

1. Масса дуги кривой.

Пусть дуга AB задаётся уравнением $y = f(x)$, а её линейная плотность в точке с абсциссой x есть $\rho(x)$, при этом $x_A = a, x_B = b$, тогда масса этой дуги вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (1)$$

2. Статический момент.

Статическим моментом относительно оси l точки массой m, находящейся на расстоянии d от оси l, называется величина $M_l = md$.

Для кривой $y = f(x)$ с линейной плотностью $\rho(x)$ статические моменты относительно координатных осей равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \qquad (2)$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \qquad (3)$$

где a и b – абсциссы начальной и конечной точек кривой.

В общем случае для заданной параметрически однородной кривой $(\rho = const)$ формулы (2) и (3) имеют вид

$$M_x = \rho\int_a^b y\,ds, \qquad (4)$$

$$M_y = \rho\int_a^b x\,ds, \qquad (5)$$

где s – параметр, $a \le s \le b$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Статические моменты однородной $(\rho = const)$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, кривой $y = f(x)$, $y \geq 0$, и осью ox, относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b f^2(x)dx, \tag{6}$$

$$M_y = \rho\int_a^b xf(x)\,dx. \tag{7}$$

3. Момент инерции.

Моментом инерции относительно оси l точки массы m, отстоящей от оси на расстояние d, называется величина $I_l = md^2$.

Моменты инерции относительно координатных осей кривой $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ с линейной плотностью $\rho(x)$ вычисляются по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx, \tag{8}$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) x^2\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{9}$$

В общем случае, для заданной параметрически однородной кривой $(\rho = const)$ формулы (8) и (9) имеют вид

$$I_x = \rho\int_a^b y^2\,ds, \quad I_y = \rho\int_a^b x^2\,ds,$$

где s – параметр, $a \leq s \leq b$, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Моменты инерции однородной $(\rho = const)$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, кривой $y = f(x)$, $y \geq 0$

и осью ox, относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$I_x = \frac{\rho}{3}\int_a^b f^3(x)dx, \tag{10}$$

$$I_y = \rho\int_a^b x^2 f(x)dx. \tag{11}$$

Если верхняя граница этой трапеции $y = f_2(x)$, нижняя $y = f_1(x)$, то формулы (10), (11) запишутся следующим образом

$$I_x = \frac{\rho}{3}\int_a^b \left(f_2^3(x) - f_1^3(x)\right)dx, \quad I_y = \rho\int_a^b x^2\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

4. Координаты центра тяжести (центра масс).

Координаты центра масс $(x_c; y_c)$ кривой $y = f(x)$ с линейной плотностью $\rho(x)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}, \tag{12}$$

где M_x и M_y — статические моменты кривой, которые находятся по формулам (2), (3) или (4), (5), m — масса кривой, определяемая формулой (1).

Координаты центра тяжести $(x_c; y_c)$ однородной криволинейной трапеции также находят по формулам (12), но M_x и M_y — статические моменты трапеции, которые вычисляются по формулам (6), (7), m — масса трапеции, которая в данном случае определяется произведением площади трапеции и плотности. Таким образом, получаем

$$x_c = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b f^2(x)dx}{2\int_a^b f(x)dx}.$$

Декартовы координаты центра масс дуги линии $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, находятся по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\cos\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi}.$$

Абсцисса и ордината центра масс сектора, ограниченного двумя полярными радиусами φ_1, φ_2 и линией $r = r(\varphi)$, вычисляются по следующим формулам

$$x_c = \frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\cos\varphi d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi}, \quad y_c = \frac{2}{3}\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3\sin\varphi d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi}.$$

Список рекомендуемой литературы

1. **Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.** Лекции по математическому анализу: Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего — М.: Высш. шк., 1999. — 695 с.
2. **Виноградова И. А., Олехник С. Н. Садовничий В. А.** Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего — М.: Высш. шк., 2000. — 725 с.: ил.
3. **Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В.И., Шабунин М. И.** Сборник задач по математическому анализу: Интегралы. Ряды. Учеб. пособие для вузов / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — М.: Наука, 2003. – 504 с.
4. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 2. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов. — М.: Наука, 2003. — 864 с.

Оглавление

Учебное издание

Интегральное исчисление. Практикум

ПАВЛОВА Галина Александровна
ГОРБУНОВ Сергей Владимирович

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 00.00.2013
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,72. Уч. изд. л. 3,6.
Тираж 00 экз. Рег. №

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8