МИНОБРНАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие для студентов заочного факультета

Самара
Самарский государственный технический университет
2013

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517 (075.8)

Элементы интегрального исчисления: учебное пособие для студентов заочного факультета / Сост. Е. Н. Огородников, А. А. Заусаев. — Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2013. — 110 с.

В работе рассматриваются основные методы решения неопределенных интегралов, приведены способы вычисления определенных и несобственных интегралов, рассмотрены приложения интегрального исчисления в соответствии с программой курса математики.

Приведенные решения типовых примеров должны помочь студенту самостоятельно разобраться в особенностях того или иного метода интегрирования и справиться с задачами, предлагаемыми в учебном задании.

Пособие предназначено для студентов заочного факультета СамГТУ.

УДК 517 (075.8)

Составители: канд. физ.-мат. наук Е. Н. Огородников,
канд. физ.-мат. наук А. А. Заусаев

Рецензент: канд. физ.-мат. наук А. Ю. Смыслов

Предисловие

Интегральное исчисление, изначально возникшее из потребности нахождения площадей, объемов и центров тяжести, в настоящее время играет важную роль в современной математике, физике и их приложениях.

В предлагаемом учебном пособии используется традиционный для технических университетов подход к изложению материала, когда понятие неопределенного интеграла предшествует определению интегрирования как процедуры нахождения предела интегральных сумм, приводящей к понятию определенного интеграла.

Первые пять разделов пособия посвящены методам вычисления неопределенных интегралов от действительной функции одной переменной и некоторым классам интегрируемых в явном виде функций. В шестом и седьмом разделах рассматриваются понятия определенного и несобственного интеграла. Последний, восьмой раздел, посвящен приложениям интегрального исчисления к решению инженерных задач.

Учебное пособие по математике «Элементы интегрального исчисления» предназначено для студентов заочного факультета СамГТУ.

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная систематическая работа над учебным материалом. Поэтому данное пособие снабжено большим количеством разобранных примеров, которые должны помочь студенту самостоятельно разобраться в особенностях того или иного метода интегрирования и справиться с задачами, предлагаемыми в учебном задании.

1. Неопределенный интеграл и основные методы интегрирования

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенных интегралов. Таблица основных интегралов

Одной из основных задач дифференциального исчисления является нахождение производной данной функции. Разнообразные вопросы математического анализа, его многочисленные приложения в геометрии, физике, химии и других науках, а также в сугубо прикладных, технических задачах, приводят к необходимости решения обратной задачи: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой $F'(x)$ была бы равна функции $f(x)$, т.е. имело место равенство $F'(x) = f(x)$. Можно сказать, что восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из основных задач интегрального исчисления.

Будем, как обычно, обозначать $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ — множество действительных чисел. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ — некоторое подмножество множества $\mathbb{R}$. В частности, Ω может быть отрезком $[a, b]$, где $a, b \in \mathbb{R}$; интервалом (a, b); полуинтервалами $[a, b)$ или $(a, b]$; объединением их конечного множества или, наконец, всей числовой осью.

Определение 1.1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором множестве Ω, если для всех значений x из этого множества выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, так как равенство $(\sin x)' = \cos x$ выполняется при любом значении x.

Пример 2. Функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в интервале $(-1; 1)$, хотя сама первообразная $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$.

Пример 3. Функция $F(x) = \sqrt{(1-x^2)^3}$ будет являться первообразной для функции $f(x) = -3x\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$, т.к. равенство

$$F'(x) = [(1-x^2)^{3/2}]' = \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x) = -3x(1-x^2)^{1/2} = f(x)$$

выполняется в любой точке x отрезка $[-1; 1]$.

Пример 4. Функция $F(x) = \ln|x|$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, так как

$$F'(x) = (\ln|x|)' = \left[\begin{array}{cc} (\ln x)', & x > 0 \\ (\ln(-x))', & x < 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}, & x < 0 \end{array}\right] = \frac{1}{x} = f(x)$$

для любого $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Нетрудно заметить, что если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$. Действительно,

$$[F(x) + C]' = F'(x) + (C)' = F'(x) = f(x).$$

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. Пусть $\Phi(x)$ и $F(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$ на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$. Тогда для всех $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где C — некоторая постоянная.

Определение 1.2. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)\,dx = dF(x)$) называется совокупность всех ее первообразных.

Неопределенный интеграл обозначают $\displaystyle\int f(x)\,dx$ (читается: неопределенный интеграл $f(x)$ на (по) dx) и записывают

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.2}$$

где $\int$ — символ неопределенного интеграла, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования, $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, C — произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

$$1^\circ.\ \int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x) + C; \tag{1.3}$$

$$2^\circ.\ \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x); \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx; \tag{1.4}$$

$$3^\circ.\ \int \big[af(x) \pm bg(x)\big]\,dx = a\int f(x)\,dx \pm b\int g(x)\,dx; \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Все эти свойства непосредственно следуют из определений 1.1 и 1.2, а также формул (1.1) и (1.2).

Из формулы (1.3), в частности, следует равенство

$$\int dx = x + C, \tag{1.6}$$

а свойство 3° справедливо и для любого конечного числа слагаемых функций:

$$\int \Big[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)\Big]\, dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)\, dx, \quad a_k \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Операцию нахождения неопределенного интеграла от данной функции следует называть неопределенным интегрированием. В этом и следующих разделах 3—5 настоящего пособия, говоря об интеграле и об интегрировании, мы будем иметь ввиду неопределенный интеграл и неопределенное интегрирование.

Таблица основных интегралов.

Большая часть формул этой таблицы непосредственно следует из определения интегрирования, как операции, обратной дифференцированию. Справедливость двух последних легко проверить дифференцированием.

1) $$\int x^\alpha\, dx = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, & \alpha \in \mathbb{R}; \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1; \end{array}\right.$$

2) $$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

в частности, при $a = \mathrm{e}$: $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\, dx = \mathrm{e}^x + C$;

3) $$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

4) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

5) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

6) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

7) $$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$$

8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$$

9) $$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C;$$

10) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$$

Интегралы, содержащиеся в этой таблице, принято называть *табличными*. Это минимальная таблица, которую необходимо выучить наизусть.

Отметим некоторые частные случаи первой формулы таблицы:

▷ при $\alpha = 0$:
$$\int x^0\,dx = \int 1\,dx = x + C,$$
что совпадает с ранее найденным в формуле (1.6) результатом;

▷ при $\alpha = 1$:
$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C;$$

▷ при $\alpha = n$ $(n \in N)$:
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \tag{1.8}$$

▷ при $\alpha = -\frac{1}{2}$:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C; \tag{1.9}$$

▷ при $\alpha = -2$:
$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C. \tag{1.10}$$

Заметим, что при $\alpha = -1$ первую формулу таблицы основных интегралов удобно запоминать в виде
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$
и, вообще, $\displaystyle\int \frac{1}{\varphi(x)}\,dx$ принято записывать как $\displaystyle\int \frac{dx}{\varphi(x)}$.

К таблице основных интегралов полезно добавить формулы интегрирования, связанные с гиперболическими и обратными гиперболическими функциями. Напомним, что синус гиперболический и косинус гиперболический обозначаются соответственно $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ и определяются равенствами $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

Тангенс и котангенс гиперболические обозначаются $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$, и по определению выражаются через функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ по формулам $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

Используя формулы производных этих функций, а также определения и формулы производных обратных к ним функций, получим
$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C; \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$$
$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$
$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = \operatorname{Arth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C = \mathrm{Arsh}x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C = \mathrm{Arch}x + C.$$

Объединение двух последних формул приводит к формуле 10) основной таблицы.

1.2. Непосредственное интегрирование

Нахождение первообразной или вычисление неопределенного интеграла в основном состоит в преобразовании подынтегрального выражения таким образом, чтобы в соответствии с основным свойством неопределенного интеграла (1.5) или (1.7) задача свелась к нахождению алгебраической суммы табличных интегралов.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,dx$.

Решение. Используя (1.5) или (1.7), формулу 1) таблицы основных интегралов, а также (1.6), получим

$$\int (2x^3 - 3x^2 + 4x - 5)\,dx = 2\int x^3\,dx - 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx - 5\int dx =$$
$$= 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 - 5x + C.$$

Аналогично вычисляется следующий интеграл.

Пример 6. Вычислить $\int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx.$

Решение. $\int \left(5\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + 3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 5\int x^{2/3}\,dx -$

$$-\int x^{-3/2}\,dx + 3\int x^{1/2}\,dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x}} - 2\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = 5\frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{x^{-1/2}}{-1/2} +$$
$$+3\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\cdot 2\sqrt{x} - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C = 3\sqrt[3]{x^5} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x} - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int \frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

Решение. Раскроем скобки в числителе подынтегральной дроби, выполним почленное деление и воспользуемся затем таблицей основных интегралов.

$$\int \frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1 + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 2\int \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}\,dx + \int \frac{x^{2/3}}{x^{1/2}}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{x}+2\int x^{-1/6}\,dx+\int x^{1/6}dx = 2\sqrt{x}+2\frac{x^{5/6}}{5/6}+\frac{x^{7/6}}{7/6}+C = 2\sqrt{x}+\frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+$$
$$+\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}+C = 2\sqrt{x}+\frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+C.$$

Удачное почленное деление в подынтегральной дроби позволяет в ряде случаев увидеть табличные интегралы в примерах, решение которых с общих позиций, привлекая классификацию подынтегральных функций и предлагаемые универсальные методы интегрирования, достаточно трудоемко.

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{1+7x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx.$

Решение. Запишем числитель подынтегральной дроби в виде: $1+x^2+$ $+6x^2$ и выполним почленное деление. Получим
$$\int \frac{1+7x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{(1+x^2)+6x^2}{x^2(x^2+1)}\,dx = \int \frac{(1+x^2)dx}{x^2(x^2+1)}+6\int \frac{x^2\,dx}{x^2(x^2+1)} =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2}+6\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x}+6\operatorname{arctg} x+C.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)}.$

Решение. Представим подынтегральную дробь следующим образом:
$$\frac{1}{x^2(x^2-1)} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(x^2-1)} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2}.$$
Тогда $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)} = \int \frac{dx}{x^2-1}-\int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{x}+C.$

Пример 10. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{3-2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Решение. $\displaystyle\int \frac{3-2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-2\right)dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-$
$$-2\int dx = 3\arcsin x-2x+C.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{2+3x^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$

Решение. $\displaystyle\int \frac{2+3x^2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}+3x^2\right)dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}+$
$$+3\int x^2\,dx = 2\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x^3+C.$$

При вычислении следующих интегралов использованы простейшие свойства показательных функций.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int 2^{3x+1}3^{2x-1}\,dx$.

Решение. $\int 2^{3x+1}3^{2x-1}\,dx = \int 2^{3x}2^1 3^{2x}3^{-1}\,dx = \dfrac{2}{3}\int (2^3)^x(3^2)^x\,dx =$
$= \dfrac{2}{3}\int 8^x\,9^x\,dx = \dfrac{2}{3}\int 72^x\,dx = \dfrac{2\cdot 72^x}{3\cdot\ln 72} + C.$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int \dfrac{2\mathrm{e}^{3x}+3^x}{\mathrm{e}^x}\,dx$.

Решение. $\int \dfrac{2\mathrm{e}^{3x}+3^x}{\mathrm{e}^x}\,dx = \int\left(\dfrac{2\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{3^x}{\mathrm{e}^x}\right)dx = 2\int(\mathrm{e}^2)^x\,dx +$
$+\int\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)^x dx = 2\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\ln\mathrm{e}^2}+\dfrac{(3/\mathrm{e})^x}{\ln(3/\mathrm{e})}+C = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{2\ln\mathrm{e}}+\dfrac{3^x}{\mathrm{e}^x(\ln 3-\ln\mathrm{e})}+C = \mathrm{e}^{2x}+$
$+\dfrac{3^x\mathrm{e}^{-x}}{\ln 3-1}+C.$

Использование формул тригонометрии позволяет свести некоторые интегралы от тригонометрических функций сразу к табличным.

Пример 14. Вычислить интеграл $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx$.

Решение. Известны формулы

$$\mathrm{tg}^2\,x+1=\frac{1}{\cos^2 x}, \tag{1.11}$$

$$\mathrm{ctg}^2\,x+1=\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{1.12}$$

Используя формулу (1.11), получим $\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx = \int\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx =$
$= \int\dfrac{dx}{\cos^2 x}-\int dx = \mathrm{tg}\,x - x + C.$

Весьма полезны формулы понижения степени:

$$2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x, \tag{1.13}$$

$$2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x, \tag{1.14}$$

а также формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \tag{1.15}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x. \tag{1.16}$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$.

Решение. $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2}\right)dx =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C.$

Пример 16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + C.$

Пример 17. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\,dx = \int \frac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \operatorname{tg} x - x + C.$
Здесь использовались формулы (1.13), (1.14) и результат вычислений в примере 14.

Пример 18. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int\!\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)dx =$
$\displaystyle= \int (\operatorname{ctg}^2 x - 1)\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2\right)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - 2\int dx = -\operatorname{ctg} x -$
$- 2x + C = C - 2x - \operatorname{ctg} x.$

Пример 19. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Решение. Воспользуемся тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Тогда
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int\!\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx=$
$\displaystyle= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

1.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной или, по другой терминологии — метод подстановки, является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Сущность метода заключается в преобразовании подынтегрального выражения путем введения новой переменной интегрирования таким образом, что возникающий после преобразования интеграл либо уже является табличным, либо становится проще и легко вычисляется иными методами.

В основе метода замены переменной лежит теорема об инвариантности формул интегрирования, которую мы приводим в следующей редакции.

Теорема 1.2. Формулы интегрирования сохраняют свой вид при замене независимой переменной любой дифференцируемой функцией от нее.

Иными словами, если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ известна, т.е. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f\,[u(x)]\,du(x) = F\,[u(x)] + C, \tag{1.17}$$

где $u = u(x)$ — дифференцируемая функция от x на некотором множестве Ω. При этом, разумеется, подынтегральная функция и ее первообразная должны быть определены на множестве U значений функции $u = u(x)$.

Приведенные в этом разделе пособия примеры должны помочь в приобретении навыков в нахождении необходимых подстановок в простейших, близких, в определенном смысле слова, к табличным интегралах. Разделы 3—5 посвящены классификации интегралов, основным типам интегрируемых функций и специальным методам интегрирования.

Рассмотрим вначале самые простые примеры.

Пример 20. Вычислить интеграл $\displaystyle\int (3x-2)^{100}\,dx$.

Решение. Замечая, что $d(3x-2) = (3x-2)'\,dx = 3\,dx$, запишем интеграл в следующем виде:

$$\int (3x-2)^{100}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)^{100} 3\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-2)^{100} d(3x-2).$$

Полагая $3x - 2 = u$, находим

$$\int (3x-2)^{100}\,dx = \frac{1}{3}\int u^{100} du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{101}}{101} + C = \frac{1}{303}(3x-2)^{101} + C.$$

Пример 21. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x-3}\,dx$.

Решение. Так как $d(2x-3) = (2x-3)'\,dx = 2\,dx$, то

$$\int \mathrm{e}^{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x-3} 2\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x-3} d(2x-3).$$

Полагая $2x - 3 = u$, находим

$$\int \mathrm{e}^{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u} du = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u} + C = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-3} + C.$$

Пример 22. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\,dx$.

Решение. Так как $d\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)'\,dx = \frac{1}{2}\,dx$, то

$$\int \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)dx = 2\int \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\,dx = 2\int \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)d\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

Полагая $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=u$, находим

$$\int \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)dx = 2\int \cos u du = 2\sin u + C = 2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+C.$$

Пример 23. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Решение. Так как $d(ax+b) = (ax+b)'\,dx = adx$, то

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{adx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b}.$$

Полагая в этом примере $ax+b=u$, находим

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Полученный результат можно рассматривать как некоторое обобщение формулы 1) (случай $\alpha = -1$) основной таблицы интегралов и его полезно запомнить. Итак,

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C. \tag{1.18}$$

Ниже будет рассмотрен еще ряд примеров, расширяющих и дополняющих таблицу основных интегралов.

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, нетрудно заметить, что фактически при вычислении этих простых интегралов в замене переменных не было никакой необходимости, если нужный дифференциал уже сформирован. Этот способ преобразования подынтегральных выражений получил название «*метод подведения функции под дифференциал*».

Пример 24. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^4}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^4}} = \int (2-3x)^{-4/3}\,dx = -\frac{1}{3}\int (2-3x)^{-4/3}d(2-$

$\displaystyle -3x) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{(2-3x)^{-1/3}}{-1/3} + C = -\frac{1}{3}(-3)\frac{1}{(2-3x)^{1/3}} + C = \frac{1}{\sqrt[3]{2-3x}} + C.$

При решении этого примера мы устно проверили, что $d(2-3x) = -3\,dx$ и мысленно обозначили $2-3x$ за u, после чего воспользовались формулой 1) интеграла от степенной функции с показателем $\alpha = -4/3$.

В конечном итоге, все подобные примеры можно решать, используя известный из школьного курса математики факт: если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \tag{1.19}$$

что является частным случаем (следствием) теоремы об инвариантности формул интегрирования.

Пример 25. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{a}{a^2}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C.$$

Пример 26. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$

Пример 27. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm 1}} = \frac{a}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm 1}} =$

$\displaystyle = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}{a}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| - \ln|a| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C_1,$

где $C_1 = C - \ln|a|$ — также произвольная постоянная.

В рассмотренных выше примерах мы предполагали, что $a > 0$, причем знак модуля в ответе к последнему примеру часто опускают, полагая, что первообразная рассматривается на множестве $\Omega = \{x : x \geq 0\}$.

Рекомендуем полученные результаты добавить к основной таблице интегрирования (см. раздел 2).

Прием интегрирования, основанный на подведении функции под дифференциал весьма эффективен и в более сложных случаях. Действительно, если в интеграле $I = \int f[u(x)]\varphi(x)\,dx$ оказалось, что $\varphi(x) = u'(x)$, то

$$I = \int f[u(x)]\varphi(x)\,dx = \int f[u(x)]u'(x)\,dx = \int f[u(x)]du(x).$$

Тогда, если $\int f(u)du = F(u) + C$ (например, является табличным), то $I = F[u(x)] + C$.

Рассмотрим группу интегралов: $\int \frac{xdx}{x^2+1}$, $\int \frac{xdx}{x^2-1}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

Знаменатели подынтегральных дробей напоминают соответствующие знаменатели в формулах 7)—10) основной таблицы. Однако все эти интегралы сводятся к интегралу от сложной степенной функции с показателями $\alpha = -1$ и $\alpha = -1/2$.

Действительно, $x\,dx = \frac{1}{2}dx^2$, а это значит, что, например,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Аналогично,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Два последних интеграла сводятся к $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$. А именно,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Следующие примеры направлены на закрепление навыка выделения основного интегрируемого выражения и дифференциала этого выражения.

Пример 28. Вычислить интеграл $\int x^2(2x^3-4)^5\,dx$.

Решение. $\int x^2(2x^3-4)^5\,dx = \frac{1}{3}\int (2x^3-4)^5 dx^3 =$

$$= \frac{1}{3\cdot 2}\int (2x^3-4)^5 d(2x^3-4) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(2x^3-4)^6}{6} + C = \frac{1}{36}(2x^3-4)^6 + C.$$

Пример 29. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(2x^3-1)^2}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(2x^3-1)^2}} = \frac{1}{3}\int (2x^3-1)^{-2/3}dx^3 =$

$$= \frac{1}{3\cdot 2}\int (2x^3-1)^{-2/3}d(2x^3-1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{(2x^3-1)^{1/3}}{1/3} + C = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2x^3-1} + C.$$

Пример 30. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(2-3x^4)^7}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[6]{(2-3x^4)^7}} = \frac{1}{4}\int (2-3x^4)^{-7/6}dx^4 =$

$$= -\frac{1}{4\cdot 3}\int (2-3x^4)^{-7/6}d(2-3x^4) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(2-3x^4)^{-1/6}}{-1/6} + C = \frac{1}{2\sqrt[6]{2-3x^4}} + $$
$$+ C.$$

Пример 31. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Решение. Если из под знака квадратного корня вынести число 4, то интеграл сведется к формуле, полученной в примере 26, с $a = \dfrac{3}{2}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{9/4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(3/2)^2-x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C.$$

Однако, если вынести число 9, то интеграл сведется к формуле 8) основной таблицы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{d\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C.$$

Пример 32. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3+2x^4}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{3+2x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{2(x^2)^2+3} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3\cdot\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x^2\right)}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x^2\right)^2+1} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}x^2 + C.$$

Пример 33. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{\cos^2\sqrt{x}} = 2\operatorname{tg}\sqrt{x} + C$.

Пример 34. Вычислить интеграл $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

Решение. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = \int \sin\frac{1}{x}\, d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\int \sin\frac{1}{x}\, d\left(\frac{1}{x}\right) =$
$= \cos\frac{1}{x} + C$.

Пример 35. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} + C$.

Пример 36. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$.

Пример 37. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 3}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln^2 x - 3}}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln^2 x - (\sqrt{3})^2}} =$
$= \ln|\ln x + \sqrt{\ln^2 x - 3}| + C$.

Пример 38. Вычислить интеграл $\int \mathrm{e}^{2\sin x}\cos x\, dx$.

Решение. $\int \mathrm{e}^{2\sin x}\cos x\, dx = \int \mathrm{e}^{2\sin x} d(\sin x) = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2\sin x} d(2\sin x) =$
$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\sin x} + C$.

Пример 39. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$.

Решение. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{\cos^3 x}} = -\int \cos^{-3/2} x\, d(\cos x) = -\frac{\cos^{-1/2} x}{-1/2} =$
$= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$.

Пример 40. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\arcsin x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{\sqrt{\arcsin x}} =$
$= 2\sqrt{\arcsin x} + C.$

Пример 41. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x} = \int \frac{1}{\mathrm{arctg}\,x} \cdot \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{d(\mathrm{arctg}\,x)}{\mathrm{arctg}\,x} =$
$= \ln|\,\mathrm{arctg}\,x| + C.$

Пример 42. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}^2\,x - 3}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\mathrm{tg}^2\,x-3}} = \int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,x-3}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= \int \frac{d(\mathrm{tg}\,x)}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\,x - (\sqrt{3})^2}} = \ln|\,\mathrm{tg}\,x + \sqrt{\mathrm{tg}^2\,x - 3}| + C.$$

Пример 43. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{3-2\,\mathrm{ctg}\,x}}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{3-2\,\mathrm{ctg}\,x}} = \int \frac{1}{\sqrt{3-2\,\mathrm{ctg}\,x}} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$$= -\int \frac{d(\mathrm{ctg}\,x)}{\sqrt{3-2\,\mathrm{ctg}\,x}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(3-2\,\mathrm{ctg}\,x)}{\sqrt{3-2\,\mathrm{ctg}\,x}} = \sqrt{3-2\,\mathrm{ctg}\,x} + C.$$

Пример 44. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Решение. В отличие от предыдущих примеров, выделение нужного дифференциала в этом примере не очевидно. Поэтому преобразуем подынтегральную функцию так:

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2 + 1}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{(\mathrm{e}^x)^2+1} = \int \frac{d(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x)^2+1} = \mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^x + C.$$

Методом подведения функции под дифференциал также легко вычисляются следующие четыре интеграла:

$$\int \mathrm{tg}\,x\,dx = C - \ln|\cos x|, \tag{1.20}$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C, \tag{1.21}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \tag{1.22}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \tag{1.23}$$

Этими формулами рекомендуется дополнить таблицу основных интегралов и выучить их наизусть.

Рассмотрим первый из приведенных интегралов. Записывая $\operatorname{tg} x$ как $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ и замечая, что $d(\cos x) = (\cos x)'\, dx = -\sin x\, dx$, получим

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл в формуле (1.21):

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Для вычисления интеграла в (1.22) воспользуемся формулой

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

и преобразуем подынтегральное выражение следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Принимая мысленно $\frac{x}{2}$ за u и используя формулу $d(\operatorname{tg} u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}$, полученный интеграл можно записать в виде $\displaystyle\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, а подстановка $v = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ приводит его к табличному:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Приведенный пример вычислений еще раз показывает преимущества метода подведения под дифференциал. Если бы мы выполняли соответствующие замены переменных в явном виде, то даже в этом простом интеграле это пришлось бы делать дважды: вначале $u = \frac{x}{2}$, затем $v = \operatorname{tg} u$. Фактическая замена переменных $v = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, которая приводит данный интеграл к табличному, с самого начала не была очевидной.

Последний из рекомендованных выше для запоминания интегралов (1.23) легко сводится к предыдущему с помощью формулы приведения
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Подстановку $\psi(x) = u$ иногда называют заменой переменной первого типа. Может оказаться, что заменяя x новой переменной интегрирования t по формулам

$$x = \varphi(t), \;\; dx = \varphi'(t)dt, \tag{1.24}$$

где $\varphi(t)$ — некоторая определенная для данного интеграла дифференцируемая функция, получим интеграл, который вычисляется проще, или даже является табличным. Тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \tag{1.25}$$

и, если последний интеграл в (1.25) оказался равным $F(t) + C$, то заданный находится возвращением к переменной x. Для этого необходимо выразить из уравнения $x = \varphi(t)$ переменную t через x. Замену переменной по формулам (1.24)—(1.25) иногда называют заменой второго типа.

Обозначая обратную к $\varphi(t)$ функцию символом $\{\varphi\}^{-1}$, запишем алгоритм преобразования интеграла и его вычисления в следующем виде:

$$\int f(x)dx = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array}\right] = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C =$$

$$= \left[t = \{\varphi\}^{-1}(x)\right] = F\left[\{\varphi\}^{-1}(x)\right] + C. \tag{1.26}$$

Еще раз подчеркнем, что выбор функции $\varphi(t)$ для замены переменной интегрирования x по формуле $x = \varphi(t)$ не является случайным. Как правило, он продиктован видом интегрируемой функции и, в конечном итоге, типом интеграла.

Типизацией интегралов займемся в третьем разделе данного пособия, а пока приведем лишь несколько примеров.

Пример 45. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x}}$.

Решение. Стремясь избавиться от иррациональной функции в знаменателе подынтегрального выражения, примем $\sqrt{x} = t$ (замена первого типа:

$\psi(x) = t$). С другой стороны, из равенства $\sqrt{x} = t$ следует, что $x = t^2$ и $dx = 2tdt$, т.е. можно считать, что мы выполняем замену переменных второго типа: $x = \varphi(t)$. В результате

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x}} = \int \frac{2tdt}{(t^2+4)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+2^2} = 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{2}+C.$$

Приведенный простой пример хорошо демонстрирует тот факт, что различие между подстановками первого и второго типов носит условный характер. Действительно, выполняя замену переменных вида $x = \varphi(t)$ в интеграле и вычисляя первообразную $F(t)$, мы затем возвращаемся к переменной x с помощью обратной функции $\{\varphi\}^{-1}(x) = t$. А это позволяет сказать, что интеграл вычислен с помощью замены переменной по формуле $\psi(x) = \{\varphi\}^{-1}(x) = t$.

Пример 46. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$.

Решение. Повторяя рассуждения, приведенные в начале решения предыдущего примера, получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{2x+9} = t \Rightarrow 2x+9 = t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(t^2-9) \\ \Downarrow \\ 2dx = 2tdt \Rightarrow dx = tdt \end{array}\right] =$$

$$= 2\int \frac{tdt}{(t^2-9)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-3^2} = 2\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+9}-3}{\sqrt{2x+9}+3}\right|+C.$$

Заметим, что в самом общем случае подходящая замена переменных может иметь вид $\psi(x) = \varphi(t)$. Например, в предыдущем примере замена переменных фактически определялась равенством $2x + 9 = t^2$ $(t > 0)$.

Пример 47. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

Решение. В отличие от предыдущих примеров замена переменной вида $\psi(x) = t$ в этом примере не очевидна, в то время, как подстановка $x = t^6$ позволяет избавиться от иррациональности в знаменателе подынтегральной дроби. Тогда, обозначая интеграл I, запишем

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} = \left[\begin{array}{c} x = t^6 \\ dx = 6t^5dt \end{array}\right] =$$

$$= 6\int \frac{t^5dt}{t^3+2t^2} = 6\int \frac{t^5dt}{t^2(t+2)} = 6\int \frac{t^3dt}{t+2}.$$

Полученный интеграл уже не содержит радикалов и относится к простейшим интегралам от рациональных функций. Закончим решение следующим простым приемом выделения целой части подынтегральной дроби:

$$\frac{t^3}{t+2} = \frac{(t^3+2^3)-2^3}{t+2} = \frac{(t+2)(t^2-2t+4)-8}{t+2} = t^2-2t+4-\frac{8}{t+2}.$$

Тогда

$$I = 6\int\left(t^2-2t+4-\frac{8}{t+2}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t-8\ln|t+2|\right)+C =$$

$$= \left[x=t^6 \Rightarrow t=\sqrt[6]{x}\right] = 2\sqrt{x}-6\sqrt[3]{x}+24\sqrt[6]{x}-48\ln(\sqrt[6]{x}+2)+C.$$

1.4. Метод интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций и опирается на следующую теорему.

Теорема 1.3. Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ определены и дифференцируемы на некотором множестве Ω и произведение $v(x)u'(x)$ имеет на Ω первообразную (т.е. существует $\int v(x)u'(x)dx$). Тогда на Ω функция $u'(x)v(x)$ также имеет первообразную и справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\,dx. \qquad (1.27)$$

Заметим, что так как $v'(x)\,dx = dv$, а $u'(x)\,dx = du$, то формулу (1.27) удобно запоминать в виде

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1.28)$$

Она позволяет свести вычисление $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться проще.

Итак, общая схема применения метода интегрирования по частям такова. Разбивая подынтегральное выражение в интеграле $\int f(x)\,dx$ тем или иным образом на произведение двух функций $\varphi(x)\psi(x)=f(x)$, следует за u принять ту его часть, которая при дифференцировании упрощается, например, $\varphi(x)=u$, а за dv — другую, оставшуюся часть подынтегрального выражения, $\psi(x)\,dx = dv$, первообразная от которой известна или легко может быть найдена.

Приведем два примера, в которых выбор функций u и v, фактически, предопределен сразу.

Пример 48. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, откуда $v = x$. Тогда
$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int x d(\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x\, dx}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x -$
$- \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$

Пример 49. Вычислить интеграл $\int \ln x\, dx$.

Решение. По аналогии с предыдущим примером положим $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда
$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x -$
$- x + C.$

Хорошо видно, что в простых примерах, восстанавливая вид функции $v(x)$ путем интегрирования и находя дифференциал функции $u(x)$ «в уме», можно быстро достичь результата. В более сложных случаях выбор функций на роль $u(x)$ и $v(x)$ не столь однозначен.

Рассмотрим некоторые типы интегралов, легко вычисляемых методом интегрирования по частям.

Всюду далее будем обозначать $P_n(x)$ — произвольный многочлен степени n с действительными коэффициентами $a_k, k = \overline{0, n}$:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0. \tag{1.29}$$

<u>Тип 1.</u> Интегралы вида $\int P_n(x) \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx$, $\int P_n(x) \sin \beta x\, dx$,
$\int P_n(x) \cos \beta x\, dx$.

В этих интегралах следует за u принять $P_n(x)$, а за dv — соответственно выражения $e^{\alpha x}\, dx$, $\sin \beta x\, dx$ и $\cos \beta x\, dx$. Например, в первом интеграле однократное применение интегрирования по частям приводит к выражению

$$\int P_n(x) \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = P_n(x) \Rightarrow du = P_n'(x)\, dx = P_{n-1}(x)\, dx \\ dv = \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx \Rightarrow v = \int \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha} P_n(x) \mathrm{e}^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int P_{n-1}(x) \mathrm{e}^{\alpha x}\, dx, \tag{1.30}$$

в котором многочлен $P_{n-1}(x) = n a_n x^{n-1} + ... + a_1$ имеет степень на единицу меньшую, чем исходный. Повторное применение формулы (1.30) приведет к интегралу с многочленом $P_{n-2}(x)$ и т.д. Повторяя процедуру интегрирования по частям n раз получим, что в последнем интеграле присутствует многочлен нулевой степени, т.е. константа, а он уже является табличным.

На практике в интегралах этого типа весьма успешно работает прием подведения функции под дифференциал (что, как уже отмечалось, равносильно интегрированию простых функций «в уме»). Это упрощает процесс решения и экономит время.

Пример 50. Вычислить интеграл $\int x\mathrm{e}^x\,dx$.

Решение. Т.к. $\mathrm{e}^x\,dx = d\mathrm{e}^x$, то $\int x\mathrm{e}^x\,dx = \int x\,d\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = $ $= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-1)\mathrm{e}^x + C$.

Пример 51. Вычислить интеграл $\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\,dx$.

Решение. Т.к. $\mathrm{e}^{-2x}dx = -\frac{1}{2}d\mathrm{e}^{-2x}$, то

$$\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{-2x} - \int \mathrm{e}^{-2x}dx^2\right).$$

Так как $dx^2 = 2x\,dx$, то последний интеграл запишется в виде $2\int x\mathrm{e}^{-2x}\,dx$ и к нему надо вновь применить формулу интегрирования по частям (1.28). Окончательно,

$$\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{-2x} - 2\int x\mathrm{e}^{-2x}dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{2}\int x d\mathrm{e}^{-2x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{-2x} - \int \mathrm{e}^{-2x}dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}d(-2x)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right) + C = -\frac{1}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} + C.$$

Замечание. Следует быть внимательным при определении типа интеграла, вычисляющегося по частям, так как похожие интегралы могут находиться уже совсем иначе. Например, в интеграле $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,dx$ замечаем, что $xdx = \frac{1}{2}dx^2$ и, принимая мысленно x^2 за u, получаем табличный интеграл

$$\int x^2\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2} + C.$$

Пример 52. Вычислить интеграл $\int x\cos x\,dx$.

Решение. Так как $\cos x\,dx = d\sin x$, то интеграл можно записать сразу в виде, удобном для применения формулы (1.28):

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Когда подынтегральное выражение имеет более громоздкий вид, удобно придерживаться в оформлении решения общей схемы (см. (1.30)).

Пример 53. Вычислить интеграл $\displaystyle\int (2x^2-3x-1)\mathrm{e}^{3x-2}\,dx$.

Решение. Не следует думать, что если мы раскроем скобки в подынтегральном выражении, то интеграл сведется к трем более простым. Напротив, это увеличит количество вычислений. Имеем

$$\int (2x^2-3x-1)\mathrm{e}^{3x-2}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = 2x^2-3x-1 \Rightarrow du = (4x-3)\,dx \\ dv = \mathrm{e}^{3x-2}\,dx \Rightarrow v = \int \mathrm{e}^{3x-2}\,dx = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2-3x-1)\mathrm{e}^{3x-2} - \frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{3x-2}(4x-3)\,dx = \left[\begin{array}{c} u = 4x-3 \Rightarrow du = 4\,dx \\ dv = \mathrm{e}^{3x-2}\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-2} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2-3x-1)\mathrm{e}^{3x-2} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(4x-3)\mathrm{e}^{3x-2} - \frac{4}{3}\int \mathrm{e}^{3x-2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2x^2-3x-1)\mathrm{e}^{3x-2} - \frac{1}{3}(4x-3)\mathrm{e}^{3x-2} + \frac{4}{3\cdot 3}\mathrm{e}^{3x-2}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{27}\left[9(2x^2-3x-1) - 3(4x-3) + 4\right]\mathrm{e}^{3x-2} + C = \frac{1}{27}(18x^2-39x+4)\mathrm{e}^{3x-2} + C.$$

<u>Тип 2.</u> Интегралы вида $\displaystyle\int P_n(x)\ln ax\,dx$, $\displaystyle\int P_n(x)\operatorname{arctg} ax\,dx$, $\displaystyle\int P_n(x)\operatorname{arcctg} ax\,dx$, $\displaystyle\int P_n(x)\arcsin ax\,dx$, $\displaystyle\int P_n(x)\arccos ax\,dx$.

В этих интегралах за u следует принимать указанные в интегралах трансцендентные функции, а за dv — выражение $P_n(x)\,dx$. Интегралы с функциями $u = \ln ax$, $u = \operatorname{arctg} ax$ и $u = \operatorname{arcctg} ax$ однократным применением формулы (1.28) приводятся к простейшим интегралам от дробно-рациональных функций, а с функциями $u = \arcsin ax$ и $u = \arccos ax$ — к иррациональным функциям.

Пример 54. Вычислить интеграл $\displaystyle\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение.

$$\int x\operatorname{arctg} x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = x\,dx \Rightarrow v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right] = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$$

В последнем интеграле выделим целую часть подынтегральной дроби:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Окончательно,

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$$

Пример 55. Вычислить интеграл $\displaystyle\int x^4 \ln 3x\, dx$.

Решение.

$$\int x^4 \ln 3x\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln 3x \Rightarrow du = \frac{3\,dx}{3x} = \frac{dx}{x}, \\ dv = x^4\, dx \Rightarrow v = \int x^4\, dx = \frac{x^5}{5} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{x^5}{5} \ln 3x - \frac{1}{5} \int x^5 \frac{dx}{x} = \frac{1}{5}\left(x^5 \ln 3x - \int x^4\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^5 \ln 3x - \frac{x^5}{5}\right) + C = \frac{x^5}{5}\left(\ln 3x - \frac{1}{5}\right) + C.$$

<u>**Тип 3.**</u> Интегралы вида $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \sin \omega x\, dx$, $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \cos \omega x\, dx$.

Эти интегралы принято называть циклическими. Двукратным интегрированием по частям они выражаются «сами через себя», т.е. относительно искомого интеграла возникает простое уравнение.

Пример 56. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x} \cos x\, dx$.

Решение. Обозначая искомый интеграл I, получим

$$I = \int \mathrm{e}^x \cos x\, dx = \int \mathrm{e}^x d\sin x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \sin x d\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x\, dx =$$

$$= \mathrm{e}^x \sin x + \int \mathrm{e}^x d\cos x = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x - \int \cos x d\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) -$$

$$- \int \mathrm{e}^x \cos x\, dx = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) - I.$$

Тогда $2I = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$, откуда $I = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C$.

Реализуя метод, мы оба раза подводили под дифференциал тригонометрическую функцию. Проще подводить под дифференциал функцию e^x, причем это нужно делать оба раза. Вычислим этот интеграл еще раз.

$$I = \int \mathrm{e}^x \cos x\, dx = \int \cos x\, d\mathrm{e}^x = \cos x\, \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x d(\cos x) = \mathrm{e}^x \cos x +$$

$$+\int e^x \sin x\,dx = e^x \cos x + \int \sin x de^x = e^x\cos x + \sin x\, e^x - \int e^x d(\sin x) =$$
$= e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x\,dx = e^x(\cos x+\sin x) - I$, что совпадает с предыдущим вариантом решения.

Интегрирование по частям, в частности, сведение интеграла к циклическому, может оказаться полезным и эффективным приемом в самых неожиданных ситуациях.

Пример 57. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} u=\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow du = -\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array}\right] =$$
$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

С последним интегралом поступим так:
$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{-x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx +$$
$$+ a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a}.$$

Обозначая искомый интеграл $I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, получим уравнение
$$I = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\arcsin\frac{x}{a},$$
из которого следует равенство
$$2I = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$$
и
$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

В заключение пункта приведем еще один пример.

Пример 58. Вычислить интеграл $\int \dfrac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

Решение. Этот интеграл не принадлежит ни одному из упомянутых типов. Тем не менее,
$$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = \int x d(-\operatorname{ctg} x) = -x\operatorname{ctg} x + \int \operatorname{ctg} x\,dx = -x\operatorname{ctg} x + \int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$$
$$= -x\operatorname{ctg} x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C.$$

Аналогично вычисляется интеграл $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

Заметим, что при интегрировании по частям произвольная постоянная прибавляется к найденной первообразной один раз в окончательном результате.

2. Таблица основных интегралов

Прежде чем перейти к рассмотрению основных классов интегрируемых функций, напомним основные формулы интегрирования:

1) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, & \alpha\neq -1, \quad \alpha\in\mathbb{R}; \\ \ln|x|+C, & \alpha=-1; \end{array}\right.$

2) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, \quad a>0,\ a\neq 1,$

в частности, при $a=\mathrm{e}$: $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C;$

3) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

4) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C;$

11) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C;$

12) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C;$

13) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

15) $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

16) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

3. Интегрирование рациональных функций

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют *рациональные функции*.

Определение 3.1. Функция называется рациональной, если она представлена дробью $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени m и n соответственно. Рациональная функция (рациональная дробь — по другой терминологии) называется *правильной*, если степень m многочлена $P_m(x)$ ниже степени n многочлена $Q_n(x)$, в противном случае дробь называется *неправильной*.

Если $m \geq n$, то, выполняя деление многочленов, получим

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = Z_{m-n}(x) + \frac{R(x)}{Q_n(x)},$$

где $Z_{m-n}(x)$ — неполное частное (целая часть) будет являться многочленом степени $(m-n)$, а остаток от деления $R(x)$ — многочленом степени не выше $(n-1)$.

Интегрирование многочлена $Z_{m-n}(x)$ не представляет никаких затруднений, сводясь к группе интегралов от степенных функций с натуральным показателем степени, и, значит, весь вопрос заключается в интегрировании дроби $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$, степень числителя которой меньше степени знаменателя. Дальнейшие действия зависят от корней многочлена $Q_n(x)$ и возможности разложить этот многочлен на элементарные множители.

Обозначая далее действительные различные корни многочлена $Q_n(x)$ через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, можно записать его разложение в виде

$$Q_n(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}...(x^2+2p_1x+q_1)^{r_1}(x^2+2p_2x+q_2)^{r_2}..., \tag{3.1}$$

где $p_i^2 - q_i < 0$.

В курсе высшей алгебры доказывается следующий факт: если рациональная функция $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ является правильной дробью, т.е. $m < n$, а многочлен $Q_n(x)$ представлен в виде (3.1), то эту дробь можно единственным образом представить в виде суммы простейших дробей двух видов:

$$\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}, \qquad \frac{B_r x + C_r}{(x^2+2px+q)^r}, \tag{3.2}$$

где A_k, B_r, C_r — действительные постоянные, подлежащие определению, причем, каждому множителю $(x-\alpha)^k$ соответствует в разложении дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ сумма k простейших дробей первого вида

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+...+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k},$$

а каждому множителю $(x^2+2px+q)^r$ соответствует сумма r простейших дробей второго вида

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+2px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+2px+q)^2}+...+\frac{B_rx+C_r}{(x^2+2px+q)^r}.$$

Например, разложение рациональной дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{2x^5-3x^4+x^2-5}{x^3(x-1)(x^2+4)^2(x^2+2x+5)} \quad (m=5, n=10)$$

следует искать в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+4}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+4)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+2x+5}. \quad (3.3)$$

Чтобы определить числа $A_1, A_2, A_3, B, C_1, D_1, C_2, D_2, E$ и F, умножим обе части равенства (3.3) на $Q_n(x)$. Получим равенство, суть которого — тождество между многочленом $P_m(x)$ и многочленом, который получится в правой части при любых значениях x. А это возможно лишь в том случае, когда коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x, равны между собой.

Для определения неизвестных коэффициентов $A_1, A_2, A_3, B, C_1, D_1, C_2, D_2, E$ и F составляется система линейных алгебраических уравнений (в данном примере их будет 10).

Изложенный метод отыскания разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей, указанных выше в (3.2).

1. Интеграл от простейшей дроби первого вида заменой переменных $x-\alpha=u$ сводится к табличному интегралу от степенной функции. В частности,

$\triangleright$ при $k=1$: $\displaystyle\int\frac{A\,dx}{x-\alpha}=A\ln|x-\alpha|+C;$

$\triangleright$ при $k\neq 1$, $(k>1)$: $\displaystyle\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k}=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}+C.$

2. Интеграл от простейшей дроби второго вида в случае $r=1$, $B_r=0$ также легко сводится к табличному интегралу.

Рассмотрим $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+2px+q}$ в общем виде, полагая $p, q\in\mathbb{R}$ и $p^2-q<0$. Для его вычисления выделим полный квадрат в квадратном трехчлене

$$x^2+2px+q=x^2+2px+p^2-p^2+q=(x+p)^2+(q-p^2).$$

Обозначим $a^2 = q - p^2$, так как величина $q - p^2 > 0$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(x+p)^2 + a^2} = \int \frac{d(x+p)}{(x+p)^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{a} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C.$$

Уже сейчас можно указать несколько типов простейших интегралов от рациональных функций:

$$\int \frac{P_m(x)}{x^n}\, dx, \quad \int \frac{P_m(x)\, dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{P_m(x)\, dx}{x^2 \pm a^2}, \quad \int \frac{P_m(x)\, dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Первый из этих интегралов почленным делением многочлена $P_m(x)$ на x^n сразу сводится к группе табличных интегралов от степенной функции с целым показателем.

Второй интеграл заменой переменной $x - a = t$ сводится к предыдущему.

В третьем интеграле в случае $m \geq 2$ прежде следует выделить целую часть подынтегральной дроби путем деления числителя $P_m(x)$ на знаменатель $x^2 \pm a^2$. Остаток от деления будет многочленом степени не выше 1 и соответствующий интеграл легко сведется к табличным.

Пример 59. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 4} dx.$

Решение. Поделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + 4 & \; x^2 + 4 \\ \cline{2-2} \underline{2x^3 + 8x} \qquad\;\; & \; 2x - 3 \\ -3x^2 - 8x + 4 & \\ \underline{-3x^2 - 12} \quad\;\; & \\ -8x + 16 & \end{array}$$

Таким образом, дробь может быть представлена в виде

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 + 4} = 2x - 3 - \frac{8x - 16}{x^2 + 4}.$$

Здесь $2x - 3 = Z(x)$ — целая часть (неполное частное), $-8x + 16 = R(x)$ — остаток. Тогда, обозначая через I искомый интеграл, найдем

$$I = 2\int x\, dx - 3\int dx - \int \frac{8x - 16}{x^2 + 4}\, dx = 2\,\frac{x^2}{2} - 3x - 4\int \frac{2x\, dx}{x^2 + 4} + 16\int \frac{dx}{x^2 + 4} =$$

$$= x^2 - 3x - 4\ln(x^2 + 4) + 8 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Знак модуля в выражении $\ln(x^2+4)$ опущен, так как $x^2+4>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Остановимся подробнее на четвертом интеграле, так как он выделяется как часто встречающийся тип интегралов с квадратным трехчленом в знаменателе.

Рассмотрим несколько частных случаев интегралов вида $\displaystyle\int\frac{P_n(x)\,dx}{ax^2+bx+c}$.

Случай 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $(n=0)$.

Значение этого интеграла существенно зависит от дискриминанта квадратного трехчлена. Случай $D<0$ рассмотрен выше в общем виде.

Пример 60. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2+4x+17}$.

Решение. Выделяя полный квадрат в виде квадратного трехчлена

$$4x^2+4x+17=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 1+1^2+16=(2x+1)^2+16,$$

найдем

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+17}=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+16}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2+4^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}+C=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}+C.$$

Заметим, что в этом примере дискриминант квадратного трехчлена $D_1=$ $=(b/2)^2-ac=2^2-4\cdot 17=4-68=-64<0$.

Этим же приемом легко вычисляются интегралы и в случае $D>0$.

Пример 61. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-3x+1}$.

Решение. Как и в предыдущем примере, мы не стремимся вынести старший коэффициент квадратного трехчлена за скобки, а, напротив, для облегчения устного счета запишем интеграл так: $I=2\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2-6x+2}$.

Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене

$$4x^2-6x+2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(2x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

найдем

$$2\int\frac{dx}{(2x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}=8\int\frac{dx}{(4x-3)^2-1}=\frac{8}{4}\int\frac{d(4x-3)}{(4x-3)^2-1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{4x-3-1}{4x-3+1}\right|+C=\ln\left|\frac{4x-4}{4x-2}\right|+C=\ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right|+C.$$

Более того, так как

$$\ln\left|\frac{2x-2}{2x-1}\right| = \ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\cdot 2\right| = \ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right| + \ln 2,$$

то, обозначая новую произвольную константу $C_1 = C + \ln 2$, результату вычислений можно придать вид $I = \ln\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right| + C_1$.

К этому же результату мы придем, если воспользуемся изложенной выше теорией разложения подынтегрального выражения на простейшие дроби.

Действительно, так как дискриминант квадратного трехчлена $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 1 > 0$ и его корни соответственно $x_{1,2} = \dfrac{3\pm 1}{4} = 1; \dfrac{1}{2}$, то

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x-1).$$

А это значит, что разложение подынтегральной дроби на простейшие будет иметь вид:

$$\frac{1}{2x^2-3x+1} = \frac{1}{(x-1)(2x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1}.$$

Для определения коэффициентов A и B получим тождество

$$A(2x-1) + B(x-1) = 1. \qquad (3.4)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (3.4), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A - B = 1, \end{cases}$$

откуда легко определяются значения $A = 1$. $B = -2$.

Тогда

$$I = A\int\frac{dx}{x-1} + B\int\frac{dx}{2x-1} = \int\frac{dx}{x-1} - 2\int\frac{dx}{2x-1} =$$

$$= \int\frac{d(x-1)}{x-1} - \int\frac{d(2x-1)}{2x-1} = \ln|x-1| - \ln|2x-1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{2x-1}\right| + C.$$

Замечание. Помимо рассмотренного выше общего метода нахождения неопределенных коэффициентов в разложении подынтегральной дроби на простейшие в случае, когда знаменатель имеет только простые (некратные) действительные корни, весьма эффективен другой способ их нахождения. Он опирается на то обстоятельство, что в получающиеся для определения неопределенных коэффициентов тождество можно подставлять любые (подходящие) значения x. Поясним это на предыдущем примере.

Подставляя в тождество (3.4) вместо x значение $x = 1$, сразу находим $A = 1$. Затем, подставляя значение $x = \frac{1}{2}$, найдем $B = -2$. Этим приемом мы будем пользоваться неоднократно в более сложных примерах.

И, наконец, в случае $D = 0$ мы имеем дело с практически табличным интегралом.

Пример 62. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1}$.

Решение. Замечая, что $D_1 = (b/2)^2 - ac = 3^2 - 9 = 0$, запишем

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 6x + 1} = \int \frac{dx}{(3x-1)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-1)}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x-1} + C.$$

<u>**Случай 2.**</u> Интегралы вида $\int \frac{(a_1 x + b_1)\,dx}{ax^2 + bx + c}$, $(n = 1)$.

Результат вычисления подобных интегралов зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена. Рассмотрим несколько примеров.

а) Случай $D = b^2 - 4ac < 0$.

Пример 63. Вычислить интеграл $\int \frac{(2x+3)dx}{4x^2 - 4x + 5}$.

Решение. Выделим в числителе подынтегрального выражения дифференциал квадратного трехчлена $d(4x^2 - 4x + 5) = (8x - 4)dx$. Для этого умножим и разделим подынтегральную дробь на 4. Получим

$$\int \frac{(2x+3)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{4} \int \frac{(8x+12)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{4} \int \frac{(8x - 4 + 16)dx}{4x^2 - 4x + 5} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{(8x-4)dx}{4x^2 - 4x + 5} + \frac{16}{4} \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5}.$$

Первый интеграл сведен к табличному:

$$\int \frac{(8x-4)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int \frac{d(4x^2 - 4x + 5)}{4x^2 - 4x + 5} = \ln(4x^2 - 4x + 5) + C.$$

Второй интеграл относится к случаю 1, рассмотренному выше.

Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене

$$4x^2 - 4x + 5 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 + 4 = (2x-1)^2 + 4,$$

найдем

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dx}{(2x-1)^2 + 4} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-1)}{(2x-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{2} + C.$$

Окончательно, искомый интеграл

$$\int \frac{(2x+3)dx}{4x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{4} \ln(4x^2 - 4x + 5) + \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{2} + C.$$

б) В случае $D = b^2 - 4ac > 0$ можно использовать тот же алгоритм вычислений, что и в случае $D < 0$. Однако получающаяся при таком способе сумма логарифмов еще не будет являться окончательным ответом и подлежит упрощению. Быстрее ведет к цели идея разложения подынтегральной дроби методом неопределенных коэффициентов.

Пример 64. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2 - 3x + 1}$.

Решение. Замечая, что $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$ и корни квадратного трехчлена $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{4} = 1; -\dfrac{1}{2}$, представим

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1).$$

Тогда возможно разложение

$$\frac{x}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{x}{(x-1)(2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+1},$$

которое приводит к тождеству

$$A(2x+1) + B(x-1) = x.$$

Придавая x поочередно значения $x = 1$ и $x = -\dfrac{1}{2}$, найдем $3A = 1$; $-\dfrac{3}{2}B = -\dfrac{1}{2}$, откуда $A = \dfrac{1}{3}; B = \dfrac{1}{3}$.

Окончательно,

$$\int \frac{x\,dx}{2x^2 - 3x + 1} = A \int \frac{dx}{x-1} + B \int \frac{dx}{2x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{3}\left(\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right) + C. \qquad (3.5)$$

Ответу можно придать иной вид:

$$\int \frac{x\,dx}{2x^2-3x+1} = \frac{1}{6}\left(2\ln|x-1| + \ln|2x+1|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln(x-1)^2 + \ln|2x+1|\right) + C = \frac{1}{6}\ln[(x-1)^2|2x+1|] + C.$$

Мы рекомендуем вычислить этот интеграл также способом, изложенным в пункте а) и довести ответ до окончательного вида (3.5).

Случай 3. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{P_n(x)\,dx}{ax^2+bx+c}$, $(n \geq 2)$.

Вычисление подобных интегралов не несет в себе новых проблем. После выделения целой части подынтегральной дроби задача сводится к случаям 1 и 2.

Рекомендуем самостоятельно вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(6x^3+x^2)\,dx}{(2x-1)(3x-1)}$, поделив вначале числитель подынтегральной дроби на знаменатель $(2x-1)(3x-1) = 6x^2-5x+1$.

При интегрировании дробной части $\dfrac{R(x)}{(2x-1)(3x-1)}$ подынтегральной дроби рекомендуем воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Ответ:

$$I = \frac{x^2}{2} + x + \ln|2x-1| - \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$$

4. Интегрирование некоторых типов иррациональных функций

Некоторые примеры интегралов, в которых интегрируемые функции содержали x под знаком радикала, уже встречались нам в пунктах 1.2 и 1.3 данного пособия. Основная идея, лежащая в основе вычисления подобных интегралов, продемонстрированная на примерах в пункте 1.3, заключалась в подборе такой замены переменной интегрирования x, что интегрируемая функция становится рациональной. Такие подстановки принято называть *рационализующими подстановками.*

4.1. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{\mathbf{P_n(x)\,dx}}{\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}}$

Рассмотрим два случая в зависимости от показателя степени n многочлена $P_n(x)$: $n=0$ и $n=1$.

Случай 1. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $(n=0)$.

Интегралы такого вида путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене приводятся к формулам 8) и 10) таблицы основных интегралов (см. раздел 2).

Заметим, что знак дискриминанта квадратного трехчлена и наличие или отсутствие действительных корней у квадратного трехчлена в этих примерах никак не отражается на процедуре их вычисления.

Пример 65. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$4x^2-4x+5=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot 1+1+4=(2x-1)^2+4.$$

Тогда,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{(2x-1)^2+4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{(2x-1)^2+4}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right|+C.$$

Пример 66. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$.

Решение. Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене в этом случае происходит следующим образом:

$$8+6x-9x^2=-(9x^2-6x-8)=-[(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot 1+1-9]=$$

$$=-[(3x-1)^2-9]=9-(3x-1)^2=3^3-(3x-1)^2.$$

Тогда,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x-1)}{\sqrt{3^2-(3x-1)^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C.$$

Случай 2. Интегралы вида $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$

При вычислении таких интегралов необходимо в числителе подынтегральной дроби выделить дифференциал квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня и разложить интеграл на сумму двух интегралов. Первый из них фактически является табличным интегралом $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{u}}$, а второй — относится к случаю 1.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 67. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{(2-3x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

Решение. Вычислим дифференциал $d(4x^2+9x+1)=(8x+9)\,dx$.

Тогда, обозначая искомый интеграл через I, получим

$$I=-3\int\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}=-\frac{3}{8}\int\frac{\left(8x-\frac{16}{3}\right)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}=$$

$$=-\frac{3}{8}\int\frac{(8x+9)-9-\frac{16}{3}}{\sqrt{4x^2+9x+1}}dx=-\frac{3}{8}\int\frac{d(4x^2+9x+1)}{\sqrt{4x^2+9x+1}}+$$

$$+\frac{43}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}=-\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+\frac{43}{8}I_1,$$

где $I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}.$

Далее, как в и случае 1, имеем

$$4x^2+9x+1=\left[(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot\frac{9}{4}+\frac{81}{16}\right]-\frac{81}{16}+1=$$

$$=\left(2x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{65}{16}=\frac{1}{16}[(8x+9)^2-65].$$

Тогда

$$I_1 = 4\int \frac{dx}{\sqrt{(8x+9)^2-65}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(8x+9)}{\sqrt{(8x+9)^2-65}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|8x+9+\sqrt{(8x+9)^2-65}| + C = \frac{1}{2}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}| + C.$$

Окончательно, находим

$$I = \frac{43}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+9x+1}| - \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9x+1} + C.$$

Пример 68. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{3x(2-3x)}}$.

Решение. Обозначая искомый интеграл через I, запишем его в виде:

$$I = \int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{6x-9x^2}}.$$

Найдем дифференциал $d(6x-9x^2) = (6-18x)\,dx$. Тогда

$$I = -\frac{1}{9}\int \frac{(9-18x)dx}{\sqrt{6x-9x^2}} = -\frac{1}{9}\int \frac{(6-18x)+3}{\sqrt{6x-9x^2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{9}\int \frac{(6-18x)dx}{\sqrt{6x-9x^2}} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{9}\int \frac{d(6x-9x^2)}{\sqrt{6x-9x^2}} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}} = -\frac{2}{9}\sqrt{6x-9x^2} - \frac{1}{3}I_1,$$

где $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$.

Далее, $6x-9x^2 = -(9x^2-6x) = -[(3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 1 + 1 - 1] =$
$= -[(3x-1)^2-1] = 1-(3x-1)^2$.

Тогда

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{\sqrt{1-(3x-1)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(3x-1) + C.$$

Окончательно, находим

$$I = C - \frac{2}{9}\sqrt{3x(2-3x)} - \frac{1}{9}\arcsin(3x-1).$$

4.2. Интегралы вида $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \left(\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}\right)^{\frac{\mathbf{m_1}}{\mathbf{n_1}}}, \left(\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}\right)^{\frac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{n_2}}}, \ldots\right)\mathbf{dx}$

Рассмотрим некоторые частные случаи интегралов этого вида.

Случай 1. $\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{x},\ \sqrt[n_2]{x}, \ldots\right)dx,$

$$(m_1 = m_2 = \ldots = 1, a = d = 1, c = b = 0).$$

Случай 2. $\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{x^{m_1}},\ \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx,$

$$(m_k \geq 1, a = d = 1, c = b = 0).$$

Случай 3. $\int R\left(x, (ax+b)^{m_1/n_1}, (ax+b)^{m_2/n_2}, \ldots\right)dx,$

$$(m_k \geq 1, c = 0, d = 1).$$

Случай 4. Является общим и вынесен в заголовок.

Выбор рационализирующей подстановки во всех случаях очевиден.

В случаях 1 и 2 подстановка $x = t^n$, где n — наименьшее общее кратное всех показателей степени радикалов, сразу приводит к интегралу от рациональной функции. Простейшие примеры интегралов такого типа уже встречались в пункте 1.3.

Пример 69. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3\sqrt[4]{x^3} + 2\sqrt{x}}$.

Решение. Здесь $n_1 = 4, n_2 = 2$, поэтому $n = 4$.

Подстановка $x = t^4$, $dx = 4t^3dt$ приводит искомый интеграл к виду

$$I = \int \frac{4t^3dt}{3t^3 + 2t^2} = 4\int \frac{t^3dt}{t^2(3t+2)} = 4\int \frac{tdt}{3t+2}.$$

Это простейший интеграл от рациональной функции.

Выделяя целую часть подынтегральной дроби, находим

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{(3t+2)-2}{3t+2}dt = \frac{4}{3}\int\left(1 - \frac{2}{3t+2}\right)dt = \frac{4}{3}\left(\int dt - 2\int\frac{dt}{3t+2}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\left(t - \frac{2}{3}\int\frac{d(3t+2)}{3t+2}\right) = \frac{4}{3}\left(t - \frac{2}{3}\ln|3t+2|\right) + C.$$

Возвращаясь к переменной x по формуле $t = \sqrt[4]{x}$, окончательно получим

$$I = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3}\ln|3\sqrt[4]{x} + 2|\right) + C.$$

В случае 3 той же цели мы достигаем подстановкой $ax+b=t^n$, где n — наименьшее общее кратное $n_1, n_2, \ldots$.

Пример 70. Вычислить интеграл $I=\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

Решение. Здесь $n_1=3$, $n_2=2$, поэтому $n=6$. Применим подстановку $2x+1=t^6$; тогда $x=(t^6-1)/2$, $dx=3t^5\,dt$ и, следовательно,

$$I=\int \frac{3t^5\,dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2\,dt}{t-1}=3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\,dt=$$
$$=3\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=\frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C.$$

Возвратимся к старой переменной. Так как $t=(2x+1)^{1/6}$, то

$$I=\frac{3}{2}(2x+1)^{1/3}+3(2x+1)^{1/6}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C.$$

Пример 71. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

Решение. Применим подстановку $\dfrac{1-x}{1+x}=t^2$, откуда выражаем $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Найдем дифференциал $dx=-\dfrac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}$.

Обозначая искомый интеграл через I, получим

$$I=-4\int \frac{t^2dt}{(1+t^2)(1-t^2)}=2\int \frac{2t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}.$$

С целью разложения подынтегральной дроби на простейшие, заметим, что

$$\frac{2t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}=\frac{(t^2+1)+(t^2-1)}{(t^2+1)(t^2-1)}=\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}.$$

Тогда

$$I=2\int \frac{dt}{t^2-1}+2\int \frac{dt}{t^2+1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\operatorname{arctg} t+C=$$
$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

Таким образом, в случае 4 рационализирующая подстановка имеет вид $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n — наименьшее общее кратное $n_1, n_2, \ldots$.

5. Интегрирование тригонометрических функций

5.1. Интегралы вида $\int \mathbf{R}(\sin \mathbf{x},\ \cos \mathbf{x})\, \mathbf{dx}$

Интегралы указанного вида, где R — рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных степенных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $\operatorname{tg}(x/2) = t$. В результате этой подстановки имеем

$$\sin x = \frac{2\ \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\ \operatorname{arctg} t;\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Рассмотрим некоторые типы интегралов на примерах.

Тип 1. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$.

Пример 72. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Решение. Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Применим подстановку $\operatorname{tg}(x/2) = t$, тогда $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Подставляя данные выражения в интеграл, получаем

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left[\begin{array}{cc} \operatorname{tg}(x/2) = t, & dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{4\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, находим

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2) + 2} + C.$$

Следует отметить, что универсальная подстановка $\operatorname{tg}(x/2) = t$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, так как при ее применении

$\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2.

Пример 73. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Решение. Поступая как в предыдущем примере, получим

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = 2\int \frac{dt}{(1+t)^2} = 2\int \frac{d(1+t)}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = C - \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Заметим, что этот интеграл можно вычислить проще следующим искусственным приемом.

Умножим числитель и знаменатель подынтегральной дроби на $1-\sin x$, получим

$$\int \frac{(1-\sin x)dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{(1-\sin x)dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C = \frac{\sin x - 1}{\cos x} + C.$$

Приведенный пример показывает, что иногда можно обойтись знанием формул тригонометрии. Разные ответы, в действительности, совпадают. Убедитесь в этом самостоятельно.

В некоторых частных случаях нахождение интегралов вида $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ может быть упрощено.

1. Если $R(u, v)$ — нечетная функция относительно первого аргумента u, то есть если выполняется условие $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\cos x = t$. Отметим, что в этом случае рассматриваемый интеграл всегда может быть записан в виде $\displaystyle\int R^*(\sin^2 x, \cos x) \sin x\, dx$ или $\displaystyle\int R^{**}(\cos x)\, d(\cos x)$.

2. Если $R(u, v)$ — нечетная функция относительно второго аргумента v, то есть если выполняется условие $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\sin x = t$. Отметим, что в рассматриваемом случае данный интеграл всегда может быть записан в виде $\displaystyle\int R^*(\sin x, \cos^2 x) \cos x\, dx$ или $\displaystyle\int R^{**}(\sin x)\, d(\sin x)$.

3. Если $R(u, v)$ — четная функция по обоим аргументам, то есть если выполняется условие $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интеграл рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$, при этом следует учесть, что

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{t^2}{t^2+1},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{dt}{t^2+1}.$$

Пример 74. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x}\,dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция нечетна относительно синуса, то полагаем $\cos x = t$. Тогда

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x}\,dx = \left[\begin{array}{cc} \cos x = t, & dt = -\sin x\,dx; \\ \sin^2 x = 1 - t^2, & \cos 2x = 2t^2 - 1 \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{(2-t^2)(-dt)}{2t^2-1} = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(t\sqrt{2})}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

Пример 75. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,dx$.

Решение. Здесь подынтегральная функция является нечетной относительно косинуса, поэтому применяем подстановку $\sin x = t$. Тогда $\cos^2 x = 1 - t^2$, $\cos x\,dx = dt$. Следовательно,

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\,dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x\,dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} =$$

$$= \int \frac{(1-\sin^2 x)(2-\sin^2 x)\,d(\sin x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)\,dt}{t^2+t^4}.$$

Так как $\dfrac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2+t^4} = 1 + \dfrac{2}{t^2} - \dfrac{6}{1+t^2}$, то

$$\int \frac{(1-t^2)(2-t^2)\,dt}{t^2+t^4} = t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{(\cos^3 x + \cos^5 x)\,dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

Тип 2. Интегралы вида $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}$.

Заметим, что в подобных интегралах присутствует однородный многочлен степени 2 относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Пример 76. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Подынтегральная функция четна относительно синуса и косинуса. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$, предварительно разделив числитель и знаменатель на $\cos^2 x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \int \frac{(dx)/(\cos^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1} =$$

$$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1} = \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t + 1 - \sqrt{2}}{t + 1 + \sqrt{2}} \right| + C,$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

5.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Выделим здесь четыре случая.

Случай 1. По крайней мере один из показателей m или n — нечетное положительное число.

Если m — нечетное положительное число, то применяется подстановка $\cos x = t$; если же n — нечетное положительное число, то подстановка $\sin x = t$.

Пример 77. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$.

Решение.

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx = \left[\begin{array}{c} \sin x = t, \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right] =$$

$$= \int t^4 (1 - t^2)^2 \, dt = \int t^4 \, dt - 2\int t^6 \, dt + \int t^8 \, dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C =$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

Пример 78. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}} = \int \sin^3 x\cos^{-4/3} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^{-4/3} x\sin x\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \cos x = t, \\ -\sin x\,dx = dt \end{array}\right] = -\int (1-t^2)t^{-4/3}\,dt = -\int t^{-4/3}\,dt + \int t^{2/3}\,dt =$$

$$= 3t^{-1/3} + \frac{3}{5}t^{5/3} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае другой показатель степени может быть числом рациональным (то есть дробным).

Случай 2. Оба показателя m и n — четные положительное числа. Здесь следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью формул понижения степени:

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \tag{5.1}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \tag{5.2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \tag{5.3}$$

Пример 79. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

Решение. Из формулы (5.1) следует, что

$$\sin^2 x\cos^2 x = (\sin x\cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x =$$

$$= \left[\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right] = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{8}(1-\cos 4x).$$

Итак,

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Случай 3. Показатели m и n таковы, что $|m|+|n| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, а также интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$.

В этом случае применяется подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 80. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos x}\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{tg} x \cos^2 x} =$

$$= \left[\begin{array}{cc} \operatorname{tg} x = t, & dx = \dfrac{dt}{t^2+1}; \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{t^2+1}, & \cos^2 x = \dfrac{1}{t^2+1} \end{array}\right] = \int \frac{\frac{dt}{t^2+1}}{\frac{t^2}{t^2+1}\cdot t \cdot \frac{1}{t^2+1}} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\,dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Отметим, что и в этом интеграле можно было обойтись формулами тригонометрии и методом подведения под дифференциал.

Действительно, так как $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, а $\dfrac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$, то

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{tg} x \cos^2 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}\right) d(\operatorname{tg} x) =$$
$$= \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + C.$$

При нахождении интегралов вида $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, где m — целое положительное число, применяются формулы $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, с помощью которых последовательно понижается степень тангенса или котангенса.

Пример 81. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{tg}^7 x\,dx = \int \operatorname{tg}^5 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \operatorname{tg}^5 x\,d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg}^5 x\,dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \int \operatorname{tg}^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} - \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Замечание. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^m x}{\cos^n x}\,dx$ и $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}^m x}{\sin^n x}\,dx$, где n — четное положительное число, находятся аналогично рассмотренным выше интегралам с помощью формул $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ или $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

Пример 82. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^6 x}\, dx$.

Решение.

$$\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^4 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x\, d(\operatorname{tg} x) + 2\int \operatorname{tg}^6 x\, d(\operatorname{tg} x) + \int \operatorname{tg}^8 x\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{7}\operatorname{tg}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{tg}^9 x + C.$$

Случай 4. Этот случай охватывает все остальные интегралы, не попадающие под случаи 1—3, например $m, n < 0$ и $|m| + |n| = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$; $m \geq 0, n < 0$ и $m = 2k, |n| = 2k+1$ или $m < 0, n \geq 0$ и $|m| = 2k+1, n = 2k$.

В этом случае вновь выручает универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Пример 83. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}\, dx$.

Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}\, dx = \left[\begin{array}{c} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^3} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\, dt = \frac{1}{4}\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\, dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2} + 2\ln|t| + \frac{t^2}{2}\right) + C = \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

5.3. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$, и $\int \sin mx \sin nx\, dx$,

При интегрировании такого вида интегралов рекомендуется пользоваться тригонометрическими формулами:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big]; \tag{5.4}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big]; \tag{5.5}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big], \tag{5.6}$$

которые дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде их суммы.

Пример 84. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \sin 2x \cos 5x\, dx$.

Решение. Используя формулу (5.4), получим

$$\int \sin 2x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int \big[\sin 7x + \sin(-3x)\big]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 7x\, dx - \frac{1}{2}\int \sin 3x\, dx = -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

Пример 85. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \cos x \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx$.

Решение. Применим к произведению $\cos x \cos\dfrac{x}{2}$ формулу (5.5):

$$\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right]\cos\frac{x}{4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx.$$

Снова используя ту же формулу, находим

$$\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left[\cos\frac{7x}{4} + \cos\frac{5x}{4}\right] dx + \frac{1}{4}\int\left[\cos\frac{3x}{4} + \cos\frac{x}{4}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4} + \sin\frac{x}{4} + C.$$

5.4. Тригонометрические подстановки

Интегралы вида $\displaystyle\int R(x,\, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$, $\displaystyle\int R(x,\, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$, $\displaystyle\int R(x,\, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$ приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки: для первого интеграла $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$), для второго $x = a\,\mathrm{tg}\, t$ (или $x = a\,\mathrm{ctg}\, t$) и для третьего $x = a/\cos x$ (или $x = a/\sin x$).

Пример 86. Вычислить интеграл $I = \int \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx$.

Решение.

$$I = \left[\begin{array}{c} x = a\sin t, \\ dx = a\cos t\, dt \end{array}\right] = \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}}{a\sin t} a\cos t\, dt =$$

$$= a\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\, dt = a\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\, dt = a\int \frac{dt}{\sin t} - a\int \sin t\, dt =$$

$$= a\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \operatorname{ctg} t\right| + a\cos t + C.$$

Здесь была использована вторая форма записи табличного интеграла 13:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x\right| + C,$$

так как с ее помощью легче перейти к прежней переменной x: $\sin t = x/a$, $\cos t = \sqrt{a^2 - x^2}/a$.

Итак,

$$I = a\ln\left|\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 87. Вычислить интеграл $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Решение.

$$I = \left[\begin{array}{c} x = a\operatorname{tg} t, \\ dx = a/\cos^2 t\, dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{a\ \operatorname{tg} t\sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2\ t}} \cdot \frac{a\, dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\operatorname{tg} t\cos t} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} t\right| + C,$$

где $\operatorname{tg} t = x/a$ и, следовательно, $\operatorname{ctg} t = a/x$, $1/\sin x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t} = \sqrt{a^2 + x^2}/x$.

Итак,

$$I = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{x}\right| + C.$$

6. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла приводят самые разнообразные задачи, связанные с определением площади плоской фигуры и объема тела вращения, отысканием работы переменной силы и нахождением величины перемещения при заданной переменной скорости, определением массы неоднородного тела с переменной плотностью и многие другие.

В курсе лекций в результате анализа некоторых из перечисленных выше задач показано, что приближенное определение указанных в этих задачах величин приводит к необходимости построения так называемых интегральных сумм и, вне зависимости от физического или геометрического смысла задачи, моделируется как проблема нахождения площади криволинейной трапеции.

В следующих ниже пунктах напомним определение и сформулируем необходимые и достаточные условия существования определенного интеграла, перечислим его основные свойства, дадим методы вычисления и приведем приложения определенного интеграла к решению некоторых задач физики и механики.

6.1. Понятие определенного интеграла. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций

Пусть функция $f(x)$ определена на конечном отрезке $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ числовой оси $\mathbb{R}$. Совокупность точек x_i $(i = \overline{0, n};\ n \in \mathbb{N})$ таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, называют разбиением отрезка Ω. Обозначим $X = \{x_i, i = \overline{0, n}\}$, а отрезки $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1, n})$ назовем отрезками разбиения X или частичными отрезками. Таким образом $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$.

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина отрезка Δ_i разбиения X. Выберем произвольным образом точки $\xi_i \in \Delta_i$ $(i = \overline{1, n})$. Их множество обозначим $\xi = \{\xi_i,\ i = \overline{1, n}\}$ и назовем выборкой.

Сумму

$$S_X(\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{6.1}$$

называют интегральной суммой для функции $f(x)$ при заданном разбиении X и фиксированной выборке ξ. Она равна площади ступенчатой фигуры (рис. 6.1), составленной из n прямоугольников, причем основанием i-того прямоугольника служит отрезок Δ_i, а длина его высоты равна $f(\xi_i)$. Разумеется, величина $S_X(\xi)$ будет зависеть и от разбиения X отрезка Ω на частичные отрезки, и от выбора точек ξ_i, образующих выборку ξ.

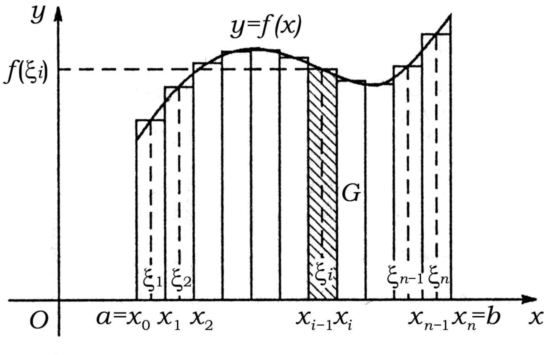


Рис. 6.1.

Определение 6.1. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке Ω называется не зависящий от способа разбиения X отрезка Ω на частичные отрезки и выбора точек $\xi_i \in \Delta_i$ предел интегральной суммы (6.1) при стремлении к нулю длины Δx_i наибольшего частичного отрезка.

Определенный интеграл обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования. Отрезок Ω называется интервалом (промежутком) интегрирования, а его концы: a — нижним и b — верхним пределами интегрирования.

Заметим, что здесь термин «предел» употребляется в смысле, не имеющим отношения к понятию предела функции или последовательности. Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_X(\xi), \tag{6.2}$$

где величина $S_X(\xi)$ определена в (6.1).

Если существует предел I, определяемый в (6.2), то функцию $f(x)$ называют интегрируемой (по Риману) на отрезке Ω и говорят, что существует интеграл от функции $f(x)$ на отрезке Ω.

Необходимые условия интегрируемости сформулируем в следующей теореме.

Теорема 6.1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω, то она ограничена на нем.

Справедливо также противоположное утверждение.

Теорема 6.2. Если функция $f(x)$ неограничена на отрезке Ω, то она неинтегрируема (по Риману) на этом отрезке.

Интегрируемость неограниченных функций в несобственном смысле будет рассмотрена в следующем разделе.

Теорема 6.3. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

6.2. Основные свойства определенного интеграла

Заметим сначала, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $\Omega = [a, b]$, то интеграл от этой функции является *числом*, не зависящим от того, какой буквой обозначен аргумент подынтегральной функции, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi.$$

Иногда используется запись $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$.

Свойство 1.

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{6.3}$$

Это свойство — один из немногих примеров, когда значение определенного интеграла легко найти непосредственно из определения.

Действительно, здесь $f(x) = 1$ и для любого разбиения X отрезка $\Omega = [a, b]$ и любой выборки ξ интегральная сумма $S_X(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a$ и не зависит от $l(X) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i$.

Следовательно, $\int\limits_a^b dx = \lim\limits_{l(X)\to 0} S_X(\xi) = b - a$.

Свойство 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке Ω, то интегрируема и их сумма $f(x) + g(x)$, причем

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{6.4}$$

Свойство 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω, то для любого $k \in \mathbb{R}$ интегрируема функция $k \cdot f(x)$, причем

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{6.5}$$

Иными словами, постоянный множитель подынтегральной функции можно вынести за символ интеграла.

Объединяя последние два свойства, можно записать правило интегрирования любой линейной комбинации интегрируемых функций

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_a^b f_k(x)\,dx \quad (\alpha_k \in \mathbb{R}).$$

Свойство 4. Если пределы в интеграле поменять местами, то значение интеграла изменит свой знак:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{6.6}$$

Из этого свойства следует геометрически очевидный факт:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{6.7}$$

если $f(x)$ определена в точке $x = a$.

Свойство 5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω, то для любой точки $c \in (a, b)$, т.е. $a < c < b$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{6.8}$$

Свойство 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

Более того, для указанных непрерывных функций, не равных тождественно нулю, имеет место строгое неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Замечание. Свойство 6 надо учитывать при решении задач на определение площадей фигур, ограниченных линиями графиков заданных функций. Например, находя с помощью интеграла площадь криволинейной трапеции, необходимо учитывать ее расположение относительно основания. В случае, когда трапеция целиком лежит над осью Ox, интеграл в силу определения выражает площадь как положительную величину; в случае, когда трапеция целиком лежит под осью Ox, интеграл, будучи отрицательным за счет значений $f(\xi_i) \leqslant 0$, $\xi_i \in \xi$, выражает площадь трапеции, взятую с отрицательным знаком.

Ясно, что для вычисления площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ в общем случае надо сложить площади под графиком, с абсолютными значениями площадей над графиком функции $f(x)$.

Пример 88. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $\Omega = [0, 2\pi]$.

Из определения и геометрического смысла ясно, что $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$.

Однако, чтобы найти площадь заштрихованной фигуры (см. рис. 6.2), надо вычислять $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right|$.

Заметим, что для нахождения искомой площади проще найти значение $2 \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx$ в силу очевидного равенства площадей под- и над- графиком функции.

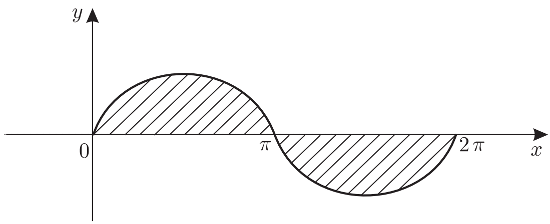


Рис. 6.2. К решению примера 88.

Следующие свойства касаются оценок интеграла и имеют важное прикладное значение.

Теорема 6.4. (*Об оценке определенного интеграла*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$. Пусть $m = \min\limits_{x \in \Omega} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in \Omega} f(x)$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке Ω.

Тогда
$$m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < M(b-a) \quad (a < b). \tag{6.9}$$

Теорема 6.5. (*Об интегрировании неравенств*). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ интегрируемы на отрезке $\Omega = [a, b]$ и для любого $x \in \Omega$: $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

Тогда
$$\int\limits_a^b g(x)\,dx < \int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b h(x)\,dx \quad (a < b). \tag{6.10}$$

Следствие. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке Ω, то и $|f(x)|$ — функция, интегрируемая на этом же отрезке, причем
$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6.11}$$

Теорема 6.6. (*О среднем*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$, то существует хотя бы одно значение $x = c \in \Omega$, для которого
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{6.12}$$

Значение $f_{cp} = f(c)$ в (6.12) называют средним интегральным значением функции.

6.3. Интеграл с переменным верхним пределом. Непосредственное вычисление определенных интегралов

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $\Omega = [a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ существует интеграл
$$I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, \tag{6.13}$$

который называется интегралом с переменным верхним пределом и является очевидно функцией от x с областью определения, совпадающей с отрезком Ω.

Более того, функция $I(x)$ будет непрерывной на этом отрезке. Если же от подынтегральной функции $f(x)$ потребовать непрерывность в каждой точке отрезка Ω, то функция $I(x)$ будет дифференцируемой на этом отрезке функцией.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 6.7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$, то функция $I(x)$, определенная в (6.13), дифференцируема на этом отрезке, причем

$$I'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Следствие. Согласно определению первообразной (1.1), функция $I(x)$ является первообразной (точнее одной из первообразных) для функции $f(x)$.

Обозначив, как обычно, множество первообразных символом неопределенного интеграла, получим формулу

$$\int f(x)\,dx = I(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C,$$

устанавливающую связь между понятиями неопределенного и определенного интеграла и позволяющую получить простую формулу для вычисления определенных интегралов, не прибегая к подсчету пределов интегральных сумм.

Теорема 6.8. (*Формула Ньютона-Лейбница*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\Omega = [a, b]$ и $F(x)$ — какая-нибудь ее первообразная на этом отрезке. Справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Bigg|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a). \qquad (6.14)$$

Применение формулы проиллюстрируем на простых примерах.

Пример 89. Вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. $\int\limits_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_1^2 \frac{(1+2\sqrt{x}+x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2+\sqrt{x}\right)dx =$
$= \left(2\sqrt{x}+2x+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^2 = 2\sqrt{2}+4+\frac{2}{3}\sqrt{8}-2-2-\frac{2}{3} = 2\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$

Пример 90. Вычислить интеграл $\int\limits_2^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение. $\int\limits_2^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\limits_2^{\mathrm{e}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}\Big|_2^{\mathrm{e}} = 2\sqrt{\ln \mathrm{e}} - 2\sqrt{\ln 2} = 2(1 -$
$- \sqrt{\ln 2})$.

Пример 91. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Решение. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} -$
$- \operatorname{tg} 0 = 1.$

6.4. Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления определенных интегралов в тех случаях, когда первообразная не очевидна сразу, используются те же методы и приемы, которые использовались при вычислении неопределенных интегралов. Однако правило замены переменной в определенном интеграле уже требует некоторой аккуратности.

Напомним (см. формулы (1.24)—(1.26)), что в результате замены переменной $x = \varphi(t)$ неопределенный интеграл $I = \int f(x)\,dx$ приводится к интегралу $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, который в ряде случаев вычисляется проще или уже является табличным.

Найдя его первообразную $F(t)$, далее следовало из уравнения $x = \varphi(t)$ выразить переменную t через x с помощью обратной функции $t = \{\varphi\}^{-1}(x) = \psi(x)$, предъявив окончательно ответ в виде $I = F(\psi(x))+C$. От функции $\varphi(x)$ требовались свойства непрерывной дифференцируемости и монотонности хотя бы на каком-то непустом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$.

В следующей теореме показано, что при вычислении определенного интеграла заменой переменной $x = \varphi(t)$, необходимость возвращения к исходной переменной x в выражении первообразной отпадает.

Теорема 6.9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$, в частности, всюду в области своего определения $D(f)$. Пусть отрезок $[a, b] \subset \Omega$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Если функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на некотором множестве $T \in \mathbb{R}$ изменения своего аргумента t и существуют такие его значения $\alpha, \beta \in T$, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, причем значения функции $\varphi(t) \in [a, b]$ для всех значений $t \in [\alpha, \beta]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{6.15}$$

Пример 92. Вычислить $I = \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$.

Решение. Положим $x = R\sin t$. Так как $x \in [0, R]$, то новые пределы интегрирования найдем из уравнений $\sin t = 0$ и $\sin t = 1$. Если взять $\alpha = t_1 = 0$, а $\beta = t_2 = \frac{\pi}{2}$, то при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $x = R\sin t \in [0, R]$ и $\sqrt{R^2 - x^2} = R\cos t$.

Так как $dx = R\cos t\,dt$, то по формуле (6.15) получим

$$I = R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{R^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$
$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi\right) - 0 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Пример 93. Вычислить $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение можно оформить следующей записью: $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$

$$= \left[\begin{array}{l} x = \sin t \Rightarrow\ dx = \cos t\,dt, \\ \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t,\ \text{т. к.}\ \cos t > 0\ \text{при}\ t \in [0, \pi/3], \\ x = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, \\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{3}. \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/3} \sin t\, dt = -\cos t \Big|_0^{\pi/3} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

При выборе новых пределов интегрирования мог возникнуть вопрос: почему выбраны пределы $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{\pi}{3}$, а не, например, $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{2\pi}{3}$? Ведь $\sin\frac{2\pi}{3}$ так же равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Можно показать, что при этих пределах величина интеграла остается прежней, однако его вычисление усложняется.

Дело в том, что в этом случае $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \left[\begin{array}{ll} \cos t, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ -\cos t, & t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]. \end{array}\right.$

Поэтому $I = \int\limits_0^{2\pi/3} \frac{\sin t \cos t\, dt}{|\cos t|} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t\, dt}{\cos t} + \int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\sin t \cos t\, dt}{-\cos t} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\, dt - \int\limits_{\pi/2}^{2\pi/3} \sin t\, dt = -\cos t|_0^{\pi/2} + \cos t|_{\pi/2}^{2\pi/3} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 + \cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Приведенный пример решен с использованием подстановки второго типа $x = \varphi(t)$. Покажем, что этот же пример успешно решается с помощью подстановки первого типа $\varphi(x) = u$. Применение такой подстановки наиболее целесообразно в интегралах вида

$$I = \int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx. \tag{6.16}$$

Новые пределы интегрирования u_1 и u_2 сразу определяются по формулам $u_1 = \varphi(a)$ и $u_2 = \varphi(b)$, а так как $du = \varphi'(x)\, dx$, то интеграл в формуле (6.16) принимает вид

$$I = \int\limits_{u_1}^{u_2} f(u)\, du.$$

Однако и в этих интегралах иногда возникают затруднения, связанные с немонотонностью функции $\varphi(x)$.

Пример 94. Вычислить интеграл из предыдущего примера с помощью подстановки $u = \varphi(x) = 1 - x^2$.

Решение. $I = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} u = 1 - x^2, du = -2x\, dx, x\, dx = -\frac{1}{2}\, du \\ x = 0 \Rightarrow u_1 = 1;\ \ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{4} \end{array}\right] =$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{1/4}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int\limits_{1/4}^{1}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\,2\sqrt{u}\Big|_{1/4}^{1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Замечание 1. В данном примере нам удалось сразу выразить величину $x\,dx$ через du. Если бы мы выражали x через u из уравнения $u = 1 - x^2$, то следовало бы взять решение $x = \sqrt{1-u}$, так как $x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ и, следовательно, $x \geq 0$.

Замечание 2. В первой части настоящего пособия была отмечена связь метода замены переменной первого типа с теоремой об инвариантности формул интегрирования (см. пункт 1.3) и методом подведения под дифференциал, который оказывается весьма эффективен во многих случаях. Действительно, если известно, что

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

то интеграл (6.16) вычисляется сразу:

$$I = \int\limits_{a}^{b} f\left(\varphi(x)\right)\, d\varphi(x) = F\left(\varphi(x)\right)\Big|_{a}^{b} = F\left(\varphi(b)\right) - F\left(\varphi(a)\right).$$

Введение здесь замены переменной по формуле $u = \varphi(x)$ и последующий пересчет пределов интегрирования только затягивает процесс вычисления.

Таким образом, наиболее оптимальное вычисление интеграла $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ выглядит так: $I = \int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2}\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\,2\sqrt{1-x^2}\Big|_{0}^{\sqrt{3}/2} =$
$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$

Приведем здесь еще два факта, упрощающих процесс вычисления определенных интегралов.

а) для любой интегрируемой на отрезке $[-a, a]$ $(a > 0)$ функции $f(x)$, интеграл

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{ll} 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная функция,} \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная функция.} \end{array}\right. \tag{6.17}$$

б) если функция $f(x)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ и периодическая с периодом T функция, т. е. $f(x+T) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$, то для любого $a \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx. \tag{6.18}$$

6.5. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 6.10. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные, то

$$\int\limits_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{6.19}$$

Как и в неопределенном интеграле, метод интегрирования по частям может быть успешно применен, если в исходном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ удается представить в виде $u(x)v'(x)\,dx = u\,dv(x)$, а интеграл $\int\limits_a^b v(x)\,du(x)$ вычисляется в проще.

Пример 95. Вычислить интеграл $I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} x \ln x\,dx$.

Решение. Представим подынтегральное выражение в виде $x \ln x\,dx = \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right)$. Тогда, полагая $u = \ln x$, $v = \frac{x^2}{2}$, по формуле (6.19) получим

$$I = \int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln x\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \ln x \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2}\,\frac{dx}{x} = \ln \mathrm{e} \cdot \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \ln 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{\mathrm{e}} x\,dx =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1 + \mathrm{e}^2).$$

Пример 96. Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^1 x^2 \mathrm{e}^{2x}\,dx$.

Решение. Запишем интеграл в виде $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2\,d\mathrm{e}^{2x}$. По формуле (6.19) получим $I = \dfrac{1}{2}\left(x^2 e^{2x}\,|_0^1 - 2\displaystyle\int\limits_1^e e^{2x} x\,dx\right) = \dfrac{1}{2}(e^2 - 0) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 x\,de^{2x}$.

Применяя формулу (6.19) еще раз, окончательно находим

$I = \dfrac{1}{2}\,e^2 - \dfrac{1}{2}\left(xe^{2x}\,|_0^1 - \displaystyle\int\limits_0^1 e^{2x}\,dx\right) = \dfrac{1}{2}\,e^2 - \dfrac{1}{2}(e^2 - 0) + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2}\,e^{2x}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\,e^2 -$
$- \dfrac{1}{2}\,e^2 + \dfrac{1}{4}(e^2 - e^0) = \dfrac{1}{4}(e^2 - 1)$.

Замечание. Следует обратить внимание, что вычисляя в формуле (6.19) значение $uv\,|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$ на каждом шаге интегрирования, мы существенно уменьшаем объем вычислений.

Было бы нерационально определять первообразную для подынтегральной функции путем вычисления неопределенного интеграла (см. аналогичный пример 51), а затем применять формулу Ньютона-Лейбница (6.14).

Пример 97. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\pi e^x \cos x\,dx$.

Решение. Обозначая искомый интеграл I, получим $I = \displaystyle\int\limits_0^\pi e^x \cos x\,dx =$
$= \displaystyle\int\limits_0^\pi e^x d\sin x = e^x \sin x|_0^\pi - \displaystyle\int\limits_0^\pi \sin x d\,e^x = e^\pi \sin\pi - e^0 \sin 0 - \displaystyle\int\limits_0^\pi e^x \sin x\,dx =$
$= \displaystyle\int\limits_0^\pi e^x d\cos x = e^x \cos x|_0^\pi - \displaystyle\int\limits_0^\pi \cos x d\,e^x = e^\pi \cos\pi - e^0 \cos 0 - \displaystyle\int\limits_0^\pi e^x \cos x\,dx =$
$= -e^\pi - 1 - I$.

Из полученного уравнения $2I = -e^\pi - 1$ находим $I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

7. Несобственный интеграл

7.1. Определение несобственных интегралов первого и второго рода

Распространение понятия интегрируемости функции по Риману, т.е. понятия определенного интеграла, на функции, заданные на бесконечном промежутке или на неограниченные функции приводит к необходимости ввести новые представления об *интегрировании в несобственном смысле* и *несобственных интегралах*.

В первом случае речь идет об интегралах вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

называемых *несобственными интегралами первого рода*.

Во втором случае, когда функция $f(x)$ неограниченна на конечном отрезке $[a,b]$, имея, например, разрыв II рода во внутренней точке интервала (a,b) или на концах отрезка $[a,b]$, интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

называют *несобственным интегралом второго рода*.

Определение 7.1. Пусть a — действительное число и пусть для любого $x > a$ функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,x]$ (в частности, определена и ограничена на нем). Обозначим $I(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ — интеграл с переменным верхним пределом.

Если при $x \to +\infty$ существует конечный предел $I = \lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$, то этот предел I называется несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$; говорят, что несобственный интеграл *сходится*, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в несобственном смысле.

Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Если же конечный предел не существует (предел равен бесконечности или не существует вовсе), то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится*.

Заметим, что если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то определение 7.1 можно записать так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

Если ввести обозначение $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, то определение несобственного интеграла можно записать с помощью формулы, аналогичной формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a). \tag{7.2}$$

Рассмотрим самые простые примеры.

Пример 98. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx$.

Решение. По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \sin b - \sin 0 = \lim_{b\to+\infty} \sin b.$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin b$ не существует, то интеграл расходится.

Заметим, что писать $\lim\limits_{b\to+\infty} \sin b = \sin(+\infty)$ не следует, так как символ $\sin(+\infty)$ не имеет смысла.

Пример 99. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x\,dx$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру

$$\int\limits_0^{+\infty} x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b x\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^2}{2} - 0 = +\infty.$$

Отсутствие конечного предела говорит о том, что данный интеграл расходится.

Отметим, что в этом примере допустима краткая запись (7.2):

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\big((+\infty)^2 - 0\big) = +\infty.$$

Пример 100. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Решение. Вновь, строго по определению, имеем: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx =$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) + 1 = 1,$$

так как $\lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) = 0$.

В кратком изложении решение этого примера имеет вид:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{1} = 0 + 1 = 1.$$

Таким образом, исследование на сходимость в простых случаях сводится к вычислению несобственных интегралов по определению.

Аналогично определяются несобственные интегралы на промежутках $(-\infty, b]$ и $(-\infty, +\infty)$. А именно,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)\,dx,$$

причем, последний интеграл считается сходящимся, если предел существует независимо от того, каким способом и как $a \to -\infty$, а $b \to +\infty$. Поясним это обстоятельство.

Пусть c — любое число из интервала (a, b), то есть $a < c < b$. Тогда по свойству аддитивности определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Но, тогда

$$\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

и существование конечного предела при $a \to -\infty$ и $b \to +\infty$ равносильно существованию двух независимых пределов $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ является сходящимся, если существуют оба предела и расходящимся, если хотя бы один из пределов равен бесконечности или вовсе не существует.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 101. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Пусть $\alpha \neq 1$, тогда

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} - 1\right).$$

Если $\alpha > 1$, то существует конечный предел и
$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \lim\limits_{b\to+\infty}\dfrac{1}{b^{\alpha-1}}\right) = \dfrac{1}{\alpha-1}$ и, следовательно, сходится.

При $\alpha < 1$: $\lim\limits_{b\to+\infty} b^{1-\alpha} = +\infty$, $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ и поэтому интеграл расходится.

При $\alpha = 1$ интеграл также расходится, так как
$\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln b - \ln 1 = +\infty.$

Таким образом,

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1; \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{array}\right. \tag{7.3}$$

Этот результат эффективно используется в дальнейшем при исследовании других, более сложных, интегралов.

Пример 102. Показать, что интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-x^2}dx$ сходится и вычислить его.

Решение. Отталкиваясь от определения, запишем

$$I = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} x\mathrm{e}^{-x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{a}^{0}\mathrm{e}^{-x^2}d(-x^2)\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{a}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^0 - \lim_{a\to-\infty}\mathrm{e}^{-a^2}\right) = -\frac{1}{2}(1-0) = -\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{a\to-\infty}\mathrm{e}^{-a^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a^2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{(-\infty)^2}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0.$

Обратимся к несобственным интегралам второго рода.

Определение 7.2. Пусть a, b — действительные числа: $-\infty < a < b < +\infty$. Пусть функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a, x]$, для любого x: $a < x < b$ и неограниченна на промежутке $[a, b)$.

Обозначим

$$I(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt.$$

Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{x\to b-0} I(x)$ при x, стремящимся к числу b слева, то это значение принимают за значение несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ второго рода, а интеграл называют сходящимся. В противном случае, то есть когда предел равен бесконечности или вовсе не существует, говорят, что соответствующий интеграл расходится.

Итак, по определению, для функции $f(x)$, неограниченной на правом конце отрезка $[a, b]$ интеграл

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{x\to b-0}\int\limits_{a}^{x} f(t)dt. \tag{7.4}$$

Это равенство можно записать так:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то определение можно записать и так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Bigg|_a^{b-0} = F(b-0) - F(a),$$

где $F(b-0) = \lim\limits_{x\to b-0} F(x)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода для функции, неограниченной на левом конце отрезка $[a,b]$, или на обоих его концах. Соответствующие формулы имеют вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{a+\delta}^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon,\delta\to+0} \int\limits_{a+\delta}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

причем в последнем равенстве пределы при $\varepsilon \to +0$ и $\delta \to +0$ должны существовать независимо друг от друга. Точки a и b называются *особыми точками* соответствующих несобственных интегралов.

Может случиться, что особая точка c непосредственно лежит внутри отрезка $[a,b]$, т.е. $a < c < b$. В этом случае несобственный интеграл определяется как сумма двух несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

причем сходимость несобственного интеграла требует независимого существования обоих пределов.

Пример 103. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

Решение. Особой точкой подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ является точка $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty$. Справедливы равенства:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{1-\alpha}\right); \ \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \ln 1 - \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \ln\varepsilon = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \ln\varepsilon; \ \alpha = 1. \end{array} \right.$$

Из них следует, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$, так как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$ и равен $\frac{1}{1-\alpha}$; расходится при $\alpha \geq 1$.

Итак,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{1-\alpha}, \ \alpha < 1; \\ +\infty, \ \alpha \geq 1. \end{array} \right. \tag{7.5}$$

Сравните этот пример и результат вычислений с примером 101. Обратите внимание на то, что подынтегральная функция в этих примерах одна и та же, однако речь идет о совершенно разных несобственных интегралах.

Несколько обобщая пример 103, нетрудно показать, что при любых a и b: $-\infty < a < b < +\infty$, имеем

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \left[\begin{array}{l} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \ \alpha < 1; \\ +\infty, \ \alpha \geq 1; \end{array} \right. \tag{7.6}$$

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \left[\begin{array}{l} -\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \ \alpha < 1; \\ +\infty, \ \alpha \geq 1. \end{array} \right. \tag{7.7}$$

Проделайте эти несложные вычисления самостоятельно.

Приведем еще несколько вычислительных примеров.

Пример 104. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Точка $x = 1$ является особой точкой этого несобственного интеграла второго рода.

По определению:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to+0} \sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{1}\right) = 2.$$

Пример 105. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$
$= \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$

7.2. Основные свойства и методы вычисления несобственных интегралов

Будем рассматривать несобственные интегралы в единообразной записи

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

предполагая, что:

а) функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, b)$, где a — конечная точка ($a \in R$), b — либо конечная точка, а функция $f(x)$ — неограниченна в промежутке $[a, b)$, имея в точке b разрыв второго рода, либо $b = +\infty$;

б) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, x]$ при любом $x \in [a, b)$.

Определения несобственных интегралов (7.1) и (7.4) можно записать так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_a^x f(t)dt, \text{ если } b = +\infty,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-0} \int_a^x f(t)dt, \text{ если } b \neq +\infty.$$

Перечислим **основные свойства несобственных интегралов**.

1°. Если сходятся несобственные интегралы от функций $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a, b)$, то при любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ сходится интеграл от функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$ на том же промежутке и справедливо равенство

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

2°. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b)$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0} F(x) = F(b-0)$, если $b \neq +\infty$, или $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, если $b = +\infty$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\begin{array}{l} F(b-0) - F(a);\ b \neq +\infty, \\ F(+\infty) - F(a);\ b = +\infty. \end{array} \right.$$

3°. Если сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, то и сходится $\int\limits_c^b f(x)dx$, где $c : a < c < b$.

4°. *Интегрирование по частям в несобственных интегралах.*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в промежутке $[a, b)$ и имеют непрерывные производные на отрезке $[a, x]$ для любого $x \in (a, b)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0}[u(x)v(x)] = u(b-0)\, v(b-0)$ и интеграл $\int\limits_a^b vdu$ сходится , то и интеграл $\int\limits_a^b udv$ сходится и справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^{b-0} - \int_a^b vdu.$$

В случае $b=+\infty$ эта формула принимает вид

$$\int\limits_a^{+\infty} udv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} vdu.$$

Пример 106. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx$.

Решение. $I = \int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx = \int\limits_0^{+\infty} xd(-\mathrm{e}^{-x}) = -x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx.$

Так как $x\mathrm{e}^{-x}=0$ при $x=0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} =$

$=$\{Правило Лопиталя\}$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(\mathrm{e}^x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0,$

то $I = \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} + +\mathrm{e}^0 = -\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} + 1 = 1.$

Пример 107. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{a} \dfrac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Имеем несобственный интеграл второго рода с особой точкой $x=a$. Интегрируя по частям, выразим интеграл сам через себя

$$\int\limits_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\limits_0^a x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^a x\frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\int\limits_0^a xd(\sqrt{a^2-x^2}) =$$

$$= -x\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^{a-0} + \int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = -\lim_{x\to a-0} x\sqrt{a^2-x^2} + 0 + \int\limits_0^a \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

Здесь применен искусственный прием: числитель и знаменатель дроби в последнем интеграле мы умножили на $\sqrt{a^2-x^2}$. Тогда, обозначая искомый интеграл через I, найдем: $I = \int\limits_0^a \dfrac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\int\limits_0^a \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} -$

$$-\int\limits_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a^2\left(\lim_{x\to a}\arcsin\frac{x}{a} - \arcsin 0\right) - I.$$

Для искомого значения I получим уравнение, откуда $2I = a^2\arcsin 1 = = \dfrac{a^2\pi}{2}$. Окончательно, $I = \dfrac{a^2\pi}{4}$.

5°. *Замена переменной в несобственных интегралах.*

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на промежутке $[\alpha, \beta)$, где α и β определяются из условия, что $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = b$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt,$$

при условии, что хотя бы один из интегралов сходится.

Пример 108. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Решение. Положим $x = \operatorname{tg} t$, где $0 \leqslant t < \pi/2$, тогда $dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t}$; $\quad x^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 t}$; $\quad (x^2+1)^{-3/2} = \cos^3 t$.

Поэтому $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \sin t \Big|_0^{\pi/2-0} = \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

8. Приложения определенного интеграла

8.1. Вычисление площади плоской фигуры

8.1.1. Уравнения кривых заданы в декартовой системе координат

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $\big[f(x) \geqslant 0\big]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $\big[f_1(x) \leqslant \leqslant f_2(x)\big]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, находится по формуле

$$S = \int\limits_a^b \big[f_2(x) - f_1(x)\big]\,dx.$$

Пример 109. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 3x$ и прямой $3x + y = 4$.

Решение. Искомая фигура изображена на рис. 8.1 и может быть представлена в виде следующей системы:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x; \\ y = -3x + 4, \end{cases}$$

решая которую находим точки пересечения параболы с прямой: $A(-2,\,10)$, $B(2,\,-2)$.

Искомая площадь:

$$S = \int\limits_a^b \big[f_2(x) - f_1(x)\big]\,dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} (-3x + 4 - x^2 + 3x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = 2\int\limits_{0}^{2} (4 - x^2)\,dx =$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3}\ \text{кв. ед.}$$

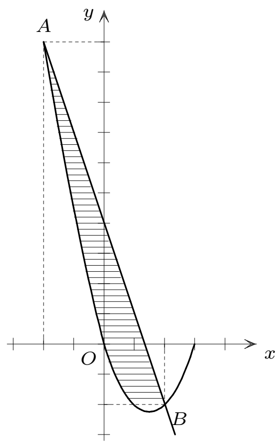


Рис. 8.1. К решению примера 109

8.1.2. Кривые заданы параметрическими уравнениями

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$$

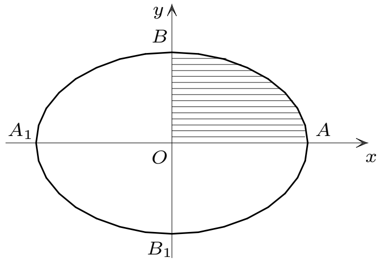
то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a,\, b]$ оси Ox, выражается формулой

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t) x'_t(t)\, dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, $\big[y(t) \geqslant 0$ при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2\big]$.

Пример 110. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Решение. Эллипс расположен симметрично относительно обеих осей (рис. 8.2), следовательно, можно вычислить сначала 1/4 часть площади данной фигуры. Вычислим площадь той части фигуры, которая расположена в первом квадранте:



Р и с. 8.2. К решению примера 110

$$S_{\mathrm{I}} = \int\limits_0^a y\, dx.$$

Найдем пределы интегрирования для переменной t из условий:

$$0 = a\cos t, \quad t_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$a = a\cos t, \quad t_2 = 0.$$

Имеем

$$S_{\mathrm{I}} = \int\limits_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)\, dt = ab\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\, dt = \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi\, ab}{4}.$$

Вся площадь эллипса равна $S = 4S_{\mathrm{I}} = \pi ab$ кв.ед.

8.1.3. Кривые заданы в полярной системе координат

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Пример 111. Вычислить площадь, ограниченную первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ (рис. 8.3).

Решение. Найдем пределы интегрирования. Первый виток спирали образуется при изменении параметра φ от 0 до 2π. Следовательно,

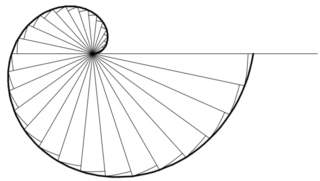


Рис. 8.3. К решению примера 111

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} a^2\varphi^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ кв. ед.}$$

8.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

8.2.1. Уравнение кривой задано в декартовой системе координат

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ — гладкая (то есть производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Пример 112. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ $(y \geqslant 1)$.

Решение. Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y' = (3/2)x^{1/2}$. Таким образом,

$$L = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2} - \frac{8}{27} =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right) \text{ ед.}$$

8.2.2. Кривая задана параметрическими уравнениями

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, ($x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции), то длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра t от t_1 до t_2 вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

Пример 113. Найти длину дуги кривой $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$.

Решение. Найдем производные по параметру t: $x_t' = -5\cos^4 t \sin t$, $y_t' = 5\sin^4 t \cos t$. Следовательно,

$$L = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\cos^4 t \sin t)^2 + (5\sin^4 t \cos t)^2}\, dt =$$

$$= 5\int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}\, dt = \frac{5}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2t}\, dt =$$

$$= -\frac{5}{8}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\, d(\cos 2t) = -\frac{5}{8\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t\sqrt{1 + 3\cos^2 2t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{3}\cos 2t + \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{5}{8}\left[2 - \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right] \text{ ед.}$$

8.2.3. Кривая задана в полярной системе координат

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то длина дуги равна

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2}\, d\varphi.$$

Пример 114. Найти длину дуги кривой $r = \sin^3(\varphi/3)$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi/2$.

Решение. Имеем $r'_\varphi = \sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3)$. Следовательно,

$$L = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + \left(\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ ед.}$$

8.3. Вычисление объема тела

8.3.1. Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, может быть выражена как функция от x, т.е. в виде $S = S(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то объем части тела, заключенной между перепендикулярными оси Ox плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx.$$

Пример 115. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ плоскостями $x = 1$ и $x = 2$.

Решение. Плоскость, перпендикулярная к оси абсцис в точке x, пересечет шар по окружности радиуса $r = \sqrt{9 - x^2}$. Площадь сечения $S(x) = \pi r^2 = = \pi(9 - x^2)$, и следовательно,

$$V = \pi\int\limits_1^2 (9 - x^2)\,dx = \pi\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = 6\frac{2}{3}\pi \text{ куб. ед.}$$

8.3.2. Вычисление объема тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int\limits_a^b y^2\, dx.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = g(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_y = \pi \int\limits_c^d x^2\, dy.$$

Пример 116. Вычислить объем тела, образуемого вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси Ox.

Решение. При вращении эллипса вокруг оси Ox образуется тело, называемое эллипсоидом вращения. Из уравнения эллипса видно, что его полуось равна 2, следовательно $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Разрешив уравнение эллипса относительно y^2, получим $y^2 = \frac{9}{4}(4 - x^2)$. Объем эллипсоида вращения равен

$$V = \pi \int\limits_{-2}^{2} \frac{9}{4}(4 - x^2)\, dx = \frac{9}{2}\pi \int\limits_0^2 (4 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{9}{2}\pi \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{9}{2}\pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) = 24\pi \text{ куб. ед.}$$

8.4. Вычисление площади поверхности вращения

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt.$$

Пример 117. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от $x = 0$ до $x = \pi/2$.

Решение. Найдем $y' = 2\cos 2x$, тогда

$$S_x = 2\pi \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 2x\sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\, dx.$$

Произведем замену переменной: $2\cos 2x = t$, $-4\sin 2x\, dx = dt$, $\sin 2x\, dx = (-1/4)dt$. Найдем пределы интегрирования по t: если $x = 0$, то $t = 2$; если $x = \pi/2$, то $t = -2$. Таким образом,

$$S = 2\pi \int\limits_{2}^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\bigl(t + \sqrt{1+t^2}\bigr)\right|_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)\right] \text{ кв. ед.}$$

8.5. Статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур

Определение 8.1. За статические моменты и моменты инерции плоских дуг и фигур принимаются соответствующие моменты условных масс, равномерно распределенных вдоль этих дуг и фигур, с плотностью (линейной или плоскостной), равной единице.

Статические моменты и моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ вычисляются по формулам

$$M_x = \int\limits_a^b y\, dL, \quad M_y = \int\limits_a^b x\, dL; \quad I_x = \int\limits_a^b y^2\, dL, \quad I_y = \int\limits_a^b x^2\, dL,$$

где $dL = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ — дифференциал дуги кривой.

Статические моменты и моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y\,dS = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx, \quad M_y = \int\limits_a^b x\,dS = \int\limits_a^b xy\,dx;$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int\limits_a^b y^3\,dx, \quad I_y = \int\limits_a^b x^2\,dS = \int\limits_a^b x^2 y\,dx.$$

В этих формулах $dS = y\,dx$ — дифференциал площади криволинейной трапеции.

Пример 118. Найти статический момент и момент инерции полуокружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$ относительно оси Ox.

Решение. Вычислим $y' = -x/\sqrt{r^2 - x^2}$, тогда получим

$$M_x = \int\limits_a^b y\,dL = \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = r\int\limits_{-r}^{r} dx = 2r^2.$$

Находим момент инерции относительно оси Ox :

$$I_x = \int\limits_a^b y^2\,dL = \int\limits_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx =$$

$$= r\int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2r\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Введем подстановку $x = r\sin t$, $dx = r\cos t\,dt$; если $x = 0$, то $t = 0$; если $x = r$, то $t = \pi/2$. Следовательно,

$$I_x = 2r\int\limits_0^{\pi/2} r\sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= r^3\int\limits_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = r^3\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

8.6. Нахождение координат центра тяжести

Координаты центра тяжести однородной дуги плоской кривой $y = f(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$ выражается формулами

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int\limits_a^b x\,dL; \quad \overline{y} = \frac{1}{L}\int\limits_a^b y\,dL,$$

где $dL = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, а L — длина дуги.

Координаты центра тяжести криволинейной трапеции вычисляются по формулам

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\int\limits_a^b x\,dS = \frac{1}{S}\int\limits_a^b xy\,dx; \quad \overline{y} = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y\,dS = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b y^2\,dx,$$

где $dS = y\,dx$, а S — площадь фигуры.

Пример 119. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии

$$y = a\frac{\mathrm{e}^{x/a}+\mathrm{e}^{-x/a}}{2}, \qquad -a \leqslant x \leqslant a.$$

Решение. Так как функция $y(x)$ четная, то кривая симметрична относительно оси Oy, т.е. $\overline{x} = 0$. Остается найти $\overline{y}$. Имеем $y' = \dfrac{\mathrm{e}^{x/a}-\mathrm{e}^{-x/a}}{2}$, тогда $dL = \sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x/a}-\mathrm{e}^{-x/a}}{2}\right)^2}\,dx = \dfrac{\mathrm{e}^{x/a}+\mathrm{e}^{-x/a}}{2}\,dx.$

Длина дуги

$$L = \int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int\limits_0^a \frac{\mathrm{e}^{x/a}+\mathrm{e}^{-x/a}}{2}\,dx = a(\mathrm{e}^{x/a}-\mathrm{e}^{-x/a})\Big|_0^a = a(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}).$$

Следовательно,

$$\overline{y} = \frac{1}{a(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1})}\int\limits_{-a}^{a} a\left(\frac{\mathrm{e}^{x/a}+\mathrm{e}^{-x/a}}{2}\right)^2 dx = \frac{2}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\int\limits_0^a \left(\frac{\mathrm{e}^{x/a}+\mathrm{e}^{-x/a}}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\int\limits_0^a\left(1+\frac{\mathrm{e}^{2x/a}+\mathrm{e}^{-2x/a}}{2}\right)dx = \frac{1}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\left[x+\frac{a}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x/a}-\mathrm{e}^{-2x/a}}{2}\right)\right]_0^a =$$

$$= \frac{a}{(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1})}\left(1 + \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{4}\right) \approx 1{,}2a.$$

Таким образом, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} \approx 1{,}2a$.

Пример 120. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x$ и $3x + y = 4$.

Решение. В пункте 3.1 рассмотрено нахождение площади данной фигуры (см. пример 109; рис. 8.1).

$$S = \frac{32}{3} \text{ кв. ед.}$$

В силу того, что фигура заключена между двумя линиями, для вычисления координат центра тяжести применим следующие формулы:

$$\overline{x} = \frac{1}{S}\int\limits_a^b x\,[f_2(x) - f_1(x)]\;dx = \frac{3}{32}\int\limits_{-2}^{2} x(-3x + 4 - x^2 + 3x)\,dx =$$

$$= \frac{3}{32}\int\limits_{-2}^{2}(4x - x^3)\,dx = 0$$

Интеграл равен нулю в силу нечетности подынтегральной функции (см. формулу (6.17)).

$$\overline{y} = \frac{1}{2S}\int\limits_a^b \left[(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2\right]\;dx = \frac{3}{64}\int\limits_{-2}^{2}\left[(-3x+4)^2 - (x^2 - 3x)^2\right]\;dx =$$

$$= \frac{3}{64}\int\limits_{-2}^{2}\left[-x^4 + 6x^3 - 24x + 16\right]\;dx = \frac{3}{64}\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{2} - 12x^2 + 16x\right]_{-2}^{2} = \frac{12}{5}$$

Таким образом, центр тяжести фигуры находится в точке $C\left(0; \frac{12}{5}\right)$.

8.7. Вычисление работы и давления

Работа переменной силы $X = f(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[x_0,\ x_1]$, вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Для вычисления силы давления жидкости применяется закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно ее площади S, умноженной на глубину погружения h, плотность ρ и ускорение силы тяжести g[1], т.е.

$$P = \rho g h S.$$

Пример 121. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?

Решение. Согласно закону Гука, сила в X Н, растягивающая пружину на x м, равна $X = kx$. Коэффициент пропорциональности k найдем из условия: если $x = 0{,}01$ м, то $X = 1$ Н. Следовательно, $k = 1/0{,}01 = 100$ и $X = 100x$. Тогда

$$A = \int\limits_0^{0,04} 100x\,dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0{,}08 \text{ Дж.}$$

Пример 122. С помощью подъемного крана извлекают железобетонную надолбу со дна реки глубиной 5 м. Какая работа при этом совершается, если надолба имеет форму правильного тетраэдра (рис. 8.4) с ребром 1 м? Плотность железобетона 2500 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3.

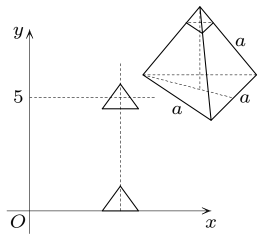


Рис. 8.4. К примеру 122

Решение. Высота тетраэдра $h = \sqrt{6}/3$ м, объем тетраэдра $V = \sqrt{2}/12$ м^3. Вес надолбы с учетом Архимедовой силы равен

$$P = \frac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 2500\cdot 9{,}8 - \frac{1}{12}\sqrt{2}\cdot 1000\cdot 9{,}8 = 1225\sqrt{2}\ H.$$

Поэтому работа при извлечении надолбы до момента появления на поверхности воды ее вершины составляет

$$A_0 = 1225\sqrt{2}(5-h) = 1225\sqrt{2}(5-\sqrt{6}/3) \approx 7227{,}5 \text{ Дж.}$$

Теперь найдем работу A_1 при извлечении надолбы из воды. Пусть вершина тетраэдра вышла на высоту $5+y$. Тогда объем малого тетраэдра, вышедшего из воды равен $3\sqrt{3}y^3/8$, а вес тетраэдра

$$P(y) = \frac{2500\cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2} - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}y^3 3\sqrt{3}\right)\cdot 1000\cdot 9{,}8.$$

[1]Иногда в условиях задач используется удельный вес воды $\gamma = \rho g$.

Следовательно,

$$A_1 = \int\limits_0^h \left(\frac{24\,500}{12}\sqrt{2} - \frac{9\,800}{12}\sqrt{2} + \frac{9\,800}{8}3y^3\sqrt{8}\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{6}/3} \left(1225\sqrt{2} + 3675\sqrt{3}y^3\right) dy =$$

$$= \left[1225\sqrt{2}y + \frac{3675}{4}\sqrt{3}y^4\right]_0^{\sqrt{6}/3} \approx 2082{,}5 \text{ Дж}.$$

Отсюда $A = A_0 + A_1 = 7227{,}5$ Дж $+ 2082{,}5$ Дж $= 9310$ Дж.

Пример 123. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см. Один ее конец соединен с баком, в котором уровень воды на 1 м выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

Решение. Заслонка представляет собой круг радиуса 0,03 м. Разобьем площадь этого круга на элементы — полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента, находящегося на расстоянии y от центра, равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) $dS = 2\sqrt{9 - y^2}\,dy$. Найдем силу давления, испытываемую этим элементом:

$$dP = 2\rho g(1{,}03 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy = 19\,600(1{,}03 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

(здесь $\rho = 1000$ кг/м^3). Следовательно,

$$P = 19\,600\int\limits_{-3}^{3}(1{,}03 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy =$$

$$= 19\,600\left[1{,}03\left(\frac{y}{2}\sqrt{9 - y^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right) + \frac{1}{3}(9 - y^2)^{3/2}\right]\Bigg|_{-3}^{3} =$$

$$= 9\,800 \cdot 9{,}27\pi \approx 0{,}09\pi \; H.$$

9. Задания контрольной работы «Интегральное исчисление и его приложения»

Порядок выполнения контрольной работы

Студент должен выполнять контрольную работу по варианту, номер которого выбирается в соответствии с последними двумя цифрами номера зачетной книжки:

Последние две цифры номера зачетной книжки				**Вариант**
$*****01$	$*****26$	$*****51$	$*****76$	**1**
$*****02$	$*****27$	$*****52$	$*****77$	**2**
$*****03$	$*****28$	$*****53$	$*****78$	**3**
$*****04$	$*****29$	$*****54$	$*****79$	**4**
$*****05$	$*****30$	$*****55$	$*****80$	**5**
$*****06$	$*****31$	$*****56$	$*****81$	**6**
$*****07$	$*****32$	$*****57$	$*****82$	**7**
$*****08$	$*****33$	$*****58$	$*****83$	**8**
$*****09$	$*****34$	$*****59$	$*****84$	**9**
$*****10$	$*****35$	$*****60$	$*****85$	**10**
$*****11$	$*****36$	$*****61$	$*****86$	**11**
$*****12$	$*****37$	$*****62$	$*****87$	**12**
$*****13$	$*****38$	$*****63$	$*****88$	**13**
$*****14$	$*****39$	$*****64$	$*****89$	**14**
$*****15$	$*****40$	$*****65$	$*****90$	**15**
$*****16$	$*****41$	$*****66$	$*****91$	**16**
$*****17$	$*****42$	$*****67$	$*****92$	**17**
$*****18$	$*****43$	$*****68$	$*****93$	**18**
$*****19$	$*****44$	$*****69$	$*****94$	**19**
$*****20$	$*****45$	$*****70$	$*****95$	**20**
$*****21$	$*****46$	$*****71$	$*****96$	**21**
$*****22$	$*****47$	$*****72$	$*****97$	**22**
$*****23$	$*****48$	$*****73$	$*****98$	**23**
$*****24$	$*****49$	$*****74$	$*****99$	**24**
$*****25$	$*****50$	$*****75$	$*****00$	**25**

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4—5 см для замечаний рецензента. Работы, выполненные в компьютерном варианте, не принимаются.

2. Обложку тетради следует заполнить по следующему образцу:

Контрольная работа по высшей математике
заочный факультет, I курс, 2 семестр
Фамилия, имя, отчество студента
*Группа *** Номер зачетной книжки *** Вариант ****
Подпись студента Дата выполнения работы

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по заданному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не засчитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номер задачи.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие.

6. Решения задач и объяснения к ним должны излагаться подробно, аккуратно, без сокращения слов; чертежи можно делать от руки.

7. Если работа не зачтена, то студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, и в короткий срок сдать повторно на проверку. Работу над ошибками нужно выполнять в этой же тетради в конце работы, повторно полностью решив незачтенные задачи. Вносить исправления в текст уже проверенной работы запрещается.

Вариант 1

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int e^x \sin e^x \, dx;$ *б)* $\int \frac{dx}{4-9x^2};$ *в)* $\int x e^{-x} \, dx;$

г) $\int x \cos 3x \, dx;$ *д)* $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$ *е)* $\int \frac{dx}{x^2-16x+68};$

ж) $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_5^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}};$ *б)* $\int\limits_0^1 \arcsin x \, dx;$ *в)* $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 3x \cos x \, dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{16+x^2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$, $(x \geq 0)$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$.

Вариант 2

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$; б) $\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3}\,dx$; в) $\int x \sin 2x\,dx$;

г) $\int x\mathrm{e}^{3x}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$;

ж) $\int \cos 4x \cos 7x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x+3}\,dx$; б) $\int\limits_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/3} \sin^2 3x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \sin x\,dx$; б) $\int\limits_0^{e} \ln 2x\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^3$, $x \geq 0$.

Вариант 3

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; б) $\displaystyle\int \left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$; в) $\displaystyle\int x\sin 4x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x/2}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_9^{16} \frac{dx}{2-\sqrt{x}}$; б) $\displaystyle\int\limits_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/4} \sin x\sin 3x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$, $y=-x$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$.

Вариант 4

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$; в) $\displaystyle\int x\cos 5x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x/3}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+1}}{x}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\,dx}{e^x+5}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg} x\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 2x$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{4}$, $x = 2$, $y = 0$.

Вариант 5

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \sqrt{\ln x}\,\frac{dx}{x}$; б) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{5-x^3}$; в) $\displaystyle\int x e^{-2x}\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\sin 5x\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+26}$; е) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{4}\cos\frac{3x}{4}\,dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_5^{10} \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{3} \frac{dx}{(4x+5)^2}.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2$, $y=x^2-8$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=\mathrm{e}^{-x}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

Вариант 6

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$; в) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-3x}\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x^3}}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+2}$;

ж) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_4^9 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$; в) $\displaystyle\int\limits_1^e x\ln x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=9-x^2$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+4x+5$, $y=0$.

Вариант 7

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; б) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+3}}$; в) $\displaystyle\int x\cos 7x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\,e^{-4x}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$;

ж) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{1+3x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/8} \sin 5x\cos 3x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{7+x^2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x-1)^2$; $y=1$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+5x-6$, $y=0$.

Вариант 8

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$; б) $\displaystyle\int 2x(x^2+1)^4\,dx$; в) $\displaystyle\int x\sin 7x\,dx$;

г) $\displaystyle\int xe^{5x}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+12x+37}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/6} \cos x \cos 5x\, dx;$ б) $\displaystyle\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\, dx;$ в) $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{x}{1+x^4}\, dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x};$ б) $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{x\, dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{3}{x}$, $y = 4 - x$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболой $y = 3x - x^2$ и осью абсцисс.

Вариант 9

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+36}};$ б) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\, dx;$ в) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx;$

г) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-6x}\, dx;$ д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x+1};$ е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+16x+65};$

ж) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx;$ б) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^x\, dx;$ в) $\displaystyle\int\limits_2^4 \frac{x^2}{1-x^2}\, dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{1} x\ln x\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2$, $x+y+$ $+2=0$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x-2$, $y=x-1$.

Вариант 10

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{8x^4-1}}$; б) $\displaystyle\int\left(\frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\right)^2 dx$; в) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{4x}\,dx$; д) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$; е) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}$;

ж) $\displaystyle\int\cos^3 x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/3} x\cos 3x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(4+3x)^3}$; б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями $y=2\sqrt{x}$, $x=4$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0$, $x\geq 0$.

Вариант 11

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$; б) $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; в) $\int x^2\sin x\,dx$;

г) $\int x\mathrm{e}^{-5x}\,dx$; д) $\int x\sqrt{4+x}\,dx$; е) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$;

ж) $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^{x^3}\,dx$; б) $\int\limits_1^4 (x-1)^{10}\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\sin 2x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=2$, $x+2y-$ $-5=0$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=2-x^2$, $x=0$, $x\geq 0$.

Вариант 12

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \dfrac{x^2\,dx}{2x^3+3}$; б) $\int \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\,dx$; в) $\int x\cos 4x\,dx$;

г) $\int x\sin\dfrac{x}{3}\,dx$; д) $\int \dfrac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$; е) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{3+4x-x^2}}$;

ж) $\displaystyle\int \sin 4x \cos 2x \, dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^3 x\mathrm{e}^{-x}\, dx;$ б) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{ctg} x \, dx;$ в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\, dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx;$ б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 8$, $x + y = 9$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и линиями $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.

Вариант 13

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\, dx}{\mathrm{e}^{2x}+1};$ б) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}};$ в) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\, dx;$

г) $\displaystyle\int x \sin 3x \, dx;$ д) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+2x}};$ е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+10};$

ж) $\displaystyle\int \sin^3 x \, dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x\, dx}{\cos^4 x};$ б) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx;$ в) $\displaystyle\int_{\ln(\pi/4)}^{\ln(\pi/2)} \mathrm{e}^x \cos \mathrm{e}^x\, dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \mathrm{e}^{2x}$, $y = \mathrm{e}^{-2x}$, $x = 1$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$, осями координат и прямой $x = \pi/4$.

Вариант 14

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$; в) $\displaystyle\int \ln x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\cos 6x\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;

ж) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+4x}}$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x\mathrm{e}^{3x}\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x+1$, $x - y = 1$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Вариант 15

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int e^{2x}(5-e^x)^2\,dx$; б) $\int \frac{\sin x\,dx}{(1+\cos x)^2}$; в) $\int xe^{3x}\,dx$;

г) $\int x\sin 6x\,dx$; д) $\int \frac{dx}{3-\sqrt{x}}$; е) $\int \frac{dx}{x^2-6x+1}$;

ж) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$; б) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; в) $\int\limits_0^{\pi/6} \sin x\cos 2x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\arcsin(1/x)}{x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=1-2x^2+x$, $y=1-x$.

Вариант 16

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}$; б) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; в) $\int x\cos 3x\,dx$;

г) $\int xe^{-5x}\,dx$; д) $\int \sqrt{e^x-1}\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$;

ж) $\int \cos^5 x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^{-2x}\,dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} \cos x \cos 5x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^3 = x$, $y = 1$, $x = 8$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $x = y^2 - 1$, $x = 1$, $y \geq 0$.

Вариант 17

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$; в) $\int x \sin 3x\,dx$;

г) $\int x\mathrm{e}^{-x}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$;

ж) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_0^{13} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_1^3 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} x\cos 2x\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2$, $y=x-1$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=x^3$.

Вариант 18

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$; б) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$; в) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$;

г) $\int xe^{2x}\,dx$; д) $\int x\sin 4x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$;

ж) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos 3x\,dx$; б) $\int\limits_1^3 x\sqrt{x^2-1}\,dx$; в) $\int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+2x+x^2}$; б) $\int\limits_{1/2}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x-1)^2$, $y=x^2$, $x=0$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой $y=2x-x^2$.

Вариант 19

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int x\sqrt{1+2x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\displaystyle\int x\sin 5x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{4x}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+29}$;

ж) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^3\,x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \arccos x\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=y^2$, $x=\frac{3}{4}y^2+1$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной прямыми $x+y=3$, $x=0$, $y=0$.

Вариант 20

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{25x^2+4}$; в) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$;

г) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{8x}\,dx$; д) $\displaystyle\int x\sin 5x\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$;

ж) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^3\, x\, dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\, dx;$ б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x\, dx;$ в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}};$ б) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \mathrm{arctg}\, x\, dx.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -3x + 4$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2 + x$, $y = x^2$.

Вариант 21

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int x\cos x^2\, dx;$ б) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+3\sin x}\, dx;$ в) $\displaystyle\int (x+4)\sin x dx;$

г) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-2x}\, dx;$ д) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\, dx}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}};$ е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5};$

ж) $\displaystyle\int \cos^3 x\, dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}};$ б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx;$ в) $\displaystyle\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{2x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x$, $y = 3x$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \mathrm{e}^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Вариант 22

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2 - 25}$; б) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2+4}\,dx$; в) $\displaystyle\int (x+2)\mathrm{e}^x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+8x+32}$;

ж) $\displaystyle\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi/4} x\cos 2x\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{4}^{9} \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$; в) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+7x+10}$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $x + 3y = 4$, $x = 4$.

Вариант 23

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$; б) $\displaystyle\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; в) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$;

г) $\displaystyle\int x e^{-4x}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+15}}$;

ж) $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^3 \ln(x+3)\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\cos^5 x\,dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+4}}\,dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x e^{-2x}\,dx$; б) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2^x$, $x = 0$, $y = 2$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $x = -\pi/2$, $x = \pi/2$.

Вариант 24

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2}$; б) $\displaystyle\int \frac{\arccos x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\,dx$;

г) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x-16}}$;

ж) $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{4+x^4}$; б) $\int\limits_0^{\pi} x \sin 2x \, dx$; в) $\int\limits_8^{15} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 6x + 10$, $y = -x$.

5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $x = 2$, $y = 0$, $y \geq 0$.

Вариант 25

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\,dx}{2x^4+5}$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$; в) $\int (x-2)\mathrm{e}^x \, dx$;

г) $\int x \cos 3x \, dx$; д) $\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; е) $\int \frac{dx}{x^2 - 12x + 40}$;

ж) $\int \sin^5 x \, dx$.

2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-1/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; б) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_0^{\pi/2} x \sin 2x \, dx$.

3. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$а)\ \int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt[5]{x-3}}; \qquad б)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x^2 - 1$.
5. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x}$, $y = 3 - x$.

Список литературы

[1] *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2008. 640 с.

[2] *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. СПб.: Профессия, 2007. 432 с.

[3] *Бермант А. Ф., Араманович И. Г.* Краткий курс математического анализа. М.: Лань, 2010. 736 с.

[4] *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 416 с.

[5] *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. М.: Мир и Образование, Астрель, Оникс, 2012. 368 с.

[6] *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ, Астрель, 2009, 560 с.

[7] *Кузнецов Л. А.* Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты. М.: Лань, 2008. 240 с.

[8] *Натансон И. П.* Краткий курс высшей математики. М.: Лань, 2009. 736 с.

[9] *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. М.: Интеграл-пресс, 2009. 544 с.

[10] *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Лаборатория базовых знаний, Физматлит, 2010. 672 с.

[11] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Лань, 2009. 800 с.

Содержание

Элементы интегрального исчисления

Составители *ОГОРОДНИКОВ Евгений Николаевич*
ЗАУСАЕВ Артем Анатольевич

Печатается в авторской редакции

Оригинал-макет подготовлен с помощью
издательской системы LaTeX 2_ε

Подп. в печать 06.05.2013
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. п. л. 6,28.
Уч. изд. л. 6,1. Тираж 200 экз. Рег. N 89/13. Заказ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8.