С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА,
Е. А. ТАРАСОВА

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Самара 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА, Е. А. ТАРАСОВА

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Самара 2018

Печатается по решению ученого совета СамГТУ
(протокол №9 от 27.04.2018)

УДК 517.91/.93
К 88

Кубышкина С. Н.
К88 Тренировочные тесты по курсу математики. Часть 1 учебно-методическое пособие / *С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова, Е. А. Тарасова* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2018. – 73 с.

Содержит варианты тренировочных тестов, относящиеся к следующим разделам курса математики: линейная и векторная алгебра, пределы, дифференцирование функций, функции нескольких переменных, неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения.

Перед каждым разделом дан необходимый справочный материал. Приведены решения типовых примеров для каждого теста и методические указания.

Пособие предназначено для студентов-бакалавров первого курса, изучающих математику один год.

УДК 517.91/.93
К88

Рецензент: *кан. физ.–мат. наук. Небогина Е. В.*

Введение

Преподавание математики для технических направлений вузов имеет цель: ознакомить студента с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести инженерную задачу на математический язык.

Все это имеет важное значение для последующей практической работы инженера и необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов-бакалавров первого курса всех направлений. Самостоятельное решение тестовых заданий способствует развитию у студентов практических навыков при решении широкого круга задач, связанных с использованием элементов линейной и векторной алгебры, пределов, дифференциального и интегрального исчисления.

Пособие включает в себя шесть разделов. Каждый раздел соответствует нескольким темам курса математики, в нем приводятся основные теоретические сведения, необходимые формулы и методические указания с подробными решениями тестовых задач. Часть задач создана авторами, но в пособие также включены задачи из известных изданий, список которых приведен в библиографии.

1. Определители и матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, содержащей m строк и n столбцов:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

где $a_{ij} \in R (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$.

Если число столбцов матрицы n равно числу ее строк, то матрицу называют квадратной матрицей порядка n. Элементы a_{11}, a_{22}, $\dots$, a_{nn} квадратной матрицы порядка n образуют ее главную диагональ.

Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю. Диагональная матрица называется единичной, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице, она обозначается E.

Произведением матрицы A на число λ ($\lambda \in R$) называется матрица $B = \lambda \cdot A$ с элементами $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ для $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ (размерности матриц A и B одинаковые).

Суммой (разностью) двух матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ ($C = A + (-1) \cdot B$) размерности $m \times n$, элементы которой определяются равенствами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех значений индексов i и j (т. е. две матрицы складываются (вычитаются) поэлементно).

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матриц $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле $c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj}$, где $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Транспонирование — переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^T называется транспонированной относительно матрицы A.

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$ называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\triangle = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$ называется число, которое вычисляется по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

На практике расчет определителей n–го порядка удобнее вести с помощью теоремы разложения определителя по элементам строки или столбца, а также используя свойства определителей.

Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Существуют два метода нахождения обратной матрицы: первый способ — с помощью алгебраических дополнений, второй — с помощью элементарных алгебраических преобразований.

Минором M_{ij} элемента матрицы n–го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$–го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i–й строки и j–го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n–го порядка называется соответствующий этому элементу минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема разложения. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения.

Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений:

1. вычисляем определитель матрицы A, если $detA \neq 0$, то обратная матрица существует;

2. составляем матрицу $\|A_{ij}\|$ из алгебраических дополнений элементов a_{ij} матрицы A;
3. транспонируем матрицу $\|A_{ij}\|$;
4. умножаем каждый элемент транспонированной матрицы на $\frac{1}{detA}$;
5. делаем проверку $A \cdot A^{-1} = E$.

К элементарным алгебраическим преобразованиям матрицы относятся: вычеркивание нулевой строки (столбца); умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю; перестановка строк (столбцов); прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на число, отличное от нуля; транспонирование матрицы.

Алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью элементарных алгебраических преобразований:

1. вычисляем определитель матрицы A, если $detA \neq 0$, то обратная матрица существует;
2. справа к матрице A дописываем единичную матрицу E, получаем матрицу вида $(A|E)$ (расширенная матрица);
3. прямой ход. С помощью элементарных преобразований обнуляем все элементы левой матрицы, стоящие под ее главной диагональю;
4. обратный ход. С помощью элементарных преобразований обнуляем все элементы левой матрицы, стоящие над ее главной диагональю;
5. элементы главной диагонали левой матрицы, преобразуем в единицы. Матрица слева от черты станет единичной, при этом расширенная матрица примет вид $(E|A^{-1})$.

С помощью обратной матрицы можно находить решения матричных уравнений:

$$A \cdot X = C, \ X \cdot B = C.$$

Решением этих уравнений являются соответственно матрицы

$$X = A^{-1} \cdot C, \ X = C \cdot B^{-1},$$

если A и B имеют обратные матрицы.

Единственное решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

если ее определитель $\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$, находится по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\triangle x_1}{\triangle}, \quad x_2 = \frac{\triangle x_2}{\triangle}, \quad x_3 = \frac{\triangle x_3}{\triangle}.$$

Определители $\triangle x_1, \triangle x_2, \triangle x_3$, получаются из главного определителя системы $\triangle$ путем замены его первого, второго и третьего столбцов соответственно столбцом свободных членов системы.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Для нахождения ранга используются элементарные преобразования матрицы, в результате которых можно преобразовать исходную матрицу в единичную. Число единиц на главной диагонали равно рангу этой матрицы.

Теорема Кронекера—Капелли. Система линейных уравнений (СЛУ) совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A (матрицы коэффициентов при неизвестных) равен рангу расширенной матрицы $\bar{A}$ (матрица системы с добавленным столбцом свободных членов) этой системы.

Из теоремы Кронекера—Капелли следует, что:

1. Система является определенной и имеет единственное решение, если $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} \bar{A} = n$;
2. Система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений, если $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} \bar{A} < n$;
3. Система несовместна и решений не имеет, если $\mathrm{rang} A < \mathrm{rang} \bar{A}$.

При решении системы линейных уравнений удобно пользоваться методом Гаусса, который заключается в последовательном исключении неизвестных. В итоге исходная система при помощи элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду.

Условия задач	Ответы
1. Вычислить определители третьего порядка:	
а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$;	а) 3;
б) $\begin{vmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;	б) -112;
в) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;	в) 15;
г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 8 \end{vmatrix}$;	г) -99;
д) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;	д) 70.
е) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;	е) -40;
ж) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$;	ж) 27.
2. Решить уравнение:	
а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 2 & 2+x \end{vmatrix} = 0$;	а) $x_1 = x_2 = -1$;
б) $\begin{vmatrix} x-2 & 3 & x \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;	б) $x = -3$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0;$	в) $x_1 = 0, x_2 = 1;$
г) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 0;$	г) $x_1 = -6, x_2 = -4;$
д) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$	д) $x = -3.$
3. Решить неравенство:	
а) $\begin{vmatrix} 3x & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \geqslant -1;$	а) $x \leqslant 1/9;$
б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2x & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} \geqslant 0;$	б) $x \geqslant -51/8;$
в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \\ x & 3 & -1 \end{vmatrix} \geqslant 1;$	в) $x \geqslant -27;$
г) $\begin{vmatrix} 3 & 2x & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \leqslant 5;$	г) $x \geqslant 1;$
д) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2x \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} \geqslant 0;$	д) $x \leqslant -29/2.$
4. Вычислить определители четвертого порядка 1)путем разложения по элементам строки(столбца); 2)пользуясь свойствами определителя:	
а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};$	а) $-49;$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;	б) -236;
в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;	в) -108;
г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;	г) 80;
д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$;	д) 66.
е) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;	е) -45;
ж) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;	ж) 119.
5. Вычислить: а) $\begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix}^T \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}^2$;	а) $\begin{Vmatrix} 9 & 21 \\ 2 & 9 \end{Vmatrix}$;
б) $\begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}^2 - 5 \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$;	б) $\begin{Vmatrix} 49 & 47 \\ 38 & 34 \end{Vmatrix}$;
в) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix} \cdot E + \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}^2$;	в) $\begin{Vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}$;
г) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{Vmatrix}^T + \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}^2$;	г) $\begin{Vmatrix} -6 & 9 \\ 21 & -6 \end{Vmatrix}$;

д) $\begin{Vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + 3 \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}^T$;	д) $\begin{Vmatrix} 13 & 5 \\ 13 & 15 \end{Vmatrix}$;
е) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}^2 + 5 \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$;	е) $\begin{Vmatrix} 17 & 14 \\ 11 & 17 \end{Vmatrix}$;
ж) $\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}^T - 3 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$;	ж) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 19 & 11 \end{Vmatrix}$.
6. Вычислить:	
а) $\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{Vmatrix}^T + \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;	а) $\begin{Vmatrix} 6 & 29 \\ 21 & 4 \end{Vmatrix}$;
б) $\begin{Vmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 7 & 2 \end{Vmatrix} - E$;	б) $\begin{Vmatrix} 44 & 63 & 18 \\ 20 & 27 & 8 \\ 5 & 7 & 1 \end{Vmatrix}$;
в) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix}^T - 3 \cdot E$;	в) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -3 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$;
г) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} + \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;	г) $\begin{Vmatrix} 19 & -2 & 11 \\ 12 & -1 & 2 \\ 23 & -3 & 18 \end{Vmatrix}$;

д) $\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}^T + 5 \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}^{-1}$;	д) $\begin{Vmatrix} -19 & -8 & 49 \\ -16 & -7 & 26 \\ 47 & 10 & -25 \end{Vmatrix}$.
7. Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы A двумя способами: 1) с помощью алгебраических дополнений; 2) с помощью элементарных преобразований:	
а) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$;	а) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$;
б) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \end{Vmatrix}$;	б) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 0,6 & -0,2 \end{Vmatrix}$;
в) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$;	в) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4,5 & -1,5 & -7 \\ -3 & 1 & 5 \end{Vmatrix}$;
г) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;	г) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$;
д) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$;	д) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{Vmatrix}$;
е) $A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$;	е) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0,4 & 0,8 \\ -1 & 0,2 & -0,6 \end{Vmatrix}$;
ж) $A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;	ж) $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$.

8. Решить систему линейных уравнений двумя способами: 1) методом Крамера; 2) с помощью обратной матрицы:	
а) $\begin{cases} 2x+5y=10; \\ 7x+2y=4; \end{cases}$	а)$x=0; y=2;$
б) $\begin{cases} 3x+5y=7; \\ 8x-6y=9; \end{cases}$	б)$x=1,5; y=0,5;$
в) $\begin{cases} -x+5y=10; \\ 2x-3y=5; \end{cases}$	в)$x=\frac{55}{7}; y=\frac{25}{7};$
г) $\begin{cases} 3x+y+2z=1; \\ 3x-2y+4z=2; \\ -x+5y+3z=4; \end{cases}$	г)$x=-\frac{4}{13}; y=\frac{3}{13}; z=\frac{11}{13};$
д) $\begin{cases} x+2y+z=3; \\ 3x-3y+4z=-1; \\ 5y-2z=4; \end{cases}$	д)$x=-\frac{7}{13}; y=\frac{16}{13}; z=\frac{14}{13};$
е) $\begin{cases} x+2y+3z=5; \\ 2x+y+2z=0; \\ x+2y+z=-1; \end{cases}$	е)$x=-\frac{8}{3}; y=-\frac{2}{3}; z=3;$
ж) $\begin{cases} -3x+2y+z=2; \\ x-y-z=1; \\ 2x+3y+z=5; \end{cases}$	ж)$x=0; y=3; z=-4.$
9. Найти решение СЛУ методом Гаусса, предварительно выяснив вопрос о совместности системы с помощью теоремы Кронекера-Капелли:	

а) $\begin{cases} 2x+y+z=2; \\ x-y=-2; \\ 3x-y+2z=2. \end{cases}$	а)$x=-1, y=1, z=3$.
б) $\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3-x_4=2; \\ 3x_1+x_2-x_4=5; \\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=0; \end{cases}$	б)$r(A)=r(\bar{A})=3<n=4$, базисное решение $(\frac{8}{5};\frac{1}{5};-2;0)$;
в) $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3+x_4=1; \\ x_1+2x_2+4x_3-x_4=2; \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-5; \end{cases}$	в)$r(A)=2, r(\bar{A})=3$, система несовместна;
г) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2; \\ 2x_1-2x_2+x_3=6; \\ x_1-x_2-x_3=0; \end{cases}$	г)$x_1=1; x_2=-1; x_3=2$;
д) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1; \\ -2x_1+4x_2+3x_3=-3; \\ 3x_1+2x_2+4x_3=10; \end{cases}$	д)$x_1=\frac{12}{7}; x_2=-\frac{9}{7}; x_3=\frac{13}{7}$;
е) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5; \\ 2x_1+x_2+x_3=2; \\ -x_1-2x_2+x_3=-1; \end{cases}$	е)$r(A)=2, r(\bar{A})=3$, система несовместна;
ж) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+4x_4=1; \\ x_2+x_3-x_4=2; \\ x_1+2x_2+x_3=3; \\ x_1-x_2+x_4=-1; \end{cases}$	ж)$x_1=\frac{2}{5}; x_2=1; x_3=\frac{3}{5}; x_4=-\frac{2}{5}$.

Решение задач варианта а.

1. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель третьего порядка по правилу треугольника:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot6\cdot10+5\cdot9\cdot4+3\cdot7\cdot8-8\cdot6\cdot4-5\cdot3\cdot10-9\cdot7\cdot1 =$$

$$= 60 + 180 + 168 - 192 - 150 - 63 = 3.$$

Ответ: $\triangle = 3$.

2. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 2 & 2+x \end{vmatrix} = 0.$

Решение.

Разложим определитель по элементам первой строки: $1 \cdot ((2+x)^2 - 2) - 1 \cdot (2 + x - 1) + 1 \cdot (2 - 2 - x) = 0$, приведем подобные слагаемые: $x^2+2x+1 = 0$, получим формулу квадрата суммы:$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1$.

Ответ: $x_1 = x_2 = -1$.

3. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 3x & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \geqslant -1.$

Решение.

Найдем определитель путем разложения по элементам первой строки: $3x \cdot (45 - 48) - 1 \cdot (36 - 42) + 2 \cdot (32 - 35) \geqslant -1$, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые $-9x \geqslant -1$. Разделим обе части неравенства на -9, изменив знак неравенства на противоположный: $x \leqslant 1/9$.

Ответ: $x \leqslant 1/9$.

4. Вычислить определитель четвертого порядка: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

а)Вычислим определитель четвертого порядка путем разложения по элементам первой строки:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+5\cdot(-1)^{(1+4)} \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-16+9-72+12+48-18)-$$

$$-3\cdot(-14+36-90+15+42-72)+4\cdot(14+48-80-15+56-64)-$$

$$-5\cdot(21+144-40-45+28-96) = -74+249-164-60 = -49.$$

б)Вычислим определитель четвертого порядка, пользуясь свойствами определителей:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 \\ -25 & 0 & 17 & 19 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 \\ -25 & 0 & 17 & 19 \\ -10 & 0 & 7 & 11 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 \\ -25 & 0 & 17 & 19 \\ -10 & 0 & 7 & 11 \\ -11 & 0 & 7 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} -25 & 17 & 19 \\ -10 & 7 & 11 \\ -11 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \\ -11 & 7 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 63-110+98-100 = -49.$$

1)поменяем местами 1-ю и 3-ю строки определителя, при этом определитель изменит свой знак на противоположный;

2)умножим каждый элемент 1-ой строки на (-8) и прибавим к соответствующим элементам 2-ой строки;

3)умножим каждый элемент 1-ой строки на (-3) и прибавим к соответствующим элементам 3-ей строки;

4)умножим каждый элемент 1-ой строки на (-4) и прибавим к соответствующим элементам 4-ой строки;

5)вычислим определитель, разложив по элементам второго столбца;

6)в полученном определителе третьего порядка умножим 3-ю строку на (-1) и прибавим к соответствующим элементам 1-ой и 2-ой строки и вычислим полученный определитель по правилу треугольника.

Ответ: $\triangle = -49$.

5. Вычислить:

$$\begin{Vmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{Vmatrix}^T \cdot \begin{Vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{Vmatrix}^2.$$

Решение.

$$\begin{Vmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{Vmatrix}^T \cdot \begin{Vmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix}5\cdot 3 + 7\cdot 1 & 5\cdot 5 + 7\cdot 2\\ 6\cdot 3 + 8\cdot 1 & 6\cdot 5 + 8\cdot 2\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix}1\cdot 1 + 3\cdot 4 & 1\cdot 3 + 3\cdot 5\\ 4\cdot 1 + 5\cdot 4 & 4\cdot 3 + 5\cdot 5\end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix}22 & 39\\ 26 & 46\end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix}13 & 18\\ 24 & 37\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}9 & 21\\ 2 & 9\end{Vmatrix}.$$

Ответ: $\begin{Vmatrix}9 & 21\\ 2 & 9\end{Vmatrix}$.

6. Вычислить:

$$\begin{Vmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix}5 & 1\\ 6 & 7\end{Vmatrix}^T + \begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\\ 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Решение.

Обратная матрица для матрицы A имеет вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Транспонируем матрицу: $\begin{Vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{Vmatrix}^{T} = \begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 7 \end{Vmatrix}$.

Вычислим сумму произведений матриц

$$\begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 7 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -1\cdot 5 + 4\cdot 1 & -1\cdot 6 + 4\cdot 7 \\ 1\cdot 5 - 3\cdot 1 & 1\cdot 6 - 3\cdot 7 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 0 & 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 0 & 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -1 & 22 \\ 2 & -15 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 7 & 7 \\ 19 & 19 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 & 29 \\ 21 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Ответ: $\begin{Vmatrix} 6 & 29 \\ 21 & 4 \end{Vmatrix}$.

7. Найти обратную матрицу A^{-1} для заданной матрицы $A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$ двумя способами: а) с помощью алгебраических дополнений; б) с помощью элементарных алгебраических преобразований.

Решение.

а) С помощью алгебраических дополнений.

$\triangle A = 2\cdot 3 - 1\cdot 5 = 1 \neq 0$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 3 = 3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 1 = -1;$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot 5 = -5; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 2 = 2;$$

Обратная матрица A^{-1} имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = E.$$

б) С помощью элементарных алгебраических преобразований.

Составим расширенную матрицу:

$$\bar{A} = \left\| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} \right\| \sim$$
$$\sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{matrix} \right\| \sim \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\|.$$

1)поменяем первую и вторую строку местами;

2)умножим элементы первой строки на (-2) и прибавим к соответствующим элементам второй строки;

3)умножим элементы второй строки на 3 и прибавим к соответствующим элементам первой строки;

4)умножим элементы второй строки на (-1), чтобы по главной диагонали матрицы, расположенной слева от черты, стояли единицы.

Слева от черты получилась единичная матрица $E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, справа — обратная матрица $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$.

8. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x + 5y = 10; \\ 7x + 2y = 4. \end{cases}$ двумя способами:

1) методом Крамера; 2) с помощью обратной матрицы.

Решение.

1) Решение системы линейных уравнений методом Крамера.

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 35 = -31 \neq 0.$$

$$\triangle x = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0;\ \triangle y = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 70 = -62.$$

Согласно формулам Крамера СЛУ имеет единственное решение:

$$x = \frac{\triangle x}{\triangle} = \frac{0}{-31} = 0, \quad y = \frac{\triangle y}{\triangle} = \frac{-62}{-31} = 2.$$

2) Решение системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Введем обозначения: $A = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 10 \\ 4 \end{Vmatrix}$, $X = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$.

$\triangle A = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 5 = -31 \neq 0$.

Решение системы запишется в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{31} \begin{Vmatrix} 2 & -5 \\ -7 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 10 \\ 4 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{31} \begin{Vmatrix} 0 \\ -62 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Ответ: $x = 0, y = 2$.

9. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, предварительно решив вопрос о совместности системы с помощью теоремы Кронекера—Капелли: $\begin{cases} 2x + y + z = 2; \\ x - y = -2; \\ 3x - y + 2z = 2. \end{cases}$

Решение.

Расширенная матрица системы: $\bar{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 0 & | & -2 \\ 3 & -1 & 2 & | & 2 \end{Vmatrix}$. При помощи элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 2 & 1 & 1 & | & 2\\ 3 & -1 & 2 & | & 2\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 0 & 3 & 1 & | & 6\\ 3 & -1 & 2 & | & 2\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 0 & 3 & 1 & | & 6\\ 0 & 2 & 2 & | & 8\end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 0 & 2 & 2 & | & 8\\ 0 & 3 & 1 & | & 6\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 0 & 1 & 1 & | & 4\\ 0 & 3 & 1 & | & 6\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 0 & 1 & 1 & | & 4\\ 0 & 0 & -2 & | & -6\end{matrix}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 0 & 1 & 1 & | & 4\\ 0 & 0 & 1 & | & 3\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & -1 & 0 & | & -2\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & 3\end{matrix}\right\| \sim \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & | & -1\\ 0 & 1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & | & 3\end{matrix}\right\|.$$

$\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} \bar{A} = n = 3$, согласно теореме Кронекера—Капелли СЛУ имеет единственное решение: $x = -1$, $y = 1$, $z = 3$.

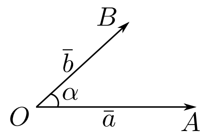
Ответ: $x = -1$, $y = 1$, $z = 3$.

2. Векторная алгебра

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B.

Несколько векторов называются компланарными, если существует плоскость, параллельная всем прямым, на которых эти векторы расположены.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов с общим началом называется правой, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки.



Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \alpha.$$

Из данного выражения можно найти $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Если векторы выражены через координаты в декартовой системе координат $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то скалярное произведение определяется формулой:

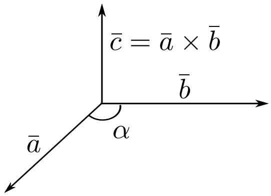
$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

а косинус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно переписать так:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$ (коммутативность);
2. $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$ (дистрибутивность);
3. $(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \implies \bar{a} \perp \bar{b}$;
4. $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$.



Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который: 1) имеет модуль, равный $|\bar{a}||\bar{b}|\sin\alpha$; 2) перпендикулярен к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$; 3) направлен так, чтобы тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ была правой.

Векторное произведение обладает свойствами:

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (антикоммутативность);
2. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$;
3. $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \implies \bar{a} \parallel \bar{b}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы в декартовой системе координат своими координатами: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется число, которое получается при умножении векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ скалярно на вектор $\bar{c}$. Оно обозначается $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

Свойства смешанного произведения:

1. Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, то их смешанное произведение равно 0.
2. $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$.
3. Круговая перестановка трех сомножителей смешанного произведения не меняет его значения. Перестановка же двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}).$$

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ заданы в декартовой системе координат своими координатами: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$, то

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда условие компланарности трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ запишется так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Условия задач	Ответы
1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если:	
а) $\lvert\bar{a}\rvert = 4$, $\lvert\bar{b}\rvert = 2$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 60°$;	а) 4;
б) $\lvert\bar{a}\rvert = 3$, $\lvert\bar{b}\rvert = 1$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 45°$;	б) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$;
в) $\lvert\bar{a}\rvert = 6$, $\lvert\bar{b}\rvert = 7$, $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = 120°$;	в) -21;
г) $\lvert\bar{a}\rvert = 2$, $\lvert\bar{b}\rvert = 3$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направлены;	г) -6;
д) $\lvert\bar{a}\rvert = 5$, $\lvert\bar{b}\rvert = 1$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены.	д) 5.
2. Найти угол α между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданными своими координатами:	
а) $\bar{a}(1, -1, 1)$, $\bar{b}(4, 4, -4)$;	а) $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$;
б) $\bar{a}(1, -1, 1)$, $\bar{b}(3, -3, 3)$;	б) 0;
в) $\bar{a}(1, -1, 1)$, $\bar{b}(5, 1, 1)$;	в) $\arccos\left(\dfrac{5}{9}\right)$;
г) $\bar{a}(1, -1, 1)$, $\bar{b}(3, 1, -2)$;	г) 90°;
д) $\bar{a}(1, -1, 1)$, $\bar{b}(-2, 2, -2)$.	д) 180°.
3. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами:	
а) $\bar{a}(6, 1, 0)$, $\bar{b}(3, -2, 0)$;	а) $(0, 0, -15)$;
б) $\bar{a}(3, -1, 2)$, $\bar{b}(2, -3, -5)$;	б) $(11, 19, -7)$;
в) $\bar{a}(2, -1, 1)$, $\bar{b}(-4, 2, -2)$;	в) $(0, 0, 0)$;
г) $\bar{a}(2, 3, 1)$, $\bar{b}(-1, 1, 2)$;	г) $(5, -5, 5)$;

д) $\bar{a}(-1,1,-1)$, $\bar{b}(-1,1,1)$.	д) $(2,2,0)$.
4. Проверить, будут ли компланарны векторы $\bar{l}$, $\bar{m}$ и $\bar{n}$:	
а) $\bar{l}=2\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{m}=2\bar{b}-\bar{c}-\bar{a}$, $\bar{n}=2\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}$;	а) да;
б) $\bar{l}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{m}=\bar{b}+\bar{c}$, $\bar{n}=-\bar{a}+\bar{c}$;	б) нет;
в) $\bar{l}=\bar{c}$, $\bar{m}=\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{n}=\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$;	в) да;
г) $\bar{l}=2\bar{a}+3\bar{b}+5\bar{c}$, $\bar{m}=7\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}$, $\bar{n}=3\bar{a}-5\bar{b}-11\bar{c}$;	г) да;
д) $\bar{l}=2\bar{a}+\bar{c}$, $\bar{m}=5\bar{a}+3\bar{b}-3\bar{c}$, $\bar{n}=3\bar{a}+3\bar{b}+10\bar{c}$.	д) нет.
5. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, заданных своими координатами:	
а) $\bar{a}(2,1,0)$, $\bar{b}(3,4,-1)$, $\bar{c}(-1,-3,1)$;	а) 0;
б) $\bar{a}(1,2,3)$, $\bar{b}(5,-2,1)$, $\bar{c}(2,1,2)$;	б) 6;
в) $\bar{a}(3,5,1)$, $\bar{b}(4,0,-1)$, $\bar{c}(2,1,1)$;	в) -23;
г) $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b}(7,3,-5)$, $\bar{c}(-2,2,-2)$;	г) 0;
д) $\bar{a}(2,1,5)$, $\bar{b}(3,3,8)$, $\bar{c}(1,1,6)$.	д) 10.
6. Даны $\bar{a}(1,0,3)$, $\bar{b}(2,0,4)$, $\bar{c}(5,6,7)$. Вычислить:	
а) $2(\bar{a},\bar{b})+4(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$;	а) 76;
б) $(\bar{c},2\bar{b})-3(\bar{a},2\bar{c})$;	б) -80;
в) $(\bar{b},\bar{c},\bar{a})-(\bar{a}\times 3\bar{b})\cdot\bar{a}$;	в) 12;
г) $(3\bar{c}\times\bar{a})\cdot\bar{b}+(2\bar{b}\times\bar{a})\cdot 3\bar{c}$;	г) 108;
д) $3\bar{c}\times\bar{b}+5\bar{b}\times\bar{a}-\bar{a}\times 2\bar{c}$.	д) $(108,-44,-48)$.

Решение задач варианта а.

1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=4$, $|\bar{b}|=2$, $\angle(\bar{a},\bar{b})=60^\circ$.

Решение.

$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha = 4\cdot 2\cdot\cos(60^\circ) = 8\cdot\dfrac{1}{2} = 4.$

Ответ: 4.

2. Найти угол α между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданными своими координатами: $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b}(4,4,-4)$.

Решение.

$$\cos\alpha = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{1\cdot 4 + 4\cdot(-1) + 1\cdot(-4)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+4^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{48}} = \frac{-4}{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}, \text{ откуда } \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Ответ: $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

3. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами: $\bar{a}(6,1,0)$, $\bar{b}(3,-2,0)$.

Решение.

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0\cdot\bar{i} - 0\cdot\bar{j} - 15\cdot\bar{k}.$$

Ответ: $(0,0,-15)$.

4. Проверить, будут ли компланарны векторы $\bar{l} = 2\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}$, $\bar{m} = 2\bar{b} - \bar{c} - \bar{a}$ и $\bar{n} = 2\bar{c} - \bar{a} - \bar{b}$.

Решение.

$\bar{l}(2,-1,-1)$, $\bar{m}(-1,2,-1)$, $\bar{n}(-1,-1,2)$.

$$(\bar{l},\bar{m},\bar{n}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

1) К первой строке прибавили вторую;

2) из третьей строки вычли вторую;

3) ко второй строке прибавили первую.

Так как смешанное произведение трех векторов равно нулю, значит векторы $\bar{l}$, $\bar{m}$ и $\bar{n}$ компланарны.

Ответ: компланарны.

5. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}(2,1,0)$, $\bar{b}(3,4,-1)$, $\bar{c}(-1,-3,1)$.

Решение.

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: 0.

6. Даны $\bar{a}(1,0,3)$, $\bar{b}(2,0,4)$, $\bar{c}(5,6,7)$. Вычислить $2(\bar{a},\bar{b}) + 4(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$.

Решение.

$2(\bar{a},\bar{b}) = 2(1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 3\cdot 4) = 2\cdot 14 = 28$,

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 6\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6(4-6) = -6\cdot(-2) = 12,$$

$2(\bar{a},\bar{b}) + 4(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 28 + 4\cdot 12 = 28 + 48 = 76$

Ответ: 76.

3. Пределы

Число A называется пределом функции $f(x)$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$.

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$).

Применяются также первый и второй замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2,71828\ldots$$

При нахождении предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \to \infty$ оба члена дроби нужно разделить на x^n, где n — наивысшая степень этих многочленов. Аналогичный прием можно применить и для дробей, содержащих иррациональность.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ — целые многочлены и $P(a) = Q(a) = 0$, то дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ нужно сократить один или несколько раз на $x - a$.

Выражения, содержащие иррациональности, приводятся к рациональному виду путем перевода иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

Условия задач	Ответы
1.	
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^3}{x^3+7}$;	а) 27;
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+5x^2-3}{7+3x^3+5x^4}$;	б) $\dfrac{7}{5}$;
в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x+4}{x^3-8x+7}$;	в) ∞;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}}{3x^2+2}$;	г) 0;
д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+5)^2(3x-2)^3}{4x^5+5}$;	д) 108;
е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2x^3}{x^4+3x+1}$;	е) ∞;
ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\sqrt{x^2+4}}{x^2+5}$.	ж) 2.
2.	
а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+3x-5}$;	а) $-\dfrac{2}{7}$;
б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+3x+2}$;	б) -8;
в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+y)^3-y^3}{3x}$;	в) y^2;
г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\sqrt{3-x}}{x^2-4}$;	г) $\dfrac{1}{4}$;
д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-2x-3}$;	д) $\dfrac{27}{4}$;
е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)\sqrt{x+5}}{x^2-x-12}$;	е) $\dfrac{3}{7}$;
ж) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-1}{x+2}$.	ж) 1.
3.	
а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}$;	а) $-\dfrac{1}{48}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$;	б) $\dfrac{3}{2}$;
в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$;	в) 0;
г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+2)}-x)$;	г) 1;
д) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$;	д) 0;
е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+8}}{3-\sqrt{2x+7}}$;	е) $-\dfrac{3}{2}$;
ж) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}}$.	ж) 0.
4.	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 7x}$;	а) $\dfrac{8}{7}$;
б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$;	б) $\dfrac{1}{3}$;
в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 5x}$;	в) $\dfrac{2}{5}$;
г) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi - x}$;	г) 0;
д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 9x}{\operatorname{tg}^2 10x}$;	д) $\dfrac{81}{100}$;
е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^3(x-1)}{\operatorname{tg}^3(3x-3)}$;	е) $\dfrac{1}{27}$;
ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 2x}$.	ж) $\dfrac{5}{2}$.
5.	
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x+2}$;	а) e^{-2};
б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4+x}{5-x}\right)^{x}$;	б) 1;
в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x}$;	в) e^{-6};

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$;	г) 0;
д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{3}{x}}$;	д) e^3;
е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)^{\dfrac{x^2+5}{2x}}$;	е) ∞;
ж) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\dfrac{1}{3x}}$.	ж) 1.

Решение задач варианта а.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x+2)^3}{x^3+7}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)^3}{x^3+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{2}{x}\right)^3}{x^3\left(1+\frac{7}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3+\frac{2}{x}\right)^3}{1+\frac{7}{x^3}}=$$
$$=27.$$

Ответ: 27.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+3x-5}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{2x^2+3x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)(x-1)}{2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+\frac{5}{2}}=$$
$$=\frac{1-3}{2\left(1+\frac{5}{2}\right)}=-\frac{2}{7}.$$

Разложим квадратные трехчлены на множители:

$x^2-4x+3=0$	$2x^2+3x-5=0$
$D=16-12=4$	$D=9+40=49$
$x_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{2}=3;1$	$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm 7}{4}=-\dfrac{5}{2};1$
$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$	$x^2-4x+3=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)$

Ответ: $-\dfrac{2}{7}$.

3. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 6} \frac{2-\sqrt{x-2}}{x^2-36} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 6} \frac{(2-\sqrt{x-2})(2+\sqrt{x-2})}{(x^2-36)(2+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{4-(x-2)}{(x^2-36)(2+\sqrt{x-2})} = \lim_{x \to 6} \frac{6-x}{(x-6)(x+6)(2+\sqrt{x-2})} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{-(x-6)}{(x-6)(x+6)(2+\sqrt{x-2})} = -\lim_{x \to 6} \frac{1}{(x+6)(2+\sqrt{x-2})} = -\frac{1}{48}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{48}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 8x}{\sin 7x}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 8x}{\sin 7x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 8x}{8x} \cdot \frac{7x}{\sin 7x} \cdot \frac{8}{7}\right) = \frac{8}{7}.$$

При вычислении предела использованы формулы первого замечательного предела $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$.

Ответ: $\dfrac{8}{7}$.

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x+2}$.

Решение.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{x+2} = [1^\infty] = \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{-6}{3x+4}\right)^{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{-6}{3x+4}\right)^{\frac{3x+4}{-6} \cdot \frac{-6(x+2)}{3x+4}} = e^{-2}.$$

При вычислении предела используем второй замечательный предел $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Ответ: e^{-2}.

4. Дифференцирование функций

Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(производная обозначается также $\dfrac{dy}{dx}$).

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

Основные правила дифференцирования:

Пусть C — постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции, имеющие производные. Тогда:

1) $(C)' = 0$; 2) $(Cu)' = Cu'$;
3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4) $(uv)' = u'v + v'u$;
5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$.

Таблица производных основных функций

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(\sin x)' = \cos x$; 4) $(\cos x)' = -\sin x$;

5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; 8) $(e^x)' = e^x$;

9) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$; 10) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; 12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$; 14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;

15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; 16) $\operatorname{ch} x' = \operatorname{sh} x$;

17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 18) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается так: y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$.

Аналогично производная третьего порядка функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка: $y''' = (y'')'$ и т. д.

Производные высших порядков (вторая, третья и т. д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

находится по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \text{ или } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Для производной второго порядка имеет место формула

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \Big/ \frac{dx}{dt} \text{ или } y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — обе бесконечно малые или бесконечно большие при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

при условии, что предел отношения производных существует.

Для раскрытия неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ используются алгебраические преобразования, а неопределенности 1^∞, 0^0, ∞^0 раскрывают с помощью предварительного логарифмирования.

Найти производные следующих функций.

Условия задач	Ответы
1. Алгебраические функции.	
а) $y = 4x^5 - 5x^3 + 7x - 5$;	а) $20x^4 - 15x^2 + 7$;
б) $y = -\dfrac{5x^3}{4} + \ln 5 + \dfrac{1}{x}$;	б) $-\dfrac{15x^2}{4} - \dfrac{1}{x^2}$;
в) $y = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$;	в) $\dfrac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$;
г) $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-4}$;	г) $2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-5}$;
д) $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x^3}$.	д) $\dfrac{3(2x-1)^2 - 4x^4}{x^4(2x-1)^2}$.
2. Тригонометрические функции и обратные тригонометрические.	
а) $y = 7\cos 3x + 8\sin(3x+2)$;	а) $-21\sin 3x + 24\cos(3x+2)$;
б) $y = \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{tg} 2x$;	б) $-\dfrac{8}{\sin^2 4x}$;
в) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$;	в) 0;

г) $y = x^2 \arccos x;$	г) $2x \arccos x - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}};$
д) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$	д) $-\dfrac{2}{(\sin x - \cos x)^2}.$
3. Показательные и логарифмические функции.	
а) $y = x^8 e^{3x+2};$	а) $8x^7 e^{3x+2} + x^8 \cdot 3e^{3x+2};$
б) $y = \dfrac{x^3}{\ln x};$	б) $\dfrac{3x^2 \ln x - x^2}{\ln^2 x};$
в) $y = \dfrac{e^{4x}}{x^3};$	в) $\dfrac{e^{4x}(4x-3)}{x^4};$
г) $y = 3\ln x - \dfrac{\ln x}{x};$	г) $\dfrac{3x - 1 + \ln x}{x^2};$
д) $y = \lg x \cdot \ln x - \ln 5 \cdot \log_5 x.$	д) $\dfrac{2\ln x}{x \ln 10} - \dfrac{1}{x}.$
4. Гиперболические функции.	
а) $y = x^2 \operatorname{ch} 2x;$	а) $2x \operatorname{ch} 2x + 2x^2 \operatorname{sh} 2x;$
б) $y = \dfrac{3 \operatorname{cth} x}{\ln x};$	б) $\dfrac{-3(x \ln x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)}{x \ln^2 x \operatorname{sh}^2 x};$
в) $y = \operatorname{th} 2x - x^3;$	в) $\dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 2x} - 3x^2;$
г) $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{ch} x};$	г) $\dfrac{2x \operatorname{ch} x - x^2 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x};$
д) $y = \operatorname{sh}^2(3x+2).$	д) $2\operatorname{sh}(3x+2) \cdot \operatorname{ch}(3x+2) \cdot 3.$
5. Разные функции.	
а) $y = e^{5x} \cdot \cos 8x;$	а) $e^{5x}(5\cos 8x - 8\sin 8x);$
б) $y = -\dfrac{1}{6(1-3\cos x)^2};$	б) $\dfrac{\sin x}{(1-3\cos x)^3};$

в) $y = \dfrac{2}{\operatorname{arctg} 2x}$;	в) $\dfrac{-4}{(1+4x^2)(\operatorname{arctg} 2x)^2}$;
г) $y = \arccos e^x$;	г) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;
д) $y = \lg \sin x$;	д) $\operatorname{ctg} x \lg e$;
е) $y = \dfrac{5}{5^{x^3}}$;	е) $-\dfrac{15x^2 \ln 5}{5^{x^3}}$;
ж) $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$;	ж) $\dfrac{x^7}{(1-x^2)^5}$;
з) $y = (7+x)\sqrt{7-x}$;	з) $\dfrac{7-3x}{2\sqrt{7-x}}$;
и) $y = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2}$;	и) $\dfrac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$;
к) $y = \operatorname{arctg} \ln x$.	к) $\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.
6. Логарифмическая производная.	
а) $y = x^{3x}$;	а) $3x^{3x}(\ln x + 1)$;
б) $y = x^{\sin x}$;	б) $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)$;
в) $y = (\cos x)^x$;	в) $(\cos x)^x(\ln \cos x - x \operatorname{tg} x)$;
г) $y = x^{2\sqrt{x}}$;	г) $x^{2\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln x + 2)$;
д) $y = (1+3x)^{2x}$.	д) $(1+3x)^{2x} \times \left(2\ln(1+3x) + \dfrac{6x}{1+3x}\right)$.
7. Найти производную y'_x для функций y, заданных параметрически:	

а) $\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = t^3; \end{cases}$;	а) $\frac{3}{2}t^2$;
б) $\begin{cases} x = 2t^2, \\ y = 2t+1; \end{cases}$;	б) $\frac{1}{2t}$;
в) $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$;	в) $-e^{4t}$;
г) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}; \end{cases}$;	г) $\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}}$;
д) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 4\sin^2 t; \end{cases}$.	д) $-4\cos t$.
8. Найти производную $y' = \frac{dy}{dx}$ от неявных функций y:	
а) $3x - 6y + 10x^2 = 0$;	а) $\frac{10x}{3} + \frac{1}{2}$;
б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{10}$;	б) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$;
в) $y + 0,2\sin y = x$;	в) $\frac{1}{1+0,2\cos y}$;
г) $y^2 + x^3 + x^2y = 5$;	г) $-\frac{3x^2+2xy}{2y+x^2}$;
д) $e^y = 2x + y$.	д) $\frac{2}{e^y - 1}$.
9. Производные высших порядков явных функций.	
а) $y = x^9 + 2x^6 - 3x + 5$, $y'''-?$;	а) $504x^6 + 240x^3$;

б) $y=(2x-3)^5$, $y'''(3)-?$;	б) 4320;
в) $y=\cos 2x$, $y^{IV}-?$;	в) $16\cos 2x$;
г) $y=4\operatorname{sh}\dfrac{x}{4}$, $y'''-?$;	г) $\dfrac{1}{16}\operatorname{ch}\dfrac{x}{4}$;
д) $y=\ln\sqrt{1+x^2}$, $y''-?$.	д) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.
10. Найти y''_{xx} от следующих функций:	
а) $\begin{cases} x=e^{-2t}, \\ y=e^{2t}; \end{cases}$;	а) $2e^{6t}$;
б) $\begin{cases} x=\operatorname{arcctg} t, \\ y=t^2; \end{cases}$;	б) $(1+t^2)(2+6t^2)$;
в) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=4\sin t; \end{cases}$;	в) $-\dfrac{1}{4\sin^3 t}$;
г) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t^2; \end{cases}$;	г) $1+t^2$;
д) $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\frac{1}{1-t}; \end{cases}$.	д) $\dfrac{t(1+t)}{(1-t)^3}$.
11. Найти указанные пределы функций с помощью правила Лопиталя:	
а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$;	а) 1;
б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;	б) ∞;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$;	в) 1;
г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln \sin x}$;	г) 1;
д) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$.	д) 0.

Решение задач варианта а.

1. $y = 4x^5 - 5x^3 + 7x - 5,\ y'(x)-?$

Решение.

$y' = 4 \cdot 5x^4 - 5 \cdot 3x^2 + 7 = 20x^4 - 15x^2 + 7.$

Ответ: $20x^4 - 15x^2 + 7$.

2. $y = 7\cos 3x + 8\sin(3x+2),\ y'(x)-?$

Решение.

$y' = 7 \cdot 3 \cdot (-\sin 3x) + 8\cos(3x+2) \cdot 3 = -21\sin 3x + 24\cos(3x+2).$

Ответ: $-21\sin 3x + 24\cos(3x+2)$.

3. $y = x^8 e^{3x+2},\ y'(x)-?$

Решение.

$y' = (x^8)' \cdot e^{3x+2} + x^8 \cdot (e^{3x+2})' = 8x^7 \cdot e^{3x+2} + x^8 \cdot 3 \cdot e^{3x+2} =$
$= x^7 e^{3x+2}(8+3x).$

Ответ: $x^7 e^{3x+2}(8+3x)$.

4. $y = x^2 \operatorname{ch} 2x,\ y'(x)-?$

Решение.

$y' = (x^2)' \operatorname{ch} 2x + x^2(\operatorname{ch} 2x)' = 2x \operatorname{ch} 2x + x^2 \cdot 2\operatorname{sh} 2x =$
$= 2x(\operatorname{ch} 2x + x \operatorname{sh} 2x).$

Ответ: $2x(\operatorname{ch} 2x + x \operatorname{sh} 2x)$.

5. $y = e^{5x} \cdot \cos 8x,\ y'(x)-?$

Решение.

$y' = (e^{5x})' \cos 8x + e^{5x}(\cos 8x)' = 5e^{5x}\cos 8x + 8e^{5x}(-\sin 8x) =$
$= e^{5x}(5\cos 8x - 8\sin 8x).$

Ответ: $e^{5x}(5\cos 8x - 8\sin 8x)$.

6. $y = x^{3x},\ y'(x)-?$

Решение.

$\ln y = \ln x^{3x}$; $\ln y = 3x\ln x$; $\dfrac{y'}{y} = (3x)'\ln x + 3x(\ln x)'$;

$y' = y(3\ln x + 3)$; $y' = 3x^{3x}(\ln x + 1)$.

Ответ: $3x^{3x}(\ln x + 1)$.

7. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3; \end{cases}$, y'_x–?

Решение.

$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y'_t = (t^3)'_t = 3t^2$, $x'_t = 2$, $y'_x = \dfrac{3t^2}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3t^2}{2}$.

8. $3x - 6y + 10x^2 = 0$, y'_x–?

Решение.

Составляя производную левой части данного равенства и приравнивая ее нулю, получим: $3 - 6y' + 20x = 0$, отсюда $y' = \dfrac{20x+3}{6}$, $y' = \dfrac{10x}{3} + \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{10x}{3} + \dfrac{1}{2}$.

9. $y = x^9 + 2x^6 - 3x + 5$, y'''–?

Решение.

$y' = 9x^8 + 12x^5 - 3$,

$y'' = (9x^8 + 12x^5 - 3)' = 72x^7 + 60x^4$,

$y''' = (72x^7 + 60x^4)' = 504x^6 + 240x^3$.

Ответ: $504x^6 + 240x^3$.

10. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$, y''_{xx}–?

Решение.

$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y'_t = 2e^{2t}$, $x'_t = -2e^{-2t}$, $y'_x = \dfrac{2e^{2t}}{-2e^{-2t}} = -e^{4t}$,

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-e^{4t})'_t}{-2e^{-2t}} = \frac{-\,4e^{4t}}{-2e^{-2t}} = 2e^{6t}.$$

Ответ: $2e^{6t}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x} =?$

Решение.

Применим правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{ch} x - 1)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sh} x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{\cos x} = 1.$$

Ответ: 1.

5. Функции нескольких переменных

Частной производной от функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

вычисленная при постоянном y.

Частной производной по y называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y),$$

вычисленная при постоянном x.

Для вычисления частных производных можно воспользоваться обычными правилами и формулами дифференцирования.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Для производных второго порядка употребляются обозначения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$$

и т. д.

Дифференциал второго порядка от функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Частные производные неявной функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$, заданной с помощью уравнения $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — дифференцируемая функция переменных x, y и z могут быть вычислены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Для определения экстремумов функции $z = f(x, y)$ используем два условия:

Необходимое условие

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ или } \dfrac{\partial z}{\partial x} \text{ не существует} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ или } \dfrac{\partial z}{\partial y} \text{ не существует.} \end{cases}$$

Находим точку (x_0, y_0), проверяем

Достаточное условие

$A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$; $\Delta = AC - B^2$;

$$\Delta = \begin{cases} > 0, \ A > 0 & \Rightarrow \text{минимум,} \\ > 0, \ A < 0 & \Rightarrow \text{максимум,} \\ < 0 & \Rightarrow \text{экстремума нет,} \\ = 0 & \Rightarrow \text{требуется дальнейшее исследование.} \end{cases}$$

Условия задач	Ответы
1. Найти полный дифференциал функции:	
а) $z = \dfrac{x}{y^2}$ в точке $A(1;1)$ при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$;	а) $-0,3$;
б) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ в точке $A(1;1)$ при $\Delta x = 0,2$; $\Delta y = 0,4$;	б) $-0,2$;
в) $z = \dfrac{x^3 + 1}{y^3}$ в точке $A(1;1)$ при $\Delta x = 0,2$; $\Delta y = 0,1$;	в) 0;
г) $z = x^2 y$ в точке $A(1;2)$ при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$;	г) $0,6$;
д) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точке $A(3;4;5)$ при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$; $\Delta z = 0,1$.	д) $-\dfrac{3}{125}$.
2. Найти:	
а) $f'_x(2;1)$, если $f(x,y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$;	а) $\dfrac{1}{2}$;
б) $f'_y(2;1)$, если $f(x,y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$;	б) 0;
в) $f'_x(1;2;0)$, если $f(x,y,z) = \ln(xy + z)$;	в) 1;
г) $f'_y(1;0)$, если $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;	г) 0;
д) $f'_y(2;1)$, если $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$.	д) $-\dfrac{4}{9}$.

3. Найти дифференциал второго порядка d^2z:	
а) $z = e^x \cos y$ в точке $B(0;0)$ при $\Delta x = -0,1$; $\Delta y = 0,2$;	а) $-0,03$;
б) $z = x \sin y + y \cos x$ в точке $B\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ при $\Delta x = 0,5$; $\Delta y = 0,25$;	б) $-\frac{1}{32}(8+\pi)$;
в) $z = xy^2 - x^2y$ в точке $B(1;2)$ при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$;	в) $0,12$;
г) $z = x \sin^2 y$ в точке $B\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ при $\Delta x = 0,2$; $\Delta y = 0,1$;	г) $0,04$;
д) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$ в точке $B(1;2)$ при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,1$.	д) $0,125$.
4. Найти:	
а) $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $A(1;1;2)$ для функции $z^3 - 3xyz = a^3$;	а) $\frac{2}{3}$;
б) $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $A(1;0;2)$ для функции $x^2 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 9 = 0$;	б) $\frac{2}{3}$;
в) $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $A(-1;0;1)$ для функции $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$;	в) -1;
г) $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $A(0;2;0)$ для функции $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 2$;	г) -1;

д) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $A(0;0;5)$ для функции $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1$.	д) 0.
5. Исследовать на экстремум функцию:	
а) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;	а) $z_{\min}=-1$ при $x=1$, $y=0$;
б) $z=(x-1)^2+2y^2$;	б) $z_{\min}=0$ при $x=1$, $y=0$;
в) $z=(6-x-y)x^3y^2$ $(x>0,\ y>0)$;	в) $z_{\max}=108$ при $x=3$, $y=2$;
г) $z=1-(x^2-y^2)^{\frac{2}{3}}$;	г) $z_{\max}=1$ при $x=y=0$;
д) $z=\dfrac{8}{x}+\dfrac{x}{y}+y$ $(x>0,\ y>0)$.	д) $z_{\min}=6$ при $x=4$, $y=2$.

Решение задач варианта а.

1. Найти полный дифференциал функции $z=\dfrac{x}{y^2}$ в точке $A(1;1)$ при $\Delta x=0,1;\ \Delta y=0,2$.

Решение.

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\dfrac{1}{y^2}\Delta x+\left(-\dfrac{2x}{y^3}\right)\Delta y.$

$dz(1;1)=\Delta x+(-2)\Delta y.$

Если $\Delta x=0,1,\ \Delta y=0,2,\ dz(1;1)=0,1+(-2)\cdot 0,2=-0,3.$

Ответ: $-0,3$.

2. Найти $f'_x(2;1)$, если $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$.

Решение.

$$f'_x = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right).$$

$$f'_x(2;1) = \frac{1}{2\sqrt{2\cdot 1+\frac{2}{1}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

3. Найти дифференциал второго порядка d^2z для функции $z = e^x \cos y$ в точке $B(0;0)$ при $\Delta x = -0,1$; $\Delta y = 0,2$.

Решение.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = e^x \cos y;\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{y=\text{const}} = e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0;0) = e^0 \cos 0 = 1;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=\text{const}} = -e^x \sin y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0;0) = -e^0 \sin 0 = 0;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = -e^x \sin y;\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{x=\text{const}} = -e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0;0) = -e^0 \cos 0 = -1;$$

$d^2z(0;0) = 1 \cdot (-0,1)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (-0,1) \cdot 0,2 + (-1) \cdot 0,2^2 =$ $= 0,01 - 0,04 = -0,03.$

Ответ: $-0,03$.

4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $A(1;1;2)$ для функции $z^3 - 3xyz = a^3$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\ F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz;\ \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1;1;2)} = -3 \cdot 1 \cdot 2 = -6.$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy; \ \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1;1;2)} = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 9.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;1;2)} = -\frac{-6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Решение.

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1; \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3y = 0, \\ 2x + y - 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Критическая точка $(1;0)$.

$A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, $C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$.

$(1;0)$: $AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$, $A = 2 > 0 \Rightarrow \min$.

$z_{\min} = 1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 0 = -1$.

Ответ: $z_{\min} = -1$ при $x = 1$, $y = 0$.

6. Интегрирование

6.1. Неопределенный интеграл

Непосредственное интегрирование.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то люба другая первообразная $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $f(x)$ — подыинтегральная функция, $f(x)\,dx$ — подыинтегральное выражение.

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Таблица основных интегралов:

1) $\int x^\alpha\,dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\ \alpha \in R; \\ \ln|x| + C,\ \alpha = -1; \end{array}\right.$

2) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$,

в частности, при $a = \mathrm{e}$: $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$;

3) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$; 4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

5) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 6) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C;$

9) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

11) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$ 12) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C;$

13) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$ 14) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$

15) $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C;$ 16) $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$

17) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$ 18) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Интегрирование по частям:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du;$$

Замена переменной:

а) $\int R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x})\, dx$. Делаем замену $x = t^n$, где n — наименьшее кратное показателей всех корней;

б) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$. Делаем замену $x = a \sin t;$

$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\, dx$. Делаем замену $x = a \operatorname{tg} t;$

$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\, dx$. Делаем замену $x = \frac{a}{\cos t};$

в) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$. Делаем замену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $dx = \frac{2t\, dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$

Интегрирование дробно-рациональных функций:

а) $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx$, если $n < m$, то разложить дробь на простейшие; если $n \geqslant m$ — выделить сначала целую часть, а потом разложить на простейшие;

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, выделить полный квадрат;

в) $\displaystyle\int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c}$, создать в числителе дифференциал знаменателя;

Интегрирование дробно-иррациональных функций:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, выделить под корнем полный квадрат;

б) $\displaystyle\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, создать в числителе дифференциал подкоренного выражения;

Интегрирование тригонометрических функций:

а) $\displaystyle\int \sin\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$, $\displaystyle\int \sin\alpha x\cdot\sin\beta x\,dx$, $\displaystyle\int \cos\alpha x\cdot\cos\beta x\,dx$, применить тригонометрические формулы

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2};$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

б) $\displaystyle\int \sin^n x\cdot\cos^m x\,dx$, если m — нечетное, n — любое, то создаем $d(\sin x)$, используем тождество $\sin^2 x+\cos^2 = 1$; если n — нечетное, положительное, то создаем $d(\cos x)$; если m, n — четные положительные числа, то применяем формулы

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$
$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

в) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^n\, x\,dx$ применяем формулу $\mathrm{tg}^2\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1.$

Условия задач	Ответы
1. Найдите функцию $f(x)$, если	
а) $\int f(x)\,dx = \operatorname{arctg} e^{2x}$;	а) $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$;
б) $\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{\sqrt[8]{3x+2}}$;	б) $-\dfrac{1}{8}\dfrac{3}{\sqrt[8]{(3x+2)^9}}$;
в) $\int f(x)\,dx = \ln\lvert 4x^2+3\rvert$;	в) $\dfrac{8x}{4x^2+3}$;
г) $\int f(x)\,dx = \dfrac{5}{\sin 8x}$;	г) $-\dfrac{40\cos 8x}{\sin^2 8x}$;
д) $\int f(x)\,dx = \dfrac{9}{3x^3+4}$;	д) $-\dfrac{81x^2}{(3x^3+4)^2}$;
е) $\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x^3}{2}$;	е) $\dfrac{x^2}{x^6+4}$;
ж) $\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{e^x}{4}$;	ж) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+16}$;
з) $\int f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}\ln\lvert\ln(x^2+1)\rvert$.	з) $\dfrac{x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}$.
2. Найти интегралы:	
а) $\int \sqrt[8]{4-5x}\,dx$;	а) $\dfrac{8}{9}(4-5x)^{\frac{9}{8}}\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)+C$;
б) $\int \dfrac{4x^3\,dx}{\sin^2(x^4+2)}$;	б) $-\operatorname{ctg}(x^4+2)+C$;
в) $\int \dfrac{\sin 2x\,dx}{\cos^2(\cos 2x)}$;	в) $-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\cos 2x)+C$;
г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\cos^2 x}$;	г) $\arcsin(\operatorname{tg} x)+C$;

д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{4x^4+5}$;	д) $\displaystyle\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2}{\sqrt{5}}+C$;
е) $\displaystyle\int\left(x^4+\sin 3x+\frac{5}{x^4}\right)dx$;	е) $\displaystyle\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{5}{3x^3}+C$;
ж) $\displaystyle\int\frac{(5x+1)\,dx}{x-2}$;	ж) $5x+11\ln\lvert x-2\rvert+C$;
з) $\displaystyle\int\frac{3x+4}{7x-5}dx$.	г) $\displaystyle\frac{3}{7}x+\frac{43}{49}\ln\left\lvert x-\frac{5}{7}\right\rvert+C$.
3. Найти интегралы:	
а) $\displaystyle\int x\sqrt{x-2}\,dx$;	а) $\displaystyle\frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5}+\frac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3}+C$;
б) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$;	б) $\displaystyle\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-9}}{3}+C$;
в) $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\sqrt{x+5}}$;	в) $2\sqrt{x+5}-4\ln\lvert 2+\sqrt{x+5}\rvert+C$;
г) $\displaystyle\int(x+3)\cos 6x\,dx$;	г) $\displaystyle\frac{x+3}{6}\sin 6x+\frac{1}{36}\cos 6x+C$;
д) $\displaystyle\int xe^{-3x}\,dx$;	д) $\displaystyle -e^{-3x}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)+C$;
е) $\displaystyle\int x\operatorname{arctg}x\,dx$;	е) $\displaystyle\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$;
ж) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$.	ж) $\displaystyle\frac{x^2\ln\lvert x\rvert}{2}-\frac{x^2}{4}+C$.
4. Выделите полный квадрат из квадратного трехчлена:	
а) x^2+4x+7;	а) $(x+2)^2+3$;
б) x^2+x+5;	б) $\displaystyle\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$;

в) $3x^2+9x+5$;	в) $3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$;
г) $1+4x-x^2$;	г) $5-(x-2)^2$;
д) $2x^2+6x+3$;	д) $2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$;
е) $9+8x-4x^2$;	е) $13-4(x-1)^2$;
ж) $3x-1-6x^2$.	ж) $-6\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{5}{8}$.
5. Найти интегралы:	
а) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$;	а) $\ln\left\|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right\|+C$;
б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+5}}$;	б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\|x+\dfrac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{31}{16}}\right\|+C$;
в) $\displaystyle\int\frac{(x+2)\,dx}{x^2-3x+4}$;	в) $\dfrac{\ln\|x^2-3x+4\|}{2}+$ $+\sqrt{7}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2x-3}{\sqrt{7}}+C$;
г) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;	г) $\sqrt{x^2-2x+5}+$ $+\ln\left\|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+4}\right\|+C$;
д) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;	д) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$;
е) $\displaystyle\int\frac{(4-3x)\,dx}{5x^2+6x+18}$;	е) $\dfrac{29}{45}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{5x+3}{9}-$ $-\dfrac{3}{10}\ln(5x^2+6x+18)+C$;
ж) $\displaystyle\int\frac{(2x+3)\,dx}{3x^2+2x+3}$.	ж) $\dfrac{1}{3}\ln\|3x^2+2x+3\|+$ $+\dfrac{7}{3\sqrt{8}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{3x+1}{\sqrt{8}}+C$.

6. Представьте дробь в виде суммы целой части и правильной дроби:	
а) $\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$;	а) $x+\dfrac{2-x}{x^2+1}$;
б) $\dfrac{x^4+1}{x^2-1}$;	б) $x^2+1+\dfrac{2}{x^2-1}$;
в) $\dfrac{x^4-x-1}{x^2+x+1}$;	в) $x^2-x-\dfrac{1}{x^2+x+1}$;
г) $\dfrac{x^4+3x^3-2}{x^2-1}$;	г) $x^2+3x+1+\dfrac{3x-1}{x^2-1}$;
д) $\dfrac{x^5+2x^3+3}{x^3+2}$;	д) $x^2+2-\dfrac{2x^2+1}{x^3+2}$;
е) $\dfrac{2x^5-3x^4+1}{x^2+2x}$;	е) $2x^3-7x^2+14x-28+\dfrac{56x+1}{x^2+2x}$;
ж) $\dfrac{x^5+4x^2}{x^2+2x+1}$.	ж) $x^3-2x^2+3x-\dfrac{3x}{x^2+2x+1}$.
7. Разложите дробь на простейшие:	
а) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$;	а) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+5}$;
б) $\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)^2}$;	б) $\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$;
в) $\dfrac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}$;	в) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{x+2}$;
г) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$;	г) $\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{x-1}{2(x^2+1)}$;
д) $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)(x^2+x+1)}$;	д) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{x}{x^2+x+1}$;
е) $\dfrac{1}{x^3-1}$;	е) $\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{x+2}{3(x^2+x+1)}$;

ж) $\dfrac{3x+2}{x(x+1)^3}$.	ж) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}$.
8. Найти интегралы:	
а) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}$;	а) $-\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{1}{4}\ln\left\|\dfrac{x-1}{x+1}\right\|+C$;
б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$;	б) $\dfrac{1}{1+x}+\ln\left\|\dfrac{x}{x+1}\right\|+C$;
в) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$;	в) $x+3\ln\|x-3\|-3\ln\|x-2\|+C$;
г) $\displaystyle\int \frac{(x+2)^2\,dx}{x(x-1)^2}$;	г) $4\ln\|x\|-3\ln\|x-1\|-\dfrac{9}{x-1}+C$;
д) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$;	д) $x+\dfrac{1}{4}\ln\left\|\dfrac{x-1}{x+1}\right\|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.
е) $\displaystyle\int \frac{(5x+1)\,dx}{(x^2+1)(3x+2)}$;	е) $\dfrac{7}{26}\ln\|x^2+1\|+\dfrac{17}{13}\operatorname{arctg}x-$ $-\dfrac{21}{39}\ln\|3x+2\|+C$;
ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x^2+2)(x^2-1)}$.	ж) $-\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x+$ $+\dfrac{1}{10}\ln\left\|\dfrac{x-1}{x+1}\right\|+C$.
9. Найти интегралы:	
а) $\displaystyle\int \sin^8 x\cos^3 x\,dx$;	а) $\dfrac{\sin^9 x}{9}-\dfrac{\sin^{11}x}{11}+C$;
б) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$;	б) $\dfrac{1}{5}\cos^5 x-\dfrac{1}{3}\cos^3 x+C$;
в) $\displaystyle\int 5\operatorname{tg}^4 x\,dx$;	в) $\dfrac{5}{3}\operatorname{tg}^3 x-5\operatorname{tg}x+5x+C$;
г) $\displaystyle\int \sin 10x\sin 15x\,dx$;	г) $-\dfrac{\sin 25x}{50}+\dfrac{\sin 5x}{10}+C$;

д) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$;	д) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$;
е) $\int \sin^3 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$;	е) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x}+\frac{3}{10}\sqrt[3]{\cos^{10} x}+C$;
ж) $\int x^2\sin^2 x^3\,dx$.	ж) $\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}\sin 2x^3+C$.

Решение задач варианта а.

1. Найдите функцию $f(x)$, если $\int f(x)dx=\operatorname{arctg} e^{2x}$.

Решение.

$f(x)=F'(x)=(\operatorname{arctg} e^{2x})'=\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$.

Ответ: $\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$.

2. Найти интеграл $\int\sqrt[8]{4-5x}dx$.

Решение.

$$\int\sqrt[8]{4-5x}dx=\left|dx=-\frac{1}{5}d(-5x)=-\frac{1}{5}d(4-5x)\right|=$$

$$=-\frac{1}{5}\int\sqrt[8]{4-5x}d(4-5x)=-\frac{1}{5}\frac{(4-5x)^{\frac{1}{8}+1}}{\frac{1}{8}+1}+C=-\frac{8}{45}(4-5x)^{\frac{9}{8}}+C.$$

Ответ: $-\dfrac{8}{45}(4-5x)^{\frac{9}{8}}+C$.

3. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-2}dx$.

Решение.

$$\int x\sqrt{x-2}dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=t\\ x-2=t^2\\ x=t^2+2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int(t^2+2)t\cdot 2tdt=2\int(t^2+2)t^2dt=$$

$$=2\int(t^4+2t^2)dt=\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+C=\frac{2(x-2)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5}+\dfrac{4\sqrt{(x-2)^3}}{3}+C.$

4. Выделите полный квадрат из квадратного трехчлена: x^2+4x+7.

Решение.

Используем формулу квадрата суммы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$: $x^2+4x+7=x^2+2\cdot 2x+2^2-2^2+7=x^2+4x+4+3=(x+2)^2+3.$

Ответ: $(x+2)^2+3$.

5. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}=\left|\begin{array}{l} x^2-6x+13= \\ =x^2-2\cdot 3x+9-9+13= \\ =(x-3)^2+4 \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+2^2}}=$$
$$=\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right|+C.$$

Ответ: $\ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+13}\right|+C$.

6. Представьте дробь в виде суммы целой части и правильной дроби: $\dfrac{x^3+2}{x^2+1}$.

Решение.

Разделим числитель на знаменатель по правилу «деление углом». При делении числитель располагают в порядке убывания степеней x:

$$\begin{array}{r|l} x^3 \quad +2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 \quad +x} & x \\ 2-x & \end{array}$$

Следовательно, $\dfrac{x^3+2}{x^2+1} = x + \dfrac{2-x}{x^2+1}$.

Ответ: $x + \dfrac{2-x}{x^2+1}$.

7. Разложите дробь на простейшие: $\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$.

Решение.

Для представления правильной дроби $\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$ в виде суммы простейших дробей преобразуем знаменатель следующим образом:

$$x^2+3x-10 = (x-2)(x+5).$$

Использовали формулу разложения квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Таким образом, правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей первого типа:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}.$$

Умножая обе части этого равенства на $(x-2)(x+5)$, имеем

$$2x+3 = A(x+5) + B(x-2).$$

Подставляя теперь поочередно значения $x=-5$, $x=2$, получим:

$$A=1, \quad B=1.$$

Итак,

$$\frac{2x+3}{x^2+3x-10} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}$$

Ответ: $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+5}$.

8. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = I$.

Решение.

Имеем:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Отсюда:

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Определим коэффициенты A, B, C:

$$x = 1: \quad 1 = 4A, \quad A = \frac{1}{4};$$
$$x = -1: \quad -1 = -2C, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Далее, полагая $x = 0$, будем иметь:

$$0 = A - B - C, \quad B = A - C = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Ответ: $-\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

9. Найти интеграл $\int \sin^8 x \cos^3 x\, dx$.

Решение.

$$\int \sin^8 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^8 x \cos^2 x d\sin x =$$

$$= \int \sin^8 x(1-\sin^2 x) d\sin x = \int \sin^8 x d\sin x - \int \sin^{10} x d\sin x =$$

$$= \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

В этом интеграле $m = 3$ — нечетное, $n = 8$, создаем $d(\sin x)$ и используем формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Ответ: $\dfrac{\sin^9 x}{9} - \dfrac{\sin^{11} x}{11} + C$.

6.2. Определенный интеграл и его приложения

Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

где ξ_k — произвольная точка элементарного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, имеющего длину $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Основные свойства определенного интеграла:

а) $\int_a^a f(x)\,dx = 0;$

б) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$

в) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$

г) $\int_a^b c[f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = c\left(\int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx\right).$

Правила вычисления определенного интеграла:

а) формула Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a);$$

б) интегрирование по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du;$$

в) замена переменной

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt,\ \text{где}\ a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta).$$

Несобственные интегралы:

а) с бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx;$$

б) от неограниченной функции

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to0} \int_a^{c-\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to0} \int_{c+\beta}^b f(x)\,dx.$$

Геометрические приложения:

а) площадь плоской фигуры

$$S = \int_a^b f(x)\,dx; \quad y = f(x);$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt; \quad y = \varphi(t);\ x = \psi(t);$$

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\varphi; \quad \rho = \rho(\varphi);\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta;$$

б) длина дуги плоской кривой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx; \quad y = \varphi(x);$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt; \quad x = \varphi(t);\ y = \psi(t);$$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi; \quad \rho = \rho(\varphi).$$

Условия задач	Ответы
1. Вычислить определенный интеграл:	
а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} 3x^3\sqrt{x^4+16}dx$;	а) $\frac{61}{2}$;
б) $\int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}$;	б) $\frac{1}{3}$;
в) $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$;	в) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$;
г) $\int\limits_1^4 \frac{x^2\,dx}{2x^3+3}$;	г) $\frac{1}{6}\ln\frac{131}{5}$;
д) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$;	д) $\frac{1}{4}$;

е) $\int\limits_1^8 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$;	е) $\frac{141}{10}$;
ж) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$.	ж) $\ln\left\|\frac{4+\sqrt{12}}{3+\sqrt{5}}\right\|$.
2. Вычислить определенный интеграл:	
а) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$;	а) $2-\frac{\pi}{2}$;
б) $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-3}$;	б) $9-18\ln 2$;
в) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x+1}dx$;	в) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 2$;
г) $\int\limits_0^e \ln(x+1)\,dx$;	г) $(e+1)\ln(e+1)-e$;
д) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$;	д) $\ln\frac{9}{8}$;
е) $\int\limits_2^3 \frac{x^3\,dx}{x^2-1}$;	е) $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$;
ж) $\int\limits_3^4 \frac{\sqrt{x-2}\,dx}{x}$.	ж) $2(\sqrt{2}-1)-$ $-2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. Вычислить несобственный интеграл:	

а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}$;	а) $\ln 2$;
б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$;	б) $\frac{\pi}{4}$;
в) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;	в) π;
г) $\int\limits_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$;	г) 4;
д) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dx}{x^2+2x+2}$;	д) 2π;
е) $\int\limits_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}}$;	е) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$;
ж) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 2x}{4x^2+1}dx$.	ж) $\frac{\pi^3}{24}$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:	
а) $3x^2+2y-4=0$ и $y=0$;	а) $\frac{16}{3\sqrt{3}}$;
б) $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ и $y=0$;	б) $21\frac{1}{3}$;
в) $y=x^2$ и $y=\sqrt{3}$;	в) $\frac{1}{3}$;
г) $y=2-x^2$ и $y^3=x^2$;	г) $2\frac{2}{15}$;
д) $y=x^3$, $y=8$ и $x=0$.	д) 12.

5. Вычислить длину дуги кривой:	
а) $\rho = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$;	а) $\dfrac{1}{8}a(2\pi + 3\sqrt{3})$;
б) $\rho = a(1+\cos\varphi)$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$;	б) $4a$;
в) $\rho\varphi = 1$ от $\varphi = \dfrac{3}{4}$ до $\varphi = \dfrac{4}{3}$;	в) $\ln\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{12}$;
г) $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$;	г) $1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$;
д) $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.	д) $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$.

Решение задач варианта а.

1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} 3x^3\sqrt{x^4+16}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} 3x^3\sqrt{x^4+16}dx = \frac{3}{4}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^4+16}d(x^4+16) =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{(x^4+16)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(x^4+16)^{3/2}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\Big((9+16)^{3/2} - 16^{3/2}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(25^{3/2} - 16^{3/2}\right) = \frac{1}{2}(125-64) = \frac{61}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{61}{2}$.

2. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{x}dx}{x+1}$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t,\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \\ x = 0 \quad t = 0 \\ x = 1 \quad t = 1 \end{array} \right| = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{t^2+1}{t^2+1}\,dt - 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2\int\limits_0^1 dt - 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2t|_0^1 - 2\operatorname{arctg} t|_0^1 =$$

$$= 2 - 2\operatorname{arctg} 1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $2 - \dfrac{\pi}{2}$.

3. Вычислить несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}} = \lim_{b\to\infty} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\ln\frac{b}{b+1} - \ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Ответ: $\ln 2$.

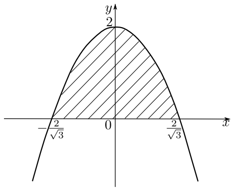
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2 + 2y - 4 = 0$ и $y = 0$.

Решение.

Выразим y из первого уравнения: $y = -\dfrac{3}{2}x^2 + 2$. Пусть $x = 0$; $y = 2$. Построим параболу $y = -\dfrac{3}{2}x^2 + 2$.

Если $y = 0$, то $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (точки пересечения параболы с осью OX).

$$S = \int\limits_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 2\right) dx =$$



$$= \left(-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = -\frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\rho = a\cos^3\dfrac{\varphi}{3}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

$$L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi,\ \rho' = 3a\cos^2\frac{\varphi}{3}\left(-\sin\frac{\varphi}{3}\right)\frac{1}{3} = -a\sin\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}.$$

$$L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3} + a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\left(\cos^2\frac{\varphi}{3} + \sin^2\frac{\varphi}{3}\right)}d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = \frac{1}{2}a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{1}{2}a\left(\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{8}a(2\pi+3\sqrt{3}).$$

Ответ: $\frac{1}{8}a(2\pi+3\sqrt{3})$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Берман Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / СПб.: Профессия, 2007. — 432 с.
2. **Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1 [Текст] / М.: Мир и Образование, Астрель, Оникс, 2012. — 368 с.
3. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / М.: АСТ, Астрель, 2009. — 560 с.
4. **Пискунов Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 [Текст] / М.: Интеграл-Пресс, 2009. — 416 с.
5. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 [Текст] / СПб.: Лань, 2009. — 608 с.
6. **Кубышкина С. Н., Арланова Е. Ю.** Введение в анализ. Дифференцирование функций: учебно-методическое пособие [Текст] / Самара: СамГТУ, 2015. — 59 с.
7. **Кубышкина С. Н., Арланова Е. Ю.** Основные методы интегрирования: учебно-методическое пособие [Текст] / Самара: СамГТУ, 2016. — 57 с.
8. **Просвиркина Е. А., Кубышкина С. Н.** Матрицы и определители: практикум [Текст] / Самара: СамГТУ, 2014. — 68 с.

Оглавление

Тренировочные тесты по курсу математики. Часть 1
Учебно-методическое пособие

КУБЫШКИНА Светлана Николаевна,
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна,
ТАРАСОВА Елена Анатольевна

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 25.06.2018
Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 4,24. Уч.–изд. л. 4,16
Тираж 50 экз. Рег. № 121/18

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Самарский государственный технический университет"
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Главный корпус

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Корпус № 8