



МИНОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2013

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517 (075.8)
И 70

Интегрирование функции одной переменной: учебное пособие /
Сост. Е. Н. Огородников, А. А. Заусаев. — Самара; Самар. гос. техн. ун-т,
2013. — 146 с.

ISBN 978-5-7964-1630-3

В работе рассматриваются основные методы решения неопределенных интегралов, приведены способы вычисления определенных и несобственных интегралов, рассмотрены приложения интегрального исчисления в соответствии с программой курса математики.

Приведенные решения типовых примеров должны помочь студенту самостоятельно разобраться в особенностях того или иного метода интегрирования и справиться с задачами, предлагаемыми в учебном задании.

Пособие предназначено для студентов инженерных специальностей СамГТУ, а также может быть полезным для студентов направления «Прикладная математика и информатика».

УДК 517 (075.8)
И 70

Составители: канд. физ.-мат. наук Е. Н. Огородников,
канд. физ.-мат. наук А. А. Заусаев

Рецензент: канд. физ.-мат. наук А. Ю. Смыслов

ISBN 978-5-7964-1630-3

© Е. Н. Огородников, А. А. Заусаев,
составление, 2013

© Самарский государственный
технический университет, 2013

Предисловие

Интегральное исчисление, изначально возникшее из потребности нахождения площадей, объемов и центров тяжести, в настоящее время играет важную роль в современной математике, физике и их приложениях.

В предлагаемом учебном пособии используется традиционный для технических университетов подход к изложению материала, когда понятие неопределенного интеграла предшествует определению интегрирования как процедуры нахождения предела интегральных сумм, приводящей к понятию определенного интеграла.

Первые пять разделов пособия посвящены методам вычисления неопределенных интегралов от действительной функции одной переменной и некоторым классам интегрируемых в явном виде функций. В шестом и седьмом разделах рассматриваются понятия определенного и несобственного интеграла. Последний, восьмой раздел, посвящен приложениям интегрального исчисления к решению инженерных задач.

Пособие снабжено большим количеством разобранных примеров, которые должны помочь студенту самостоятельно разобраться в особенностях того или иного метода интегрирования и справиться с задачами, предлагаемыми в учебном задании.

Учебное пособие по математике «Интегрирование функции одной переменной» предназначено для студентов инженерных специальностей СамГТУ, но также может быть полезным и для студентов направления «Прикладная математика и информатика» при изучении курса «Математический анализ».

1. Неопределенный интеграл и основные методы интегрирования

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенных интегралов. Таблица основных интегралов

Одной из основных задач дифференциального исчисления является нахождение производной данной функции. Разнообразные вопросы математического анализа, его многочисленные приложения в геометрии, физике, химии и других науках, а также в сугубо прикладных, технических задачах, приводят к необходимости решения обратной задачи: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой $F'(x)$ была бы равна функции $f(x)$, т.е. имело место равенство $F'(x) = f(x)$. Можно сказать, что восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

Будем, как обычно, обозначать $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ — множество действительных чисел. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ — некоторое подмножество множества \mathbb{R} . В частности, Ω может быть отрезком $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$; интервалом (a, b) ; полуинтервалами $[a, b)$ или $(a, b]$; объединением их конечного множества или, наконец, всей числовой осью.

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором множестве Ω , если для всех значений x из этого множества выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой прямой \mathbb{R} , так как равенство $(\sin x)' = \cos x$ выполняется при любом значении x .

Пример 2. Функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в интервале $(-1; 1)$, хотя сама первообразная $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$.

Пример 3. Функция $F(x) = \sqrt{(1-x^2)^3}$ будет являться первообразной для функции $f(x) = -3x\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$, т.к. равенство

$$F'(x) = [(1-x^2)^{3/2}]' = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x) = -3x(1-x^2)^{1/2} = f(x)$$

выполняется в любой точке x отрезка $[-1; 1]$.

Пример 4. Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, так как

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= (\ln |x|)' = \begin{bmatrix} (\ln x)', & x > 0 \\ (\ln(-x))', & x < 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x} = f(x)
 \end{aligned}$$

для любого $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Нетрудно заметить, что если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$. Действительно,

$$[F(x) + C]' = F'(x) + (C)' = F'(x) = f(x).$$

Боле того, множество функций

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная, исчерпывает все множество первообразных функции для $f(x)$.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. Пусть $\Phi(x)$ и $F(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$. Тогда для всех $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C — некоторая постоянная.

Определение 1.2. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x) dx = dF(x)$) называется совокупность всех ее первообразных.

Неопределенный интеграл обозначают $\int f(x) dx$ (читается: неопределенный интеграл $f(x)$ на (по) dx) и записывают

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (1.2)$$

где \int — символ неопределенного интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x) dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования, $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, C — произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

$$1^\circ. \int dF(x) = \int F'(x) dx = F(x) + C; \quad (1.3)$$

$$2^\circ. \left(\int f(x) dx \right)' = f(x); \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx; \quad (1.4)$$

$$3^\circ. \int [af(x) \pm bg(x)] dx = a \int f(x) dx \pm b \int g(x) dx; \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Все эти свойства непосредственно следуют из определений 1.1 и 1.2, а также формул (1.1) и (1.2).

Из формулы (1.3), в частности, следует равенство

$$\int dx = x + C, \quad (1.6)$$

а свойство 3° справедливо и для любого конечного числа слагаемых функций:

$$\int \left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^n a_k \int f_k(x) dx, \quad a_k \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции следует называть неопределенным интегрированием. В этом и следующих разделах 3—5 настоящего пособия, говоря об интеграле и об интегрировании, мы будем иметь ввиду неопределенный интеграл и неопределенное интегрирование.

Таблица основных интегралов.

Большая часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования, как операции, обратной дифференцированию. Справедливость двух последних легко проверить дифференцированием.

$$1) \int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1; \end{cases}$$

$$2) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

$$\text{в частности, при } a = e: \int e^x dx = e^x + C;$$

$$3) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 4) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$5) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad 6) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C;$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*. Это минимальная таблица, которую необходимо выучить наизусть.

Отметим некоторые частные случаи первой формулы таблицы:

$$\triangleright \text{при } \alpha = 0: \quad \int x^0 dx = \int 1 dx = x + C,$$

что совпадает с ранее найденным в формуле (1.6) результатом;

$$\triangleright \text{при } \alpha = 1: \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$\triangleright \text{при } \alpha = n \ (n \in N): \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad (1.8)$$

$$\triangleright \text{при } \alpha = -\frac{1}{2}: \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C; \quad (1.9)$$

$$\triangleright \text{при } \alpha = -2: \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C. \quad (1.10)$$

Заметим, что при $\alpha = -1$ первую формулу таблицы основных интегралов удобно запоминать в виде

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

и, вообще, $\int \frac{1}{\varphi(x)} dx$ принято записывать как $\int \frac{dx}{\varphi(x)}$.

Появление в основной таблице формул 9) и 10), не связанных напрямую с основной таблицей производных, обусловлено частой повторяемостью этих интегралов и их «похожестью» на интегралы в формулах 7) и 8). Нетрудно установить соответствующие множества Ω , на которых справедливы эти формулы. Например, в формуле 9): $x \in \Omega = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

К таблице основных интегралов полезно добавить формулы интегрирования, связанные с гиперболическими и обратными гиперболическими функциями. Напомним, что синус гиперболический и косинус гиперболический обозначаются соответственно $\text{sh } x$ и $\text{ch } x$ и определяются равенствами $\text{sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\text{ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Тангенс и котангенс гиперболические обозначаются $\text{th } x$ и $\text{cth } x$, и по определению выражаются через функции $\text{sh } x$ и $\text{ch } x$ по формулам $\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$, $\text{cth } x = \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}$.

Используя формулы производных этих функций, а также определения и формулы производных обратных к ним функций, получим

$$\int \text{ch } x dx = \text{sh } x + C; \quad \int \text{sh } x dx = \text{ch } x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \operatorname{Arth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C = \operatorname{Arsh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C = \operatorname{Arch} x + C.$$

Объединение двух последних формул приводит к формуле 10) основной таблицы.

1.2. Непосредственное интегрирование

Нахождение первообразной или вычисление неопределенного интеграла в основном состоит в преобразовании подынтегрального выражения таким образом, чтобы в соответствии с основным свойством неопределенного интеграла (1.5) или (1.7) задача свелась к нахождению алгебраической суммы табличных интегралов.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) dx$.

Решение. Используя (1.5) или (1.7), формулу 1) таблицы основных интегралов, а также (1.6), получим

$$\int (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5) dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - 5 \int dx =$$

$$= 2 \frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 - 5x + C.$$

Аналогично вычисляется следующий интеграл.

Пример 6. Вычислить $\int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

Решение. $\int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = 5 \int x^{2/3} dx -$

$$- \int x^{-3/2} dx + 3 \int x^{1/2} dx + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = 5 \frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{x^{-1/2}}{-1/2} +$$

$$+ 3 \frac{x^{3/2}}{3/2} + 3 \cdot 2\sqrt{x} - 2 \ln |x| + \frac{1}{x} + C = 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x} - 2 \ln |x| + \frac{1}{x} + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Раскроем скобки в числителе подынтегральной дроби, выполним почленное деление и воспользуемся затем таблицей основных интегралов.

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 2 \int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} dx + \int \frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} dx = \\ &= 2\sqrt{x} + 2 \int x^{-1/6} dx + \int x^{1/6} dx = 2\sqrt{x} + 2 \frac{x^{5/6}}{5/6} + \frac{x^{7/6}}{7/6} + C = 2\sqrt{x} + \frac{12}{5} \sqrt[6]{x^5} + \\ &+ \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + C = 2\sqrt{x} + \frac{12}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

Удачное почленное деление в подынтегральной дроби позволяет в ряде случаев увидеть табличные интегралы в примерах, решение которых с общих позиций, привлекая классификацию подынтегральных функций и предлагаемые универсальные методы интегрирования, достаточно трудно.

Пример 8. Вычислить интеграл $\int \frac{1 + 7x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx$.

Решение. Запишем числитель подынтегральной дроби в виде: $1 + x^2 + 6x^2$ и выполним почленное деление. Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + 7x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx &= \int \frac{(1 + x^2) + 6x^2}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \frac{(1 + x^2) dx}{x^2(x^2 + 1)} + 6 \int \frac{x^2 dx}{x^2(x^2 + 1)} = \\ &= \int \frac{dx}{x^2} + 6 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} + 6 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 1)}$.

Решение. Представим подынтегральную дробь следующим образом:

$$\frac{1}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{1 + x^2 - x^2}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x^2(x^2 - 1)} = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Тогда } \int \frac{dx}{x^2(x^2 - 1)} = \int \frac{dx}{x^2 - 1} - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + \frac{1}{x} + C.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int \frac{3 - 2\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \int \frac{3 - 2\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx &= \int \left(\frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} - 2 \right) dx = 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} - \\ &- 2 \int dx = 3 \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int \frac{2 + 3x^2\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

Решение. $\int \frac{2 + 3x^2\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} + 3x^2 \right) dx = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} + 3 \int x^2 dx = 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x^3 + C$.

При вычислении следующих интегралов использованы простейшие свойства показательных функций.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int 2^{3x+1} 3^{2x-1} dx$.

Решение. $\int 2^{3x+1} 3^{2x-1} dx = \int 2^{3x} 2^1 3^{2x} 3^{-1} dx = \frac{2}{3} \int (2^3)^x (3^2)^x dx = \frac{2}{3} \int 8^x 9^x dx = \frac{2}{3} \int 72^x dx = \frac{2 \cdot 72^x}{3 \cdot \ln 72} + C$.

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \frac{2e^{3x} + 3^x}{e^x} dx$.

Решение. $\int \frac{2e^{3x} + 3^x}{e^x} dx = \int \left(\frac{2e^{3x}}{e^x} + \frac{3^x}{e^x} \right) dx = 2 \int (e^2)^x dx + \int \left(\frac{3}{e} \right)^x dx = 2 \frac{e^{2x}}{\ln e^2} + \frac{(3/e)^x}{\ln(3/e)} + C = \frac{2e^{2x}}{2 \ln e} + \frac{3^x}{e^x (\ln 3 - \ln e)} + C = e^{2x} + \frac{3^x e^{-x}}{\ln 3 - 1} + C$.

Использование формул тригонометрии позволяет свести некоторые интегралы от тригонометрических функций сразу к табличным.

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решение. Известны формулы

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad (1.12)$$

Используя формулу (1.11), получим $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$.

Весьма полезны формулы понижения степени:

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x, \quad (1.13)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x, \quad (1.14)$$

а также формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad (1.15)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \quad (1.16)$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Решение.
$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C.$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C.$$

Пример 17. Вычислить интеграл $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$.

Решение.
$$\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Здесь использовались формулы (1.13), (1.14) и результат вычислений в примере 14.

Пример 18. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$.

Решение.
$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \right) dx =$$

$$= \int (\operatorname{ctg}^2 x - 1) dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 2 \int dx = -\operatorname{ctg} x -$$

$$- 2x + C = C - 2x - \operatorname{ctg} x.$$

Пример 19. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение. Воспользуемся тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной или, по другой терминологии — метод подстановки, является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Сущность метода заключается в преобразовании подынтегрального выражения путем введения новой переменной интегрирования таким образом, что возникающий после преобразования интеграл либо уже является табличным, либо становится проще и легко вычисляется иными методами.

Необходимо приобрести определенные навыки и опыт, позволяющие узнавать простые, близкие к табличным интегралы, для которых нужные подстановки почти очевидны, и отличать их от интегралов, требующих применения заранее известных подстановок, вид которых зависит от типа интегрируемых функций. Таким образом, типизация интеграла по виду подынтегрального выражения — необходимое условие для выбора правильной стратегии его вычисления.

Заметим, что интегрирование значительно сложнее дифференцирования. Последнее производится по раз и навсегда установленным правилам и формулам. Интегрирование же требует индивидуального подхода в каждом случае. Существует и специфическая трудность интегрального исчисления, заключающаяся в том, что первообразные даже для сравнительно простых функций не всегда выражаются через элементарные функции.

В основе метода замены переменной лежит теорема об инвариантности формул интегрирования, которую мы приводим в следующей редакции.

Теорема 1.2. Формулы интегрирования сохраняют свой вид при замене независимой переменной любой дифференцируемой функцией от нее.

Иными словами, если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ известна, т.е. $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f[u(x)] du(x) = F[u(x)] + C, \quad (1.17)$$

где $u = u(x)$ — дифференцируемая функция от x на некотором множестве Ω . При этом, разумеется, подынтегральная функция и ее первообразная должны быть определены на множестве U значений функции $u = u(x)$.

Приведенные в этом разделе пособия примеры должны помочь в приобретении навыков в нахождении необходимых подстановок в простейших, близких, в определенном смысле слова, к табличным интегралах. Разделы 3—5 посвящены классификации интегралов, основным типам интегрируемых функций и специальным методам интегрирования.

Рассмотрим вначале самые простые примеры.

Пример 20. Вычислить интеграл $\int (3x - 2)^{100} dx$.

Решение. Замечая, что $d(3x - 2) = (3x - 2)' dx = 3 dx$, запишем интеграл в следующем виде:

$$\int (3x - 2)^{100} dx = \frac{1}{3} \int (3x - 2)^{100} 3 dx = \frac{1}{3} \int (3x - 2)^{100} d(3x - 2).$$

Полагая $3x - 2 = u$, находим

$$\int (3x - 2)^{100} dx = \frac{1}{3} \int u^{100} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{101}}{101} + C = \frac{1}{303} (3x - 2)^{101} + C.$$

Пример 21. Вычислить интеграл $\int e^{2x-3} dx$.

Решение. Так как $d(2x - 3) = (2x - 3)' dx = 2 dx$, то

$$\int e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-3} 2 dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-3} d(2x - 3).$$

Полагая $2x - 3 = u$, находим

$$\int e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x-3} + C.$$

Пример 22. Вычислить интеграл $\int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx$.

Решение. Так как $d\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)' dx = \frac{1}{2} dx$, то

$$\int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx = 2 \int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} dx = 2 \int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) d\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

Полагая $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = u$, находим

$$\int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) dx = 2 \int \cos u du = 2 \sin u + C = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

Пример 23. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{ax + b}$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Решение. Так как $d(ax + b) = (ax + b)' dx = a dx$, то

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{a dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax + b)}{ax + b}.$$

Полагая в этом примере $ax + b = u$, находим

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{a} \ln |u| + C = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C.$$

Полученный результат можно рассматривать как некоторое обобщение формулы 1) (случай $\alpha = -1$) основной таблицы интегралов и его полезно запомнить. Итак,

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C. \quad (1.18)$$

Ниже будет рассмотрен еще ряд примеров, расширяющих и дополняющих таблицу основных интегралов.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, нетрудно заметить, что фактически при вычислении этих простых интегралов в замене переменных не было никакой необходимости, если нужный дифференциал уже сформирован. Этот способ преобразования подынтегральных выражений получил название «метод подведения функции под дифференциал».

Пример 24. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^4}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^4}} = \int (2-3x)^{-4/3} dx = -\frac{1}{3} \int (2-3x)^{-4/3} d(2-3x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(2-3x)^{-1/3}}{-1/3} + C = -\frac{1}{3}(-3) \frac{1}{(2-3x)^{1/3}} + C = \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} + C.$$

При решении этого примера мы устно проверили, что $d(2-3x) = -3 dx$ и мысленно обозначили $2-3x$ за u , после чего воспользовались формулой 1) интеграла от степенной функции с показателем $\alpha = -4/3$.

В конечном итоге, все подобные примеры можно решать, используя известный из школьного курса математики факт: если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad (1.19)$$

что является частным случаем (следствием) теоремы об инвариантности формул интегрирования.

Пример 25. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{a}{a^2} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\frac{x}{a} - 1}{\frac{x}{a} + 1} \right| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

Пример 26. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

 $= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

Пример 27. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \frac{a}{a} \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} =$$

 $= \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1} \right| + C = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a} \right| + C = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{a} \right| +$
 $+ C = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| - \ln |a| + C = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C_1,$
 где $C_1 = C - \ln |a|$ — также произвольная постоянная.

В рассмотренных выше примерах мы предполагали, что $a > 0$, причем знак модуля в ответе к последнему примеру часто опускают, полагая, что первообразная рассматривается на множестве $\Omega = \{x : x \geq 0\}$.

Рекомендуем полученные результаты добавить к основной таблице интегрирования в следующем виде:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad (1.20)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C; \quad (1.21)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad (1.22)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C. \quad (1.23)$$

Прием интегрирования, основанный на подведении функции под дифференциал весьма эффективен и в более сложных случаях. Действительно, если в интеграле $I = \int f[u(x)]\varphi(x) dx$ оказалось, что $\varphi(x) = u'(x)$, то

$$I = \int f[u(x)]\varphi(x) dx = \int f[u(x)]u'(x) dx = \int f[u(x)]du(x).$$

Тогда, если $\int f(u)du = F(u) + C$ (например, является табличным), то $I = F[u(x)] + C$.

Рассмотрим группу интегралов: $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}$, $\int \frac{x dx}{x^2 - 1}$, $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$,
 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Знаменатели подынтегральных дробей напоминают соответствующие знаменатели в формулах 7)–10) основной таблицы. Однако все эти интегралы сводятся к интегралу от сложной степенной функции с показателями $\alpha = -1$ и $\alpha = -1/2$.

Действительно, $x dx = \frac{1}{2} dx^2$, а это значит, что, например,

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Аналогично,

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + C.$$

Два последних интеграла сводятся к $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$. А именно,

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} + C;$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Уже сейчас ясно, что всю таблицу основных интегралов можно было бы переписать с учетом теоремы об инвариантности формул интегрирования и выучить, например, в таком виде:

$$\int [u(x)]^\alpha du(x) = \frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad \int \frac{du(x)}{u(x)} = \ln|u(x)| + C;$$

$$\int \frac{du(x)}{\sqrt{u(x)}} = 2\sqrt{u(x)} + C; \quad \int e^{u(x)} du(x) = e^{u(x)} + C;$$

$$\int \cos u(x) du(x) = \sin u(x) + C;$$

и т.д. Но в этом нет никакой необходимости.

Следующие примеры направлены на закрепление навыка выделения основного интегрируемого выражения и дифференциала этого выражения.

Пример 28. Вычислить интеграл $\int x^2(2x^3 - 4)^5 dx$.

Решение.
$$\int x^2(2x^3 - 4)^5 dx = \frac{1}{3} \int (2x^3 - 4)^5 dx^3 =$$
$$= \frac{1}{3 \cdot 2} \int (2x^3 - 4)^5 d(2x^3 - 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2x^3 - 4)^6}{6} + C = \frac{1}{36} (2x^3 - 4)^6 + C.$$

Пример 29. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(2x^3 - 1)^2}}$.

Решение.
$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(2x^3 - 1)^2}} = \frac{1}{3} \int (2x^3 - 1)^{-2/3} dx^3 =$$
$$= \frac{1}{3 \cdot 2} \int (2x^3 - 1)^{-2/3} d(2x^3 - 1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2x^3 - 1)^{1/3}}{1/3} + C = \frac{1}{2} \sqrt[3]{2x^3 - 1} + C.$$

Пример 30. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[6]{(2 - 3x^4)^7}}$.

Решение.
$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[6]{(2 - 3x^4)^7}} = \frac{1}{4} \int (2 - 3x^4)^{-7/6} dx^4 =$$
$$= -\frac{1}{4 \cdot 3} \int (2 - 3x^4)^{-7/6} d(2 - 3x^4) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{(2 - 3x^4)^{-1/6}}{-1/6} + C = \frac{1}{2 \sqrt[6]{2 - 3x^4}} + C.$$

Пример 31. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$.

Решение. Если из под знака квадратного корня вынести число 4, то интеграл сведется к формуле (1.22) с $a = \frac{3}{2}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{9/4 - x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C.$$

Однако, если вынести число 9, то интеграл сведется к формуле 8) основной таблицы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{d\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C.$$

Пример 32. Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{3 + 2x^4}$.

Решение.
$$\int \frac{x dx}{3 + 2x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{2(x^2)^2 + 3} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x^2\right)}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x^2\right)^2 + 1} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}}x^2 + C.$$

Пример 33. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\cos^2 \sqrt{x}} = 2 \operatorname{tg} \sqrt{x} + C.$$

Пример 34. Вычислить интеграл $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$.

Решение.
$$\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = \int \sin \frac{1}{x} d\left(-\frac{1}{x}\right) = - \int \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) =$$
$$= \cos \frac{1}{x} + C.$$

Пример 35. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} + C.$$

Пример 36. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C.$$

Пример 37. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 3}}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 3}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln^2 x - 3}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln^2 x - (\sqrt{3})^2}} =$$
$$= \ln |\ln x + \sqrt{\ln^2 x - 3}| + C.$$

Пример 38. Вычислить интеграл $\int e^{2 \sin x} \cos x dx$.

Решение.
$$\int e^{2 \sin x} \cos x dx = \int e^{2 \sin x} d(\sin x) = \frac{1}{2} \int e^{2 \sin x} d(2 \sin x) =$$
$$= \frac{1}{2} e^{2 \sin x} + C.$$

Пример 39. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$.

Решение. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} = - \int \cos^{-3/2} x d(\cos x) = - \frac{\cos^{-1/2} x}{-1/2} =$
 $= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C.$

Пример 40. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \arcsin x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\sqrt{\arcsin x}} =$
 $= 2\sqrt{\arcsin x} + C.$

Пример 41. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} = \int \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{d(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} =$
 $= \ln |\operatorname{arctg} x| + C.$

Пример 42. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3}} = \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$
 $= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3})^2}} = \ln |\operatorname{tg} x + \sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3}| + C.$

Пример 43. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{3 - 2 \operatorname{ctg} x}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{3 - 2 \operatorname{ctg} x}} = \int \frac{1}{\sqrt{3 - 2 \operatorname{ctg} x}} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} =$
 $= - \int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sqrt{3 - 2 \operatorname{ctg} x}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(3 - 2 \operatorname{ctg} x)}{\sqrt{3 - 2 \operatorname{ctg} x}} = \sqrt{3 - 2 \operatorname{ctg} x} + C.$

Пример 44. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

Решение. В отличие от предыдущих примеров, выделение нужного дифференциала в этом примере не очевидно. Поэтому преобразуем подынтегральную функцию так:

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2 + 1} = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 1} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

Методом подведения функции под дифференциал также легко вычисляются следующие четыре интеграла:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = C - \ln |\cos x|, \quad (1.24)$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C, \quad (1.25)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \quad (1.26)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \quad (1.27)$$

Этими формулами рекомендуется дополнить таблицу основных интегралов и выучить их наизусть.

Рассмотрим первый из приведенных интегралов. Записывая $\operatorname{tg} x$ как $\frac{\sin x}{\cos x}$ и замечая, что $d(\cos x) = (\cos x)' dx = -\sin x \, dx$, получим

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл в формуле (1.25):

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

Для вычисления интеграла в (1.26) воспользуемся формулой

$$\sin x = \sin 2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

и преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Принимая мысленно $\frac{x}{2}$ за u и используя формулу $d(\operatorname{tg} u) = \frac{du}{\cos^2 u}$, получен-

ный интеграл можно записать в виде $\int \frac{d \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, а подстановка $v = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ приводит его к табличному:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln |v| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Приведенный пример вычислений еще раз показывает преимущества метода подведения под дифференциал. Если бы мы выполняли соответствующие замены переменных в явном виде, то даже в этом простом интеграле это пришлось бы делать дважды: вначале $u = \frac{x}{2}$, затем $v = \operatorname{tg} u$. Фактическая замена переменных $v = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, которая приводит данный интеграл к табличному, с самого начала не была очевидной.

Последний из рекомендованных выше для запоминания интегралов (1.27) легко сводится к предыдущему с помощью формулы приведения

$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} = \int \frac{d \left(x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

Отметим, что можно получить другие варианты записи формул (1.26), (1.27):

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| + C, \quad (1.28)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{1 - \sin x}{\cos x} \right| + C. \quad (1.29)$$

В их справедливости легко убедиться, если в формулах (1.26), (1.27) использовать тождество $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

До сих пор мы применяли метод подстановки, заменяя переменную интегрирования x другой переменной u по формуле $\varphi(x) = u$. В простейших случаях эта подстановка выполнялась неявно, мысленно и сразу приводила к табличному интегралу. В более сложных случаях рекомендуется так выбрать подстановку, чтобы новый интеграл был проще, чем исходный. После преобразования подынтегрального выражения часто удается увидеть возможность новой замены переменной, которая еще более упрощает подынтегральное выражение.

Пример 45. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x \sin 2x dx}{\sqrt{5 - \sin^6 x}}$.

Решение. Прежде замечаем, что числитель интегрируемой функции $\sin x \sin 2x = 2 \sin^2 x \cos x$, а, значит,

$$\sin x \sin 2x dx = 2 \sin^2 x \cos x dx = 2 \sin^2 x d(\sin x).$$

В результате подстановки $\sin x = u$ интеграл приводится к виду

$\int \frac{2u^2 du}{\sqrt{5 - u^6}}$. Замечая далее, что $2u^2 du = \frac{2}{3} d(u^3)$, и принимая $u^3 = v$, получим табличный интеграл:

$$\frac{2}{3} \int \frac{dv}{\sqrt{5-v^2}} = \frac{2}{3} \int \frac{dv}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - v^2}} = \frac{2}{3} \arcsin \frac{v}{\sqrt{5}} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{\sin x \sin 2x dx}{\sqrt{5 - \sin^6 x}} = \frac{2}{3} \arcsin \frac{u^3}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{3} \arcsin \frac{\sin^3 x}{\sqrt{5}} + C.$$

Теперь ясно, что подстановка $\sin^3 x = v$ сразу привела бы данный интеграл к табличному.

Подстановку $\psi(x) = u$ иногда называют заменой переменной первого типа. Может оказаться, что заменяя x новой переменной интегрирования t по формулам

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt, \quad (1.30)$$

где $\varphi(t)$ — некоторая определенная для данного интеграла дифференцируемая функция, получим интеграл, который вычисляется проще, или даже является табличным. Тогда

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \quad (1.31)$$

и, если последний интеграл в (1.31) оказался равным $F(t)+C$, то заданный находится возвращением к переменной x . Для этого необходимо выразить из уравнения $x = \varphi(t)$ переменную t через x .

Замену переменной по формулам (1.30)—(1.31) иногда называют заменой второго типа. Законность подобных преобразований в интеграле также гарантируется теоремой об инвариантности формул интегрирования, в которой надо дополнительно потребовать монотонность функции $\varphi(t)$. Это, в свою очередь, нужно для существования обратной к $\varphi(t)$ функции, с помощью которой уравнение $x = \varphi(t)$ разрешается относительно t . Обозначая обратную к $\varphi(t)$ функцию символом $\{\varphi\}^{-1}$, запишем алгоритм преобразования интеграла и его вычисления в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \left[\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right] = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C = \\ &= [t = \{\varphi\}^{-1}(x)] = F[\{\varphi\}^{-1}(x)] + C. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Еще раз подчеркнем, что выбор функции $\varphi(t)$ для замены переменной интегрирования x по формуле $x = \varphi(t)$ не является случайным. Как правило, он продиктован видом интегрируемой функции и, в конечном итоге, типом интеграла.

Типизацией интегралов займемся в третьем разделе данного пособия, а пока приведем лишь несколько примеров.

Пример 46. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x}}$.

Решение. Стремясь избавиться от иррациональной функции в знаменателе подынтегрального выражения, примем $\sqrt{x} = t$ (замена первого типа: $\psi(x) = t$). С другой стороны, из равенства $\sqrt{x} = t$ следует, что $x = t^2$ и $dx = 2tdt$, т.е. можно считать, что мы выполняем замену переменных второго типа: $x = \varphi(t)$. В результате

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{(t^2+4)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+2^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2} + C.$$

Приведенный простой пример хорошо демонстрирует тот факт, что различие между подстановками первого и второго типов носит условный характер. Действительно, выполняя замену переменных вида $x = \varphi(t)$ в интеграле и вычисляя первообразную $F(t)$, мы затем возвращаемся к переменной x с помощью обратной функции $\{\varphi\}^{-1}(x) = t$. А это позволяет сказать, что интеграл вычислен с помощью замены переменной по формуле $\psi(x) = \{\varphi\}^{-1}(x) = t$.

Пример 47. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$.

Решение. Повторяя рассуждения, приведенные в начале решения предыдущего примера, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+9} = t \Rightarrow 2x+9 = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2-9) \\ \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 2dx = 2tdt \Rightarrow dx = tdt \end{array} \right] =$$

$$= 2 \int \frac{tdt}{(t^2-9)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2-3^2} = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{t-3}{t+3} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+9}-3}{\sqrt{2x+9}+3} \right| + C.$$

Заметим, что в самом общем случае подходящая замена переменных может иметь вид $\psi(x) = \varphi(t)$. Например, в предыдущем примере замена переменных фактически определялась равенством $2x+9 = t^2$ ($t > 0$).

Пример 48. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}$.

Решение. В отличие от предыдущих примеров замена переменной вида $\psi(x) = t$ в этом примере не очевидна, в то время, как подстановка $x = t^6$ позволяет избавиться от иррациональности в знаменателе подынтегральной дроби. Тогда, обозначая интеграл I , запишем

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] =$$

$$= 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + 2t^2} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t+2)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+2}.$$

Полученный интеграл уже не содержит радикалов и относится к простейшим интегралам от рациональных функций. Закончим решение следующим простым приемом выделения целой части подынтегральной дроби:

$$\frac{t^3}{t+2} = \frac{(t^3 + 2^3) - 2^3}{t+2} = \frac{(t+2)(t^2 - 2t + 4) - 8}{t+2} = t^2 - 2t + 4 - \frac{8}{t+2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \left(t^2 - 2t + 4 - \frac{8}{t+2} \right) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t - 8 \ln |t+2| \right) + C = \\ &= [x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}] = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48 \ln(\sqrt[6]{x} + 2) + C. \end{aligned}$$

Заметим, что при решении примеров обычно не требуется устанавливать область определения подынтегральной функции и того множества Ω , на котором существует первообразная и интегрируемая функция (множества, о котором шла речь в определении 1.1). Однако, вводя замену переменных вида $x = \varphi(t)$, надо учитывать то множество T изменения аргумента t функции $\varphi(t)$, на котором она является непрерывно дифференцируемой и однозначно обратимой. Поясним сказанное на следующем примере.

Пример 49. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ($a > 0$).

Решение. Очевидно, подынтегральная функция определена на множестве $\Omega = [-a, a]$. Положим $x = a \sin t$, считая $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Чем продиктован выбор такой замены переменных?

Во-первых, на множестве $T = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ значение $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a\sqrt{\cos^2 t} = a \cos t$ ($\cos t \geq 0$).

Во-вторых, на этом множестве функция $x = a \sin t$ непрерывно дифференцируема, ее дифференциал $dx = a \cos t dt$, и она однозначно обратима: $t = \arcsin \frac{x}{a}$.

Таким образом, $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$.

Применяя формулу (1.14), получим

$$I = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \left(\int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) \right) = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C.$$

Для того чтобы вернуться к переменной x , учтем, что $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ на множестве T и, значит, $\cos t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, а

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Окончательно находим

$$I = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

1.4. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций и опирается на следующую теорему.

Теорема 1.3. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором множестве Ω и произведение $v(x)u'(x)$ имеет на Ω первообразную (т.е. существует $\int v(x)u'(x)dx$). Тогда на Ω функция $u'(x)v(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx. \quad (1.33)$$

Заметим, что так как $v'(x) dx = dv$, а $u'(x) dx = du$, то формулу (1.33) удобно запоминать в виде

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1.34)$$

Она позволяет свести вычисление $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться проще.

Итак, общая схема применения метода интегрирования по частям такова. Разбивая подынтегральное выражение в интеграле $\int f(x) dx$ тем или иным образом на произведение двух функций $\varphi(x)\psi(x) = f(x)$, следует за u принять ту его часть, которая при дифференцировании упрощается, например, $\varphi(x) = u$, а за dv — другую, оставшуюся часть подынтегрального выражения, $\psi(x) dx = dv$, первообразная от которой известна или легко может быть найдена.

Приведем два примера, в которых выбор функций u и v , фактически, предопределен сразу.

Пример 50. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, откуда $v = x$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x - \int x d(\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = x \operatorname{arctg} x - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 51. Вычислить интеграл $\int \ln x \, dx$.

Решение. По аналогии с предыдущим примером положим $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Хорошо видно, что в простых примерах, восстанавливая вид функции $v(x)$ путем интегрирования и находя дифференциал функции $u(x)$ «в уме», можно быстро достичь результата. В более сложных случаях выбор функций на роль $u(x)$ и $v(x)$ не столь однозначен.

Рассмотрим некоторые типы интегралов, легко вычисляемых методом интегрирования по частям.

Всюду далее будем обозначать $P_n(x)$ — произвольный многочлен степени n с действительными коэффициентами $a_k, k = 0, n$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (1.35)$$

Тип 1. Интегралы вида $\int P_n(x) e^{\alpha x} \, dx$, $\int P_n(x) \sin \beta x \, dx$, $\int P_n(x) \cos \beta x \, dx$.

В этих интегралах следует за u принять $P_n(x)$, а за dv — соответственно выражения $e^{\alpha x} \, dx$, $\sin \beta x \, dx$ и $\cos \beta x \, dx$. Например, в первом интеграле однократное применение интегрирования по частям приводит к выражению

$$\begin{aligned} \int P_n(x) e^{\alpha x} \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = P_n(x) \Rightarrow du = P'_n(x) \, dx = P_{n-1}(x) \, dx \\ dv = e^{\alpha x} \, dx \Rightarrow v = \int e^{\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha} P_n(x) e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P_{n-1}(x) e^{\alpha x} \, dx, \end{aligned} \quad (1.36)$$

в котором многочлен $P_{n-1}(x) = na_n x^{n-1} + \dots + a_1$ имеет степень на единицу меньшую, чем исходный. Повторное применение формулы (1.36) приведет к интегралу с многочленом $P_{n-2}(x)$ и т.д. Повторяя процедуру интегрирования по частям n раз получим, что в последнем интеграле присутствует многочлен нулевой степени, т.е. константа, а он уже является табличным.

На практике в интегралах этого типа весьма успешно работает прием подведения функции под дифференциал (что, как уже отмечалось, равносильно интегрированию простых функций «в уме»). Это упрощает процесс решения и экономит время.

Пример 52. Вычислить интеграл $\int x e^x \, dx$.

Решение. Т.к. $e^x \, dx = de^x$, то $\int x e^x \, dx = \int x de^x = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C = (x - 1) e^x + C$.

Пример 53. Вычислить интеграл $\int x^2 e^{-2x} dx$.

Решение. Т.к. $e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} de^{-2x}$, то

$$\int x^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int x^2 de^{-2x} = -\frac{1}{2} \left(x^2 e^{-2x} - \int e^{-2x} dx^2 \right).$$

Так как $dx^2 = 2x dx$, то последний интеграл запишется в виде $2 \int x e^{-2x} dx$ и к нему надо вновь применить формулу интегрирования по частям (1.34). Окончательно,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} \left(x^2 e^{-2x} - 2 \int x e^{-2x} dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(x^2 e^{-2x} + \frac{2}{2} \int x de^{-2x} \right) = -\frac{1}{2} \left(x^2 e^{-2x} + x e^{-2x} - \int e^{-2x} dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(x^2 e^{-2x} + x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} d(-2x) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(x^2 e^{-2x} + x e^{-2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right) + C = -\frac{1}{2} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

Замечание. Следует быть внимательным при определении типа интеграла, вычисляющегося по частям, так как похожие интегралы могут находиться уже совсем иначе. Например, в интеграле $\int x e^{x^2} dx$ замечаем, что $x dx = \frac{1}{2} dx^2$ и, принимая мысленно x^2 за u , получаем табличный интеграл

$$\int x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Пример 54. Вычислить интеграл $\int x \cos x dx$.

Решение. Так как $\cos x dx = d \sin x$, то интеграл можно записать сразу в виде, удобном для применения формулы (1.34):

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Пример 55. Вычислить интеграл $\int (2x - 1) \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) dx$.

Решение. Замечая, что $d \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) dx$, получим

$$\begin{aligned} \int (2x - 1) \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) dx &= 2 \int (2x - 1) d \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) = \\ &= 2 \left[(2x - 1) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) - \int \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) d(2x - 1) \right] = \\ &= 2 \left[(2x - 1) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) - 2 \int \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) dx \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[(2x - 1) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) + 4 \int \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) d \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) \right] = \\
&= 2 \left[(2x - 1) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) + 4 \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2} \right) \right] + C.
\end{aligned}$$

Когда подынтегральное выражение имеет более громоздкий вид, удобно придерживаться в оформлении решения общей схемы (см. (1.36)).

Пример 56. Вычислить интеграл $\int (2x^2 - 3x - 1)e^{3x-2} dx$.

Решение. Не следует думать, что если мы раскроем скобки в подынтегральном выражении, то интеграл сведется к трем более простым. Напротив, это увеличит количество вычислений. Имеем

$$\begin{aligned}
\int (2x^2 - 3x - 1)e^{3x-2} dx &= \left[\begin{array}{l} u = 2x^2 - 3x - 1 \Rightarrow du = (4x - 3) dx \\ dv = e^{3x-2} dx \Rightarrow v = \int e^{3x-2} dx = \frac{1}{3}e^{3x-2} \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{3}(2x^2 - 3x - 1)e^{3x-2} - \frac{1}{3} \int e^{3x-2}(4x - 3) dx = \left[\begin{array}{l} u = 4x - 3 \Rightarrow du = 4 dx \\ dv = e^{3x-2} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x-2} \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{3}(2x^2 - 3x - 1)e^{3x-2} - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}(4x - 3)e^{3x-2} - \frac{4}{3} \int e^{3x-2} dx \right] = \\
&= \frac{1}{3} \left[(2x^2 - 3x - 1)e^{3x-2} - \frac{1}{3}(4x - 3)e^{3x-2} + \frac{4}{3 \cdot 3}e^{3x-2} \right] + C = \\
&= \frac{1}{27} [9(2x^2 - 3x - 1) - 3(4x - 3) + 4] e^{3x-2} + C = \frac{1}{27} (18x^2 - 39x + 4) e^{3x-2} + C.
\end{aligned}$$

Тип 2. Интегралы вида $\int P_n(x) \ln ax dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} ax dx$,
 $\int P_n(x) \operatorname{arctg} ax dx$, $\int P_n(x) \arcsin ax dx$, $\int P_n(x) \arccos ax dx$.

В этих интегралах за u следует принимать указанные в интегралах трансцендентные функции, а за dv — выражение $P_n(x) dx$. Интегралы с функциями $u = \ln ax$, $u = \operatorname{arctg} ax$ и $u = \operatorname{arctg} ax$ однократным применением формулы (1.34) приводятся к простейшим интегралам от дробно-рациональных функций, а с функциями $u = \arcsin ax$ и $u = \arccos ax$ — к иррациональным функциям.

Пример 57. Вычислить интеграл $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение.

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{dx}{x^2 + 1} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$$

В последнем интеграле выделим целую часть подынтегральной дроби:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctg x + C.$$

Окончательно,

$$\int x \arctg x dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x + C = \frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + C.$$

Пример 58. Вычислить интеграл $\int x^\alpha \ln \beta x dx$, $\alpha \neq -1, \beta > 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int x^\alpha \ln \beta x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln \beta x \Rightarrow du = \frac{\beta dx}{\beta x} = \frac{dx}{x}, \\ dv = x^\alpha dx \Rightarrow v = \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \ln \beta x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^{\alpha+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha+1} \left(x^{\alpha+1} \ln \beta x - \int x^\alpha dx \right) = \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \left(x^{\alpha+1} \ln \beta x - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) + C = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln \beta x - \frac{1}{\alpha+1} \right) + C. \end{aligned}$$

Тип 3. Интегралы вида $\int e^{ax} \sin \omega x dx$, $\int e^{ax} \cos \omega x dx$.

Эти интегралы принято называть циклическими. Двукратным интегрированием по частям они выражаются «сами через себя», т.е. относительно искомого интеграла возникает простое уравнение.

Пример 59. Вычислить интеграл $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Обозначая искомым интеграл I , получим

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x dx = \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \\ &= e^x \sin x + \int e^x d \cos x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int \cos x de^x = e^x (\sin x + \cos x) - \\ &- \int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) - I. \end{aligned}$$

Тогда $2I = e^x (\sin x + \cos x)$, откуда $I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$.

Реализуя метод, мы оба раза подводили под дифференциал тригонометрическую функцию. Проще подводить под дифференциал функцию e^x , причем это нужно делать оба раза. Вычислим этот интеграл еще раз.

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x \, dx = \int \cos x \, de^x = \cos x e^x - \int e^x d(\cos x) = e^x \cos x + \\ &+ \int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + \int \sin x \, de^x = e^x \cos x + \sin x e^x - \int e^x d(\sin x) = \\ &= e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x \, dx = e^x(\cos x + \sin x) - I, \text{ что совпадает с} \\ &\text{предыдущим вариантом решения.} \end{aligned}$$

Интегрирование по частям, в частности, сведение интеграла к циклическому, может оказаться полезным и эффективным приемом в самых неожиданных ситуациях.

Пример 60. Рассмотрим вновь интеграл из примера 49 и проинтегрируем его по частям один раз:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow du = -\frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right] = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

С последним интегралом поступим так:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= - \int \frac{-x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx + \\ &+ a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Обозначая искомый интеграл $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, получим уравнение

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a},$$

из которого следует равенство

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$$

и

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

совпадающее с ранее найденным в примере 49 результатом.

Разумеется, указанные три типа интегралов и последний пример не исчерпывают всех интегралов, вычисляемых с помощью метода интегрирования по частям. Умение правильно определять, когда и как следует применять метод интегрирования по частям, вырабатывается практикой.

В заключение пункта приведем еще один пример.

Пример 61. Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

Решение. Этот интеграл не принадлежит ни одному из упомянутых типов. Тем не менее,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sin^2 x} &= \int x d(-\operatorname{ctg} x) = -x \operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x dx = -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \\ &= -x \operatorname{ctg} x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется интеграл $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

Заметим, что при интегрировании по частям произвольная постоянная прибавляется к найденной первообразной один раз в окончательном результате.

Рекомендуется в процессе закрепления темы вычислить самостоятельно в первую очередь те интегралы, которые упомянуты в тексте, но не решены. Например, $\int \arcsin x dx$, $\int \arccos x dx$, $\int x \arcsin x dx$, $\int x^n \ln x dx$, $\int \frac{\ln x}{x^n} dx$, $\int e^x \sin x dx$, $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

2. Таблица основных интегралов

Прежде чем перейти к рассмотрению основных классов интегрируемых функций, напомним основные формулы интегрирования:

$$1) \int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1; \end{cases}$$

$$2) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

в частности, при $a = e$: $\int e^x dx = e^x + C$;

$$3) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 4) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$5) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad 6) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$7) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad 8) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C;$$

$$9) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$11) \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \quad 12) \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \quad 14) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$15) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C; \quad 16) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$17) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \quad 18) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

3. Интегрирование рациональных функций

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют *рациональные функции*.

Определение 3.1. Функция называется рациональной, если она представлена дробью $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно. Рациональная функция (рациональная дробь — по другой терминологии) называется *правильной*, если степень m многочлена $P_m(x)$ ниже степени n многочлена $Q_n(x)$, в противном случае дробь называется *неправильной*.

Если $m \geq n$, то, выполняя деление многочленов, получим

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = Z_{m-n}(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)},$$

где $Z_{m-n}(x)$ — неполное частное (целая часть) будет являться многочленом степени $(m - n)$, а остаток от деления $R(x)$ — многочленом степени не выше $(n - 1)$.

Интегрирование многочлена $Z_{m-n}(x)$ не представляет никаких затруднений, сводясь к группе интегралов от степенных функций с натуральным показателем степени, и, значит, весь вопрос заключается в интегрировании дроби $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$, степень числителя которой меньше степени знаменателя.

Дальнейшие действия зависят от корней многочлена $Q_n(x)$ и возможности разложить этот многочлен на элементарные множители.

Мы предполагали, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ имеют действительные коэффициенты. В курсе высшей алгебры доказывается, что каждый многочлен $Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ может быть представлен в виде произведения

$$Q_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad (3.1)$$

где a_n — старший коэффициент ($a_n \neq 0$), а x_1, x_2, \dots, x_n — корни уравнения $Q_n(x) = 0$, причем количество корней совпадает с показателем степени многочлена $Q_n(x)$. Отметим сразу, что среди корней x_1, x_2, \dots, x_n могут быть кратные, т.е. совпадающие, и, наконец, не все корни многочлена — обязательно действительные числа. Таким образом, вместо (3.1), мы получаем представление

$$Q_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\dots(x - x_s)^{k_s}, \quad (3.2)$$

где x_1, x_2, \dots, x_s — различные (несовпадающие друг с другом) корни многочлена $Q_n(x)$, k_i — кратность соответствующего корня x_i , причем

$$\sum_{i=1}^s k_i = n.$$

Без ограничения общности можно считать старший коэффициент $a_n = 1$ (этого всегда можно достигнуть делением числителя и знаменателя подынтегральной дроби $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ на этот коэффициент).

Если среди корней в представлении (3.2) встречаются *комплексные корни*, т.е. числа вида $\alpha \pm \beta i$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, то, как доказывается в курсе высшей алгебры, наличие корня $x_i = \alpha + \beta i$ кратности r влечет существование *сопряженного* с ним корня $\bar{x}_i = \alpha - \beta i$ той же кратности r . Другими словами, если в представлении (3.2) входит множитель $(x - x_i)^r$, то оно содержит также и множитель $(x - \bar{x}_i)^r$.

Перемножив эти два множителя, получим

$$(x - x_i)^r (x - \bar{x}_i)^r = \{[x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)]\}^r = \\ [x^2 - x(\alpha + \beta i) - x(\alpha - \beta i) + (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)]^r = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)^r,$$

где при вычислении учтено, что $i^2 = -1$.

Обозначим далее действительные числа $p = -\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, получим

$$(x - x_i)^r (x - \bar{x}_i)^r = (x^2 + 2px + q)^r,$$

причем дискриминант квадратного трехчлена $D_1 = p^2 - q = \alpha^2 - \alpha^2 - \beta^2 = -\beta^2 < 0$.

Таким образом, произведение множителей, соответствующих сопряженным комплексным корням, можно представить в виде квадратного трехчлена с действительными коэффициентами.

Обозначая далее действительные различные корни многочлена $Q_n(x)$ через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, можно записать разложение (3.2) над полем действительных чисел в виде

$$Q_n(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x^2 + 2p_1x + q_1)^{r_1} (x^2 + 2p_2x + q_2)^{r_2} \dots, \quad (3.3)$$

где $p_i^2 - q_i < 0$.

В курсе высшей алгебры доказывается следующий факт: если рациональная функция $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ является правильной дробью, т.е. $m < n$, а многочлен $Q_n(x)$ представлен в виде (3.3), то эту дробь можно единственным образом представить в виде суммы простейших дробей двух видов:

$$\frac{A_k}{(x - \alpha)^k}, \quad \frac{B_r x + C_r}{(x^2 + 2px + q)^r}, \quad (3.4)$$

где A_k, B_r, C_r — действительные постоянные, подлежащие определению, причем, каждому множителю $(x - \alpha)^k$ соответствует в разложении дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ сумма k простейших дробей первого вида

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k},$$

а каждому множителю $(x^2 + 2px + q)^r$ соответствует сумма r простейших дробей второго вида

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + 2px + q} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \dots + \frac{B_rx + C_r}{(x^2 + 2px + q)^r}.$$

Например, разложение рациональной дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{2x^5 - 3x^4 + x^2 - 5}{x^3(x-1)(x^2+4)^2(x^2+2x+5)} \quad (m=5, n=10)$$

следует искать в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C_1x + D_1}{x^2+4} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2+4)^2} + \frac{Ex + F}{x^2+2x+5}. \quad (3.5)$$

Чтобы определить числа $A_1, A_2, A_3, B, C_1, D_1, C_2, D_2, E$ и F , умножим обе части равенства (3.5) на $Q_n(x)$. Получим равенство, суть которого — тождество между многочленом $P_m(x)$ и многочленом, который получится в правой части при любых значениях x . А это возможно лишь в том случае, когда коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x , равны между собой.

Для определения неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, A_3, B, C_1, D_1, C_2, D_2, E$ и F составляется система линейных алгебраических уравнений (в данном примере их будет 10).

Изложенный метод отыскания разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов*.

3.1. Интегрирование простейших дробей

Рассмотрим интегралы от простейших дробей, указанных выше в (3.4).

1. Интеграл от простейшей дроби первого вида заменой переменных $x - \alpha = u$ сводится к табличному интегралу от степенной функции. В частности,

$$\triangleright \text{при } k = 1: \int \frac{A dx}{x - \alpha} = A \ln |x - \alpha| + C;$$

$$\triangleright \text{при } k \neq 1, (k > 1): \int \frac{A dx}{(x - \alpha)^k} = -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x - \alpha)^{k-1}} + C.$$

2. Интеграл от простейшей дроби второго вида в случае $r = 1, B_r = 0$ также легко сводится к табличному интегралу. Случай $B_r \neq 0$ рассмотрим на примере, а случай $r > 1$ заслуживает отдельного внимания и будет рассмотрен в следующем пункте.

Рассмотрим $\int \frac{dx}{x^2 + 2px + q}$ в общем виде, полагая $p, q \in \mathbb{R}$ и $p^2 - q < 0$.

Для его вычисления выделим полный квадрат в квадратном трехчлене

$$x^2 + 2px + q = x^2 + 2px + p^2 - p^2 + q = (x + p)^2 + (q - p^2).$$

Обозначим $a^2 = q - p^2$, так как величина $q - p^2 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+p)^2 + a^2} &= \int \frac{d(x+p)}{(x+p)^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{a} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C. \end{aligned}$$

Уже сейчас можно указать несколько типов простейших интегралов от рациональных функций:

$$\int \frac{P_m(x)}{x^n} dx, \quad \int \frac{P_m(x)}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{P_m(x)}{x^2 \pm a^2}, \quad \int \frac{P_m(x)}{ax^2 + bx + c}.$$

Первый из этих интегралов почленным делением многочлена $P_m(x)$ на x^n сразу сводится к группе табличных интегралов от степенной функции с целым показателем.

Второй интеграл заменой переменной $x-a = t$ сводится к предыдущему.

В третьем интеграле в случае $m \geq 2$ прежде следует выделить целую часть подынтегральной дроби путем деления числителя $P_m(x)$ на знаменатель $x^2 \pm a^2$. Остаток от деления будет многочленом степени не выше 1 и соответствующий интеграл легко сведется к табличным.

Пример 62. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 4} dx$.

Решение. Поделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4 \quad | \quad x^2 + 4 \\ \underline{2x^3 + 8x} \\ -3x^2 - 8x + 4 \\ \underline{-3x^2 - 12} \\ -8x + 16 \end{array}$$

Таким образом, дробь может быть представлена в виде

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 4} = 2x - 3 - \frac{8x - 16}{x^2 + 4}.$$

Здесь $2x - 3 = Z(x)$ — целая часть (неполное частное), $-8x + 16 = R(x)$ — остаток. Тогда, обозначая через I искомый интеграл, найдем

$$\begin{aligned} I &= 2 \int x dx - 3 \int dx - \int \frac{8x - 16}{x^2 + 4} dx = 2 \frac{x^2}{2} - 3x - 4 \int \frac{2x dx}{x^2 + 4} + 16 \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \\ &= x^2 - 3x - 4 \ln(x^2 + 4) + 8 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Знак модуля в выражении $\ln(x^2 + 4)$ опущен, так как $x^2 + 4 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Остановимся подробнее на четвертом интеграле, так как он выделяется как часто встречающийся тип интегралов с квадратным трехчленом в знаменателе.

Рассмотрим несколько частных случаев интегралов вида $\int \frac{P_n(x) dx}{ax^2 + bx + c}$.

Случай 1. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, ($n = 0$).

Значение этого интеграла существенно зависит от дискриминанта квадратного трехчлена. Случай $D < 0$ рассмотрен выше в общем виде.

Пример 63. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 17}$.

Решение. Выделяя полный квадрат в виде квадратного трехчлена

$$4x^2 + 4x + 17 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1^2 + 16 = (2x + 1)^2 + 16,$$

найдем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 17} &= \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 16} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x + 1)}{(2x + 1)^2 + 4^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{4} + C = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{4} + C. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом примере дискриминант квадратного трехчлена $D_1 = (b/2)^2 - ac = 2^2 - 4 \cdot 17 = 4 - 68 = -64 < 0$.

Этим же приемом легко вычисляются интегралы и в случае $D > 0$.

Пример 64. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 1}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, мы не стремимся вынести старший коэффициент квадратного трехчлена за скобки, а, напротив, для облегчения устного счета запишем интеграл так: $I = 2 \int \frac{dx}{4x^2 - 6x + 2}$.

Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене

$$4x^2 - 6x + 2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

найдем

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{dx}{(2x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} &= 8 \int \frac{dx}{(4x - 3)^2 - 1} = \frac{8}{4} \int \frac{d(4x - 3)}{(4x - 3)^2 - 1} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{4x - 3 - 1}{4x - 3 + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{4x - 4}{4x - 2} \right| + C = \ln \left| \frac{2x - 2}{2x - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Более того, так как

$$\ln \left| \frac{2x-2}{2x-1} \right| = \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \cdot 2 \right| = \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + \ln 2,$$

то, обозначая новую произвольную константу $C_1 = C + \ln 2$, результату вычислений можно придать вид $I = \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + C_1$.

К этому же результату мы придем, если воспользуемся изложенной выше теорией разложения подынтегрального выражения на простейшие дроби.

Действительно, так как дискриминант квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ и его корни соответственно $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1; \frac{1}{2}$, то

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1) \left(x - \frac{1}{2} \right) = (x-1)(2x-1).$$

А это значит, что разложение подынтегральной дроби на простейшие будет иметь вид:

$$\frac{1}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{1}{(x-1)(2x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1}.$$

Для определения коэффициентов A и B получим тождество

$$A(2x-1) + B(x-1) = 1. \quad (3.6)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (3.6), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A - B = 1, \end{cases}$$

откуда легко определяются значения $A = 1$. $B = -2$.

Тогда

$$\begin{aligned} I &= A \int \frac{dx}{x-1} + B \int \frac{dx}{2x-1} = \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{2x-1} = \\ &= \int \frac{d(x-1)}{x-1} - \int \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \ln |x-1| - \ln |2x-1| + C = \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

Замечание. Помимо рассмотренного выше общего метода нахождения неопределенных коэффициентов в разложении подынтегральной дроби на простейшие в случае, когда знаменатель имеет только простые (некратные)

действительные корни, весьма эффективен другой способ их нахождения. Он опирается на то обстоятельство, что в получающиеся для определения неопределенных коэффициентов тождество можно подставлять любые (подходящие) значения x . Поясним это на предыдущем примере.

Подставляя в тождество (3.6) вместо x значение $x = 1$, сразу находим $A = 1$. Затем, подставляя значение $x = \frac{1}{2}$, найдем $B = -2$. Этим приемом мы будем пользоваться неоднократно в более сложных примерах.

И, наконец, в случае $D = 0$ мы имеем дело с практически табличным интегралом.

Пример 65. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1}$.

Решение. Замечая, что $D_1 = (b/2)^2 - ac = 3^2 - 9 = 0$, запишем

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1} = \int \frac{dx}{(3x - 1)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x - 1)}{(3x - 1)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x - 1} + C.$$

Случай 2. Интегралы вида $\int \frac{(a_1x + b_1) dx}{ax^2 + bx + c}$, ($n = 1$).

Результат вычисления подобных интегралов зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена. Рассмотрим несколько примеров.

а) Случай $D = b^2 - 4ac < 0$.

Пример 66. Вычислить интеграл $\int \frac{(2x + 3)dx}{4x^2 - 4x + 5}$.

Решение. Выделим в числителе подынтегрального выражения дифференциал квадратного трехчлена $d(4x^2 - 4x + 5) = (8x - 4)dx$. Для этого умножим и разделим подынтегральную дробь на 4. Получим

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x + 3)dx}{4x^2 - 4x + 5} &= \frac{1}{4} \int \frac{(8x + 12)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{4} \int \frac{(8x - 4 + 16)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(8x - 4)dx}{4x^2 - 4x + 5} + \frac{16}{4} \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5}. \end{aligned}$$

Первый интеграл сведен к табличному:

$$\int \frac{(8x - 4)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int \frac{d(4x^2 - 4x + 5)}{4x^2 - 4x + 5} = \ln(4x^2 - 4x + 5) + C.$$

Второй интеграл относится к случаю 1, рассмотренному выше.

Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене

$$4x^2 - 4x + 5 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 + 4 = (2x - 1)^2 + 4,$$

найдем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} &= \int \frac{dx}{(2x - 1)^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x - 1)}{(2x - 1)^2 + 2^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{2} + C. \end{aligned}$$

Окончательно, искомым интеграл

$$\int \frac{(2x + 3)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{4} \ln(4x^2 - 4x + 5) + \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{2} + C.$$

Заметим, что можно отказаться от выделения дифференциала квадратного трехчлена в числителе подынтегрального выражения, что, возможно, упрощает процесс вычислений.

Пример 67. Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{3x^2 + x + 1}$.

Решение. Сразу начнем с выделения полного квадрата в квадратном трехчлене, но для облегчения устного счета полезно умножить и разделить подынтегральную дробь на 12.

Обозначая через I искомым интеграл, имеем

$$I = 12 \int \frac{x dx}{36x^2 + 12x + 12}.$$

Запишем $36x^2 + 12x + 12 = (6x)^2 + 2 \cdot 6x \cdot 1 + 1^2 + 11 = (6x + 1)^2 + 11$.

В полученном интеграле $I = 12 \int \frac{x dx}{(6x + 1)^2 + 11}$ сделаем замену переменной по формуле $6x + 1 = t$, откуда $x = \frac{t - 1}{6}$, а $dx = \frac{1}{6} dt$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= \frac{12}{36} \int \frac{(t - 1) dt}{t^2 + 11} = \frac{1}{3} \left(\int \frac{t dt}{t^2 + 11} - \int \frac{dt}{t^2 + 11} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 11)}{t^2 + 11} - \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{11})^2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln(t^2 + 11) - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{11}} \right) + C, \quad (t^2 + 11 > 0). \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$$I = \frac{1}{6} \ln[(6x + 1)^2 + 11] - \frac{1}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{6x + 1}{\sqrt{11}} + C = \frac{1}{6} \ln(36x^2 + 12x + 12) -$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{6x+1}{\sqrt{11}} + C &= \frac{1}{6} \ln[12(3x^2+x+1)] - \frac{1}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{6x+1}{\sqrt{11}} + C = \\
&= \frac{1}{6} \ln(3x^2+x+1) - \frac{1}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{6x+1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{6} \ln 12 + C.
\end{aligned}$$

Принимая постоянную величину $\frac{1}{6} \ln 12 + C$ за новую константу C_1 , находим

$$I = \frac{1}{6} \ln(3x^2+x+1) - \frac{1}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{6x+1}{\sqrt{11}} + C_1.$$

Читатель вправе выбрать для себя наиболее удобный способ вычисления подобных интегралов.

б) В случае $D = b^2 - 4ac > 0$ можно использовать тот же алгоритм вычислений, что и в случае $D < 0$. Однако получающаяся при таком способе сумма логарифмов еще не будет являться окончательным ответом и подлежит упрощению. Быстрее ведет к цели идея разложения подынтегральной дроби методом неопределенных коэффициентов.

Пример 68. Вычислить интеграл $\int \frac{x dx}{2x^2 - 3x + 1}$.

Решение. Замечая, что $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ и корни квадратного трехчлена $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1; -\frac{1}{2}$, представим

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1).$$

Тогда возможно разложение

$$\frac{x}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{x}{(x-1)(2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+1},$$

которое приводит к тождеству

$$A(2x+1) + B(x-1) = x.$$

Придавая x поочередно значения $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$, найдем $3A = 1$; $-\frac{3}{2}B = -\frac{1}{2}$, откуда $A = \frac{1}{3}$; $B = \frac{1}{3}$.

Окончательно,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x dx}{2x^2 - 3x + 1} &= A \int \frac{dx}{x-1} + B \int \frac{dx}{2x+1} = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{3} \left(\ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|2x+1| \right) + C. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Ответу можно придать иной вид:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{2x^2 - 3x + 1} &= \frac{1}{6} (2 \ln |x - 1| + \ln |2x + 1|) + C = \\ &= \frac{1}{6} (\ln(x - 1)^2 + \ln |2x + 1|) + C = \frac{1}{6} \ln[(x - 1)^2 |2x + 1|] + C. \end{aligned}$$

Мы рекомендуем вычислить этот интеграл также способом, изложенным в пункте а) и довести ответ до окончательного вида (3.7).

в) Если $D = b^2 - 4ac = 0$, то любой интеграл случая 2 представим в виде $I = \int \frac{a_1x + b_1}{a(x - \alpha)^2} dx$, где α — двукратный корень квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Заменой переменной $x - \alpha = t$, $dx = dt$ этот интеграл сводится к интегралу $\int \frac{a_1(t + \alpha) + b_1}{at^2} dt$. Почленным делением интегральной дроби последний интеграл сводится к табличным:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int \frac{a_1t + (a_1\alpha + b_1)}{t^2} dt &= \frac{1}{a} \left(a_1 \int \frac{dt}{t} + (a_1\alpha + b_1) \int \frac{dt}{t^2} \right) = \\ &= \frac{1}{a} \left(a_1 \ln |t| - (a_1\alpha + b_1) \frac{1}{t} \right) + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x , получим

$$I = \frac{1}{a} \left(a_1 \ln |x - \alpha| - (a_1\alpha + b_1) \frac{1}{x - \alpha} \right) + C.$$

Случай 3. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x) dx}{ax^2 + bx + c}$, ($n \geq 2$).

Вычисление подобных интегралов не несет в себе новых проблем. После выделения целой части подынтегральной дроби задача сводится к случаям 1 и 2.

Рекомендуем самостоятельно вычислить интеграл $\int \frac{(6x^3 + x^2) dx}{(2x - 1)(3x - 1)}$, поделив вначале числитель подынтегральной дроби на знаменатель $(2x - 1)(3x - 1) = 6x^2 - 5x + 1$.

При интегрировании дробной части $\frac{R(x)}{(2x - 1)(3x - 1)}$ подынтегральной дроби рекомендуем воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Ответ:

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \ln |2x - 1| - \frac{1}{3} \ln |3x - 1| + C.$$

3.2. Интегрирование рациональных функций в общем случае

Перед началом знакомства с этим пунктом рекомендуется еще раз внимательно прочитать начало третьего раздела.

Будем считать, что подынтегральная функция представлена правильной рациональной дробью $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, или речь идет об интегрировании дробной части $\frac{R(x)}{Q_n(x)}$, остающейся при делении многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ при $m \geq n$.

Будем также считать, что корни многочлена $Q_n(x)$ легко определяются, либо он уже представлен в виде произведения элементарных линейных и квадратичных множителей.

Заметим, что в самом общем случае линейные множители могут иметь вид $ax + b$, а квадратичные: $ax^2 + bx + c$.

Рассмотрим следующие четыре случая.

Случай 1. Знаменатель $Q_n(x)$ имеет только действительные простые корни: $Q_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$.

Пример 69. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx$.

Решение. Подынтегральная дробь допускает разложение

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}.$$

Неопределенные коэффициенты находим из тождества

$$A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2) = x^2 + 2x + 6.$$

Подставляя в левую и правую части этого тождества значения x , совпадающие с корнями многочлена $Q_n(x)$, легко находим значения A, B и C :

$$\begin{array}{l|l} x=1 & A(-1)(-3) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 6, \quad 3A = 9, \quad A = 3; \\ x=2 & B \cdot 1 \cdot (-2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 6, \quad -2B = 14, \quad B = -7; \\ x=4 & C \cdot 3 \cdot 2 = 4^2 + 2 \cdot 4 + 6, \quad 6C = 30, \quad C = 5. \end{array}$$

Обозначая искомый интеграл через I , находим

$$I = 3 \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x-2} + 5 \int \frac{dx}{x-4} = 3 \ln|x-1| - 7 \ln|x-2| + 5 \ln|x-4| + C.$$

Ответу можно придать следующий вид:

$$I = \ln|x-1|^3 - \ln|x-2|^7 + \ln|x-4|^5 + C = \ln \left| \frac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7} \right| + C.$$

Случай 2. Знаменатель $Q_n(x)$ имеет только действительные корни, причем некоторые из них кратные.

Пример 70. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} dx$.

Решение. Прежде всего, обратим внимание на тот факт, что дробь, стоящая под интегралом — правильная, так как степень многочлена $Q_n(x) = (x-2)^3(x-5)$ равна 4, а степень многочлена $P_n(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 7$ равна 3.

Дробь допускает разложение

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B}{x-5}.$$

Приводя правую часть равенства к общему знаменателю и освобождаясь от него, получим тождество

$$A_1(x-2)^2(x-5) + A_2(x-2)(x-5) + A_3(x-5) + B(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 9x + 7.$$

Для нахождения коэффициентов A_1, A_2, A_3 и B продемонстрируем разные приемы.

Вначале, подставляя в тождество значения x , совпадающие с корнями многочлена $Q_n(x)$, легко находим значения A_3 и B :

$$\begin{array}{l|l} x=2 & -3A_3 = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 7, \quad -3A_3 = 9, \quad A_3 = -3; \\ x=5 & 3^3B = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 7, \quad 27B = 27, \quad B = 1. \end{array}$$

Для нахождения оставшихся двух неопределенных коэффициентов можно подставить в тождество любые значения x . Например,

$$\begin{array}{l|l} x=0 & -20A_1 + 10A_2 - 5A_3 - 8B = 7; \\ x=1 & -4A_1 + 4A_2 - 4A_3 - B = 11. \end{array}$$

В полученной системе двух уравнений используем ранее найденные значения $A_3 = -3, B = 1$. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} -20A_1 + 10A_2 = 0, \\ -4A_1 + 4A_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -2A_1 + A_2 = 0, \\ -A_1 + A_2 = 0. \end{cases}$

Это однородная система уравнений, главный определитель которой

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Следовательно, она имеет единственное тривиальное решение $A_1 = 0, A_2 = 0$. Таким образом,

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} = -\frac{3}{(x-2)^3} + \frac{1}{x-5}.$$

В начале третьего раздела был изложен общий способ нахождения неопределенных коэффициентов. Весьма удобен комбинированный способ нахождения. Суть его состоит в следующем.

Используя действительные различные корни многочлена $Q_n(x)$ в основном тождестве для определения коэффициентов, находим некоторые из них. Затем, в соответствии с общим способом, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x и получаем систему алгебраических уравнений, в которой в качестве неизвестных фигурируют все неопределенные коэффициенты. Эта система уравнений упрощается после подстановки в нее значений ранее найденных коэффициентов.

Перепишем основное тождество, перемножая двучлены в следующем виде:

$$A_1(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) + A_2(x^2 - 7x + 10) + A_3(x - 5) + B(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = x^3 - 6x^2 + 9x + 7.$$

Приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A_1 + B = 1, \\ x^2 & -9A_1 + A_2 - 6B = -6, \\ x^1 & 24A_1 - 7A_2 + A_3 + 12B = 9, \\ x^0 & -20A_1 + 10A_2 - 5A_3 - 8B = 7. \end{array}$$

Решая эту систему уравнений (например, методом Гаусса), можно определить все искомые коэффициенты. Но, значения $A_3 = -3$ и $B = 1$ уже найдены. Используем их в любых двух (самых простых) уравнениях системы. Тогда из первого уравнения системы находим

$$A_1 = 1 - B = 1 - 1 = 0,$$

а из второго имеем

$$A_2 = -6 + 9A_1 + 6B = -6 + 9 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 0.$$

Заметим, что остальные уравнения этой системы могут быть использованы для проверки найденных значений неизвестных A_1, A_2, A_3 и B , при подстановке которых эти уравнения должны обращаться в числовые тождества.

Обозначая искомый интеграл через I , окончательно находим

$$I = -3 \int \frac{dx}{(x-2)^3} + \int \frac{dx}{x-5} = \frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C.$$

Случай 3. Знаменатель имеет простые комплексные корни, то есть разложение знаменателя $Q_n(x)$ содержит неповторяющиеся квадратичные множители с отрицательными дискриминантами.

Пример 71. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 2)}$.

Решение. Прежде замечаем, что

$$Q_n(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 2) = (x + 1)^2(x^2 + 2x + 2),$$

где только квадратный трехчлен $x^2 + 2x + 2$ не имеет действительных корней.

Разложение подынтегральной дроби на простейшие будем следующим:

$$\frac{1}{(x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{(x + 1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2}.$$

Приводя правую часть равенства к общему знаменателю и приравнявая числители, получим

$$A_1(x + 1)(x^2 + 2x + 2) + A_2(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x + 1)^2 = 1.$$

Подставляя в это тождество значение $x = -1$, сразу находим $A_2 = 1$.

Записывая тождество в виде

$$A_1(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) + A_2(x^2 + 2x + 2) + B(x^3 + 2x^2 + x) + C(x^2 + 2x + 1) = 1$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A_1 + B = 0, \\ x^2 & 3A_1 + A_2 + 2B + C = 0, \\ x^1 & 4A_1 + 2A_2 + B + 2C = 0, \\ x^0 & 2A_1 + 2A_2 + C = 1. \end{array}$$

Используем ранее найденное значение $A_2 = 1$. Тогда

$$\begin{array}{l} A_1 = -B, \\ 3A_1 + 2B + C = -1, \\ 4A_1 + B + 2C = -2, \\ 2A_1 + C = -1, \end{array}$$

откуда находим: $A_1 = 0, B = 0, C = -1$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx &= \int \frac{dx}{(x + 1)^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \\ &= -\frac{1}{x + 1} - \int \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} = C - \frac{1}{x + 1} - \operatorname{arctg}(x + 1). \end{aligned}$$

Случай 4. Знаменатель $Q_n(x)$ имеет комплексные кратные корни, т.е. его разложение содержит повторяющиеся квадратичные множители с отрицательными дискриминантами.

Пример 72. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx$.

Решение. В данном случае подынтегральная дробь допускает разложение

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Неопределенные коэффициенты A, B, C, D, E следует найти из тождества

$$A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x = x^2 + x - 1.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A + B = 0, \\ x^3 & C = 0, \\ x^2 & 2A + B + D = 1, \\ x^1 & C + E = 1, \\ x^0 & A = -1. \end{array}$$

Решая эту систему, находим $A = -1, B = 1, C = 0, D = 2, E = 1$.

Значит,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx &= - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x dx}{x^2 + 1} + \int \frac{2x + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= - \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} + \int \frac{2x dx}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= - \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Оставшийся интеграл обозначим через $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$.

Для его вычисления применим следующий прием:

$$I_2 = \int \frac{(x^2 + 1) - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Первый интеграл — табличный. Во втором интеграле выполним интегрирование по частям:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2} = \int \frac{x \cdot x dx}{(x^2 + 1)^2} = \left[\begin{array}{l} u = x, \\ dv = \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}, \quad v = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

Тогда

$$I_2 = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Окончательно исходный интеграл равен

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{x}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{x - 2}{2(x^2 + 1)} + \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Прием, которым был вычислен I_2 , применим и для отыскания интеграла

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^k} \tag{3.8}$$

при произвольном $k > 1$.

Интегрируя

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^k} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{k-1}} - \frac{x^2}{(x^2 + 1)^k},$$

нетрудно получить рекуррентную формулу для нахождения I_k , зная значение I_{k-1} :

$$I_k = \frac{x}{2(k-1)(x^2 + 1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1},$$

причем $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$.

В завершение пункта приведем необходимые рекомендации относительно интегрирования простейшей дроби второго вида $\frac{Ax + B}{(x^2 + 2px + q)^r}$ в случае $r > 1$.

Вначале в интеграле $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + 2px + q)^r} dx$ выделяем дифференциал квадратного трехчлена $d(x^2 + 2px + q) = 2(x + p) dx$. В общем виде это делается следующим образом:

$$Ax + B = A \left(x + \frac{B}{A} \right) = \frac{A}{2} \left(2x + \frac{2B}{A} \right) = \frac{A}{2} \left(2x + 2p - 2p + \frac{2B}{A} \right) =$$

$$= \frac{A}{2} (2x + 2p) + \frac{A}{2} \left(\frac{2B}{A} - 2p \right) = \frac{A}{2} (2x + 2p) + (B - Ap).$$

Это значит, что дифференциал $(Ax + B)dx = \frac{A}{2} (2x + 2p) dx + (B - Ap) dx$, и, обозначая искомый интеграл через I , получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{A}{2} \int \frac{(2x + 2p) dx}{(x^2 + 2px + q)^r} + (B - Ap) \int \frac{dx}{(x^2 + 2px + q)^r} = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2 + 2px + q)}{(x^2 + 2px + q)^r} + (B - Ap) \int \frac{dx}{(x^2 + 2px + q)^r}. \end{aligned}$$

Первый интеграл дает значение $\frac{-A}{2(r-1)(x^2 + 2px + q)^{r-1}}$, а второй, путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и введения новой переменной $t = x + p$, сводится к интегралу $\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r}$, где $a^2 = q - p^2$ ($q - p^2 > 0$). Последний интеграл, заменой переменных $t = az$, в свою очередь, сводится к интегралу (3.8).

4. Интегрирование некоторых типов иррациональных функций

Некоторые примеры интегралов, в которых интегрируемые функции содержат x под знаком радикала, уже встречались нам в пунктах 1.2 и 1.3 данного пособия. Основная идея, лежащая в основе вычисления подобных интегралов, продемонстрированная на примерах в пункте 1.3, заключалась в подборе такой замены переменной интегрирования x , что интегрируемая функция становится рациональной. Такие подстановки принято называть *рационализующими подстановками*.

4.1. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Рассмотрим три случая в зависимости от показателя степени n многочлена $P_n(x)$.

Случай 1. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, ($n = 0$).

Интегралы такого вида путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене приводятся к формулам 8) и 10) таблицы основных интегралов (см. раздел 2).

Заметим, что знак дискриминанта квадратного трехчлена и наличие или отсутствие действительных корней у квадратного трехчлена в этих примерах никак не отражается на процедуре их вычисления.

Пример 73. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5}}$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$4x^2 - 4x + 5 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 1 + 1 + 4 = (2x - 1)^2 + 4.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x - 1)}{\sqrt{(2x - 1)^2 + 4}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| 2x - 1 + \sqrt{(2x - 1)^2 + 4} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x + 5} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 74. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$.

Решение. Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене в этом случае происходит следующим образом:

$$8 + 6x - 9x^2 = -(9x^2 - 6x - 8) = -[(3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 1 + 1 - 9] =$$

$$= -[(3x - 1)^2 - 9] = 9 - (3x - 1)^2 = 3^3 - (3x - 1)^2.$$

Тогда,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x - 1)}{\sqrt{3^2 - (3x - 1)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x - 1}{3} + C.$$

Случай 2. Интегралы вида $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

При вычислении таких интегралов необходимо в числителе подынтегральной дроби выделить дифференциал квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня и разложить интеграл на сумму двух интегралов. Первый из них фактически является табличным интегралом $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$, а второй — относится к случаю 1.

Начало процедуры несложно продемонстрировать в общем виде.

Так как $d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b) dx$, то

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx &= A \int \frac{x + \frac{B}{A}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + \frac{2aB}{A}}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b + \frac{2aB}{A} - b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{d(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \\ &+ \frac{A}{2a} \left(\frac{2aB}{A} - b \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \\ &+ \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 75. Вычислить интеграл $\int \frac{(2 - 3x) dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}}$.

Решение. Вычислим дифференциал $d(4x^2 + 9x + 1) = (8x + 9) dx$.

Тогда, обозначая искомый интеграл через I , получим

$$\begin{aligned} I &= -3 \int \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right) dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} = -\frac{3}{8} \int \frac{\left(8x - \frac{16}{3}\right) dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} = \\ &= -\frac{3}{8} \int \frac{(8x + 9) - 9 - \frac{16}{3}}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} dx = -\frac{3}{8} \int \frac{d(4x^2 + 9x + 1)}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} + \\ &+ \frac{43}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} = -\frac{3}{4} \sqrt{4x^2 + 9x + 1} + \frac{43}{8} I_1, \end{aligned}$$

где $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}}$.

Далее, как в и случае 1, имеем

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9x + 1 &= \left[(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot \frac{9}{4} + \frac{81}{16} \right] - \frac{81}{16} + 1 = \\ &= \left(2x + \frac{9}{4} \right)^2 - \frac{65}{16} = \frac{1}{16} [(8x + 9)^2 - 65]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= 4 \int \frac{dx}{\sqrt{(8x + 9)^2 - 65}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(8x + 9)}{\sqrt{(8x + 9)^2 - 65}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln |8x + 9 + \sqrt{(8x + 9)^2 - 65}| + C = \frac{1}{2} \ln |8x + 9 + 4\sqrt{4x^2 + 9x + 1}| + C. \end{aligned}$$

Окончательно, находим

$$I = \frac{43}{16} \ln |8x + 9 + 4\sqrt{4x^2 + 9x + 1}| - \frac{3}{4} \sqrt{4x^2 + 9x + 1} + C.$$

Пример 76. Вычислить интеграл $\int \frac{(2x - 1) dx}{\sqrt{3x(2 - 3x)}}$.

Решение. Обозначая искомый интеграл через I , запишем его в виде:

$$I = \int \frac{(2x - 1) dx}{\sqrt{6x - 9x^2}}.$$

Найдем дифференциал $d(6x - 9x^2) = (6 - 18x) dx$. Тогда

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{9} \int \frac{(9 - 18x) dx}{\sqrt{6x - 9x^2}} = -\frac{1}{9} \int \frac{(6 - 18x) + 3}{\sqrt{6x - 9x^2}} dx = \\ &= -\frac{1}{9} \int \frac{(6 - 18x) dx}{\sqrt{6x - 9x^2}} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{6x - 9x^2}} = \\ &= -\frac{1}{9} \int \frac{d(6x - 9x^2)}{\sqrt{6x - 9x^2}} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{6x - 9x^2}} = -\frac{2}{9} \sqrt{6x - 9x^2} - \frac{1}{3} I_1, \end{aligned}$$

где $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{6x - 9x^2}}$.

Далее, $6x - 9x^2 = -(9x^2 - 6x) = -[(3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1 - 1] =$
 $= -[(3x - 1)^2 - 1] = 1 - (3x - 1)^2.$

Тогда

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (3x - 1)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x - 1)}{\sqrt{1 - (3x - 1)^2}} = \frac{1}{3} \arcsin(3x - 1) + C.$$

Окончательно, находим

$$I = C - \frac{2}{9} \sqrt{3x(2 - 3x)} - \frac{1}{9} \arcsin(3x - 1).$$

Случай 3. К этому случаю относятся все интегралы вида $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

при $n \geq 2$.

Они вычисляются с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где Q_{n-1} — многочлен степени $(n - 1)$ с неопределенными коэффициентами, $\lambda \in \mathbb{R}$ — число.

Дифференцируя указанное тождество и приводя результат к общему знаменателю, получим равенство двух многочленов, из которого можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ .

Пример 77. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$.

Решение. Здесь $n = 3$, поэтому соответствующее тождество имеет вид

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (b_0x^2 + b_1x + b_2) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Дифференцируя обе его части, получаем

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= (2b_0x + b_1) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \\ &+ (b_0x^2 + b_1x + b_2) \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}. \end{aligned}$$

Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получим

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 &= 3b_0x^3 + (5b_0 + 2b_1)x^2 + \\ &+ (4b_0 + 3b_1 + b_2)x + (2b_1 + b_2 + \lambda). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, имеем

$$\begin{cases} 3b_0 = 1; \\ 5b_0 + 2b_1 = 2; \\ 4b_0 + 3b_1 + b_2 = 3; \\ 2b_1 + b_2 + \lambda = 4. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем: $b_0 = 1/3$, $b_1 = 1/6$, $b_2 = 7/6$, $\lambda = 5/2$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6} \right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \right| + C.$$

4.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$).

Подстановкой $x - \alpha = \frac{1}{t}$ эти интегралы сводятся к интегралам, рассмотренным в пункте 4.1.

Действительно, тогда $x = \frac{1}{t} + \alpha = \frac{1 + \alpha t}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, а квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ преобразуется в выражение

$$\frac{1}{t^2} [(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a].$$

Искомый интеграл будет иметь вид

$$I = - \int \frac{t^{k-1} dt}{\sqrt{At^2 + Bt + C}},$$

где $A = a\alpha^2 + b\alpha + c$, $B = 2a\alpha + b$, $C = a$. В частности, при $k = 1$ получаем интеграл из пункта 4.1 в случае 1.

Пример 78. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решение. Замена $x - 1 = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$ приводит интеграл к виду

$$I = - \int \frac{dt}{\sqrt{3t^2 + 3t + 1}}.$$

При выделении полного квадрата удобно поступить так:

$$\begin{aligned} 3t^2 + 3t + 1 &= 3 \left(t^2 + t + \frac{1}{3} \right) = 3 \left(t^2 + 2t \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= 3 \left[\left(t + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \right] = \frac{3}{4} \left[(2t + 1)^2 + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{4} \left[3(2t + 1)^2 + 1 \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$I = -2 \int \frac{dt}{\sqrt{3(2t+1)^2 + 1}} = -\frac{2}{2\sqrt{3}} \int \frac{d[\sqrt{3}(2t+1)]}{\sqrt{[\sqrt{3}(2t+1)]^2 + 1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3}(2t+1) + \sqrt{3(2t+1)^2 + 1}| + C.$$

Возвращаясь к переменной x по формуле $t = \frac{1}{x-1}$, после несложных преобразований, получим:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}(x+1) + 2\sqrt{x^2+x+1}}{x-1} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{3}(x+1) + 2\sqrt{x^2+x+1}} \right| + C.$$

4.3. Интегралы вида $\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots \right) dx$

Рассмотрим некоторые частные случаи интегралов этого вида.

Случай 1. $\int R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \dots) dx,$
 $(m_1 = m_2 = \dots = 1, a = d = 1, c = b = 0).$

Случай 2. $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots) dx,$
 $(m_k \geq 1, a = d = 1, c = b = 0).$

Случай 3. $\int R(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \dots) dx,$
 $(m_k \geq 1, c = 0, d = 1).$

Случай 4. Является общим и вынесен в заголовок.

Выбор рационализирующей подстановки во всех случаях очевиден.

В случаях 1 и 2 подстановка $x = t^n$, где n — наименьшее общее кратное всех показателей степени радикалов, сразу приводит к интегралу от рациональной функции. Простейшие примеры интегралов такого типа уже встречались в пункте 1.3.

Пример 79. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x}}.$

Решение. Здесь $n_1 = 4, n_2 = 2$, поэтому $n = 4$.

Подстановка $x = t^4, dx = 4t^3 dt$ приводит искомый интеграл к виду

$$I = \int \frac{4t^3 dt}{3t^3 + 2t^2} = 4 \int \frac{t^3 dt}{t^2(3t + 2)} = 4 \int \frac{t dt}{3t + 2}.$$

Это простейший интеграл от рациональной функции.

Выделяя целую часть подынтегральной дроби, находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3} \int \frac{(3t + 2) - 2}{3t + 2} dt = \frac{4}{3} \int \left(1 - \frac{2}{3t + 2}\right) dt = \frac{4}{3} \left(\int dt - 2 \int \frac{dt}{3t + 2}\right) = \\ &= \frac{4}{3} \left(t - \frac{2}{3} \int \frac{d(3t + 2)}{3t + 2}\right) = \frac{4}{3} \left(t - \frac{2}{3} \ln |3t + 2|\right) + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной x по формуле $t = \sqrt[4]{x}$, окончательно получим

$$I = \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3} \ln |3\sqrt[4]{x} + 2|\right) + C.$$

В случае 3 той же цели мы достигаем подстановкой $ax + b = t^n$, где n — наименьшее общее кратное n_1, n_2, \dots .

Пример 80. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2} - \sqrt{2x + 1}}$.

Решение. Здесь $n_1 = 3, n_2 = 2$, поэтому $n = 6$. Применим подстановку $2x + 1 = t^6$; тогда $x = (t^6 - 1)/2, dx = 3t^5 dt$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t - 1} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t - 1} dt = \\ &= 3 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t - 1}\right) dt = \frac{3}{2} t^2 + 3t + 3 \ln |t - 1| + C. \end{aligned}$$

Возвратимся к старой переменной. Так как $t = (2x + 1)^{1/6}$, то

$$I = \frac{3}{2} (2x + 1)^{1/3} + 3(2x + 1)^{1/6} + 3 \ln |\sqrt[6]{2x + 1} - 1| + C.$$

Пример 81. Вычислить интеграл $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Решение. Применим подстановку $\frac{1-x}{1+x} = t^2$, откуда выражаем $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Найдем дифференциал $dx = -\frac{4t dt}{(1+t^2)^2}$.

Обозначая искомый интеграл через I , получим

$$I = -4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)(1-t^2)} = 2 \int \frac{2t^2 dt}{(t^2+1)(t^2-1)}.$$

С целью разложения подынтегральной дроби на простейшие, заметим, что

$$\frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{(t^2+1) + (t^2-1)}{(t^2+1)(t^2-1)} = \frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{t^2+1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I &= 2 \int \frac{dt}{t^2-1} + 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + 2 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае 4 рационализирующая подстановка имеет вид $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, где n — наименьшее общее кратное n_1, n_2, \dots .

5. Интегрирование тригонометрических функций

5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Интегралы указанного вида, где R — рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных степенных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}(x/2) = t$. В результате этой подстановки имеем

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$
$$x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Рассмотрим некоторые типы интегралов на примерах.

Тип 1. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$.

Пример 82. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$.

Решение. Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применим подстановку $\operatorname{tg}(x/2) = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$. Подставляя данные выражения в интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}(x/2) = t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной, находим

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2) + 2} + C.$$

Следует отметить, что универсальная подстановка $\operatorname{tg}(x/2) = t$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении

$\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2 .

Пример 83. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1 + \sin x}$.

Решение. Поступая как в предыдущем примере, получим

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = 2 \int \frac{d(1+t)}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = C - \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Заметим, что этот интеграл можно вычислить проще следующим искусственным приемом.

Умножим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $1 - \sin x$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \sin x)dx}{1 - \sin^2 x} &= \int \frac{(1 - \sin x)dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + C. \end{aligned}$$

Приведенный пример показывает, что иногда можно обойтись знанием формул тригонометрии. Разные ответы, в действительности, совпадают. Убедитесь в этом самостоятельно.

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ может быть упрощено.

1. Если $R(u, v)$ — нечетная функция относительно первого аргумента u , то есть если выполняется условие $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализуется подстановкой $\cos x = t$. Отметим, что в этом случае рассматриваемый интеграл всегда может быть записан в виде

$$\int R^*(\sin^2 x, \cos x) \sin x dx \text{ или } \int R^{**}(\cos x) d(\cos x).$$

2. Если $R(u, v)$ — нечетная функция относительно второго аргумента v , то есть если выполняется условие $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализуется подстановкой $\sin x = t$. Отметим, что в рассматриваемом случае данный интеграл всегда может быть записан в виде

$$\int R^*(\sin x, \cos^2 x) \cos x dx \text{ или } \int R^{**}(\sin x) d(\sin x).$$

3. Если $R(u, v)$ — четная функция по обоим аргументам, то есть если выполняется условие $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализуется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$, при этом следует учесть, что

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2 + 1},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Пример 84. Вычислить интеграл $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция нечетна относительно синуса, то полагаем $\cos x = t$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx &= \left[\begin{array}{l} \cos x = t, \quad dt = -\sin x dx; \\ \sin^2 x = 1 - t^2, \quad \cos 2x = 2t^2 - 1 \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{(2 - t^2)(-dt)}{2t^2 - 1} = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2 - 1} = \\ &= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t\sqrt{2} - 1}{t\sqrt{2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C.$$

Пример 85. Вычислить интеграл $\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx$.

Решение. Здесь подынтегральная функция является нечетной относительно косинуса, поэтому применяем подстановку $\sin x = t$. Тогда $\cos^2 x = 1 - t^2$, $\cos x dx = dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x) dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} &= \int \frac{\cos^2 x (1 + \cos^2 x) \cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \\ &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)(2 - \sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2) dt}{t^2 + t^4}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{(1 - t^2)(2 - t^2)}{t^2 + t^4} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2}$, то

$$\int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2) dt}{t^2 + t^4} = t - \frac{2}{t} - 6 \operatorname{arctg} t + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x) dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

Тип 2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}$.

Заметим, что в подобных интегралах присутствует однородный многочлен степени 2 относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 86. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$, предварительно разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \int \frac{(dx)/(\cos^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1} = \\ &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

5.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Выделим здесь четыре случая.

Случай 1. По крайней мере один из показателей m или n — нечетное положительное число.

Если m — нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x = t$; если же n — нечетное положительное число, то подстановка $\sin x = t$.

Пример 87. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^5 x dx &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \\ &= \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int t^4 dt - 2 \int t^6 dt + \int t^8 dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C = \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \end{aligned}$$

Пример 88. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} &= \int \sin^3 x \cos^{-4/3} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^{-4/3} x \sin x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right] = - \int (1 - t^2) t^{-4/3} dt = - \int t^{-4/3} dt + \int t^{2/3} dt = \\ &= 3t^{-1/3} + \frac{3}{5} t^{5/3} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + C. \end{aligned}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае другой показатель степени может быть числом рациональным (то есть дробным).

Случай 2. Оба показателя m и n — четные положительные числа. Здесь следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул понижения степени:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad (5.1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad (5.2)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \quad (5.3)$$

Пример 89. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение. Из формулы (5.1) следует, что

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \\ &= \left[\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x). \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

Случай 3. Показатели m и n таковы, что $|m| + |n| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, а также интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$.

В этом случае применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 90. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

Решение.
$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos x} \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{tg} x \cos^2 x} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{t^2 + 1}; \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{t^2 + 1}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{t^2 + 1}}{\frac{t^2}{t^2 + 1} \cdot t \cdot \frac{1}{t^2 + 1}} = \int \frac{1 + t^2}{t^3} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} + \ln |t| + C = -\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

Отметим, что и в этом интеграле можно обойтись формулами тригонометрии и методом подведения под дифференциал.

Действительно, так как $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, а $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$, то

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{tg} x \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} \right) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C.$$

При нахождении интегралов вида $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x \, dx$, где m — целое положительное число, применяются формулы $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$, с помощью которых последовательно понижается степень тангенса или котангенса.

Пример 91. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^7 x \, dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{tg}^7 x \, dx = \int \operatorname{tg}^5 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \operatorname{tg}^5 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x \, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.$$

Замечание. Интегралы вида $\int \frac{\operatorname{tg}^m x}{\cos^n x} dx$ и $\int \frac{\operatorname{ctg}^m x}{\sin^n x} dx$, где n — четное положительное число, находятся аналогично рассмотренным выше интегралам с помощью формул $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ или $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

Пример 92. Вычислить интеграл $\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^6 x} dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) + 2 \int \operatorname{tg}^6 x d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^9 x + C. \end{aligned}$$

Случай 4. Этот случай охватывает все остальные интегралы, не попадающие под случаи 1–3, например $m, n < 0$ и $|m| + |n| = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$; $m \geq 0, n < 0$ и $m = 2k, |n| = 2k + 1$ или $m < 0, n \geq 0$ и $|m| = 2k + 1, n = 2k$.

В этом случае вновь выручает универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Пример 93. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^3} \cdot \frac{2 dt}{1+t^2} =$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{(1+t^2)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2 \ln |t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Заметим, что интегралы вида $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$ и $\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}$ проще всего находятся по рекуррентным формулам:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \int \frac{dx}{\cos^{2n-1} x}; \quad (5.4)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}. \quad (5.5)$$

Пример 94. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

Решение. Применяя рекуррентную формулу (5.5) при $2n + 1 = 5$, то есть при $n = 2$, получим

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Полагая теперь $2n + 1 = 3$, т. е. $n = 1$, по той же формуле имеем

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Так как $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$, то

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5.3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$, и $\int \sin mx \sin nx \, dx$,

При интегрировании такого вида интегралов рекомендуется пользоваться тригонометрическими формулами:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]; \quad (5.6)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]; \quad (5.7)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \quad (5.8)$$

которые дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде их суммы.

Пример 95. Вычислить интеграл $\int \sin 2x \cos 5x \, dx$.

Решение. Используя формулу (5.6), получим

$$\int \sin 2x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin 7x + \sin(-3x)] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 7x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C.$$

Пример 96. Вычислить интеграл $\int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \, dx$.

Решение. Применим к произведению $\cos x \cos \frac{x}{2}$ формулу (5.7):

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \, dx &= \frac{1}{2} \int \left[\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right] \cos \frac{x}{4} \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{4} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \, dx. \end{aligned}$$

Снова используя ту же формулу, находим

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \, dx &= \\ &= \frac{1}{4} \int \left[\cos \frac{7x}{4} + \cos \frac{5x}{4} \right] \, dx + \frac{1}{4} \int \left[\cos \frac{3x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right] \, dx = \\ &= \frac{1}{7} \sin \frac{7x}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{5x}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{4} + \sin \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

5.4. Тригонометрические подстановки

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \, dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \, dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$ приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки: для первого интеграла $x = a \sin t$ (или $x = a \cos t$), для второго $x = a \operatorname{tg} t$ (или $x = a \operatorname{ctg} t$) и для третьего $x = a/\cos x$ (или $x = a/\sin x$).

Пример 97. Вычислить интеграл $I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \, dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} x = a \sin t, \\ dx = a \cos t \, dt \end{array} \right] = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}}{a \sin t} a \cos t \, dt = \\ &= a \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} \, dt = a \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} \, dt = a \int \frac{dt}{\sin t} - a \int \sin t \, dt = \\ &= a \ln \left| \frac{1}{\sin t} - \operatorname{ctg} t \right| + a \cos t + C. \end{aligned}$$

Здесь была использована вторая форма записи табличного интеграла 13:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \frac{1 - \cos x}{\sin x} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right| + C,$$

так как с ее помощью легче перейти к прежней переменной x : $\sin t = x/a$, $\cos t = \sqrt{a^2 - x^2}/a$.

Итак,

$$I = a \ln \left| \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 98. Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} x = a \operatorname{tg} t, \\ dx = a/\cos^2 t dt \end{array} \right] = \int \frac{1}{a \operatorname{tg} t \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t}} \cdot \frac{a dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\operatorname{tg} t \cos t} = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} t \right| + C, \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} t = x/a$ и, следовательно, $\operatorname{ctg} t = a/x$, $1/\sin x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \sqrt{a^2 + x^2}/x$.

Итак,

$$I = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x} \right| + C.$$

Пример 99. Вычислить интеграл $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Решение.

$$I = \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t}, \\ dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{a^2}{\cos^2 t}}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2}} \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = a^2 \int \frac{dt}{\cos^3 t}.$$

Применим рекуррентную формулу (5.4) при $n = 1$:

$$\int \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{2} \frac{\sin t}{\cos^2 t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\cos t} = \frac{\sin t}{2 \cos^2 t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t \right| + C,$$

где $\cos t = \frac{a}{x}$, $\sin t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$, $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}$. Следовательно,

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C.$$

Обобщением рассмотренных в данном пункте видов интегралов является следующий тип интегралов: $\int R(x, ax^2 + bx + c) dx$.

Ограничимся общей рекомендацией.

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и введением новой переменной интегрирования интеграл сводится к одному из трех, рассмотренных в этом пункте интегралов.

6. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла приводят самые разнообразные задачи, связанные с определением площади плоской фигуры и объема тела вращения, отысканием работы переменной силы и нахождением величины перемещения при заданной переменной скорости, определением массы неоднородного тела с переменной плотностью и многие другие.

В курсе лекций в результате анализа некоторых из перечисленных выше задач показано, что приближенное определение указанных в этих задачах величин приводит к необходимости построения так называемых интегральных сумм и, вне зависимости от физического или геометрического смысла задачи, моделируется как проблема нахождения площади криволинейной трапеции.

В следующих ниже пунктах напомним определение и сформулируем необходимые и достаточные условия существования определенного интеграла, перечислим его основные свойства, дадим методы вычисления и приведем приложения определенного интеграла к решению некоторых задач физики и механики.

6.1. Понятие определенного интеграла. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном отрезке $\Omega = [a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) числовой оси \mathbb{R} . Совокупность точек x_i ($i = \overline{0, n}$; $n \in \mathbb{N}$) таких, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, называют разбиением отрезка Ω . Обозначим $X = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$, а отрезки $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ ($i = \overline{1, n}$) назовем отрезками разбиения X или частичными отрезками. Таким образом

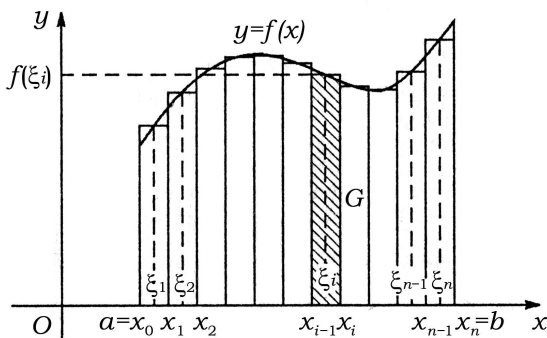
$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i.$$

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка Δ_i разбиения X . Выберем произвольным образом точки $\xi_i \in \Delta_i$ ($i = \overline{1, n}$). Их множество обозначим $\xi = \{\xi_i, i = \overline{1, n}\}$ и назовем выборкой.

Сумму

$$S_X(\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (6.1)$$

называют интегральной суммой для функции $f(x)$ при заданном разбиении X и фиксированной выборке ξ . Она равна площади ступенчатой фигуры (рис. 6.1), составленной из n прямоугольников, причем основанием i -того прямоугольника служит отрезок Δ_i , а длина его высоты равна $f(\xi_i)$. Разумеется, величина $S_X(\xi)$ будет зависеть и от разбиения X отрезка Ω на частичные отрезки, и от выбора точек ξ_i , образующих выборку ξ .



Р и с. 6.1.

Определение 6.1. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке Ω называется не зависящий от способа разбиения X отрезка Ω на частичные отрезки и выбора точек $\xi_i \in \Delta_i$ предел интегральной суммы (6.1) при стремлении к нулю длины Δx_i наибольшего частичного отрезка. Определенный интеграл обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx,$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования. Отрезок Ω называется интервалом (промежутком) интегрирования, а его концы: a — нижним и b — верхним пределами интегрирования.

Заметим, что здесь термин «предел» употребляется в смысле, не имеющим отношения к понятию предела функции или последовательности. Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_X(\xi), \quad (6.2)$$

где величина $S_X(\xi)$ определена в (6.1).

Замечание. В лекционном курсе показано, что чем мельче разбиение отрезка Ω на частичные интервалы (т.е. при увеличении числа n точек разбиения X), тем точнее интегральная сумма (6.1) аппроксимирует истинную площадь криволинейной трапеции. Однако при этом длины всех частичных интервалов Δx_i должны стремиться к нулю. Вот почему предел в (6.2) вычисляется не при $n \rightarrow +\infty$, а при условии $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Подробнее об этом — в курсе лекций, там же — контрпримеры.

Обозначая

$$l(X) = \max_{i=1, n} \Delta x_i \rightarrow 0,$$

дадим строгое определение.

Определение 6.2. Число I называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке Ω , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения X , такого что $l(X) < \delta$ и для любой выборки ξ , выполняется неравенство

$$|S_X(\xi) - I| < \varepsilon. \quad (6.3)$$

Если существует число I , определяемое в (6.3), то функцию $f(x)$ называют интегрируемой (по Риману) на отрезке Ω и говорят, что существует интеграл от функции $f(x)$ на отрезке Ω .

Необходимые условия интегрируемости сформулируем в следующей теореме.

Теорема 6.1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω , то она ограничена на нем.

Замечание 1. Теорема утверждает, что требование суммируемости функции влечет за собой ее ограниченность. Поэтому ограниченность функции необходима для ее интегрируемости. Обратное — не верно. Из ограниченности функции не следует ее интегрируемость. Это означает, что ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости.

Простейшим примером ограниченной, но не интегрируемой (по Риману) на отрезке $\Omega = [0, 1]$ является функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \in J, \end{cases}$$

где Q — множество рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$, а $J = [0, 1] \setminus Q$ — множество иррациональных чисел того же отрезка.

Замечание 2. Используя известный закон математической логики, необходимые условия интегрируемости можно перефразировать как достаточные условия ее неинтегрируемости.

Справедлива с очевидностью теорема.

Теорема 6.2. Если функция $f(x)$ неограничена на отрезке Ω , то она неинтегрируема (по Риману) на этом отрезке.

Интегрируемость неограниченных функций в несобственном смысле будет рассмотрена в следующем разделе.

Теорема 6.3. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

Замечание. Возможность интегрирования функции с разрывом первого рода обсуждается в последнем пункте этого раздела.

6.2. Основные свойства определенного интеграла

Заметим сначала, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $\Omega = [a, b]$, то интеграл от этой функции является *числом*, не зависящим от того, какой буквой обозначен аргумент подынтегральной функции, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

Иногда используется запись $\int_{\Omega} f(x) dx$.

Свойство 1.

$$\int_a^b dx = b - a. \quad (6.4)$$

Это свойство — один из немногих примеров, когда значение определенного интеграла легко найти непосредственно из определения.

Действительно, здесь $f(x) = 1$ и для любого разбиения X отрезка $\Omega = [a, b]$ и любой выборки ξ интегральная сумма $S_X(\xi) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a$ и не зависит от $l(X) = \max_{i=1, n} \Delta x_i$.

Следовательно, $\int_a^b dx = \lim_{l(X) \rightarrow 0} S_X(\xi) = b - a$.

Свойство 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке Ω , то интегрируема и их сумма $f(x) + g(x)$, причем

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (6.5)$$

Свойство 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω , то для любого $k \in \mathbb{R}$ интегрируема функция $k \cdot f(x)$, причем

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx. \quad (6.6)$$

Иными словами, постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ интеграла.

Объединяя последние два свойства, можно записать правило интегрирования любой линейной комбинации интегрируемых функций

$$\int_a^b \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f_k(x) dx \quad (\alpha_k \in \mathbb{R}).$$

Свойство 4. Если пределы в интеграле поменять местами, то значение интеграла изменит свой знак:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (6.7)$$

Из этого свойства следует геометрически очевидный факт:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad (6.8)$$

если $f(x)$ определена в точке $x = a$.

Свойство 5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω , то для любой точки $c \in (a, b)$, т.е. $a < c < b$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (6.9)$$

Свойство 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Более того, для указанных непрерывных функций, не равных тождественно нулю, имеет место строгое неравенство

$$\int_a^b f(x) dx > 0.$$

Замечание. Свойство 6 надо учитывать при решении задач на определение площадей фигур, ограниченных линиями графиков заданных функций. Например, находя с помощью интеграла площадь криволинейной трапеции, необходимо учитывать ее расположение относительно основания. В

случае, когда трапеция целиком лежит над осью Ox , интеграл в силу определения выражает площадь как положительную величину; в случае, когда трапеция целиком лежит под осью Ox , интеграл, будучи отрицательным за счет значений $f(\xi_i) \leq 0$, $\xi_i \in \xi$, выражает площадь трапеции, взятую с отрицательным знаком.

Ясно, что для вычисления площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ в общем случае надо сложить площади под графиком, с абсолютными значениями площадей над графиком функции $f(x)$.

Пример 100. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $\Omega = [0, 2\pi]$.

Из определения и геометрического смысла ясно, что $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

Однако, чтобы найти площадь заштрихованной фигуры (см. рис. 6.2), надо вычислять $\int_0^{\pi} \sin x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \right|$.

Заметим, что для нахождения искомой площади проще найти значение $2 \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx$ в силу очевидного равенства площадей под- и над- графиком функции.

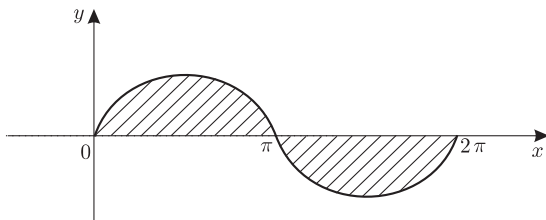


Рис. 6.2. К решению примера 100.

Следующие свойства касаются оценок интеграла и имеют важное прикладное значение.

Теорема 6.4. (Об оценке определенного интеграла). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$. Пусть $m = \min_{x \in \Omega} f(x)$, $M = \max_{x \in \Omega} f(x)$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке Ω .

Тогда

$$m(b-a) < \int_a^b f(x) \, dx < M(b-a) \quad (a < b). \quad (6.10)$$

Теорема 6.5. (Об интегрировании неравенств). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ интегрируемы на отрезке $\Omega = [a, b]$ и для любого $x \in \Omega$: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Тогда

$$\int_a^b g(x) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b h(x) dx \quad (a < b). \quad (6.11)$$

Следствие. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω , то и $|f(x)|$ — функция, интегрируемая на этом же отрезке, причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (6.12)$$

Замечание. Теорема 6.5 является обобщением теоремы 6.4 на случай ограниченных и интегрируемых функций $f(x)$. Действительно, если $f(x)$ ограничена на отрезке Ω , то существуют такие числа m и M ($m < M$), что $m \leq f(x) \leq M$. Заменяя в условии теоремы 6.5 функцию $g(x)$ на m , а функцию $h(x)$ на M , из (6.11) сразу получаем (6.10).

Теорема 6.6. (*О среднем*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$, то существует хотя бы одно значение $x = c \in \Omega$, для которого

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a). \quad (6.13)$$

Значение $f_{cp} = f(c)$ в (6.13) называют средним интегральным значением функции.

6.3. Интеграл с переменным верхним пределом. Непосредственное вычисление определенных интегралов

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $\Omega = [a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (6.14)$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом и является очевидно функцией от x с областью определения, совпадающей с отрезком Ω .

Более того, функция $I(x)$ будет непрерывной на этом отрезке. Если же от подынтегральной функции $f(x)$ потребовать непрерывность в каждой точке отрезка Ω , то функция $I(x)$ будет дифференцируемой на этом отрезке функцией.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 6.7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$, то функция $I(x)$, определенная в (6.14), дифференцируема на этом отрезке, причем

$$I'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Следствие. Согласно определению первообразной (1.1), функция $I(x)$ является первообразной (точнее одной из первообразных) для функции $f(x)$.

Обозначив, как обычно, множество первообразных символом неопределенного интеграла, получим формулу

$$\int f(x) dx = I(x) + C = \int_a^x f(t) dt + C,$$

устанавливающую связь между понятиями неопределенного и определенного интеграла и позволяющую получить простую формулу для вычисления определенных интегралов, не прибегая к подсчету пределов интегральных сумм.

Теорема 6.8. (*Формула Ньютона-Лейбница*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$ и $F(x)$ — какая-нибудь ее первообразная на этом отрезке. Справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a). \quad (6.15)$$

Применение формулы проиллюстрируем на простых примерах.

Пример 101. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$.

Решение.
$$\int_1^2 \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{(1 + 2\sqrt{x} + x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 + \sqrt{x} \right) dx =$$
$$= \left(2\sqrt{x} + 2x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} \right) \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} + 4 + \frac{2}{3}\sqrt{8} - 2 - 2 - \frac{2}{3} = 2\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 102. Вычислить интеграл $\int_2^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение. $\int_2^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_2^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} \Big|_2^e = 2\sqrt{\ln e} - 2\sqrt{\ln 2} = 2(1 - \sqrt{\ln 2})$.

Пример 103. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x}$.

Решение. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d(\frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1$.

6.4. Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления определенных интегралов в тех случаях, когда первообразная не очевидна сразу, используются те же методы и приемы, которые использовались при вычислении неопределенных интегралов. Однако правило замены переменной в определенном интеграле уже требует некоторой аккуратности.

Напомним (см. формулы (1.30)–(1.32)), что в результате замены переменной $x = \varphi(t)$ неопределенный интеграл $I = \int f(x) dx$ приводится к интегралу $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$, который в ряде случаев вычисляется проще или уже является табличным.

Найдя его первообразную $F(t)$, далее следовало из уравнения $x = \varphi(t)$ выразить переменную t через x с помощью обратной функции $t = \{\varphi\}^{-1}(x) = \psi(x)$, предъявив окончательно ответ в виде $I = F(\psi(x)) + C$. От функции $\varphi(x)$ требовались свойства непрерывной дифференцируемости и монотонности хотя бы на каком-то непустом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$.

В следующей теореме показано, что при вычислении определенного интеграла заменой переменной $x = \varphi(t)$, необходимость возвращения к исходной переменной x в выражении первообразной отпадает.

Теорема 6.9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$, в частности, всюду в области своего определения $D(f)$. Пусть отрезок $[a, b] \subset \Omega$ ($-\infty < a < b < +\infty$). Если функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на некотором множестве $T \in \mathbb{R}$ изменения своего аргумента t и существуют такие его значения $\alpha, \beta \in T$, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем значения функции $\varphi(t) \in [a, b]$ для всех значений $t \in [\alpha, \beta]$, то

справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (6.16)$$

Пример 104. Вычислить $I = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$.

Решение. Положим $x = R \sin t$. Так как $x \in [0, R]$, то новые пределы интегрирования найдем из уравнений $\sin t = 0$ и $\sin t = 1$. Если взять $\alpha = t_1 = 0$, а $\beta = t_2 = \frac{\pi}{2}$, то при $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $x = R \sin t \in [0, R]$ и $\sqrt{R^2 - x^2} = R \cos t$.

Так как $dx = R \cos t dt$, то по формуле (6.16) получим

$$\begin{aligned} I &= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{R^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \pi \right) - 0 = \frac{\pi R^2}{4}. \end{aligned}$$

Пример 105. Вычислить $I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение можно оформить следующей записью: $I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$\begin{aligned} &= \left[\begin{array}{l} x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt, \\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t, \text{ т. к. } \cos t > 0 \text{ при } t \in [0, \pi/3], \\ x = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{3}. \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{\pi/3} \sin t dt = -\cos t \Big|_0^{\pi/3} = -\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 0 \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

При выборе новых пределов интегрирования мог возникнуть вопрос: почему выбраны пределы $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{3}$, а не, например, $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{2\pi}{3}$? Ведь $\sin \frac{2\pi}{3}$ так же равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Можно показать, что при этих пределах величина интеграла остается прежней, однако его вычисление усложняется.

Дело в том, что в этом случае $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| =$

$$= \begin{cases} \cos t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -\cos t, & t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]. \end{cases}$$

Поэтому $I = \int_0^{2\pi/3} \frac{\sin t \cos t dt}{|\cos t|} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t dt}{\cos t} + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin t \cos t dt}{-\cos t} = \int_0^{\pi/2} \sin t dt -$

$$- \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sin t dt = -\cos t|_0^{\pi/2} + \cos t|_{\pi/2}^{2\pi/3} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 + \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Приведенный пример решен с использованием подстановки второго типа $x = \varphi(t)$. Покажем, что этот же пример успешно решается с помощью подстановки первого типа $\varphi(x) = u$. Применение такой подстановки наиболее целесообразно в интегралах вида

$$I = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx. \quad (6.17)$$

Новые пределы интегрирования u_1 и u_2 сразу определяются по формулам $u_1 = \varphi(a)$ и $u_2 = \varphi(b)$, а так как $du = \varphi'(x) dx$, то интеграл в формуле (6.17) принимает вид

$$I = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du.$$

Однако и в этих интегралах иногда возникают затруднения, связанные с немонотонностью функции $\varphi(x)$.

Пример 106. Вычислить интеграл из предыдущего примера с помощью подстановки $u = \varphi(x) = 1 - x^2$.

Решение. $I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} u = 1 - x^2, du = -2x dx, x dx = -\frac{1}{2} du \\ x = 0 \Rightarrow u_1 = 1; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{4} \end{array} \right] =$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^{1/4} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_{1/4}^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} 2\sqrt{u} \Big|_{1/4}^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Замечание 1. В данном примере нам удалось сразу выразить величину $x dx$ через du . Если бы мы выражали x через u из уравнения $u = 1 - x^2$, то следовало бы взять решение $x = \sqrt{1-u}$, так как $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ и, следовательно, $x \geq 0$.

Замечание 2. В первой части настоящего пособия была отмечена связь метода замены переменной первого типа с теоремой об инвариантности

формул интегрирования (см. пункт 1.3) и методом подведения под дифференциал, который оказывается весьма эффективен во многих случаях. Действительно, если известно, что

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

то интеграл (6.17) вычисляется сразу:

$$I = \int_a^b f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) \Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Введение здесь замены переменной по формуле $u = \varphi(x)$ и последующий пересчет пределов интегрирования только затягивает процесс вычисления.

Таким образом, наиболее оптимальное вычисление интеграла $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} \text{выглядит так: } I &= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} 2\sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приведем здесь еще два факта, упрощающих процесс вычисления определенных интегралов.

а) для любой интегрируемой на отрезке $[-a, a]$ ($a > 0$) функции $f(x)$, интеграл

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция,} \\ 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция.} \end{cases} \quad (6.18)$$

Пример 107. Не вычисляя, доказать, что интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

для любых $m, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Результат очевиден, так как функция $f(x) = \sin mx \cos nx$ нечетна как произведение нечетной функции $y = \sin mx$ и четной функции $y = \cos nx$. Заметим, что при $m = n$ функция $f(x) = \sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \sin 2mx$ остается нечетной.

Пример 108. Показать, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$ интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n, \\ \pi, & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Решение. Пусть $m \neq n$. Равенство нулю интеграла не очевидно, как в предыдущем примере, так как под интегралом стоит четная функция. Воспользуемся этим обстоятельством и вычислим интеграл непосредственно.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= 2 \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = [\text{воспользуемся формулой (5.8)}] = \\ &= \int_0^{\pi} \cos(m-n)x \, dx - \int_0^{\pi} \cos(m+n)x \, dx = \frac{1}{m-n} \sin(m-n)x \Big|_0^{\pi} - \\ &- \frac{1}{m+n} \sin(m+n)x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{m-n} [\sin(m-n)\pi - \sin 0] - \frac{1}{m+n} [\sin(m+n)\pi - \\ &- \sin 0] = 0, \text{ так как } \sin k\pi = \sin 0 = 0 \text{ для любого } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Если $m = n$, то интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx &= 2 \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = 2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2nx \, dx = \\ &= x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n} \sin 2nx \Big|_0^{\pi} = \pi - \frac{1}{2n} (\sin 2n\pi - \sin 0) = \pi, \text{ так как } \sin 2n\pi = \sin 0 = \\ &= 0 \text{ для любого } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Пример 109. Показать, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$ интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{при } m \neq n, \\ \pi, & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Рекомендуется самостоятельно проделать необходимые вычисления, воспользовавшись при $m \neq n$ формулой (5.7).

б) если функция $f(x)$ — непрерывная на \mathbb{R} и периодическая с периодом T функция, т. е. $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx. \quad (6.19)$$

Пример 110. Не вычисляя непосредственно, показать, что

$$\int_{\pi/2}^{5\pi/2} \sin^7 x \cos^8 x dx = 0.$$

Решение. Подынтегральная функция является периодической с периодом 2π и, очевидно, нечетной. Тогда, используя (6.18) и (6.19), получим

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2+2\pi} \sin^7 x \cos^8 x dx = \int_0^{2\pi} \sin^7 x \cos^8 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \cos^8 x dx = 0.$$

6.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 6.10. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные, то

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (6.20)$$

Как и в неопределенном интеграле, метод интегрирования по частям может быть успешно применен, если в исходном интеграле $\int_a^b f(x) dx$ подынтегральное выражение $f(x) dx$ удастся представить в виде $u(x)v'(x) dx = u dv(x)$, а интеграл $\int_a^b v(x) du(x)$ вычисляется в прощле.

Пример 111. Вычислить интеграл $I = \int_1^e x \ln x dx$.

Решение. Представим подынтегральное выражение в виде $x \ln x dx = \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right)$. Тогда, полагая $u = \ln x$, $v = \frac{x^2}{2}$, по формуле (6.20) получим

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \ln e \cdot \frac{e^2}{2} - \ln 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1 + e^2). \end{aligned}$$

Пример 112. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$.

Решение. Запишем интеграл в виде $I = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 de^{2x}$. По формуле (6.20)

$$\text{получим } I = \frac{1}{2} \left(x^2 e^{2x} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^{2x} x dx \right) = \frac{1}{2} (e^2 - 0) - \frac{1}{2} \int_0^1 x de^{2x}.$$

Применяя формулу (6.20) еще раз, окончательно находим

$$I = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left(x e^{2x} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \right) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} (e^2 - 0) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} (e^2 - e^0) = \frac{1}{4} (e^2 - 1).$$

Замечание. Следует обратить внимание, что вычисляя в формуле (6.20) значение $uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$ на каждом шаге интегрирования, мы существенно уменьшаем объем вычислений.

Было бы нерационально определять первообразную для подынтегральной функции путем вычисления неопределенного интеграла (см. аналогичный пример 53), а затем применять формулу Ньютона-Лейбница (6.15).

Пример 113. Вычислить интеграл $\int_0^\pi e^x \cos x dx$.

Решение. Обозначая искомый интеграл I , получим $I = \int_0^\pi e^x \cos x dx =$

$$= \int_0^\pi e^x d \sin x = e^x \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x de^x = e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0 - \int_0^\pi e^x \sin x dx =$$

$$= \int_0^\pi e^x d \cos x = e^x \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos x de^x = e^\pi \cos \pi - e^0 \cos 0 - \int_0^\pi e^x \cos x dx =$$

$$= -e^\pi - 1 - I.$$

Из полученного уравнения $2I = -e^\pi - 1$ находим $I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

7. Несобственный интеграл

7.1. Определение несобственных интегралов первого и второго рода

Распространение понятия интегрируемости функции по Риману, т.е. понятия определенного интеграла, на функции, заданные на бесконечном промежутке или на неограниченные функции приводит к необходимости ввести новые представления об *интегрировании в несобственном смысле* и *несобственных интегралах*.

В первом случае речь идет об интегралах вида

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

называемых *несобственными интегралами первого рода*.

Во втором случае, когда функция $f(x)$ неограничена на конечном отрезке $[a, b]$, имея, например, разрыв II рода во внутренней точке интервала (a, b) или на концах отрезка $[a, b]$, интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

называют *несобственным интегралом второго рода*.

Определение 7.1. Пусть a — действительное число и пусть для любого $x > a$ функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, x]$ (в частности, определена и ограничена на нем). Обозначим $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ — интеграл с переменным верхним пределом.

Если при $x \rightarrow +\infty$ существует конечный предел $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$, то этот предел I называется несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$; говорят, что несобственный интеграл *сходится*, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в несобственном смысле.

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (7.1)$$

Если же конечный предел не существует (предел равен бесконечности или не существует вовсе), то говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *расходится*.

Заметим, что если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то определение 7.1 можно записать так:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a).$$

Если ввести обозначение $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty)$, то определение несобственного интеграла можно записать с помощью формулы, аналогичной формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \quad (7.2)$$

Рассмотрим самые простые примеры.

Пример 114. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x dx$.

Решение. По определению

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b - \sin 0 = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b.$$

Так как $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b$ не существует, то интеграл расходится.

Заметим, что писать $\lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b = \sin(+\infty)$ не следует, так как символ $\sin(+\infty)$ не имеет смысла.

Пример 115. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} x dx$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру

$$\int_0^{+\infty} x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^2}{2} - 0 = +\infty.$$

Отсутствие конечного предела говорит о том, что данный интеграл расходится.

Отметим, что в этом примере допустима краткая запись (7.2):

$$\int_0^{+\infty} x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}((+\infty)^2 - 0) = +\infty.$$

Пример 116. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$.

Решение. Вновь, строго по определению, имеем: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx =$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} \right) + 1 = 1,$$

так как $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} \right) = 0$.

В кратком изложении решение этого примера имеет вид:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx = \left. -\frac{1}{x} \right|_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1.$$

Таким образом, исследование на сходимость в простых случаях сводится к вычислению несобственных интегралов по определению.

Аналогично определяются несобственные интегралы на промежутках $(-\infty, b]$ и $(-\infty, +\infty)$. А именно,

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) \, dx,$$

причем, последний интеграл считается сходящимся, если предел существует независимо от того, каким способом и как $a \rightarrow -\infty$, а $b \rightarrow +\infty$. Поясним это обстоятельство.

Пусть c — любое число из интервала (a, b) , то есть $a < c < b$. Тогда по свойству аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Но, тогда

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx,$$

и существование конечного предела при $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$ равносильно существованию двух независимых пределов $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx$ и $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$.

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ является сходящимся, если существуют оба предела и расходящимся, если хотя бы один из пределов равен бесконечности или вовсе не существует.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 117. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Пусть $\alpha \neq 1$, тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\alpha} - 1 \right).$$

Если $\alpha > 1$, то существует конечный предел и

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{\alpha-1} \text{ и, следовательно, сходится.}$$

При $\alpha < 1$: $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ и поэтому интеграл расходится.

При $\alpha = 1$ интеграл также расходится, так как

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \ln|x| \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b - \ln 1 = +\infty.$$

Таким образом,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (7.3)$$

Этот результат эффективно используется в дальнейшем при исследовании других, более сложных, интегралов.

Пример 118. Показать, что интеграл $I = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$ сходится и вычислить его.

Решение. Отталкиваясь от определения, запишем

$$I = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 xe^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} \int_a^0 e^{-x^2} d(-x^2) \right) = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-x^2} \Big|_a^0 =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(e^0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-a^2} \right) = -\frac{1}{2}(1 - 0) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{так как } \lim_{a \rightarrow -\infty} e^{-a^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{a^2}} = \frac{1}{e^{(-\infty)^2}} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Обратимся к несобственным интегралам второго рода.

Определение 7.2. Пусть a, b — действительные числа: $-\infty < a < b < +\infty$. Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a, x]$, для любого x : $a < x < b$ и неограничена на промежутке $[a, b)$.

Обозначим

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Если существует конечный предел $I = \lim_{x \rightarrow b-0} I(x)$ при x , стремящимся к числу b слева, то это значение принимают за значение несобственного

интеграла $\int_a^b f(x) dx$ второго рода, а интеграл называют сходящимся. В

противном случае, то есть когда предел равен бесконечности или вовсе не существует, говорят, что соответствующий интеграл расходится.

Итак, по определению, для функции $f(x)$, неограниченной на правом конце отрезка $[a, b]$ интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(t) dt. \quad (7.4)$$

Это равенство можно записать так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то определение можно записать и так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a),$$

где $F(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода для функции, неограниченной на левом конце отрезка $[a, b]$, или на обоих его концах. Соответствующие формулы имеют вид

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon, \delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

причем в последнем равенстве пределы при $\varepsilon \rightarrow +0$ и $\delta \rightarrow +0$ должны существовать независимо друг от друга. Точки a и b называются *особыми точками* соответствующих несобственных интегралов.

Может случиться, что особая точка c непосредственно лежит внутри отрезка $[a, b]$, т.е. $a < c < b$. В этом случае несобственный интеграл определяется как сумма двух несобственных интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

причем сходимость несобственного интеграла требует независимого существования обоих пределов.

Пример 119. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Особой точкой подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ является точка $x = 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$. Справедливы равенства:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left. \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{1-\alpha} \right); & \alpha \neq 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln |x| \Big|_\varepsilon^1 = \ln 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \varepsilon; & \alpha = 1. \end{cases}$$

Из них следует, что интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$, так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$ и равен $\frac{1}{1-\alpha}$; расходится при $\alpha \geq 1$.

Итак,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1; \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (7.5)$$

Сравните этот пример и результат вычислений с примером 117. Обратите внимание на то, что подынтегральная функция в этих примерах одна и та же, однако речь идет о совершенно разных несобственных интегралах.

Несколько обобщая пример 119, нетрудно показать, что при любых a и b : $-\infty < a < b < +\infty$, имеем

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha < 1; \\ +\infty, & \alpha \geq 1; \end{cases} \quad (7.6)$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} -\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha < 1; \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (7.7)$$

Проделайте эти несложные вычисления самостоятельно.

Приведем еще несколько вычислительных примеров.

Пример 120. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Точка $x = 1$ является особой точкой этого несобственного интеграла второго рода.

По определению:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \\ &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\varepsilon} = -2 \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{\varepsilon} - \sqrt{1} \right) = 2. \end{aligned}$$

Пример 121. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} =$
 $= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$

В работе с несобственными интегралами, да и вообще, при вычислении определенных интегралов следует соблюдать осторожность, так как иногда можно не заметить особую точку несобственного интеграла второго рода и получить абсурдный результат вычислений.

Так, например, при попытке вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$, используя известную первообразную $-\frac{1}{x}$, по формуле Ньютона-Лейбница $I = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1$ получаем заведомо невозможный результат: $I = -2$. Действительно, интеграл от положительной функции должен быть положительным. Ошибка произошла от незаконного применения формулы Ньютона-Лейбница к расходящемуся несобственному интегралу второго рода. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ обращается в бесконечность при $x = 0$. Следовало, действуя по определению, записать интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ в виде

суммы $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_{\delta}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} - 1 - \\ &- 1 + \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} = -2 + \frac{1}{+0} + \frac{1}{+0} = -2 + \infty = +\infty. \end{aligned}$$

То есть действительно, интеграл является расходящимся.

7.2. Основные свойства и методы вычисления несобственных интегралов

Будем рассматривать несобственные интегралы в единообразной записи

$$\int_a^b f(x)dx,$$

предполагая, что:

а) функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b)$, где a — конечная точка ($a \in \mathbb{R}$), b — либо конечная точка, а функция $f(x)$ — неограниченна в промежутке $[a, b)$, имея в точке b разрыв второго рода, либо $b = +\infty$;

б) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, x]$ при любом $x \in [a, b)$.

Определения несобственных интегралов (7.1) и (7.4) можно записать так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt, \text{ если } b = +\infty,$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(t)dt, \text{ если } b \neq +\infty.$$

Перечислим **основные свойства несобственных интегралов**.

1°. Если сходятся несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a, b)$, то при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ сходится интеграл от функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$ на том же промежутке и справедливо равенство

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

2°. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b)$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b-0} F(x) = F(b-0)$, если $b \neq +\infty$, или $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty)$, если $b = +\infty$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} F(b-0) - F(a); & b \neq +\infty, \\ F(+\infty) - F(a); & b = +\infty. \end{cases}$$

3°. Если сходится интеграл $\int_a^b f(x)dx$, то и сходится $\int_c^b f(x)dx$, где $c : a < c < b$.

4°. *Интегрирование по частям в несобственных интегралах.*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в промежутке $[a, b)$ и имеют непрерывные производные на отрезке $[a, x]$ для любого $x \in (a, b)$. Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b-0} [u(x)v(x)] = u(b-0)v(b-0)$ и интеграл $\int_a^b v du$ сходится, то и интеграл $\int_a^b u dv$ сходится и справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^{b-0} - \int_a^b v du.$$

В случае $b = +\infty$ эта формула принимает вид

$$\int_a^{+\infty} u dv = uv \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v du.$$

Пример 122. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$.

Решение. $I = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x d(-e^{-x}) = -x e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Так как $x e^{-x} = 0$ при $x = 0$, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} =$

$= \{\text{Правило Лопиталья}\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$

то $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + e^0 = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} + 1 = 1.$

Пример 123. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Решение. Имеем несобственный интеграл второго рода с особой точкой $x = a$. Интегрируя по частям, выразим интеграл сам через себя

$$\int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int_0^a x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^a x \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int_0^a xd(\sqrt{a^2 - x^2}) =$$

$$= -x\sqrt{a^2 - x^2} \Big|_0^{a-0} + \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\lim_{x \rightarrow a-0} x\sqrt{a^2 - x^2} + 0 + \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

Здесь применен искусственный прием: числитель и знаменатель дроби в последнем интеграле мы умножили на $\sqrt{a^2 - x^2}$. Тогда, обозначая искомый интеграл через I , найдем: $I = \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} -$

$$- \int_0^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \left(\lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x}{a} - \arcsin 0 \right) - I.$$

Для искомого значения I получим уравнение, откуда $2I = a^2 \arcsin 1 = \frac{a^2 \pi}{2}$. Окончательно, $I = \frac{a^2 \pi}{4}$.

5°. Замена переменной в несобственных интегралах.

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на промежутке $[\alpha, \beta)$, где α и β определяются из условия, что $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

при условии, что хотя бы один из интегралов сходится.

Пример 124. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$.

Решение. Положим $x = \operatorname{tg} t$, где $0 \leq t < \pi/2$, тогда $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$; $x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$; $(x^2 + 1)^{-3/2} = \cos^3 t$.

Поэтому $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} = \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2-0} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

7.3. Первая и вторая теоремы сравнения

Хорошо известно, что далеко не для всякой функции $f(x)$ удастся найти первообразную в элементарных функциях. Во многих случаях нахождение первообразной представляет значительные вычислительные трудности. Вместе с тем, в целом ряде случаев не требуется вычислять значение несобственного интеграла, а достаточно установить, что он является сходящимся.

При исследовании сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций можно воспользоваться признаками сравнения, которые мы сформулируем в виде теорем.

Всюду далее будем писать $\int_a^b f(x)dx < +\infty$, если соответствующий несобственный интеграл сходится.

Теорема 7.1 (Первая теорема сравнения). Если $\forall x \in [a, b)$ выполняется условие $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и если $\int_a^b g(x)dx < +\infty$, то и $\int_a^b f(x)dx < +\infty$,

а если $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то и $\int_a^b g(x)dx$ расходится.

Пример 125. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{11+x^{10}}$.

Решение. Так как $\forall x \in [1, +\infty)$: $f(x) = \frac{1}{11+x^{10}} < \frac{1}{x^{10}}$, а $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{10}} < +\infty$ (см. пример 117, $\alpha = 10 > 1$), то и данный интеграл сходится.

Пример 126. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{7+2x^6}} dx$.

Решение. Так как $\forall x \in [1, +\infty)$: $0 \leq \cos^4 3x \leq 1$;
 $0 \leq \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{7+2x^6}} \leq \frac{1}{(7+2x^6)^{1/5}} < \frac{1}{(2x^6)^{1/5}} < \frac{1}{x^{6/5}}$, а $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6/5}} < +\infty$,

то и данный интеграл сходится.

Теорема 7.2 (Вторая теорема сравнения). Если $\forall x \in [a, b): f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b - 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Практическое использование этого признака предполагает следующие действия:

а) Пусть исследуется интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, где $f(x) \geq 0$ при $x \in [a, +\infty)$

и $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

По виду функции $f(x)$ следует подобрать такую эквивалентную ей бесконечно малую функцию $g(x)$, для которой сходимость или расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ либо очевидна, либо легко устанавливается.

Пример 127. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3x^5 + 4x^2 + 1} dx$.

Решение. Обозначим искомый интеграл I и заметим сразу, что условие $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [0, +\infty)$ не выполняется. Однако искомый интеграл можно представить как $I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Нетрудно понять, что первый интеграл является собственным и имеет конечное значение. Осталось оценить второй интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, в кото-

ром $f(x) = \frac{2x^3 + x - 1}{3x^5 + 4x^2 + 1} > 0$ для всех $x \in [1, +\infty)$.

Функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, причем $f(x) \sim \frac{2}{3x^2}$. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{2}{3x^2}$. Тот факт, что $f(x) \sim g(x)$, можно доказать, установив, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Еще проще заметить, что $2x^3 + x - 1 \sim 2x^3$, а $3x^5 + 4x^2 + 1 \sim 3x^5$ как бесконечно большие при $x \rightarrow +\infty$. Тогда, заменяя числитель и знаменатель дроби в $f(x)$ их эквивалентами, найдем отношение $\frac{2}{3x^2}$.

Далее, так как $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \frac{2}{3} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$ (см. пример 117, $\alpha = 2 > 1$), то и исследуемый интеграл тоже является сходящимся.

Пример 128. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[5]{(x^3+1)^2}} dx$.

Решение. Так как $\sqrt[5]{(x^3+1)^2} = (x^3+1)^{2/5} \sim x^{6/5}$ при $x \rightarrow +\infty$, как бесконечно большая величина, то $f(x) = \frac{x}{(x^3+1)^{2/5}} \sim \frac{x}{x^{6/5}} = \frac{1}{x^{1/5}}$.

Пусть $g(x) = \frac{1}{x^{1/5}}$. Ясно, что $\int_1^{+\infty} g(x)dx = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

б) Пусть исследуется интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x) \geq 0$ при $x \in [a, b)$ и $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow b-0$. В соответствии с признаком, следует найти для $f(x)$ такую эквивалентную бесконечно большую величину $g(x)$, поведение интеграла $\int_a^b g(x)dx$ от которой легко установить.

Пример 129. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)$ в промежутке $(0, 1]$ положительна и $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +0$. Заменим функции в числителе и знаменателе подынтегральной дроби их эквивалентными бесконечно малыми величинами: $\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{1/3}$, $e^{\sin x} - 1 \sim \sin x \sim x$. Тогда

$f(x) \sim \frac{x^{1/3}}{x} \sim \frac{1}{x^{2/3}}$. Если взять $g(x) = \frac{1}{x^{2/3}}$, то $f(x) \sim g(x)$, а $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}} < +\infty$ (см. пример 119, $\alpha = \frac{2}{3} < 1$). Следовательно, данный интеграл сходится.

8. Приложения определенного интеграла

8.1. Вычисление площади плоской фигуры

8.1.1. Уравнения кривых заданы в декартовой системе координат

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ [$f(x) \geq 0$], прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ [$f_1(x) \leq f_2(x)$] и прямыми $x = a$, $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Пример 130. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 3x$ и прямой $3x + y = 4$.

Решение. Искомая фигура изображена на рис. 8.1 и может быть представлена в виде следующей системы:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x; \\ y = -3x + 4, \end{cases}$$

решая которую находим точки пересечения параболы с прямой: $A(-2, 10)$, $B(2, -2)$.

Искомая площадь:

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx = \\ &= \int_{-2}^2 (-3x + 4 - x^2 + 3x) dx = \\ &= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = \\ &= 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3} \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

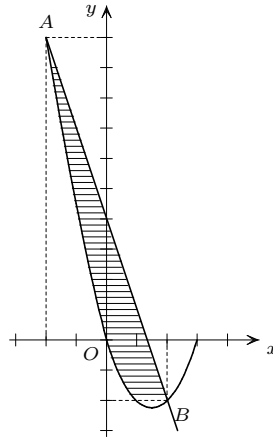


Рис. 8.1. К решению примера 130

8.1.2. Кривые заданы параметрическими уравнениями

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox , выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'_t(t) dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, $[y(t) \geq 0 \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2]$.

Пример 131. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Решение. Эллипс расположен симметрично относительно обеих осей (рис. 8.2), следовательно, можно вычислить сначала $1/4$ часть площади данной фигуры. Вычислим площадь той части фигуры, которая расположена в первом квадранте:

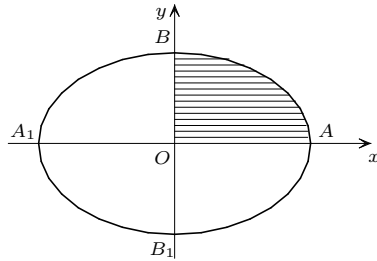


Рис. 8.2. К решению примера 131

$$S_I = \int_0^a y dx.$$

Найдем пределы интегрирования для переменной t из условий:

$$0 = a \cos t, \quad t_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$a = a \cos t, \quad t_2 = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} S_I &= \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Вся площадь эллипса равна $S = 4S_I = \pi ab$ кв.ед.

8.1.3. Кривые заданы в полярной системе координат

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример 132. Вычислить площадь, ограниченную первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ (рис. 8.3).

Решение. Найдем пределы интегрирования. Первый виток спирали образуется при изменении параметра φ от 0 до 2π . Следовательно,

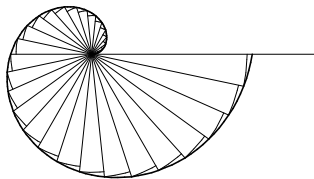


Рис. 8.3. К решению примера 132

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 \text{ кв. ед.}$$

8.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

8.2.1. Уравнение кривой задано в декартовой системе координат

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — гладкая (то есть производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Пример 133. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 1$).

Решение. Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y' = (3/2)x^{1/2}$. Таким образом,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} =$$

$$= \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right) \text{ ед.}$$

8.2.2. Кривая задана параметрическими уравнениями

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, ($x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции), то длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2 вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Пример 134. Найти длину дуги кривой $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$.

Решение. Найдем производные по параметру t : $x'_t = -5 \cos^4 t \sin t$, $y'_t = 5 \sin^4 t \cos t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5 \cos^4 t \sin t)^2 + (5 \sin^4 t \cos t)^2} dt = \\ &= 5 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} dt = \frac{5}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2t} dt = \\ &= -\frac{5}{8} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} d(\cos 2t) = -\frac{5}{8\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{3} \cos 2t + \sqrt{1 + 3 \cos^2 2t}) \right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{8} \left[2 - \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right] \text{ ед.} \end{aligned}$$

8.2.3. Кривая задана в полярной системе координат

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то длина дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi.$$

Пример 135. Найти длину дуги кривой $r = \sin^3(\varphi/3)$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

Решение. Имеем $r'_\varphi = \sin^2(\varphi/3) \cos(\varphi/3)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6 \frac{\varphi}{3} + \left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}\right)^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{1}{2} \left[\varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ ед.} \end{aligned}$$

8.3. Вычисление объема тела

8.3.1. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , может быть выражена как функция от x , т.е. в виде $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$), то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси Ox плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Пример 136. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ плоскостями $x = 1$ и $x = 2$.

Решение. Плоскость, перпендикулярная к оси абсцисс в точке x , пересечет шар по окружности радиуса $r = \sqrt{9 - x^2}$. Площадь сечения $S(x) = \pi r^2 = \pi(9 - x^2)$, и следовательно,

$$V = \pi \int_1^2 (9 - x^2) dx = \pi \left(9x - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_1^2 = 6\frac{2}{3}\pi \text{ куб. ед.}$$

8.3.2. Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox , то объем тела вращения

вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = g(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, вращается вокруг оси Oy , то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Пример 137. Вычислить объем тела, образуемого вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси Ox .

Решение. При вращении эллипса вокруг оси Ox образуется тело, называемое эллипсоидом вращения. Из уравнения эллипса видно, что его полуось равна 2, следовательно $-2 \leq x \leq 2$. Разрешив уравнение эллипса относительно y^2 , получим $y^2 = \frac{9}{4}(4 - x^2)$. Объем эллипсоида вращения равен

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 \frac{9}{4}(4 - x^2) dx = \frac{9}{2}\pi \int_0^2 (4 - x^2) dx = \\ &= \frac{9}{2}\pi \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^2 = \frac{9}{2}\pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) = 24\pi \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

8.4. Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) вращается вокруг оси Ox , то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$), то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Пример 138. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от $x = 0$ до $x = \pi/2$.

Решение. Найдем $y' = 2 \cos 2x$, тогда

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4 \cos^2 2x} dx.$$

Произведем замену переменной: $2 \cos 2x = t$, $-4 \sin 2x dx = dt$, $\sin 2x dx = (-1/4)dt$. Найдем пределы интегрирования по t : если $x = 0$, то $t = 2$; если $x = \pi/2$, то $t = -2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 \sqrt{1+t^2} dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{t}{2} \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]_{-2}^2 = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} \right) = \frac{\pi}{2} [2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)] \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

8.5. Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур

Определение 8.1. За статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур принимаются соответствующие моменты условных масс, равномерно распределенных вдоль этих дуг и фигур, с плотностью (линейной или плоскостной), равной единице.

Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) вычисляются по формулам

$$M_x = \int_a^b y dL, \quad M_y = \int_a^b x dL; \quad I_x = \int_a^b y^2 dL, \quad I_y = \int_a^b x^2 dL,$$

где $dL = \sqrt{1+(y')^2} dx$ — дифференциал дуги кривой.

Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y dS = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int_a^b x dS = \int_a^b xy dx;$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 dS = \int_a^b x^2 y dx.$$

В этих формулах $dS = y dx$ — дифференциал площади криволинейной трапеции.

Пример 139. Найти статический момент и момент инерции полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ($-r \leq x \leq r$) относительно оси Ox .

Решение. Вычислим $y' = -x/\sqrt{r^2 - x^2}$, тогда получим

$$M_x = \int_a^b y dL = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = r \int_{-r}^r dx = 2r^2.$$

Находим момент инерции относительно оси Ox :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_a^b y^2 dL = \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \\ &= r \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2r \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Введем подстановку $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$; если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = r$, то $t = \pi/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_x &= 2r \int_0^{\pi/2} r \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= r^3 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = r^3 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}. \end{aligned}$$

8.6. Нахождение координат центра тяжести

Координаты центра тяжести однородной дуги плоской кривой $y = f(x)$, ($a \leq x \leq b$) выражается формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x dL; \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b y dL,$$

где $dL = \sqrt{1 + (y')^2} dx$, а L — длина дуги.

Координаты центра тяжести криволинейной трапеции вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x dS = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx; \quad \bar{y} = \frac{1}{2S} \int_a^b y dS = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx,$$

где $dS = y dx$, а S — площадь фигуры.

Пример 140. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии

$$y = a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}, \quad -a \leq x \leq a.$$

Решение. Так как функция $y(x)$ четная, то кривая симметрична относительно оси Oy , т.е. $\bar{x} = 0$. Остается найти \bar{y} . Имеем $y' = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$,

$$\text{тогда } dL = \sqrt{1 + \left(\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}\right)^2} dx = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} dx.$$

Длина дуги

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 \int_0^a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} dx = a(e^{x/a} - e^{-x/a}) \Big|_0^a = a(e^1 - e^{-1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{a(e^1 - e^{-1})} \int_{-a}^a a \left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)^2 dx = \frac{2}{e^1 - e^{-1}} \int_0^a \left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{e^1 - e^{-1}} \int_0^a \left(1 + \frac{e^{2x/a} + e^{-2x/a}}{2}\right) dx = \frac{1}{e^1 - e^{-1}} \left[x + \frac{a}{2} \left(\frac{e^{2x/a} - e^{-2x/a}}{2}\right) \right]_0^a = \\ &= \frac{a}{(e^1 - e^{-1})} \left(1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{4}\right) \approx 1,2a. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{x} = 0$, $\bar{y} \approx 1,2a$.

Пример 141. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x$ и $3x + y = 4$.

Решение. В пункте 3.1 рассмотрено нахождение площади данной фигуры (см. пример 130; рис. 8.1).

$$S = \frac{32}{3} \text{ кв. ед.}$$

В силу того, что фигура заключена между двумя линиями, для вычисления координат центра тяжести применим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{S} \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx = \frac{3}{32} \int_{-2}^2 x(-3x + 4 - x^2 + 3x) dx = \\ &= \frac{3}{32} \int_{-2}^2 (4x - x^3) dx = 0\end{aligned}$$

Интеграл равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции (см. формулу (6.18)).

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{2S} \int_a^b [(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2] dx = \frac{3}{64} \int_{-2}^2 [(-3x + 4)^2 - (x^2 - 3x)^2] dx = \\ &= \frac{3}{64} \int_{-2}^2 [-x^4 + 6x^3 - 24x + 16] dx = \frac{3}{64} \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} - 12x^2 + 16x \right]_{-2}^2 = \frac{12}{5}\end{aligned}$$

Таким образом, центр тяжести фигуры находится в точке $C\left(0; \frac{12}{5}\right)$.

8.7. Вычисление работы и давления

Работа переменной силы $X = f(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[x_0, x_1]$, вычисляется по формуле

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx.$$

Для вычисления силы давления жидкости применяется закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно ее площади S , умноженной на глубину погружения h , плотность ρ и ускорение силы тяжести g^1 , т.е.

$$P = \rho ghS.$$

Пример 142. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?

Решение. Согласно закону Гука, сила в X Н, растягивающая пружину на x м, равна $X = kx$. Коэффициент пропорциональности k найдем из

¹Иногда в условиях задач используется удельный вес воды $\gamma = \rho g$.

условия: если $x = 0,01$ м, то $X = 1$ Н. Следовательно, $k = 1/0,01 = 100$ и $X = 100x$. Тогда

$$A = \int_0^{0,04} 100x \, dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,08 \text{ Дж.}$$

Пример 143. С помощью подъемного крана извлекают железобетонную надолбу со дна реки глубиной 5 м. Какая работа при этом совершается, если надолба имеет форму правильного тетраэдра (рис. 8.4) с ребром 1 м? Плотность железобетона 2500 кг/м^3 , плотность воды 1000 кг/м^3 .

Решение. Высота тетраэдра $h = \sqrt{6}/3$ м, объем тетраэдра $V = \sqrt{2}/12 \text{ м}^3$. Вес надолбы с учетом Архимедовой силы равен

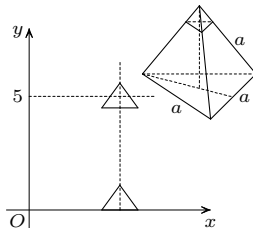


Рис. 8.4. К примеру 143

$$P = \frac{1}{12}\sqrt{2} \cdot 2500 \cdot 9,8 - \frac{1}{12}\sqrt{2} \cdot 1000 \cdot 9,8 = 1225\sqrt{2} \text{ Н.}$$

Поэтому работа при извлечении надолбы до момента появления на поверхности воды ее вершины составляет

$$A_0 = 1225\sqrt{2}(5 - h) = 1225\sqrt{2}(5 - \sqrt{6}/3) \approx 7227,5 \text{ Дж.}$$

Теперь найдем работу A_1 при извлечении надолбы из воды. Пусть вершина тетраэдра вышла на высоту $5 + y$. Тогда объем малого тетраэдра, вышедшего из воды равен $3\sqrt{3}y^3/8$, а вес тетраэдра

$$P(y) = \frac{2500 \cdot 9,8}{12}\sqrt{2} - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}y^3 3\sqrt{3} \right) \cdot 1000 \cdot 9,8.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^h \left(\frac{24500}{12}\sqrt{2} - \frac{9800}{12}\sqrt{2} + \frac{9800}{8}3y^3\sqrt{3} \right) dy = \\ &= \int_0^{\sqrt{6}/3} \left(1225\sqrt{2} + 3675\sqrt{3}y^3 \right) dy = \end{aligned}$$

$$= \left[1225\sqrt{2}y + \frac{3675}{4}\sqrt{3}y^4 \right]_0^{\sqrt{6}/3} \approx 2082,5 \text{ Дж.}$$

Отсюда $A = A_0 + A_1 = 7227,5 \text{ Дж} + 2082,5 \text{ Дж} = 9310 \text{ Дж}$.

Пример 144. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см. Один ее конец соединен с баком, в котором уровень воды на 1 м выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

Решение. Заслонка представляет собой круг радиуса 0,03 м. Разобьем площадь этого круга на элементы — полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента, находящегося на расстоянии y от центра, равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) $dS = 2\sqrt{9 - y^2} dy$. Найдем силу давления, испытываемую этим элементом:

$$dP = 2\rho g(1,03 - y)\sqrt{9 - y^2} dy = 19\,600(1,03 - y)\sqrt{9 - y^2} dy$$

(здесь $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$). Следовательно,

$$\begin{aligned} P &= 19\,600 \int_{-3}^3 (1,03 - y)\sqrt{9 - y^2} dy = \\ &= 19\,600 \left[1,03 \left(\frac{y}{2}\sqrt{9 - y^2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{y}{3} \right) + \frac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2} \right]_{-3}^3 = \\ &= 9\,800 \cdot 9,27\pi \approx 0,09\pi \text{ Н.} \end{aligned}$$

9. Задания типового расчета «Интегральное исчисление и его приложения»

Порядок выполнения и защиты типового расчета

1. Учебное задание выполняется в соответствии с графиком, разработанным кафедрой прикладной математики и информатики.
2. Решение задач необходимо представлять в письменном виде. Нумерация задач должна совпадать с их нумерацией в учебном задании.
3. Во время защиты студент должен уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения учебного задания, решать примеры аналогичного типа.
4. Повторная защита для студентов, не защитивших учебное задание, назначается через неделю.

Вариант 1

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int e^{3x} \sin e^{3x} dx; & \text{б)} \int \frac{dx}{4-9x^2}; & \text{в)} \int x^3 e^{-x^2} dx; \\ \text{г)} \int e^{\sqrt{3}x} \cos x dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}; & \text{е)} \int \frac{3x+11}{x^2-16x+68} dx; \\ \text{ж)} \int \frac{x^4}{\sqrt{(4-x^2)^3}} dx; & \text{з)} \int \sin^5 x \cos^4 x dx; & \text{и)} \int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}; \\ \text{к)} \int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_5^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}; & \text{б)} \int_0^1 \arcsin x dx; & \text{в)} \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{1/x^2} dx; \\ \text{г)} \int_0^{\pi/4} \cos x \sin 3x dx; & \text{д)} \int_1^2 \frac{dx}{x^2-8x+16}. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{16+x^2}; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{\sqrt[7]{x^{21}+5}} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$, ($x \geq 0$).

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = 4 \cos 3\varphi$ и окружностью $r = 2$, ($r \geq 2$).

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 3 - \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/3$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $\pi/2 \leq t \leq \pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 + 2$, $x = 1$, $y = 1$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$.

8. Вертикальная плотина имеет форму квадрата со стороной $a = 8$ м. Вычислить величину давления на плотину, если верхнее основание лежит на поверхности воды.

Вариант 2

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx; & \text{б) } & \int \frac{\cos x}{2 \sin x + 3} dx; & \text{в) } & \int x^2 \sin x dx; \\ \text{г) } & \int e^x \cos \frac{x}{2} dx; & \text{д) } & \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}; & \text{е) } & \int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}} dx; \\ \text{ж) } & \int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx; & \text{з) } & \int \cos 4x \cos 7x dx; & \text{и) } & \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx; \\ \text{к) } & \int \sqrt{16-x^2} dx. \end{aligned}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\ln 2} x e^{2x} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/3} \sin^2 3x dx;$$

$$\text{г) } \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 6x + 9}; \quad \text{д) } \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_{2/\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx; \quad \text{б) } \int_0^e \ln 2x dx; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r = \cos 2\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 2 - e^x$, $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^3$, $x \geq 0$.

8. Резервуар, имеющий форму конуса, высота которого равна 12 м, наполнен жидкостью, удельный вес которой $12,74 \text{ Н/м}^3$. Основание конуса представляет собой круг, имеющий 8 м в диаметре. Найти работу, производимую весом жидкости при опорожнении резервуара.

Вариант 3

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx; & \quad \text{б) } \int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx; & \quad \text{в) } \int x \sin 2x dx; \\ \text{г) } \int e^{-x/2} \sin x dx; & \quad \text{д) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}; & \quad \text{е) } \int \frac{5x + 8}{x^2 + 2x + 5} dx; \\ \text{ж) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx; & \quad \text{з) } \int \frac{\cos x dx}{\sin x(1 - \cos x)}; & \quad \text{и) } \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx; \\ \text{к) } \int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x - 3)(x + 1)} dx. \end{aligned}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_9^{16} \frac{dx}{2 - \sqrt{x}}; & \text{б) } \int_1^5 x^2 e^{-x} dx; & \text{в) } \int_0^{\pi/4} \sin 3x \sin x dx; \\ \text{г) } \int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}; & \text{д) } \int_0^{e-2} \ln(x + 2) dx. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_{-\infty}^1 \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx; & \text{б) } \int_0^1 x \ln^2 x dx; & \text{в) } \int_1^{\infty} \frac{x^{10} dx}{x^{13} + 2x + 1}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 4y$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = \sqrt{3} \cos \varphi$, $r = \sin \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$).

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = -\arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2}$, $0 \leq x \leq 1/4$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 9(\cos t - t \sin t)$, $y = 9(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi/3$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x - 1}$, $x = 1/2$, $y = 0$, $y = 1$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$.

8. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления на плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a = 70$ м, нижнее основание $b = 50$ м, высота плотины $h = 20$ м.

Вариант 4

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 2x^2}}; & \text{б) } \int \frac{dx}{(1 + x^2) \arctg x}; & \text{в) } \int x \cos 5x dx; \\ \text{г) } \int e^{x/2} \sin 2x dx; & \text{д) } \int \frac{\sqrt{3x + 1}}{x} dx; & \text{е) } \int \frac{x + 1}{5x^2 + 2x + 1} dx; \\ \text{ж) } \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^4 x}} dx; & \text{з) } \int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}; & \text{и) } \int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}; \end{array}$$

$$\text{к) } \int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{e^x + 5} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{г) } \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx; \quad \text{д) } \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^1 x \ln^2 \frac{x}{2} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1}; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{1 + x^5} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 2x$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = 4 \sin 3\varphi$ и окружностью $r = 2$, ($r \geq 2$).

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 2 + \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}$, $1/4 \leq x \leq 1$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{4}$, $x = 2$, $y = 0$.

8. Тело движется прямолинейно по закону $x = t^3$, где x — длина пути, проходимого за время t . Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости, причем коэффициент пропорциональности равен κ . Найти работу, производимую сопротивлением при перемещении тела от точки $x = 0$ до точки $x = a$.

Вариант 5

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \sqrt{\ln x} \frac{dx}{x}; \quad \text{б) } \int \frac{x^2 dx}{5 - x^6}; \quad \text{в) } \int x e^{-2x} dx;$$

$$\text{г) } \int \sin 2x e^{5x} dx; \quad \text{д) } \int \sin \sqrt{x} dx; \quad \text{е) } \int \frac{2x + 3}{x^2 + 10x + 26} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{4x^3 + x^2 + 2}{x(x-1)(x-2)} dx; \quad \text{з) } \int \sin \frac{x}{4} \cos \frac{3x}{4} dx; \quad \text{и) } \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x};$$

$$\text{к) } \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx;$$

$$\text{г) } \int_5^{10} \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx; \quad \text{д) } \int_0^3 \frac{dx}{(4x+5)^2}.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^1 \ln x dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \operatorname{arctg} x}{x^2 + 2x^3} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ординат и кривой $x = y(y-1)^2$.

б) Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = 2 \cos \varphi$, $r = 2\sqrt{3} \sin \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$).

5. а) Вычислите длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln \sin x$, $\pi/3 \leq x \leq \pi/2$.

б) Вычислите длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 10 \cos^3 t$, $x = 10 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = xe^x$, $x = 1$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

8. Растяжение (удлинение) пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу, затрачиваемую при растяжении пружины на 6 см, если сила, равная 2 Н, удлиняет ее на 1 см.

Вариант 6

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int x e^{-x^2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\ln^4 x}{x} dx; \quad \text{в) } \int (x-7)e^{-2x} dx;$$

$$\text{г) } \int e^{2x} \cos 2x dx; \quad \text{д) } \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x^3}} dx; \quad \text{е) } \int \frac{3x+2}{x^2+x+2} dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx; \quad \text{з)} \int \cos^4 x \sin^3 x dx; \quad \text{и)} \int \frac{dx}{1 + 3 \sin x};$$

$$\text{к)} \int \frac{x^2}{\sqrt{25 - x^2}} dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx; \quad \text{б)} \int_4^9 \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}; \quad \text{в)} \int_1^e x \ln x dx;$$

$$\text{г)} \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx; \quad \text{д)} \int_0^{\pi/6} \cos 2x \sin 4x dx.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а)} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}; \quad \text{б)} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx; \quad \text{в)} \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x} + 3x}{\sqrt{x(x-2)}} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 9 - x^2$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = \sin 3\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4$, $0 \leq x \leq 1/2$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 5 \cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \geq 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4x + 5$, $y = 0$.

8. Котел, имеющий форму полушара радиуса r , наполнен водой. Какую работу необходимо затратить, чтобы выкачать воду из этого котла?

Вариант 7

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\text{а)} \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}; \quad \text{б)} \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}; \quad \text{в)} \int (x^2 + 2x) \cos 2x dx;$$

$$\text{г)} \int \cos x e^{-4x} dx; \quad \text{д)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx; \quad \text{е)} \int \frac{9x + 10}{x^2 - 6x + 10} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}; \quad \text{з) } \int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx; \quad \text{и) } \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5};$$

$$\text{к) } \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9 dx}{(1+x^5)^3}; \quad \text{б) } \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi/8} \cos 3x \sin 5x dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx; \quad \text{д) } \int_0^1 \sqrt{1+3x} dx.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{ctg} x dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{7+x^2}; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^4}{4}$, $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = 6 \sin 3\varphi$ и окружностью $r = 3$, ($r \geq 3$).

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 15/16$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq 3\pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sin \frac{\pi x}{2}$, $y = x^2$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.

8. Плотина имеет форму равнобокой трапеции, две горизонтальные стороны которой имеют длину соответственно 200 м и 50 м, а высота равна 10 м. Вычислить величину давления на плотину, если верхнее, более длинное основание, лежит на уровне поверхности воды.

Вариант 8

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}; & \text{б)} \int 2x(x^2+1)^4 dx; & \text{в)} \int x \sin 7x dx; \\ \text{г)} \int e^{2x} \sin 3x dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}; & \text{е)} \int \frac{3x+4}{x^2+12x+37} dx; \\ \text{ж)} \int \frac{2x^3-40x-8}{x(x+4)(x-2)} dx; & \text{з)} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx; & \text{и)} \int \frac{\cos x}{\sin x(1+\cos x)} dx; \\ \text{к)} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}. \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}; & \text{б)} \int_0^{\pi/6} \cos 5x \cos x dx; & \text{в)} \int_0^1 x^2 e^{3x} dx; \\ \text{г)} \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^4} dx; & \text{д)} \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}. \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; & \text{б)} \int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}; & \text{в)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{13} dx}{(x^5+x^3+1)^3}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sin 2x$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = \cos 3\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 1 - \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/6$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 8(\cos t + t \sin t)$, $y = 8(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi/4$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^2$, $y = 1$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболой $y = 3x - x^2$ и осью абсцисс.

8. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 6 см, если для сжатия ее на 1 см требуется сила в 1 Н.

Вариант 9

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 + 36}}; & \text{б) } \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}; & \text{в) } \int \operatorname{arctg} x dx; \\ \text{г) } \int e^{-x} \sin x dx; & \text{д) } \int \frac{dx}{e^x + 1}; & \text{е) } \int \frac{12x - 7}{x^2 + 16x + 65} dx; \\ \text{ж) } \int \sin^4 x \cos^5 x dx; & \text{з) } \int \frac{dx}{1 - 2 \cos x}; & \text{и) } \int \sqrt{256 - x^2} dx; \\ \text{к) } \int \frac{4x^4 + 2x^2 - x - 3}{x(x-1)(x+1)} dx. \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx; & \text{б) } \int_0^{\ln 2} x e^x dx; & \text{в) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{3 \cos^2 x - 1} dx; \\ \text{г) } \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx; & \text{д) } \int_2^4 \frac{x^2}{1-x^2} dx. \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx; & \text{б) } \int_0^1 x \ln x dx; & \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x^2+2)}}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = \cos \varphi$, $r = \sqrt{2} \sin(\varphi + \pi/4)$, $(-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2)$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln(x^2 - 1)$, $2 \leq x \leq 3$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 2,5(t - \sin t)$; $y = 2,5(1 - \cos t)$; $\pi/2 \leq t \leq \pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = x$, $x \geq 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x - 2$, $y = x - 1$.

8. Вертикальная плотина имеет форму параболического сегмента, высота

которого $h = 12$ м, а верхнее основание совпадает с уровнем воды и имеет длину $a = 30$ м. Вычислить силу давления воды на плотину.

Вариант 10

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{8x^4 - 1}}; & \text{б)} \int \left(\frac{1 - 2^x}{2^x} \right)^2 dx; & \text{в)} \int x^3 \ln x dx; \\ \text{г)} \int e^x \sin 4x dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}; & \text{е)} \int \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2}} dx; \\ \text{ж)} \int \frac{3x^3 + 25}{x^2 + 3x + 2} dx; & \text{з)} \int \cos^6 x dx; & \text{и)} \int \frac{dx}{1 - 3 \cos x}; \\ \text{к)} \int \sqrt{49 - x^2} dx. \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^1 \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5}; & \text{б)} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx; & \text{в)} \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}; \\ \text{г)} \int_0^{\pi/3} x \cos 3x dx; & \text{д)} \int_0^2 (x + 2) \sqrt{x^2 + 4x} dx. \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(4 + 3x)^3}; & \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{x - 1}{\sqrt[5]{x^3}} dx; & \text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^4 + 5x^2 + 1}}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и кривой $y = x(x - 1)^2$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = \sin \varphi$, $r = \sqrt{2} \cos(\varphi - \pi/4)$, ($0 \leq \varphi \leq 3\pi/4$).

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 4 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1/2$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 5 \cos^3 t$, $y = 5 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной ли-

ниями $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x$, $x = 0$, $x \geq 0$.

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из сосуда, имеющего форму прямого круглого конуса с вертикальной осью, обращенной вершиной вниз, если радиус основания конуса $r = 2$ м и высота $h = 5$ м.

Вариант 11

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx; & \text{б)} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}; & \text{в)} \int x^3 \sin x \, dx; \\ \text{г)} \int e^{-x} \cos 2x \, dx; & \text{д)} \int x\sqrt{4+x} \, dx; & \text{е)} \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} \, dx; \\ \text{ж)} \int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} \, dx; & \text{з)} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} \, dx; & \text{и)} \int \frac{dx}{3-5\cos x}; \\ \text{к)} \int \frac{dx}{\sqrt{(25+x^2)^3}}. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, dx; & \text{б)} \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx; & \text{в)} \int_0^{\pi} \sin x \sin 2x \, dx; \\ \text{г)} \int_1^4 (x-1)^{10} \, dx; & \text{д)} \int_0^4 \frac{dx}{(x+1)(x+2)}. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} \, dx; & \text{б)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}; & \text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin 5x}{\sqrt[3]{x^5+8x^4+2}} \, dx. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной трехлепестковой розой $r = 6 \cos 3\varphi$ и окружностью $r = 3$, ($r \geq 3$).

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x$, $0 \leq x \leq 8/9$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/3$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 5x - 6$ и осью абсцисс.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 2 - x^2$, $x = 0$, $x \geq 0$.

8. Из цилиндрической цистерны выкачивается жидкость. Какую работу надо совершить при этом, если длина цистерны равна 15 м, а радиус 2 м?

Вариант 12

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \frac{x^2 dx}{2x^3 + 3}; & \text{б)} \int \frac{2^x 3^x}{9^x - 4^x} dx; & \text{в)} \int x \cos 3x dx; \\ \text{г)} \int e^x \sin \frac{x}{3} dx; & \text{д)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}; & \text{е)} \int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx; \\ \text{ж)} \int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx; & \text{з)} \int \cos 2x \sin 4x dx; & \text{и)} \int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}; \\ \text{к)} \int \frac{dx}{\sqrt{(64 - x^2)^3}}. \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx; & \text{б)} \int_0^3 x^2 e^{-x} dx; & \text{в)} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx; \\ \text{г)} \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; & \text{д)} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx. \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} dx; & \text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx; & \text{в)} \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}} dx. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 8$, $x + y = 9$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1 - \cos \varphi)$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 1 - \ln \sin x$, $\pi/3 \leq x \leq \pi/2$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/4$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^4$, $y = x$.

8. Какую работу нужно затратить, чтобы насыпать кучу конической формы с радиусом $R_M = 10$ м и высотой $H_M = 4$ м, если удельный вес песка равен 19600 Н/м^3 ?

Вариант 13

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}; & \text{б) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}; & \text{в) } \int (4 - x)e^{-3x} dx; \\ \text{г) } \int 2 \sin(\ln x) dx; & \text{д) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + 2x}}; & \text{е) } \int \frac{8x - 3}{x^2 + 6x + 10} dx; \\ \text{ж) } \int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx; & \text{з) } \int \sin^4 x dx; & \text{и) } \int \frac{dx}{6 + 3 \sin x}; \\ \text{к) } \int \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} dx. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}; & \text{б) } \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx; & \text{в) } \int_0^1 \frac{2^{2x-1} - 3^{2x+3}}{6^{2x}} dx; \\ \text{г) } \int_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi/2)} e^x \cos e^x dx; & \text{д) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^3}} dx; \quad \text{б) } \int_2^{+\infty} \frac{\arccos(1/x)}{x^2} dx; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^6 + x^3 + 1}} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}$, $y = e^{-2x}$, $x = 1$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = \cos \varphi$, $r = \sin \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$).

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq 7/9$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 4(\cos t + t \sin t)$, $y = 4(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 1$, $y = -2x^2 + 1$, $y = 0$, $x \geq 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$, осями координат и прямой $x = \pi/4$.

8. Скорость точки изменяется по закону $v = 2(6-t)$ м/с. Каково наибольшее удаление точки от начала движения?

Вариант 14

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

б) $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x};$

в) $\int \ln 2x dx;$

г) $\int e^{-x/2} \cos x dx;$

д) $\int \frac{x dx}{(x+2)\sqrt{x+1}};$

е) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx;$

ж) $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx;$

з) $\int \operatorname{ctg}^5 x dx;$

и) $\int \frac{dx}{5-3 \cos x};$

к) $\int x^2 \sqrt{16-x^2} dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}};$

б) $\int_0^1 x e^{3x} dx;$

в) $\int_{\pi/4}^{\pi/6} \frac{dx}{\sin x \cos x};$

г) $\int_0^{\ln \sqrt{2}} e^{2x} \cos e^{2x} dx;$

д) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx;$

б) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx;$

в) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x^2+1}} dx.$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$, $x - y = 1$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат $r = 2(2 + \cos \varphi)$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = -\ln \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/6$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos(x/5)$, $y = \arccos(x/3)$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

8. Какую работу надо совершить, чтобы поднять массу m с поверхности земли на высоту h ?

Вариант 15

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int e^{2x}(5 - e^x)^2 dx$; б) $\int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos 2x)^2}$; в) $\int (x^2 - 1)e^{3x} dx$;

г) $\int e^x \sin 3x dx$; д) $\int \frac{dx}{3 - \sqrt{x}}$; е) $\int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx$;

ж) $\int \frac{-x^5 + 25x^3 + 1}{x^2 + 5x} dx$; з) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$; и) $\int \frac{dx}{6 - 3 \cos x}$;

к) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$; б) $\int_1^e \ln^2 x dx$; в) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}$;

г) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x - 30}$; д) $\int_0^{\pi/6} \cos 2x \sin x dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\arcsin(1/x)}{x^2} dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = \cos \varphi$, $r = 2 \cos \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leq x \leq 1$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 2 \cos^3 t$, $y = 2 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/4$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - 2x^2 + x$, $y = 1 - x$.

8. Деревянный бак цилиндрической формы, площадь основания которого $S = 3000 \text{ см}^2$, а высота $H = 40 \text{ см}$, плавает на поверхности воды. Удельный вес дерева $\gamma = 0,8 \text{ г/см}^3$. Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить бак из воды?

Вариант 16

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \frac{x dx}{2x^2 + 3}; & \text{б)} \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}; & \text{в)} \int x^3 \cos x dx; \\ \text{г)} \int e^x \sin 2x dx; & \text{д)} \int \sqrt{e^x - 1} dx; & \text{е)} \int \frac{3x + 3}{x^2 + 6x + 10} dx; \\ \text{ж)} \int \cos^5 x dx; & \text{з)} \int \frac{dx}{3 + 6 \cos x}; & \text{и)} \int \frac{dx}{\sqrt{(9 + x^2)^3}}; \\ \text{к)} \int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx. \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^3 \frac{x dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}; & \text{б)} \int_0^1 x e^{-2x} dx; & \text{в)} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \cos x}{x + \sin x} dx; \\ \text{г)} \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx; & \text{д)} \int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx. \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[5]{x^{10} + 5x}} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^3 = x$, $y = 1$, $x = 8$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = \sin \varphi$, $r = 2 \sin \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 3/4$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $\pi/6 \leq t \leq \pi/4$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 4x - 2x^2$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $x = y^2 - 1$, $x = 1$, $y \geq 0$.

8. Скорость движения точки меняется по закону $v = (100 + 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 10 минут после начала движения.

Вариант 17

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{25 - 4x^2}}; & \text{в) } \int x \ln 3x dx; \\ \text{г) } \int e^{-x} \sin 3x dx; & \text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}; & \text{е) } \int \frac{5x + 3}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}} dx; \\ \text{ж) } \int \frac{2x^3 - 1}{x^2 + x - 6} dx; & \text{з) } \int \sin^4 x \cos^4 x dx; & \text{и) } \int \frac{dx}{4 - 3 \sin x}; \\ \text{к) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}}. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_0^1 x \sqrt{2 - x^2} dx; & \text{б) } \int_0^{13} \frac{x + 1}{\sqrt[3]{2x + 1}} dx; & \text{в) } \int_0^2 (x + 2)e^{-3x} dx; \\ \text{г) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; & \text{д) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} x \cos 2x dx; \quad \text{в) } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $y = x - 1$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 7 - e^x$; $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos(x/3)$, $y = \arccos(x)$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x^3$.

8. Вычислить давление воды, испытываемое прямоугольным шлюзом, имеющим 10 м в ширину и 12 м в глубину, если шлюз доверху наполнен водой ($\gamma = 9,8 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$).

Вариант 18

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \frac{x dx}{2 + x^4}; & \quad \text{б) } \int e^{3 \cos x} \sin x dx; & \quad \text{в) } \int (x - 1)e^{2x} dx; \\ \text{г) } \int 3 \sin(\ln x) dx; & \quad \text{д) } \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}; & \quad \text{е) } \int \frac{3x - 11}{x^2 - 8x + 20} dx; \\ \text{ж) } \int \sqrt{4 - x^2} dx; & \quad \text{з) } \int \frac{dx}{\cos^4 x}; & \quad \text{и) } \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x}; \\ \text{к) } \int \frac{x^3 dx}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)}. \end{aligned}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \cos 3x \sin x dx; \quad \text{б) } \int_1^3 x^3 \sqrt{x^2 - 1} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos x^2 dx;$$

$$\text{г) } \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad \text{д) } \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x dx.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x^2}; \quad \text{б) } \int_{1/2}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^{10}+x^5+1}}.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^2$, $y = x^2$, $x = 0$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат $r = 3 + 2 \cos \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = e^x + 13$, $\ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой $y = 2x - x^2$.

8. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 8 см, если для сжатия ее на 1 см требуется сила в 0,05 Н.

Вариант 19

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int x \sqrt{1+2x^2} dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}; & \text{в) } \int x \sin 5x dx; \\ \text{г) } \int 2 \cos(\ln x) dx; & \text{д) } \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx; & \text{е) } \int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx; \\ \text{ж) } \int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx; & \text{з) } \int \operatorname{ctg}^3 x dx; & \text{и) } \int \frac{dx}{4+3 \cos x}; \\ \text{к) } \int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx; & \text{б)} \int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx; & \text{в)} \int_0^{1/2} \arccos x dx; \\ \text{г)} \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dx}{e^x - 1}; & \text{д)} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; & \text{б)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; & \text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4}}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = y^2$, $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 1 - \cos \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \leq x \leq 2$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 5(t - \sin t)$, $x = 5(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$, $x \geq 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной прямыми $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$.

8. Котел имеет форму параболоида вращения глубиной $H = 0,5$ м и радиусом основания $R = 0,4$ м. Определить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из такого наполненного котла.

Вариант 20

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}; & \text{б)} \int \frac{x dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}; & \text{в)} \int x^2 e^{3x} dx; \\ \text{г)} \int e^{2x} \sin x dx; & \text{д)} \int \cos \sqrt{x} dx; & \text{е)} \int \frac{10x-7}{x^2-8x+20} dx; \\ \text{ж)} \int \operatorname{tg}^3 x dx; & \text{з)} \int \frac{dx}{3-\sin x}; & \text{и)} \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}; \\ \text{к)} \int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)} dx. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_0^{\pi} \sin^2 3x \, dx; & \text{б) } \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx; & \text{в) } \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} \, dx; \\ \text{г) } \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} \, dx; & \text{д) } \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}. \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}; & \text{б) } \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} x \, dx; & \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(x + \sqrt{x+1})^3}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -3x + 4$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = (5/2) \sin \varphi$, $r = (3/2) \sin \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1$, $0 \leq x \leq 9/16$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 4 \cos^3 t$, $y = 4 \sin^3 t$, $\pi/6 \leq t \leq \pi/4$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{1-x}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2 + x$, $y = x^2$.

8. Найти силу давления, испытываемую полукругом радиуса $r = 3$ м, погруженным в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды.

Вариант 21

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int x \cos x^2 \, dx; & \text{б) } \int \frac{\cos 2x}{2 + 3 \sin 2x} \, dx; & \text{в) } \int (3x + 4) \sin x \, dx; \\ \text{г) } \int e^{-x} \cos x \, dx; & \text{д) } \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}}; & \text{е) } \int \frac{4x - 3}{x^2 + 4x + 5} \, dx; \\ \text{ж) } \int \frac{-x^5 + 9x^3 + 4}{x^2 + 3x} \, dx; & \text{з) } \int \cos^4 x \, dx; & \text{и) } \int \frac{dx}{4 - 5 \cos x}; \\ \text{к) } \int x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx. \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}; & \text{б) } \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx; & \text{в) } \int_1^2 \ln 3x \, dx; \\ \text{г) } \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + x}; & \text{д) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{1/x} \, dx. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{2x} \, dx; & \text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; & \text{в) } \int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x \, dx}{\sqrt{x^8 + 3x^5 + 1}}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = (3/2) \cos \varphi$, $r = (5/2) \cos \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \frac{1 - e^x - e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 3$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = e^t (\cos t + \sin t)$, $y = e^t (\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 3 \sin x$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

8. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H = 5$ м и радиусом основания $R = 2$ м.

Вариант 22

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{dx}{9x^2 - 25}; & \text{б) } \int (x+2)e^{x^2+4x+3} \, dx; & \text{в) } \int \ln(x^2 + 1) \, dx; \\ \text{г) } \int e^{3x} \cos 2x \, dx; & \text{д) } \int \frac{\sqrt{x} + 1}{x-1} \, dx; & \text{е) } \int \frac{17x-3}{x^2 + 8x + 32} \, dx; \\ \text{ж) } \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx; & \text{з) } \int \frac{dx}{\sin x(1 + \cos x)}; & \text{и) } \int x^2 \sqrt{9-x^2} \, dx; \end{array}$$

$$\text{к) } \int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx; \quad \text{в) } \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$$

$$\text{г) } \int_4^9 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}; \quad \text{д) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{(x+1)^3}}{2x^3 + \sqrt[3]{x^5} + 1} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -\sin 2x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \geq 0$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной восьмилепестковой розой $r = 4 \cos 4\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = e^x + 26$; $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/3$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $x + 3y = 4$, $x = 4$.

8. Вычислить силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, имеющие 20 м в ширину и 16 м в глубину, если их верхняя грань лежит на поверхности воды ($\gamma = 9,8 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$).

Вариант 23

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{б) } \int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx; \quad \text{в) } \int x^2 \cos x dx;$$

$$\text{г) } \int e^{-x} \cos 4x dx; \quad \text{д) } \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx; \quad \text{е) } \int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx; \quad \text{з) } \int \sin x \sin 3x dx; \quad \text{и) } \int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2};$$

$$\text{к) } \int x^2 \sqrt{25 - x^2} dx.$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^3 \ln(x + 3) dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx; \quad \text{в) } \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}};$$

$$\text{г) } \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 4}} dx; \quad \text{д) } \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx.$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + x^3} dx; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{x + \sqrt{x+1}}{x^2 + 2\sqrt[5]{x^4 + 1}} dx.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $x = 0$, $y = 2$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной двенадцатилепестковой розой $r = \sin 6\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 2 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 6(\cos t + t \sin t)$, $y = 6(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x - 2$, $y = x^3$, $y = 0$, $y = 1$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$.

8. Конус, радиус основания которого $R = 40$ см, высота $H = 20$ см, плавает на поверхности воды сверху. Плотность материала, из которого сделан конус, $\rho = 0,9$ г/см³. Какую работу нужно затратить, чтобы погрузить конус полностью в воду?

Вариант 24

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{2 + 3x^2}; \quad \text{б) } \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \text{в) } \int x^3 e^{-x^2} dx;$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{г)} \int \sin(\ln x) dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; & \text{е)} \int \frac{4x+3}{\sqrt{x^2-6x-16}} dx; \\
 \text{ж)} \int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx; & \text{з)} \int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}; & \text{и)} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}; \\
 \text{к)} \int \frac{2x^4+2x^3-41x^2+20}{x(x-4)(x+5)} dx.
 \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int_1^2 \frac{x dx}{4+x^4}; & \text{б)} \int_0^\pi x^2 \sin x dx; & \text{в)} \int_8^{15} \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}; \\
 \text{г)} \int_0^{\pi/8} \operatorname{tg} 2x dx; & \text{д)} \int_0^3 \sqrt[3]{8-2x} dx.
 \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int_{-1}^0 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x+1}}; & \text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}; & \text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sqrt[3]{x^4+2x-1}} dx.
 \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 6x + 10$, $y = -x$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = 2 \cos \varphi$, $r = 3 \cos \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \frac{\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$, $1 \leq x \leq 3$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $\pi \leq t \leq 2\pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $x = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $x = 2$, $y = 0$, $y \geq 0$.

8. Деревянная прямоугольная балка, размеры поперечного сечения которой $a = 0,4$ м, $b = 0,2$ м $l = 4,5$ м, плавает на поверхности воды. Удельный вес дерева $\gamma = 0,8$ г/см³. Вычислить работу, необходимую для извлечения балки из воды.

Вариант 25

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{x dx}{2x^4 + 5}; & \text{б) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx; & \text{в) } \int (x^2 - 2)e^x dx; \\ \text{г) } \int e^{3x} \cos x dx; & \text{д) } \int \frac{dx}{e^x(3 + e^{-x})}; & \text{е) } \int \frac{17x + 5}{x^2 - 12x + 40} dx; \\ \text{ж) } \int \frac{3x^5 - 12x^3 - 7}{x^2 + 2x} dx; & \text{з) } \int \sin^5 x dx; & \text{и) } \int \frac{dx}{5 - 4 \cos x}; \\ \text{к) } \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_{-1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}; & \text{б) } \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}; & \text{в) } \int_0^1 \frac{1 + x}{1 - x} dx; \\ \text{г) } \int_0^1 e^{x+e^x} dx; & \text{д) } \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-3}}; & \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; & \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{x^5 + 7}{\sqrt[3]{x^7 + 2x^5 + 1}} dx. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x^2 - 1$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = 3(1 - \cos \varphi)$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos \sqrt{x} + 5$, $1/9 \leq x \leq 1$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 8 \cos^3 t$, $y = 8 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/6$

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - x$.

8. Точка движется по оси Ox , начиная от точки $M(1, 0)$, так что скорость ее равна абсциссе. Где она будет через 10 с от начала движения?

Вариант 26

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}; & \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}; & \text{в)} \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx; \\ \text{г)} \int e^{\sqrt{2}x} \sin x dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x + 1}}; & \text{е)} \int \frac{7x - 3}{x^2 + 6x + 13} dx; \\ \text{ж)} \int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx; & \text{з)} \int \frac{dx}{1 + \cos x - \sin x}; & \text{и)} \int \frac{dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}; \\ \text{к)} \int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x - 1)(x + 1)(x - 5)} dx. \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx; & \text{б)} \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx; & \text{в)} \int_0^{\pi/3} x \cos 3x dx; \\ \text{г)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x} + 1} dx; & \text{д)} \int_1^e \frac{dx}{x(\ln x + 1)}. \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}; & \text{б)} \int_{-2}^3 \frac{x dx}{\sqrt{x + 2}}; & \text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2 + x\sqrt{x}} dx. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной восьмилепестковой розой $r = 2 \sin 4\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln(\cos x) + 2$; $0 \leq x \leq \pi/6$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sin^2 x$, $x = \pi/2$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 1)^2$; $y = 1$.

8. Вычислить работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из цилиндрического бассейна с радиусом основания 0,5 см, если в начальный

момент уровень воды в бассейне равен 2,8 м и на 0,2 м ниже выпускающего воду отверстия в цилиндре.

Вариант 27

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx; & \text{б)} \int \frac{dx}{1+2x^2}; & \text{в)} \int \arcsin x dx; \\
 \text{г)} \int e^{-2x} \cos 3x dx; & \text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}; & \text{е)} \int \frac{5x+16}{x^2+2x+17} dx; \\
 \text{ж)} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}; & \text{з)} \int \frac{dx}{\sin x(1-\cos x)}; & \text{и)} \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}; \\
 \text{к)} \int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.
 \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}; & \text{б)} \int_0^{\pi/4} \sin 2x \cos 4x dx; & \text{в)} \int_0^{\pi/3} x^2 \sin x dx; \\
 \text{г)} \int_1^e \frac{\ln x + \sqrt{x}}{x} dx; & \text{д)} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx.
 \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; & \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx; & \text{в)} \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[7]{1+2x^2}}{\sqrt[5]{x^3+6}} dx.
 \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = -x$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной двенадцатилепестковой розой $r = 2 \cos 6\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = e^x + e$; $\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t$, $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin \frac{x}{5}$, $y = \arcsin x$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из корыта, имеющего форму полуцилиндра. Радиус цилиндра $R = 2$ м, длина $l = 6$ м.

Вариант 28

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x \ln x}$;

б) $\int \frac{2 - x^4}{1 + x^2} dx$;

в) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int 3 \cos(\ln x) dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1)}$;

е) $\int \frac{8x - 7}{x^2 + 10x + 29} dx$;

ж) $\int \frac{x^4}{\sqrt{(25 - x^2)^3}} dx$;

з) $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$;

и) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x}$;

к) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)} dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$;

б) $\int_0^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x dx$;

в) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$;

г) $\int_0^2 \frac{4 - x^2}{3 + x^2} dx$;

д) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}(x+1)}$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$;

б) $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;

в) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2 + x + 2}}$.

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = x^2 - 8$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемниской $r^2 = 9 \cos 2\varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1/4$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 3(\cos t + t \sin t)$, $y = 3(\sin t - t \cos t)$, $\pi \leq t \leq 2\pi$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = x^2$.
7. Найти координаты центра тяжести полукруга, ограниченного линией $y = \sqrt{9 - x^2}$ и осью абсцисс.
8. Ускорение точки $a = (3t^2 + 42t + 18)$ м/с. Найти скорость и путь, пройденный точкой за промежуток 5 с, прошедший от начала движения.

Вариант 29

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{\arccos^2 x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx; & \text{б) } \int \frac{dx}{9x^2 + 4}; & \text{в) } \int \arccos x dx; \\ \text{г) } \int e^{4x} \sin 2x dx; & \text{д) } \int e^{\sqrt{x}} dx; & \text{е) } \int \frac{8x - 7}{x^2 - 2x + 17} dx; \\ \text{ж) } \int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{x(x - 4)(x - 3)} dx; & \text{з) } \int \operatorname{ctg}^3 x dx; & \text{и) } \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x}; \\ \text{к) } \int \frac{dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}}. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx; & \text{б) } \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5 - 4x}}; & \text{в) } \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx; \\ \text{г) } \int_0^{\pi/6} \sin 5x \sin x dx; & \text{д) } \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3 dx}{(5/8 - x^4)^{3/2}}. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\text{а) } \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} x \sin x dx; \quad \text{в) } \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} \cos x dx}{\sqrt[3]{1 + x^2 + 2x^6}}.$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ординат и линиями $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3} \cos x$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = 3 \sin \varphi$, $r = 5 \sin \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = e^x + 6$; $\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$, $\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$.

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 1$, $x = 2$, $y = 0$.

7. Найти координаты центра тяжести четверти круга $x^2 + y^2 = 64$, заключенного в первой четверти.

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен 2 м и высота 6 м ($\gamma = 9,8 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$).

Вариант 30

1. Вычислить неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int x\sqrt{x^2+1} dx; & \text{б)} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2} dx; & \text{в)} \int x^5 e^{x^2} dx; \\ \text{г)} \int \cos(\ln x) dx; & \text{д)} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx; & \text{е)} \int \frac{3x-2}{x^2+4x+8} dx; \\ \text{ж)} \int \frac{x^3-3x^2-12}{x(x-4)(x-2)} dx; & \text{з)} \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^4 x} dx; & \text{и)} \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}; \\ \text{к)} \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx. & & \end{array}$$

2. Вычислить определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx; & \text{б)} \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sqrt{e^x-1} dx; & \text{в)} \int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx; \\ \text{г)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+12x+20}; & \text{д)} \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^3 x}. & \end{array}$$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^{+\infty} x \cos x dx; & \text{б)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}; & \text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}. \end{array}$$

4. а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в полярной системе координат $r = 2 \sin \varphi$, $r = 4 \sin \varphi$.

5. а) Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением $y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \leq x \leq 4$.

б) Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = 6 \cos^3 t$, $y = 6 \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/3$

6. Найти объем тела вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$, $y = x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 1$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$, $y = 4 - x$.

8. Вертикальная плотина имеет форму параболического сегмента, высота которого $h = 16$ м, а основание совпадает с уровнем воды и имеет длину $a = 40$ м. Вычислить силу давления воды на плотину ($\gamma = 9,8 \cdot 10^3$ Н/м³).

10. Теоретические вопросы

1. Дайте определение первообразной функции или интеграла от заданной функции $f(x)$.
2. Какова общая формула записи всех первообразных от заданной функции $f(x)$?
3. Что называется неопределенным интегралом от $f(x)$; как он обозначается? Что такое подынтегральное выражение и подынтегральная функция?
4. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения.
5. В чем разница между выражениями $d \int f(x) dx$ и $\int dF(x)$?
6. Докажите, что $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$, где a — постоянная, не равная нулю.
7. Чему равен интеграл от суммы дифференциалов?
8. На каком свойстве дифференциала основан метод замены переменной или подстановки? При каких условиях этот метод применим?
9. Покажите, что правило интегрирования по частям есть следствие правила дифференцирования произведения функций.
10. Назовите классы интегралов, которые можно вычислить интегрированием по частям.
11. Перечислите четыре типа простых дробей и методы их вычисления.
12. В чем состоит применение метода неопределенных коэффициентов к разложению правильной дроби на сумму простых.
13. С помощью каких функций выражается в конечном виде интеграл от любой рациональной функции?
14. В каких случаях интегрируется биномиальный дифференциал?
15. Назовите универсальную подстановку, с помощью которой всегда достигается рационализация дифференциала вида $R(\sin x, \cos x) dx$, и покажите, как ею пользоваться.
16. В каких случаях рационализация дифференциала $R(\sin x, \cos x) dx$, достигается подстановкой $\cos x = t$?
17. В каких случаях рационализация дифференциала $R(\sin x, \cos x) dx$, достигается подстановкой $\sin x = t$?
18. Понятие интегральной суммы. Определенный интеграл. Теорема существования.
19. Основные свойства определенного интеграла.
20. Теорема о среднем.

- 21.** Производная интеграла по переменному верхнему пределу.
- 22.** Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница.
- 23.** Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям.
- 24.** Приближенные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников и трапеций; метод параболических трапеций (метод Симсона).
- 25.** Интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Интегралы от неограниченных разрывных функций. Основные свойства.
- 26.** Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов. Признаки сходимости несобственных интегралов.
- 27.** Вычисление площади плоских фигур с помощью определенных интегралов.
- 28.** Вычисление объема тела с помощью определенных интегралов.
- 29.** Вычисление дуги кривой. Дифференциал длины дуги.
- 30.** Вычисление площади поверхности вращения.
- 31.** Вычисление моментов и координат центров тяжести.

Список литературы

- [1] *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2008. 640 с.
- [2] *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. СПб.: Профессия, 2007. 432 с.
- [3] *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа. М.: Лань, 2010. 736 с.
- [4] *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 416 с.
- [5] *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Мир и Образование, Астрель, Оникс, 2012. 368 с.
- [6] *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, Астрель, 2009, 560 с.
- [7] *Кузнецов Л. А.* Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты. М.: Лань, 2008. 240 с.
- [8] *Натансон И. П.* Краткий курс высшей математики. М.: Лань, 2009. 736 с.
- [9] *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М.: Интеграл-пресс, 2009. 544 с.
- [10] *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Лаборатория базовых знаний, Физматлит, 2010. 672 с.
- [11] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Лань, 2009. 800 с.

Содержание

Предисловие	1
1. Неопределенный интеграл и основные методы интегрирования	2
1.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенных интегралов. Таблица основных интегралов	2
1.2. Непосредственное интегрирование	6
1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле	10
1.4. Метод интегрирования по частям	23
2. Таблица основных интегралов	30
3. Интегрирование рациональных функций	31
3.1. Интегрирование простейших дробей	33
3.2. Интегрирование рациональных функций в общем случае	41
4. Интегрирование некоторых типов иррациональных функций	48
4.1. Интегралы вида $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$	48
4.2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^k \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ($\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$)	52
4.3. Интегралы вида $\int R \left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots \right) dx$.	53
5. Интегрирование тригонометрических функций	56
5.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$	56
5.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$	59
5.3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$ и $\int \sin mx \sin nx dx$	63
5.4. Тригонометрические подстановки	64
6. Определенный интеграл	67
6.1. Понятие определенного интеграла. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций	67
6.2. Основные свойства определенного интеграла	70

6.3.	Интеграл с переменным верхним пределом. Непосредственное вычисление определенных интегралов	73
6.4.	Замена переменной в определенном интеграле	75
6.5.	Интегрирование по частям в определенном интеграле	80
7.	Несобственный интеграл	82
7.1.	Определение несобственных интегралов первого и второго рода	82
7.2.	Основные свойства и методы вычисления несобственных интегралов	90
7.3.	Первая и вторая теоремы сравнения	93
8.	Приложения определенного интеграла	96
8.1.	Вычисление площади плоской фигуры	96
8.1.1.	Уравнения кривых заданы в декартовой системе координат	96
8.1.2.	Кривые заданы параметрическими уравнениями	97
8.1.3.	Кривые заданы в полярной системе координат	98
8.2.	Вычисление длины дуги плоской кривой	98
8.2.1.	Уравнение кривой задано в декартовой системе координат	98
8.2.2.	Кривая задана параметрическими уравнениями	99
8.2.3.	Кривая задана в полярной системе координат	99
8.3.	Вычисление объема тела	100
8.3.1.	Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений	100
8.3.2.	Вычисление объема тела вращения	100
8.4.	Вычисление площади поверхности вращения	101
8.5.	Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур	102
8.6.	Нахождение координат центра тяжести	103
8.7.	Вычисление работы и давления	105
9.	Задания типового расчета «Интегральное исчисление и его приложения»	108
10.	Теоретические вопросы	141
	Список литературы	143

Интегрирование функции одной переменной

Составители *ОГОРОДНИКОВ Евгений Николаевич*
ЗАУСАЕВ Артем Анатольевич

Печатается в авторской редакции

Оригинал-макет подготовлен с помощью
издательской системы \LaTeX 2 ϵ

Подп. в печать 06.05.2013
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. п. л. 8,37.
Уч. изд. л. 8,2. Тираж 200 экз. Рег. N 88/13. Заказ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8.