С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА,
Е. А. ТАРАСОВА

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Самара 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА, Е. А. ТАРАСОВА

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ТЕСТЫ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Самара 2019

Печатается по решению ученого совета СамГТУ
(протокол №8 от 28.03.2019)

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К 882

Кубышкина С. Н.
К882 Тренировочные тесты по курсу математики. Часть 2: учебно-методическое пособие / *С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова, Е. А. Тарасова.* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2019. — 62 с.

Содержит варианты тренировочных тестов, относящиеся к следующим разделам курса математики: дифференциальные уравнения, ряды и теория вероятностей.

Перед каждым разделом дан необходимый справочный материал. Приведены решения типовых примеров для каждого теста и методические указания.

Пособие предназначено для студентов бакалавриата первого курса, изучающих математику один год.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К882

Рецензент: *кан. физ.–мат. наук. Е. В. Небогина*

Введение

Преподавание математики для технических направлений вузов имеет целью ознакомить студента с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести инженерную задачу на математический язык.

Все это имеет важное значение для последующей практической работы инженера и необходимо для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов бакалавриата первого курса всех направлений. Самостоятельное решение тестовых заданий способствует развитию у студентов практических навыков при решении широкого круга задач, связанных с использованием элементов дифференциального и интегрального исчисления, пределов, рядов, дифференциальных уравнений, теории вероятностей.

Пособие включает в себя три раздела. Каждый раздел соответствует нескольким темам курса математики, в нем приводятся основные теоретические сведения, необходимые формулы и методические указания с подробными решениями тестовых задач. Часть задач создана авторами, но в пособие также включены задачи из известных изданий, список которых приведен в библиографии.

1. Дифференциальные уравнения

Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \text{или} \quad y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

где $y = y(x)$ — искомая функция, а $y'(x)$, $y''(x)$, $\ldots$, $y^{(n)}(x)$ — ее производные, называется ***дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая данное уравнение в тождество, называется его ***решением***, а график функции — ***интегральной кривой***.

Функция $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$ называется общим ***решением*** уравнения n-го порядка, если: 1) она удовлетворяет уравнению при любых значениях постоянных C_1, C_2, $\ldots$, C_n; 2) каковы бы ни были начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, можно определить такие значения постоянных C_1^0, C_2^0, $\ldots$, C_n^0, что функция

$$y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right)$$

удовлетворяет этим начальным условиям, т.е. будет ***частным решением*** уравнения.

Равенство $\Phi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = 0$, неявно задающее общее решение, называется ***общим интегралом***, а равенство $\Phi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) = 0$ — ***частным интегралом*** уравнения n-го порядка. Задача отыскания частного решения данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, называется ***задачей Коши*** для этого уравнения.

Иногда частное решение определяется по так называемым ***краевым условиям***. Эти условия (число которых не должно превышать порядка уравнения) задаются не в одной точке, а на концах некоторого отрезка. Очевидно, что краевые условия ставятся лишь для уравнений порядка выше первого.

Для дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ (или $y' = f(x, y)$) общее и частное решения имеют вид $y = \varphi(x, C)$ и $y = \varphi(x, C_0)$ соответственно.

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение первого порядка вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

или

$$M(x)N(y)\,dx + P(x)Q(y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Разделив (2) на $P(x)N(y) \neq 0$, придем к уравнению

$$\frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = 0,$$

которое почленно интегрируется.

В результате получим общий интеграл уравнения (2) в виде

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

Функция $F(x,\,y)$ называется ***однородной степени k***, если для всех $\lambda > 0$ выполняется равенство $F(\lambda x,\,\lambda y) = \lambda^k F(x,\,y)$. Примером однородной функции может служить любая форма (однородный многочлен) степени k.

Функции $\dfrac{x-y}{x+y}$, $\dfrac{x^2+xy}{x-y}$, x^2+y^2-xy, $x^{k-1}y+y^k$ являются однородными соответственно степени 0, 1, 2, k.

Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = f(x,\,y)$ называется ***однородным***, если $f(x,\,y)$ — однородная функция степени нуль.

Уравнение $M(x,\,y)\,dx + N(x,\,y)\,dy = 0$ является ***однородным***, если $M(x,\,y)$ и $N(x,\,y)$ — однородные функции одной и той же степени. Замена $y = zx$ приводит однородное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ — функции, непрерывные на $[a,b]$, называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***. Его решение ищут в виде $y(x) = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — две неизвестные функции. После подстановки в уравнение выражений для y и y' получаем

$$v\frac{du}{dx} + \left(\frac{dv}{dx} + p(x)v\right)u = q(x).$$

В качестве $v(x)$ выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению $\dfrac{dv}{dx}+p(x)v=0$, тогда функция $u(x)$ определяется из уравнения $v\dfrac{du}{dx}=q(x)$.

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha\in R$ ($\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1$), называется ***уравнением Бернулли***. Путем подстановки $z=y^{1-\alpha}$ оно сводится к линейному. Его можно решать и непосредственно, применяя подстановку $y(x)=u(x)\cdot v(x)$.

Уравнение $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. В этом случае уравнение можно записать в виде $du(x,y)=0$, откуда следует, что соотношение $u(x,y)=C$ является его общим интегралом.

Выражение $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$, где M, N — непрерывные функции вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой области D, есть ***полный дифференциал*** тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ во всей области D.

Общий вид дифференциальных уравнений высшего порядка

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)=0.$$

Допускают понижение порядка следующие типы дифференциальных уравнений.

1. Уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$ решают путем n-кратного интегрирования.
2. Уравнение вида $F\left(x,y',y''\right)=0$, явно не содержащее искомой функции $y(x)$, сводят к уравнению первого порядка путем введения новой неизвестной функции $z=z(x)$, полагая $y'(x)=z(x)$, $y''(x)=z'(x)$. Тогда уравнение принимает вид $F\left(x,z,z'\right)=0$.
3. Уравнение вида $F\left(y,y',y''\right)=0$, явно не содержащее независимой переменной x, интегрируют с помощью подстановки $p=y'$, где $p=p(y)$ — новая неизвестная функция, а за аргу-

мент временно принята переменная y. Тогда $y'' = p \cdot p'$. При этом порядок уравнения понижается на единицу.

4. Если левая часть дифференциального уравнения есть точная производная какой-либо функции, то порядок уравнения также можно понизить.

Примеры точных производных:

$$\frac{y'}{y} = (\ln y)'; \quad \frac{y''}{y'} = \left(\ln y'\right)';$$

$$xy'' + y' = \left(xy'\right)'; \quad yy'' + (y')^2 = (yy')';$$

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)'$$

и так далее.

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{3}$$

Чтобы решить ЛОДУ с постоянными коэффициентами, надо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{4}$$

и найти все его корни λ_1, ..., λ_n.

Общее решение уравнения (3) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i \mathrm{e}^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (4) и слагаемых вида

$$\left(C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+3} x^2 + \ldots + C_{m+k} x^{k-1}\right) \mathrm{e}^{\lambda x} \tag{5}$$

для каждого кратного корня λ уравнения (4), где k — кратность корня. Все C_i — произвольные постоянные.

Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1} \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2} \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} — многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (5), их коэффициенты — произвольные постоянные.

Например, вид общего решения уравнения второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{6}$$

с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Если λ_1 и λ_2 — различные и действительные корни, общее решение уравнения (6) имеет вид

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ — двукратный действительный корень, общее решение имеет вид

$$y = C_1\mathrm{e}^{\lambda x} + C_2 x\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ — комплексно—сопряженные корни, общее решение записывается в виде

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) с постоянными коэффициентами и с правой частью специального вида называется уравнение

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = f(x). \tag{7}$$

Общее решение дифференциального уравнения (7) равно сумме какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (3), то есть

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x).$$

Решение однородного уравнения $y_0(x)$ определяется так же, как написано выше, $\overline{y}(x)$ — частное решение уравнения (7) в случае, когда правая часть дифференциального уравнения (7) имеет специальный вид, определяется методом неопределенных коэффициентов. Правая часть специального вида

$$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \left(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x\right),$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — полиномы степеней m и n соответственно.

Укажем вид частного решения дифференциального уравнения (7) в двух случаях.

1. Если число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (4) дифференциального уравнения (7), то

$$\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \left(S_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x\right), \tag{8}$$

где S_l и R_l — полиномы степени $l = \max\{m, n\}$ с неопределенными коэффициентами.

2. Если число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения (4) дифференциального уравнения (7) кратности k, то

$$\overline{y}(x) = x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \left(S_l(x) \cos \beta x + R_l(x) \sin \beta x\right), \tag{9}$$

то есть частное решение приобретает множитель x^k.

Рассмотрим применение метода вариации произвольных постоянных (метода Лагранжа) для решения неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Общее решение $y(x)$ линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{10}$$

есть сумма общего решения y_0 соответствующего ему однородного уравнения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ и какого-нибудь частного решения $\overline{y}$ уравнения (10)

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}.$$

Суть метода Лагранжа вариации произвольных постоянных заключается в следующем. Если $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ — общее решение однородного уравнения, то частное решение $\overline{y}(x)$ ищется в виде

$$\overline{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — неизвестные пока функции, производные от которых определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0; \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \tag{11}$$

Решая данную систему, находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, откуда после интегрирования определяем $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Условия задач	Ответы
1. Найдите общее решение диференциального уравнения:	
а) $y'(1+x^2) + x(1+y^2) = 0$;	а) $\operatorname{arctg} y + 0,5 \ln(1+x^2) = C$;
б) $y'x - y = x \operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$;	б) $\sin \frac{y}{x} = Cx$;
в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;	в) $y = e^{-x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$;
г) $y'xy - y^2 = x^4$;	г) $y = \pm x\sqrt{x^2 + C}$;
д) $x(2+3xy)\,dx + (x^3 - 3y^2)\,dy = = 0$;	д) $x^2 + x^3 y - y^3 = C$;
е) $y = x(y' - x\cos x)$;	е) $y = x(C + \sin x)$;
ж) $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$;	ж) $x + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = C$;
з) $x^2 y' - 2xy = 3y$.	з) $y = Cx^2 e^{-3/x}$.
2. Решите задачу Коши:	
а) $y' = y$, $y(0) = 1$;	а) e^x;
б) $y' + 2y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$;	б) $= xe^{-2x}$;
в) $(2x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0$, $y(1) = 1$;	в) $x^2 + xy + y^2 = 3$;
г) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$, $y(1) = 0$;	г) $e^{\frac{y}{x}} = 1 + \ln x$;

д) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$, $y(0) = 1$; е) $y' = 2xe^{-x^2}$, $y(0) = -1$; ж) $y' = \sqrt{4y^2-1}$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$; з) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 1$.	д) $y = (1+x)(1+x^2)$; е) $y = -e^{-x^2}$; ж) $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch} 2x$; з) $y = 2 - \sqrt{1-x^2}$.
3. Найдите общее решение дифференциального уравнения: а) $y'' = y'$; б) $yy'' = y'^2$; в) $y'' + \dfrac{y'}{x} = \dfrac{1}{x^3}$; г) $xy''' = y''$; д) $y'' + 5^{3x} = \operatorname{sh} 3x$; е) $y'' + \dfrac{1}{x^5} = \dfrac{4}{3x+2}$; ж) $y^3y'' = 1$; з) $y''(e^x+1) + y' = 0$.	а) $y = C_1e^x + C_2$; б) $y = C_2e^{C_1x}$; в) $y = C_1\ln x + \dfrac{1}{x} + C_2$; г) $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$; д) $y = \dfrac{1}{9}sh3x - \dfrac{1}{9}\dfrac{5^{3x}}{\ln^2 3} + C_1x + C_2$; е) $y = -\dfrac{1}{12x^3} + \dfrac{4}{3}x\ln\lvert 3x+2\rvert - $ $-\dfrac{4}{3}x + \dfrac{8}{9}\ln\lvert 3x+2\rvert + C_1x + C_2$; ж) $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$; з) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$.
4. Найдите общее решение дифференциального уравнения: а) $y'' + 7y' - 8y = 0$; б) $y'' + 3y' + 2y = 0$; в) $y'' - 5y' = 0$; г) $y'' + 5y = 0$; д) $y'' + 2y' + 10y = 0$; е) $y'' + 2y' + 5y = 0$; ж) $y'' + 8y' + 16y = 0$; з) $y'' - 5y' + 4y = 0$.	а) $y = C_1e^x + C_2e^{-8x}$; б) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$; в) $y = C_1 + C_2e^{5x}$; г) $y = C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x$; д) $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; е) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; ж) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$; з) $y = C_1e^{4x} + C_2e^x$.
5. Дано дифференциальное уравнение $y'' + 9y' = f(x)$. Если $f(x) = \ldots$ а) 1;	а) Ax;

б) $2x$; в) $3e^{-9x}$; г) $(3x^2+5)e^{-9x}$; д) $x\cos 9x$; е) $(7x^3+2x+1)e^{5x}$; ж) $3xe^{-9x}+20x$; з) $5x^2+10x-3-4x^2e^{-2x}$, то решение уравнения ищется в виде...	б) $(Ax+B)x$; в) Axe^{-9x}; г) $(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-9x}$; д) $(Ax+B)\cos 9x+(Cx+$ $+D)\sin 9x$; е) $(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^{5x}$; ж) $(Ax^2+Bx)e^{-9x}+Cx^2+Dx$; з) $Ax^3+Bx^2+Cx+(Dx^2+Kx+$ $+L)e^{-2x}$.
6. Дано дифференциальное уравнение $y^{IV}+16y''=f(x)$. Если $f(x)=\dots$ а) $3\sin 4x$; б) $(x+4)e^{4x}$; в) $e^{-2x}\cos 4x$; г) x^2+4; д) $(x+1)\cos 4x$; е) $5\cos 3x+x\sin 3x$; ж) $(x^2+3)\cos 3x+x\sin 3x$; з) $3\cos x+4\cos 4x$, то решение уравнения ищется в виде...	 а) $x(A\cos 4x+B\sin 4x)$; б) $(Ax+B)e^{4x}$; в) $e^{-2x}(A\cos 4x+B\sin 4x)$; г) $(Ax^2+Bx+C)x^2$; д) $x((Ax+B)\cos 4x+(Cx+$ $+D)\sin 4x)$; е) $(Ax+B)\cos 3x+(Cx+$ $+D)\sin 3x$; ж) $(Ax^2+Bx+C)\cos 3x+(Dx^2+$ $+Kx+L)\sin 3x$; з) $A\cos x+B\sin x+x(C\cos 4x+$ $+D\sin 4x)$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения: а) $y''-9y=1$; б) $y''-9y'=1$; в) $y''-7y'=e^{7x}$;	 а) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-\dfrac{1}{9}$; б) $y=C_1+C_2e^{9x}-\dfrac{x}{9}$; в) $y=C_1+C_2e^{7x}+\dfrac{xe^{7x}}{7}$;

г) $y'' + y = 2\cos 2x$;	г) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{2}{3}\cos 2x$;
д) $2y'' + 5y' = 29\cos x$;	д) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + 5\sin x - 2\cos x$;
е) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$;	е) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \ln\lvert\cos x\rvert + x\sin x$;
ж) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$;	ж) $y = C_1 e^x + C_2 - \cos e^x$;
з) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{5}{e^x + 1}$.	з) $y = 5(e^{-x} + e^{-2x})\ln\lvert e^x + 1\rvert + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.
8. Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:	
а) $y'' - 9y' = e^{9x}$, $y(0) = y'(0) = 0$;	а) $y = \dfrac{1 - e^{9x}}{81} + \dfrac{xe^{9x}}{9}$;
б) $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = y'(0) = 1$;	б) $y = x^2 + e^x$;
в) $y'' + 4y = \sin 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$;	в) $y = -\dfrac{x}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\sin 2x$;
г) $2y'' + y' - y = 2e^x$, $y(0) = y'(0) = 2$;	г) $y = \dfrac{4}{3}e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{3}e^{-x} + e^x$;
д) $y'' - 2y' + y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$;	д) $y = xe^x - e^x - \dfrac{x^2 e^x}{2} + 1$;
е) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$;	е) $y = -\dfrac{3}{2}x^2 e^{-2x}$;
ж) $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$;	ж) $y = 2 + e^{-x}$;
з) $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$.	з) $y = (x - 1)(e^{2x} - e^{-x})$.

Решение задач варианта а.

1. Найдите общее решение диференциального уравнения $y'(1+x^2)+x(1+y^2)=0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx}(1+x^2)+x(x+y^2)=0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Чтобы их разделить, поделим уравнение на $\dfrac{(1+x^2)(1+y^2)}{dx}$, получим $\dfrac{dy}{1+y^2}+\dfrac{x\,dx}{1+x^2}=0$. После интегрирования полученного уравнения, получим $\operatorname{arctg} y+0,5\ln(1+x^2)=C$.

Ответ: $\operatorname{arctg} y+0,5\ln(1+x^2)=C$.

2. Решите задачу Коши $y'=y$, $y(0)=1$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx}=y$, разделим переменные $\dfrac{dy}{y}=dx$. Интегрируя $\int\dfrac{dy}{y}=\int dx$, получим $\ln|y|=x+C$. После потенцирования найдем общее решение $y=Ce^x$. При делении на y мы могли потерять решение $y=0$, но оно содержится в общем решении при $C=0$. Используем заданное начальное условие, получим $y(0)=Ce^0=1\Rightarrow C=1$, и, следовательно, частное решение есть $y=e^x$.

Ответ: $y=e^x$.

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y''=y'$.

Решение.

Решим данное уравнение двумя способами.

1) В дифференциальном уравнении отсутствует независимая переменная x. Тогда делаем замену $y'=p(y)$, $y''=pp'$. Уравнение принимает вид $pp'=p$. Разделив обе части уравнения на p ($p\neq 0$, $y'\neq 0$, значит $y=A$ является решением), получим $p'=1$; $dp=dy$; $p=y+C$; $y'=y+C$; $\dfrac{dy}{dx}=y+C$; $\dfrac{dy}{y+C}=dx$; $\ln|y+C|=x+D$. После потенцирования находим $y+C=e^{x+D}$, $y+C=e^x\cdot e^D$, $y=e^x\cdot e^D-C$.

Таким образом, общее решение имеет вид $y = C_1 e^x + C_2$, где $C_1 = e^D$, $C_2 = -C$.

2) Разделим обе части уравнения на y', получим

$$\frac{y''}{y'} = 1.$$

Обе части уравнения являются полными производными по x, значит

$$(\ln y')' = x'; \quad \ln y' = x + C; \quad y' = e^{x+C}; \quad dy = e^{x+C} dx;$$
$$y = e^{x+C} + C_2; \quad y = e^x \cdot e^C + C_2; \quad y = C_1 e^x + C_2, \text{ где } C_1 = e^C.$$

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2$.

4. Найдите общее решение дифференциального уравнения: $y'' + 7y' - 8y = 0$.

Решение.

Характеристическое уравнение данного уравнения имеет вид $\lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -8$. Общее решение дифференциального уравнения — $y = C_1 e^x + C_2 e^{-8x}$.

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-8x}$.

5. Дано дифференциальное уравнение $y'' + 9y' = f(x)$. Если $f(x) = 1$, то решение уравнения ищется в виде...

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 9\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -9$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x) = C_1 + C_2 e^{-9x}$. Правая часть заданного уравнения 1. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 0 + i0 = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$, поэтому согласно формуле (9) $\overline{y} = x \cdot A$.

Ответ: Ax.

6. Дано дифференциальное уравнение $y^{IV} + 16y'' = f(x)$. Если $f(x) = 3 \sin 4x$, то решение уравнения ищется в виде...

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^4 + 16\lambda^2 = 0$, $\lambda^2(\lambda^2 + 16) = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm 4i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin 4x + C_4 \cos 4x$.

Правая часть заданного уравнения $3\sin 4x$. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 4 = 4i$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$, поэтому $\overline{y}(x) = x(A\cos 4x + B\sin 4x)$ согласно формуле (9).

Ответ: $x(A\cos 4x + B\sin 4x)$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 9y = 1$.

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 9 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_0(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. Правая часть заданного уравнения 1. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 0 + i \cdot 0 = 0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому, согласно формуле (8), $\overline{y}(x) = A$. Дифференцируя $\overline{y}(x)$ два раза и подставляя производные в данное уравнение, получим:

$$-9A = 1, \quad A = -\frac{1}{9}.$$

Таким образом, $\overline{y}(x) = -\dfrac{1}{9}$, а общее решение данного уравнения есть $y = y_0(x) + \overline{y}(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{1}{9}$.

Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \dfrac{1}{9}$.

8. Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$$y'' - 9y' = e^{9x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 9\lambda = 0$, $\lambda(\lambda - 9) = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 9$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_0(x) = C_1 + C_2 e^{9x}$. Правая часть заданного уравнения e^{9x}. Контрольное число $\sigma = \alpha + i\beta = 9 + i \cdot 0 = 9$ является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$, поэтому, согласно формуле (9), $\overline{y}(x) = Axe^{9x}$. Дифференцируя

$\overline{y}(x)$ два раза и подставляя производные в данное уравнение, получим:

$$9Ae^{9x} + 9A(e^{9x} + 9xe^{9x}) - 9A(e^{9x} + 9xe^{9x}) = e^{9x},$$

$$9Ae^{9x} = e^{9x}.$$

Сокращая на e^{9x}, имеем $A = \dfrac{1}{9}$. Таким образом, $\overline{y}(x) = \dfrac{1}{9}xe^{9x}$, а общее решение данного уравнения

$$y = y_0(x) + \overline{y}(x) = C_1 + C_2e^{9x} + \frac{1}{9}xe^{9x}.$$

Удовлетворив начальным условиям $y(0) = C_1 + C_2 = 0$, $y'(0) = 9C_2e^{9x} + \dfrac{1}{9}(e^{9x} + 9xe^{9x})\Big|_{x=0} = 9C_2 + \dfrac{1}{9} = 0$, получим $C_1 = \dfrac{1}{81}$, $C_2 = -\dfrac{1}{81}$.

Решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$y = \frac{1}{81} - \frac{1}{81}e^{9x} + \frac{1}{9}xe^{9x}.$$

Ответ: $y = \dfrac{1 - e^{9x}}{81} + \dfrac{xe^{9x}}{9}$.

2. Ряды

Выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{12}$$

называется ***числовым рядом*** и обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ (u_n — общий член ряда).

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ — его n-ая частичная сумма, то ряд называется сходящимся (число S — сумма ряда), в противном случае — расходящимся.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (12) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.

1. Признак сравнения: если $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.
   В качестве рядов для сравнения удобно, в частности, выбирать геометрическую прогрессию $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ $(a \neq 0)$, которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$, и обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ (где $\alpha > 0$), который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

2. Предельный признак сравнения: если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = A$ $(A = \text{const},\ A > 0)$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

3. Признак Даламбера: если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ расходится.
4. Признак Коши: если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то при $l < 1$ ряд сходится, а при $l > 1$ расходится.
   Признаки Коши и Даламбера не дают ответа, если $l = 1$.
5. Интегральный признак: если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ таковы, что $u_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, где $f(x)$ — непрерывная положительная монотонно убывающая в полуинтервале $[1;\infty)$ функция, то этот ряд сходится (расходится) тогда и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется ***знакомеременным***. Такой ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из модулей его членов, и условно (неабсолютно) сходящимся, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, но из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ не следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется ***знакочередующимся***. Такой ряд записывают в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1}u_n + \dots. \quad (13)$$

Если первый член отрицателен, то исследуют ряд $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$.

Признак Лейбница: если члены ряда (13) удовлетворяют двум условиям

1. $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

то ряд сходится, причем его сумма $0 < S \leqslant u_1$.

Остаток $r_n = (-1)^n(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots)$ ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, оценивается с помощью неравенства $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

Функциональным рядом называется ряд вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{14}$$

где $u_n(x)$ — функции, определенные на некотором множестве X.

Множество $\Omega \subset X$ всех точек сходимости ряда (14) называется его областью сходимости.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{15}$$

или

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \tag{16}$$

Числа $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ называются коэффициентами ряда.

Неотрицательное число R такое, что ряд (15) сходится в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ и расходится вне этого интервала, называется радиусом сходимости этого ряда, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ — его интервалом сходимости.

Если ряд (15) сходится только в одной точке $x = x_0$, то для него $R = 0$. Для ряда (16) интервалом сходимости является интервал

$(-R;R)$. В своем интервале сходимости степенной ряд сходится абсолютно.

Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \text{ или } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

то $R = \dfrac{1}{l}$.

Если $l = 0$, то степенной ряд сходится на всем множестве $\mathbb{R}$.

Свойства степенных рядов:

1. Сумма степенного ряда при всех значениях x из интервала сходимости есть непрерывная функция.
2. Степенной ряд в его интервале сходимости можно почленно дифференцировать, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

3. Степенной ряд можно интегрировать по любому отрезку, содержащемуся в интервале сходимости, причем

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ где } |x| < R.$$

Рядом Тейлора в точке x_0 называется ряд вида:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (17)$$

При $x_0 = 0$ получаем ряд Маклорена функции $f(x)$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Основные разложения функций в степенные ряды:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots \ \forall x \in (-\infty; +\infty)$;

2) $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots$ $\forall x \in (-\infty; +\infty)$;

3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots \ \forall x \in (-\infty; +\infty)$;

4) $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \ \forall x \in (-1; 1)$ (бесконечная убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $q = x$);

5) $(1 + x)^m = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n =$ $= 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 \ldots \ \forall x \in (-1; 1)$. Этот ряд называется биномиальным;

6) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots \ \forall x \in (-1; 1]$;

7) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots \ \forall x \in [-1; 1]$.

Степенные ряды находят важное применение при вычислении приближенных значений функций, приближенного вычисления определенных интегралов, интегрировании дифференциальных уравнений.

Условия задач	Ответы
1. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда:	
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{4n+5}$;	а) не выполняется, ряд расходится;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{11n+2}$;	б) выполняется, нужны дополнительные исследования;
в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$;	в) не выполняется, ряд расходится;
г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{(3n-1)^2}$;	г) не выполняется, ряд расходится;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+2)\sqrt{n}}$;	д) выполняется, нужны дополнительные исследования;
е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{4n}$;	е) не выполняется, ряд расходится;
ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \sin \frac{1}{n^3}$;	ж) не выполняется, ряд расходится;
з) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \left(\frac{n-5}{n+2}\right)^n$.	з) не выполняется, ряд расходится.
2. С помощью признаков Даламбера исследовать сходимость рядов:	
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$;	а) расходится;
б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$;	б) сходится;
в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{e^n}$;	в) расходится;
г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{13^n}$;	г) расходится;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(3n)!}$;	д) сходится;
е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{9^n}$;	е) расходится;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;	ж) расходится;
з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \sin \frac{\pi}{2^n}$.	з) сходится.
3. С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:	
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{4n-3}\right)^n$;	а) сходится;
б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;	б) сходится;
в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;	в) сходится;
г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+2}{2n-5}\right)^n$;	г) расходится;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{2n}$;	д) сходится;
е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(\ln n)^{2n}}$;	е) расходится;
ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;	ж) расходится;
з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi^n \arcsin \frac{1}{3^n}$.	з) расходится.
4. С помощью интегрального признака установите, сходится или расходится ряд:	
а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$;	а) сходится;
б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3+n^2}$;	б) расходится;
в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$;	в) сходится;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+3)}$;	г) сходится;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2n+1}$;	д) расходится;
е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{3n}}}{\sqrt{3n}}$;	е) сходится;
ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+4}}$;	ж) расходится;
з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2)\ln^5(n+2)}$.	з) сходится.
5. Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.	
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$;	а) сходится условно;
б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;	б) сходится абсолютно;
в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$;	в) сходится условно;
г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \left(\dfrac{4n+1}{6n+1}\right)^n$;	г) сходится абсолютно;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+3}}$;	д) сходится условно;
е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n^3}{4n^3+n}$;	е) расходится;
ж) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{\ln n}{4n}$;	ж) сходится условно;
з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} \cdot n^5}{4n^2+3}$;	з) расходится;
и) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \dfrac{n}{2^n}$;	и) сходится абсолютно;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$.	к) сходится абсолютно.
6. Найти область сходимости рядов и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:	
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$;	а) $-2\leqslant x<2$;
б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$;	б) $-1<x<1$;
в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$;	в) $-1<x\leqslant 1$;
г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$;	г) $-\infty<x<\infty$;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^{n-1}e^{-nx}$;	д) $\ln 5<x<\infty$;
е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+5)^n}{n^2}$;	е) $-6\leqslant x\leqslant -4$;
ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}$;	ж) $-1<x<5$;
з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.	з) $0\leqslant x<4$.

Решение задач варианта а.

1. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+1}{4n+5}$.

Решение.

Проверим необходимое условие сходимости. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n+5}=\dfrac{3}{4}\neq 0$, необходимое условие не выполняется, значит ряд расходится.

Ответ: не выполняется, ряд расходится.

2. С помощью признака Даламбера исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^5}$.

Решение.

Применим признак Даламбера. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \dfrac{n^5}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3 \cdot n^5}{n^5 \left(1+\frac{1}{n}\right)^5} = 3 > 1$, то ряд расходится.

Ответ: расходится.

3. С помощью признака Коши исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+3}{4n-3}\right)^n$.

Решение.

Применим к ряду радикальный признак Коши. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n+3}{4n-3}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{4n-3} = \dfrac{1}{4} < 1$, то ряд сходится.

Ответ: сходится.

4. С помощью интегрального признака установите, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$.

Решение.

Применим интегральный признак Коши. Вычисляем $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x \ln^2 x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_2^{b} \dfrac{dx}{x \ln^2 x} = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_2^{b} \dfrac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\lim\limits_{b\to\infty} \left.\dfrac{1}{\ln x}\right|_2^b =$
$= -\lim\limits_{b\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln b} - \dfrac{1}{\ln 2}\right) = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Это означает, что несобственный интеграл сходится, а значит исходный ряд тоже сходится.

Ответ: сходится.

5. Исследовать сходимость следующий знакопеременный ряд. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Решение.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \dfrac{1}{3} + \ldots$ Он знакочередующийся. К таким рядам применим признак Лейбница. Так как $1 > \dfrac{1}{3} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n-1} = 0$, условия признака Лейбница выполняются, значит ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Получим положительный ряд. Применим к нему признак сравнения. Сравним с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$, следовательно данный ряд сходится условно.

Ответ: сходится условно.

6. Найти область сходимости ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

Решение.

Это степенной ряд. Находим радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \cdot \dfrac{n \cdot 2^n}{x^n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{x}{2} \right| < 1$.

Тогда ряд сходится, если $\left| \dfrac{x}{2} \right| < 1$, откуда $-2 < x < 2$.

Исследуем сходимость в точках $x = -2$ и $x = 2$.

При $x = 2$ исходный ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Это гармонический расходящийся ряд.

При $x = -2$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$. Этот ряд сходится условно, так как расходится ряд из абсолютных величин его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \dfrac{(-1)^n}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Итак, исходный ряд сходится при $x \in [-2; 2)$.

Ответ: $-2 \leqslant x < 2$.

3. Теория вероятностей

Событие называется ***достоверным***, если в результате испытания оно обязательно должно произойти.

Невозможным называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий может как произойти так и нет.

Случайные события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других в одном и том же испытании.

Случайные события образуют ***полную группу***, если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

События называются ***равновозможными***, если ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть исходами или элементарными событиями. Исход называется благоприятствующим появлению события А, если появление этого исхода влечет за собой появление события А.

Вероятность события A: $P(A) = m/n$, где m — число элементарных исходов, благоприятствующих A; n — число всех возможных элементарных исходов данного испытания.

Свойство 1. Если A — достоверное событие, то $P(A) = 1$.

Свойство 2. Если A — невозможное событие, то $P(A) = 0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов. Число всех возможных размещений (без повторений):

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

число размещений с повторениями $A_n^m = n^m$.

Частный случай размещения при $m = n$ называется ***перестановкой*** из n элементов. Число всех перестановок из n элементов

равно
$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!,$$
причем $P_0 = 0! = 1$.

Сочетаниями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний без повторений вычисляются по формуле
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$
с повторениями: $C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

Суммой событий A и B называется событие $A+B$, которое наступает при появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема о сложении вероятностей 1.

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий
$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Теорема о сложении вероятностей 2.

Вероятность суммы совместных событий вычисляется по формуле:
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то имеет место равенство
$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Произведением событий A и B называется событие AB, которое наступает только тогда, когда наступают оба события одновременно.

События A и B называются ***независимыми***, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Событие A называется ***зависимым*** от события B, если вероятность события меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет.

Теорема об умножении вероятностей.

Вероятность произведения независимых событий A и B вычисляется по формуле:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Условной вероятностью $P(B/A)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий:

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A).$$

Условная вероятность вычисляется по формулам:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Если событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу, то вероятность события A вычисляется по ***формуле полной вероятности***:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Формула, определяющая вероятности гипотез, называется ***формулой Байеса***:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$ ровно k раз, выражается ***формулой Бернулли***:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

При большом числе испытаний n и малой вероятности p используют ***формулу Пуассона***:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ где } \lambda = np.$$

Если значения n и k велико, рациональнее при решении задачи воспользоваться ***локальной теоремой Лапласа***:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \text{ — функция Гаусса.}$$

Вероятность того, что число появлений события A находится между k_1 и k_2 вычисляют применив ***интегральную теорему Лапласа***:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ — функция Лапласа.}$$

Причем, $\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \Phi(-x) = -\Phi(x)$, а при больших значения x верно $\varphi(x) \approx 0, \quad \Phi(x) \approx 0.5$.

Если значение, которое может принимать случайная величина X образует дискретный ряд чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то случайную величину (СВ) называют ***дискретной*** (ДСВ). Каждое значение СВ соответствует вероятности p_n. Соотношение, устанавливающее связь между между СВ и ее вероятностью называется ***законом распределения***. Закон распределения ДСВ чаще всего задается в виде таблицы, которая называется ***рядом распределения***.

Если значения СВ X заполняют конечный или бесконечный промежуток числовой оси Ox, то СВ называют ***непрерывной*** (НСВ), $x\epsilon(a, b)$. $P(a < x < b)$ — вероятность того, что значение СВ попадет в промежуток (a, b).

Закон распределения НСВ задается с помощью ***плотности распределения*** $f(x)$: $P(a < x < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X<x)$. Это неубывающая функция, принимающая значения от 0 до 1. Для НСВ: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Плотность распределения случайной величины X определяется по формуле $f(x) = F'(x)$, существует только для НСВ. Для $f(x)$ выполняется условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Числовые характеристики случайной величины:

- математическое ожидание СВ:

$M[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ — для ДСВ X;

$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ — для НСВ X;

- дисперсия СВ:

$D[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2 p_i - (M[X])^2$ — для ДСВ X;

$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2$ — для НСВ X;

-среднее квадратическое отклонение СВ: $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$;

-начальный момент k–го порядка СВ: $\alpha_k = M[X^k]$;

-центральный момент k–го порядка СВ: $\mu_k = M[(X - M[X])^k]$;

-асимметрия: $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$;

-эксцесс: $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$;

-мода (M_0)- наиболее вероятное значение случайной величины.

Биномиальное распределение ДСВ. Пусть дискретная случайная величина X - количество успехов из n независимых испытаний с вероятностью успеха p (неуспеха $q = 1 - p$). Вероятности вычисляются по формуле Бернулли $P_n = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots n$.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$M[X] = np$, $D[X] = npq$,

$\sigma[X] = \sqrt{npq}$.

Пуассоновское распределение ДСВ. При условии $p \to 0$, $n \to \infty$, $np \to \lambda = \text{const}$ закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Вероятности вычисляются по формуле Пуассона: $P_n = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots n$.

Числовые характеристики для распределения Пуассона:

$M[X] = \lambda$, $D[X] = \lambda$, $\sigma[X] = \sqrt{\lambda}$.

Показательное распределение НСВ. Плотность распределения величины X (везде $\lambda > 0$): $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, функция распределения величины X: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Числовые характеристики для показательного распределения: $M[X] = \frac{1}{\lambda}$, $D[X] = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$.

Равномерное распределение НСВ. Плотность распределения на отрезке $(a; b)$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}$, функция распределения величины X: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b \\ 1, & x < b \end{cases}$.

Числовые характеристики равномерно распределенной СВ:

$M[X] = \frac{a+b}{2}$, $D[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Нормальное распределение НСВ. Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Так как такая ситуация распространена, из всех распределений чаще всего встречается именно нормальное распределение. Плотность распределения нормальной СВ X имеет вид:$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, вычисляется по формуле: $P(\alpha < X < \beta) = $ $= \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — Функция Лапласа. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ, имеет вид: $P(|x - a| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma})$.

Числовые характеристики для нормального распределения:

$M[X] = a$, $D[X] = \sigma^2$.

Условия задач	Ответы
1. Решить задачи:	
а) Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет не более 5-ти очков.	а) $P(A) = \frac{10}{36}$;
б) Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты пиковой масти?	б) $P(A) = \frac{1}{4}$;
в) Найти вероятность того, что при бросании 2-х игральных костей сумма выпавших очков попадет в промежуток от 3 до 10.	в) $P(A) = \frac{8}{9}$;
г) Подбрасывают 10 монет. Найти вероятность того, что только на одной монете выпадет решка.	г) $P(A) = \frac{5}{512}$;
д) Найти вероятность того, что при броске двух игральных костей произведение очков будет нечетным.	д) $P(A) = \frac{1}{4}$;
е) Из колоды в 36 карт последовательно выбирают 2 карты. Найти вероятность того, что выбраны 2 короля разного цвета.	е) $P(A) = \frac{2}{315}$.
2.	
а) У ребенка 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что он соберет из кубиков слова: 1)КУКЛА; 2) ЛАК?	а) 1)$P(A) = \frac{1}{60}$; 2)$P(B) = \frac{1}{30}$;

б) Из 7 карточек разрезной азбуки составлено слово КОЛОКОЛ. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что получатся слова: 1)КОЛОКОЛ; 2) КОЛ?	б) 1)$P(A) = \frac{1}{210}$; 2)$P(B) = \frac{2}{35}$;
в) Из 10 букв разрезной азбуки составлено слово МАТЕМАТИКА. Эти буквы перемешали, а затем собрали в произвольном порядке. Найти вероятность того, что получились слова: 1)МАТЕМАТИКА; 2)ТЕМА; 3)МАМА.	в) 1)$P(A) = \frac{24}{10!}$; 2)$P(B) = \frac{1}{420}$; 3)$P(C) = \frac{1}{420}$;
г) На тринадцати карточках написаны буквы И, С, Н, О, П, Е, В, О, Т, И, Л, Е, Р. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно и положили в ряд. Какова вероятность того, что получатся слова: 1)СОПРОТИВЛЕНИЕ, 2)ВОРОТ?	г) 1)$P(A) = \frac{8}{13!}$; 2)$P(B) = \frac{1}{77220}$;
д) На десяти одинаковых карточках написаны буквы А, К, С, И, Т, Т, Т, И, С, А. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получатся слова: 1)СТАТИСТИКА, 2)СТАТИКА, 3)ТАКСИ?	д) 1)$P(A) = \frac{48}{10!}$; 2)$P(B) = \frac{1}{12600}$; 3)$P(C) = \frac{1}{1260}$;

е) Слово ВЕРОЯТНОСТЬ составлено из карточек разрезной детской азбуки. Все карточки смешивают и затем наугад выбирают семь карточек. Какова вероятность получить слова: 1)НОВОСТЬ, 2)ВЕРНОСТЬ?	е) 1)$P(A) = \frac{4 \cdot 4!}{11!}$; 2)$P(B) = \frac{4 \cdot 3!}{11!}$
3. а) Восемь спортсменов на олимпиаде разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами медали могут быть распределены между спортсменами?	а) 336;
б) В конкурсе участвуют 7 человек. Порядок выступления участников определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?	б)5040;
в) У одного студента 5 книг, у другого-9. Все книги различные. Сколькими способами студенты могут произвести обмен одной книги на книгу?	в) 45;
г) Студенческая группа состоит из 27 человек, среди которых 15 юношей и 12 девушек. Сколькими способами можно выбрать двух человек одного пола?	г) 171;
д) Студенческая группа из 27 человек, среди которых 15 юношей и 12 девушек отправилась на танцы. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?	д) 180;

е) На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Случайным образом выбирают три карточки и раскладывают в ряд слева направо. Сколькими способами можно составить число число 123.	е)60.
4.	
а) В урне 15 шаров: 10 белых и 5 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?	а) $P(A) = \frac{3}{7}$;
б) В офисе работают 6 мужчин и 4 женщины. Для переезда наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц три женщины.	б) $P(A) = \frac{1}{2}$;
в) Студент знает ответы на 30 экзаменационных вопросов из 70. С какой вероятностью он сдаст экзамен, если необходимо ответить не менее чем на 2 вопроса из 3-х?	в) $P(A) \approx 0,39$;
г) В ящике находится 15 качественных и 7 бракованных деталей. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что:	
I) обе детали будут качественными; II) одна деталь будет качественной, а одна – бракованной; III) обе детали бракованы.	г)$P(A) = \frac{35}{77}$, $P(B) = \frac{35}{77}$, $P(C) = \frac{7}{77}$;
д) Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды, какова вероятность того, что выбранные наудачу три студента имеют разряд?	д) $P(A) = \frac{61}{203}$;

е) В ящике 10 красных и 5 синих пуговиц. Наудачу вынимают 2 пуговицы. Какова вероятность, что обе пуговицы одного цвета?	е) $P(A) = \frac{55}{105}$.
5. а) Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: пять с 1-го, семь со 2-го, три с 3-го и пять с 4-го. Случайным образом выбран один ящик. Какова вероятность того, что это будет ящик со второго или четвертого склада.	а) $P(A) = 0,6$;
б) В городе 5 коммерческих банка, оценка надежности которых равны 0,8, 0,9, 0,95, 0,85, 0,97 соответственно. Найти вероятность того, что за некоторый промежуток времени обанкротится хотя бы один банк.	б) $P(A) \approx 0,44$;
в) Стрелок производит 4 выстрела по удаляющейся цели, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7 и уменьшается после каждого выстрела на 0,1. Вычислить вероятность того, что цель будет поражена не менее 3-х раз.	в) $P(A) = 0,386$;
г) В урне 10 красных и 5 синих шаров. Из урны извлекаются по одному три шара. Найти вероятность того, что их 3-х извлеченных шаров хотя бы один красный.	г) $P(A) = \frac{67}{91}$;

д) Вероятность, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй – 0,9; третий – 0,75. Найти вероятность, что студентом будет сдан: а) только первый экзамен; б) только один экзамен; в) три экзамена; г) по крайней мере два экзамена; д) хотя бы один экзамен.	д)а)$P(A) = 0,02$, б)$P(B) = 0,08$, в)$P(C) = 0,54$, г)$P(D) = 0,915$, д)$P(E) = 0,995$;
е) 3 экзаменационных билета из 20 содержат простые вопросы. Пять студентов по очереди берут билеты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется билет с простыми вопросами.	е) $P(A) = \frac{137}{228}$.
6.	
а)Из 5 винтовок, 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела вероятность равна 0,85. Найти вероятность того, что мишень будет поражена при одном выстреле из наудачу взятой винтовки.	а) $P(A) = 0,88$;
б) В лотерее из 25 билетов 5 выигрышных. Вытянули первый билет, содержание которого осталось неизвестным. Какова вероятность, что второй вытянутый билет окажется выигрышным?	б) $P(A) = 0,2$;

в) В первой урне 5 черных и 4 белых шара, во второй– 5 белых и 4 черных, в третьей– 6 белых шаров. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что белый шар вынут из второй урны.	в) $P(A) = \frac{5}{18}$;
г) 3 завода выпускают однотипные приборы в отношении 2:3:5. Вероятность брака для этих заводов соответственно равны 0,03; 0,05; 0,01. Приобретённый прибор оказался бракованным. Какова вероятность того, что он изготовлен 3-м заводом?	г) $P(A) = \frac{5}{26}$;
д) На предприятии изготавливают замки. Первый цех производит 20, второй 25, третий 45% всех замков. Брак составляет соответственно 3, 5 и 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранный замок будет дефектным.	д) $P(A) = 0,0275$;
е) В группе студентов 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 16 человек – средний и 6 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,9; 0,75 и 0,5. Студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что: а) он был подготовлен отлично; б) был подготовлен средне; в) был подготовлен плохо.	е)а)$P(A) = 0,153$; б)$P(B) = 0,678$; в)$P(C) = 0,169$.
7.	

а) Предприятие выпускает 35% изделий высшего сорта. Какова вероятность того, что из 7 выбранных изделий 3 окажутся высшего сорта?	а) $P(A) = 0,269$;
б) Производится 7 выстрелов по цели, вероятность попадания в каждом выстреле равна 0,3. Найти вероятность того, что цель будет поражена хотя бы два раза.	б) $P(A) = 0,671$;
в) При броске мяча баскетболист попадает в корзину с вероятностью 0,3. Найти наивероятнейшее число попаданий при 6 бросках и соответствующую вероятность.	в) $m_0 = 2$, $P(A) = 0,324$;
г) Вероятность изготовления бракованных деталей равна 0,001. Определить вероятность того, что в партии из 800 деталей будет ровно 2 бракованные.	г) $P(A) = 0,144$;
д) Страховая компания заключила 40000 договоров. Вероятность страхового случая по каждому из них в течение года составляет 2%. Найти вероятность, что таких случаев будет не более 870.	д) $P(A) = 0,9938$;
е) После распространения рекламных листовок клиники в одном случае из тысячи следует обращения в клинику. Найти вероятность того, что при распространении 50 тыс. листовок число обращений будет находиться в границах от 36 до 47.	е) $P(A) = 0,3133$.
8.	

а) Из партии 10 деталей, в которой 6 деталей стандартных, наудачу извлекают 3 детали. Составить закон распределения СВ X-числа стандартных деталей среди отобранных. Найти $M[X]$ и $D[X]$.

б) В коробке 100 лотерейных билетов, среди них 35 выигрышных, причём 5 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 500 рублей. Составить закон распределения СВ X – размера выигрыша, если каждый раз наугад извлекается один билет. Найти $M[X], D[X]$.

в) Случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причём $x_1 > x_2$. Найти эти значения, если $p_1 = 0,8$, $M[X] = 0,2$, $D[X] = 5,76$.

г) Дан ряд распределения случайной величины X. Требуется найти функцию распределения $F(x)$ и вероятность того, что СВ X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,25	0,15	0,05	0,2	0,15	0,1

а)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

,
$M[X] = 1,8$,
$D[X] = 0,56$;

б)

X	0	500	1000
P	0,65	0,3	0,05

,
$M[X] = 200$,
$D[X] = 8,5 \cdot 10^4$;

в) $x_1 = 1,4$, $x_2 = -4,6$;

г)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -3; \\ 0,1, & -3 < x \leqslant -2; \\ 0,35, & -2 < x \leqslant -1; \\ 0,5, & -1 < x \leqslant 0; \\ 0,55, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0,75, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0,9, & 2 < x \leqslant 3; \\ 1, & x > 3; \end{cases}$$

$P(|X| \leqslant 2) = 0,8$;

д) Случайная величина X задана следующим распределением:

X	-5	-3	0	3
P	0,1	0,3	0,2	0,4

. Найти $P(X < -1)$, P(-1<X<5), M[X], D[X], значение функции распределения при $x = 0$, моду.

д) $P(X < -1) = 0,4$,
$P(-1 < X < 5) = 0,6$,
$M[X] = -0,2$,
$D[X] = 8,76$,
$F(x = 0) = 0,4$,
$M_0 = 3$;

е) Стрелок совершает выстрелы по движущейся мишени до первого попадания, имея 4 патрона. Вероятность попадания в цель при первом выстреле - 0,8, причем при каждом последующем выстреле уменьшается вдвое. Составить закон распределения числа сделанных выстрелов, найти $M[X], D[X]$.

е)

X	1	2	3	4
P	0,8	0,08	0,024	0,096

,
$M[X] = 1,416$,
$D[X] = 0,867$.

9. а) Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ a(x-1), & 1 < x \leqslant 3; \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины X, a, $M[X]$, $D[X]$.

а)$a = \frac{1}{2}$; $M[X] = \frac{7}{3}$, $D[X] = \frac{2}{9}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & 1 < x \leqslant 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

б) Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1;\\ ax+bx^4, & -1<x\leqslant 1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

Найти a, b и плотность распределения вероятностей. Вычислить вероятность попадания X в отрезок $[-1;0,5]$.

б) $a=b=\frac{1}{2}$,

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1;\\ \frac{1}{2}+2x^3, & -1<x\leqslant 1;\\ 0, & x\geqslant 1\end{cases}$$

$P(-1\leqslant X\leqslant 0,5)=\frac{9}{32}$;

в) Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1;\\ B(3x^2+6x^3), & 1<x\leqslant 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Найти B и функцию распределения случайной величины X.

в)$B=\frac{1}{146}$,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1;\\ \frac{x^3}{146}-\frac{5}{292}+\frac{6x^4}{584}, & 1<x\leqslant 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

г) Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1;\\ a(x^2-x), & 1<x\leqslant 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значения: 1)меньше 0,5; 2)меньше 2-х; 3)не меньше 2-х; 4)не меньше 4-х. Определить константу a.

г) $a=\frac{1}{6}$,
1)$P(x<0,5)=0$,
2)$P(x<2)=\frac{1}{3}$,
3)$P(x\geqslant 2)=\frac{2}{3}$,
4)$P(x\geqslant 4)=0$;

д) Случайная величина X имеет плотность распределения: $$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ \frac{1}{2}\sin(x), & 0<x<\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$ Построить функцию распределения, найти $M[X], D[X]$, найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(0;\frac{\pi}{4})$.	д) $$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ -\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}, & 0<x<\pi;\\ 0, & x>\pi,\end{cases}$$ $M[X]=\frac{1}{2}\pi$, $D[X]=\frac{\pi^2}{4}-2$, $P(0<X<\frac{\pi}{4})=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$;
е)Плотность распределения случайной величины X задана в интервале $(0;1)$ равенством $f(x)=C(x^2+2x)$, а вне интервала $f(x)=0$. Найти параметр C, $M[X]$, $D[X]$.	е) $C=\frac{3}{4}$, $M[X]=\frac{11}{16}$, $D[X]=\frac{67}{1280}$.
10. а) В здании торгового центра случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 5 минут. Найти плотность распределения времени ожидания, вероятность ожидания лифта более 3-х мин, вероятность того, что лифт прибудет в течение первой минуты, среднее время ожидания лифта и дисперсию времени ожидания.	а)$P(X>3)=0,4$, $P(0<X<1)=0,2$, $M[X]=2,5$ мин., $D[X]\approx 2,083$ мин., $$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{1}{5} & 0\leqslant x\leqslant 5;\\ 0, & x>5;\end{cases}$$

б) Телефонный звонок должен последовать от 15 ч до 15 ч 30 мин. Найти вероятность того, что звонок произойдет в последние 5 мин указанного промежутка, если момент звонка случаен?	б)$P \approx 0,17$;
в) Дана плотность распределения случайной величины X $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a; 4,5]; \\ 0, & x \bar{\in} [a; 4,5]. \end{cases}$$ Найти параметр a, $M[X]$, $D[X]$ функцию распределения случайной величины X, вероятность выполнения неравенства $4 < X < 5$.	в)$a = 3,5$, $M[X] = 4$, $D[X] \approx 0,083$, $P(4 < X < 5) = 0,5$, $$F(x)=\begin{cases} 0, & x < 3,5; \\ x - 3,5, & 3,5 \leqslant x \leqslant 4,5; \\ 1, & x > 4,5; \end{cases}$$
г) Среднее время безотказной работы прибора равно 50 часов. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти: плотность вероятности и функцию распределения, а также вероятность того, что в течение 90 часов прибор не выйдет из строя.	г) $P(90 < X < +\infty) \approx$ $\approx 0,165$, $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$ $$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$
д) Случайное время обслуживания абонента телефонной компании распределено по показательному закону. Средняя продолжительность обслуживания составляет 1,5 минуты. Найти вероятность того, что время обслуживания абонента превысит 2 мин.	д) $P(2 < X < +\infty) \approx 0,264$;

е) Длительность телефонного разговора подчиняется показательному закону. Найти среднюю длительность разговора, если вероятность того, что разговор продлится более 5 минут, равна 0,6.	е) $M[X] = 10$ мин.
11.	
а) Определить вероятность того, что в семье, имеющей 7 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.	а) $P = 0,5$;
б) Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что из 20 выстрелов будет поражено не менее 16 и не более 19.	б) $P(16 \leqslant X \leqslant 19) = 0,834$;
в) Вероятность попадания по движущейся цели равна 0,8. Найти наивероятнейшее число попаданий при 70 выстрелах.	в) $k = 57$;
г) Сколько было совершено выстрелов,если наивероятнейшее число попаданий равно 10, а вероятность попадания в отдельном выстреле равна 0,7?	г) $n = 13$;
д) В магазин на продажу поступило 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути 0,004. Найти вероятность того, что в пути было повреждено меньше трех изделий.	д) $P \approx 0,68$;

e) Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течении времени Т равна 0,002. Найти вероятность того, что за время Т откажут ровно три элемента.	e) $P \approx 0,18$.
12.	
а) Случайная величина X, характеризующая рост мальчиков футбольной команды возрастной группы 15 лет, есть нормально распределённая случайная величина X с параметрами $a = 150$ см и $\sigma = 3$ см. Найти функцию плотности вероятности случайной величины X. Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы.	а) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-(x-150)^2}{18}}$, $P(152 < X < 158) \approx 0,2476$;
б) Дневная добыча угля в шахте распределена по нормальному закону с $a = 870$ тонн и $\sigma = 90$ тонн. Найти вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 900 тонн угля. Определить долю рабочих дней, в которые будет добыто от 860 до 940 тонн угля и найти вероятность того, что в данный день добыча угля окажется ниже 750 тонн.	б) $P(900 < X < \infty) =$ $= 0,3707$, $P(860 < X < 940) = 0,3261$, $P(0 < X < 750) = 0,0918$;

в) Случайная величина X распределена по нормальному закону на интервале $(\alpha;\beta)$, с $a = 4$, $\sigma = 5$. Найти вероятность того, что X попадет в интервал (2,8); X примет значение меньшее 2; X примет значение больше 8.	в) $P(2 < X < 8) = 0,4435$, $P(-\infty < X < 2) = 0,3446$, $P(8 < X < +\infty) = 0,2119$;
г) Случайная величина X распределена нормально с $a = 10$, и $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.	г) $(-5;25)$;
д) Плотность распределения вероятностей случайной величины имеет вид $f(x) = B\mathrm{e}^{-2x^2+8x-1}$. Найти $F(x)$,B, $M[X]$, $D[X]$, а также $P(1 \leqslant X \leqslant 3)$.	д) $B = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^7}$, $F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-(t-2)^2}{2(\frac{1}{2})^2}}\, dt$, $M[X] = 2$, $D[X] = \frac{1}{4}$, $P(1 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0,954$;
е) Изготовленная деталь считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 5 мм и математическим ожиданием $a = 0$. Какой процент годных деталей изготавливает автомат?	е) 95%.

Решение задач варианта а.

1. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что в сумме выпадет не более 5-ти очков.

Решение.

Событие А — в сумме выпадет не более 5-ти очков. Так как каждая грань 1-го кубика может составить упорядоченную пару с каждой гранью второго кубика, следовательно, общее количество комбинаций $n = 6 \cdot 6 = 36$. Тогда благоприятствующими будут являться комбинации:

2 очка: (1;1); 3 очка: (1;2), (2;1); 4 очка: (1;3), (3;1), (2;2); 5 очков: (1;4), (4;1), (2;3), (3;2). Таким образом, благоприятствующих комбинаций $m = 10$. По классическому определению вероятности: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{36}$.

Ответ: $P(A) = \frac{10}{36}$.

2. У ребенка 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что он соберет из кубиков слово 1)КУКЛА, 2) ЛАК?

Решение.

1) Событие А — ребенок собрал слово КУКЛА.

1 способ.

$P(A) = \frac{m}{n}$, где $n = 5! = 120$-общее число вариантов размещения букв. Буквы А, Л, У встречаются в слове однократно, а буква К - 2 раза, следовательно, $m = C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2$-число исходов, благоприятствующих событию А. Таким образом, $P(A) = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$.

2 способ.

Первая буква в слове — это буква К, таких букв 2 из 5, поэтому вероятность выбора кубика с этой буквой $\frac{2}{5}$, следующая буква в слове — это буква У, она одна, но после выбора 1-го кубика всего кубиков осталось 4, следовательно, вероятность равна $\frac{1}{4}$, аналогично вероятности выбора кубиков с буквами К, Л, А соответственно равны $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1. Все события должны произойти друг за другом и учитывая их независимость получаем: $P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{60}$.

Ответ: $P(A) = \frac{1}{60}$.

2) Событие В — ребенок собрал слово ЛАК.

Рассмотрим решение этой задачи только вторым способом. Первая буква в слове — это буква Л, вероятность выбора кубика с этой буквой $\frac{1}{5}$, следующая буква в слове — это буква А, после выбора 1-го кубика всего кубиков осталось 4, следовательно, вероятность равна $\frac{1}{4}$, а вероятности выбора кубика с буквой К равн $\frac{2}{3}$, так как таких букв 2. Все события должны произойти друг за другом и учитывая их независимость получаем: $P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{30}$.

Ответ: $P(B) = \frac{1}{30}$.

3. Восемь спортсменов на олимпиаде разыгрывают одну золотую, одну серебряную и одну бронзовую медали. Сколькими способами медали могут быть распределены между спортсменами?

Решение.
Так как одну золотую медаль можно разыграть между 8 спортсменами 8 способами, следовательно, серебряную между оставшимися 7 спортсменами — 7-ю способами и бронзовую между оставшимися 6 спортсменами — 6 способами. Таким образом $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Ответ: 336.

4. В урне 15 шаров: 10 белых и 5 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение.
Событие A — из урны вынули 2 белых шара. Исходя из классического определения вероятности $P(A) = \frac{m}{n}$, где m — количество вариантов извлечения 2-х белых шаров из 10 белых, имеющихся в урне, n-количество вариантов извлечения 2-х шаров из 15, имеющихся в урне. Тогда, используя формулы сочетаний получаем:

$m = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$,

$n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$.

$P(A) = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$.

Ответ:$P(A) = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$.

5. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: пять с 1-го, семь со 2-го, три с 3-го и пять с 4-го. Случайным образом выбран один ящик. Какова вероятность того, что это будет ящик со второго или четвертого склада.

Решение.
Событие A — выбран ящик со 2-го склада; D — выбран ящик с 4-го склада; C — выбран ящик со 2-го или 4-го склада. Так как события A и B несовместные, а событие $C = A + B$, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий получаем $P(C) = P(A) + P(B)$.

$P(A)=\frac{7}{20}$, $P(B)=\frac{5}{20}$, тогда $P(C)=\frac{7}{20}+\frac{5}{20}=\frac{3}{5}=0,6$.

Ответ: $P(A)=0,6$.

6. Из 5 винтовок, 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела вероятность равна 0,85. Найти вероятность того, что мишень будет поражена при одном выстреле из наудачу взятой винтовки.

Решение.

Событие A — мишень поражена при одном выстреле из наудачу взятой винтовки. Винтовка может быть снабжена оптическим прицелом (событие H_1) и без оптического прицела (событие H_2). Вероятность того, что выбранная винтовка снабжена оптическим прицелом $P(H_1)=\frac{3}{5}$, $P(H_2)=\frac{2}{5}$ — вероятность того, что выбрана винтовка без оптического прицела. Условная вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом $P(A/H_1)=0,9$, а для винтовки без оптического прицела $P(A/H_2)=0,85$. Тогда по формуле полной вероятности $P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=\frac{3}{5}\cdot 0,9+\frac{2}{5}\cdot 0,85=$
$=0,54+0,34=0,88$.

Ответ: $P(A)=0,88$.

7. Предприятие выпускает 35% изделий высшего сорта. Какова вероятность того, что из 7 выбранных изделий 3 окажутся высшего сорта?

Решение.

Вероятность выпуска предприятием изделий высшего сорта постоянна и равна $p=0,35$, следовательно, вероятность выпуска изделий, отличных от высшего сорта равна $q=0,65$. Искомая вероятность вычисляется по формуле Бенулли: $P_7(3)=C_7^3\cdot p^3\cdot q^4=$
$=\frac{7!}{3!4!}\cdot 0,35^3\cdot 0,65^4=0,269$

Ответ: $P=0,269$.

8. Из партии 10 деталей, в которой 6 деталей стандартных, наудачу извлекают 3 детали. Составить закон распределения СВ X-числа стандартных деталей среди отобранных. Найти $M[X]$ и $D[X]$.

Решение.

Так как X — дискретная случайная величина, то закон распределения будет представлен в виде ряда распределения. СВ X может принимать значения: $0, 1, 2, 3$.

$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4!3!7!}{3!10!} = \frac{1}{30}$; $P(X=1) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{6!4!3!7!}{5!2!2!10!} = \frac{3}{10}$;

$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{6!4!3!7!}{4!2!3!10!} = \frac{1}{2}$; $P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{6!3!7!}{3!3!10!} = \frac{1}{6}$.

Так как эти события образуют полную группу, то сумма должна равняться 1. Сделаем проверку: $\frac{1}{30} + \frac{3}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1+9+15+5}{30} = 1$.

Для нахождения числовых характеристик СВ X воспользуемся формулами: $M[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$; $D[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i)^2 p_i - (M[X])^2$.

$M[X] = 0 \cdot \frac{1}{30} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{10} + 1 + \frac{1}{2} = 1,8$.

$D[X] = 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - (1,8)^2 = 0,3 + 2 + 1,5 - 3,24 = 0,56$.

Ответ:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

, $M[X] = 1,8$, $D[X] = 0,56$

9. Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ a(x-1), & 1 < x \leqslant 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины X, a, $M[X]$, $D[X]$.

Решение.

Для определения константы a воспользуемся условием нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$: $a\int\limits_{1}^{3}(x-1)dx = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Так как X — непрерывная случайная величина, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, тогда:

$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0, \quad$ при $\quad x \leqslant 1$,

$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}(x-1)dx = \frac{(x-1)^2}{4}, \quad$ при $\quad 1 < x \leqslant 3$,

$F(x) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{3}(x-1)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{3}^{+\infty} 0dx = 1, \quad \text{при} \quad x > 3.$

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам: $M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, $D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M[X])^2$.

$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{1} x \cdot 0dx + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} x(x-1)dx + \int\limits_{3}^{+\infty} x \cdot 0dx = \frac{7}{3},$

$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0dx + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{3} x^2(x-1)dx + \int\limits_{3}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx - (\frac{7}{3})^2 = \frac{2}{9}.$

Ответ: $a = \frac{1}{2}$; $M[X] = \frac{7}{3}$, $D[X] = \frac{2}{9}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ \frac{(x-1)^2}{4}, & 1 < x \leqslant 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

10. В здании торгового центра случайное время ожидания лифта равномерно распределено в диапазоне от 0 до 5 минут. Найти плотность распределения времени ожидания, вероятность ожидания лифта более 3-х мин, вероятность того, что лифт прибудет в течение первой минуты, среднее время ожидания лифта и дисперсию времени ожидания.

Решение.

Путь случайная величина X — время ожидания лифта. Так как X имеет равномерное распределение на интервале $(0;5)$, следовательно, плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{5} & 0 \leqslant x \leqslant 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Найдем вероятность ожидания лифта более 3-х минут:

$P(x > 3) = \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{1}{5}dx = \frac{2}{5} = 0,4.$

Найдем вероятность того, что лифт прибудет в течение первой минуты: $P(0 < x < 1) = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{5}dx = 0,2.$

Найдем среднее время ожидания лифта и дисперсию времени ожидания по формулам для равномерно распределенной случайной величины: $M[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{0+5}{2} = 2,5$ минуты. $D[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{25}{12} \approx$ $\approx 2,083$ минуты.

Ответ:$P(X > 3) = 0,4$, $P(0 < X < 1) = 0,2$, $M[X] = 2,5$ мин., $D[X] \approx 2,083$ мин.,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{5} & 0 \leqslant x \leqslant 5; \\ 0, & x > 5; \end{cases}$$

11. Определить вероятность того, что в семье, имеющей 7 детей, будет не больше трех девочек. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

Решение.

Вероятность того, что родится девочка $p = \frac{1}{2}$, следовательно, вероятность рождения мальчика $q = \frac{1}{2}$. Для того, чтобы найти вероятность рождения не больше 3-х девочек из 7-ми, необходимо найти вероятности того, что родился мальчик $P_7(0) = C_7^0 p^0 q^7 =$ $= \frac{7!}{0!7!} \cdot \frac{1}{2}^0 \cdot \frac{1}{2}^7 = \frac{1}{128}$, родилась одна девочка $P_7(1) = C_7^1 p^1 q^6 =$ $= \frac{7!}{1!6!} \cdot \frac{1}{2}^1 \cdot \frac{1}{2}^6 = \frac{7}{128}$, две $P_7(2) = C_7^2 p^2 q^5 = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{1}{2}^2 \cdot \frac{1}{2}^5 = \frac{21}{128}$ или три $P_7(3) = C_7^3 p^3 q^4 = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{1}{2}^3 \cdot \frac{1}{2}^4 = \frac{35}{128}$. То есть искомая вероятность будет равна: $P = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) + P_7(3) = \frac{1}{128} + \frac{7}{128} + \frac{21}{128} + \frac{35}{128} =$ $= \frac{1}{2} = 0,5$.

Ответ: $P = 0,5$;

12. Случайная величина X, характеризующая рост мальчиков футбольной команды возрастной группы 15 лет, есть нормально распределённая случайная величина X с параметрами $a = 150$ см и $\sigma = 3$ см. Найти функцию плотности вероятности случайной величины X. Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объеме производства для данной возрастной группы.

Решение.

Плотность вероятности для случайной величины, подчиненной нормальному закону распределения, имеет вид

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, зная параметры распределения функция примет вид: $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-150)^2}{2\cdot 3^2}}$.

Для того чтобы найти, какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы, воспользуемся формулой вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, значение которой находится из таблицы.

Тогда $P(152 < X < 158) = \Phi(\frac{158-150}{3}) - \Phi(\frac{152-150}{3}) = \Phi(2,67) - \Phi(0,67) = 0,4962 - 0,2486 = 0,2476$.

Ответ:$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-(x-150)^2}{18}}$, $P(152 < X < 158) = 0,2476$.

Приложение

Таблица значений для функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0	0	0,5	0,19146	1	0,34134	1,5	0,43319	2	0,47725	3	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,1	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,4803	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,2054	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,2	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,1	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,483	3,3	0,49952
0,07	0,0279	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,4996
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,4	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,2224	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,1	0,03983	0,6	0,22575	1,1	0,36433	1,6	0,4452	2,2	0,4861	3,5	0,49977
0,11	0,0438	0,61	0,22907	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,6	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,4495	2,28	0,4887	3,7	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,3	0,48928	3,75	0,49991
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,8	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,379	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,381	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,9	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,2549	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,2	0,07926	0,7	0,25804	1,2	0,38493	1,7	0,45543	2,4	0,4918	4	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,1	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,2673	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,2	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,5	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,4608	2,52	0,49413	4,3	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,2823	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,4	0,49999

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,5
0,3	0,11791	0,8	0,28814	1,3	0,4032	1,8	0,46407	2,6	0,49534	4,5	0,5
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,4049	1,81	0,46485	2,62	0,4956	4,55	0,5
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,6	0,5
0,33	0,1293	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,5
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,7	0,5
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,7	0,49653	4,75	0,5
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,8	0,5
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,5
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,9	0,5
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,5
0,4	0,15542	0,9	0,31594	1,4	0,41924	1,9	0,47128	2,8	0,49744	5	0,5
0,41	0,1591	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,4976		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,4222	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,1664	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,4732	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,9	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,475	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,4767	2,98	0,49856		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Берман Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / СПб.: Профессия, 2007. — 432 с.
2. **Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1 [Текст] / М.: Мир и Образование, Астрель, Оникс, 2012. — 368 с.
3. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / М.: АСТ, Астрель, 2009. — 560 с.
4. **Пискунов Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 [Текст] / М.: Интеграл-Пресс, 2009. — 416 с.
5. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 [Текст] / СПб.: Лань, 2009. — 608 с.
6. **Гмурман В. Е.** Руководство к решению задач по Теории вероятностей и математической статистике [Текст] : учеб. пос. для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2013. — 404 с.
7. **Балдин К. В., Балдин К. В., Башлыков В. Н., Рукосуев А. В.** Теория вероятностей и математическая статистика 2014. — 473 с.
8. **Титов А. Н., Бадертдинова Е. Р., Климова А. С.** Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие/ Электрон. текстовые данные. Казань: Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2008. — 148 с.
9. **Кубышкина С. Н., Арланова Е. Ю.** Введение в анализ. Дифференцирование функций: учебно-методическое пособие [Текст] / Самара: СамГТУ, 2015. — 59 с.
10. **Кубышкина С. Н., Арланова Е. Ю.** Основные методы интегрирования: учебно-методическое пособие [Текст] / Самара: СамГТУ, 2016. — 57 с.
11. **Кубышкина С. Н., Арланова Е. Ю.** Дифференциальные уравнения для технических направлений: практикум по высшей математике [Текст] / Самара: СамГТУ, 2017. — 68 с.

Оглавление

Учебное издание

Тренировочные тесты по курсу математики
Часть 2

КУБЫШКИНА Светлана Николаевна,
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна,
ТАРАСОВА Елена Анатольевна

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 16.10.2019
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,54. Уч.–изд. л. 3,47
Тираж 50 экз. Рег. № 211/19

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
“Самарский государственный технический университет”
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Корпус № 8