С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

Самара 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

Самара 2015

Печатается по решению редакционно–издательского совета
Самарского государственного технического университета

УДК 517.37
ББК 22.171я73
К88

Кубышкина С. Н.
К88 Введение в анализ. Дифференцирование функций учебное пособие / *С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2015. – 60 с.

Содержит 30 вариантов по 7 задач, относящихся к следующим разделам курса математики: введение в анализ, дифференцирование функций, функции нескольких переменных.

Приведен демонстрационный вариант задания с решениями всех типовых задач и методическими указаниями.

Типовой расчет предназначен для самостоятельной работы студентов–бакалавров первого курса, изучающих математику один год.

УДК 517.37
ББК 22.171я73
К88

Рецензент: *кан. физ.–мат. наук. Небогина Е. В.*

Предисловие

Математика — одна из базовых дисциплин в общем образовании инженера, профессиональный уровень которого во многом зависит от того, насколько хорошо он освоил математический аппарат и умеет ли он его использовать при решении различных задач.

Целью освоения дисциплины «Математика» является формирование общекультурных и профессиональных компетенций, необходимых для реализации производственно-технологической, организационно-управленческой, научно-исследовательской, проектно-конструкторской деятельности:

ОК-7: способность приобретения с большой степенью самостоятельности новых знаний с использованием современных образовательных и информационных технологий;

ОК-9: способность целенаправленно применять базовые знания в области математических и естественных наук в профессиональной деятельности;

ОК-10: способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Задачами дисциплины выступает приобретение в рамках освоения теоретического и практического материала знаний основных математических понятий и методов, навыков использования основ математического моделирования, необходимых при решении практических задач, формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению.

Предлагаемое пособие предназначено для того, чтобы развить у студента математическое мышление и требовательность, расширить математический кругозор.

В пособие включены задачи, относящиеся к следующим важнейшим разделам математики: введение в анализ, дифференцирование функций, функции нескольких переменных, которые требуют прочных навыков (нахождение пределов, техника дифференцирования, построение графиков функций). Часть задач создана авторами, но в пособие также включены задачи из известных изданий, список которых приведен в библиографии. По всем разделам даны методические указания с подробными решениями и справочные материалы.

Порядок выполнения и защиты учебного задания

Подробное и обоснованное решение задач необходимо представить в письменном виде. Нумерация задач должна совпадать с их нумерацией в учебном задании. Во время защиты студент должен уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения примеров из задания, решать примеры аналогичного типа.

Теоретические вопросы

1. Последовательность, числовая функция одной и нескольких переменных.
2. Понятие сложной функции. Классификация элементарных числовых функций одной переменной.
3. Предел последовательности. Теорема о единственности предела последовательности.
4. Предел числовой функции одной переменной. Односторонние пределы.
5. Первый замечательный предел (вывод).
6. Второй замечательный предел (вывод).
7. Бесконечно малые (б.м.) и бесконечно большие (б.б.) величины. Теорема о связи б.м. с б.б., теорема о связи б.м. с величиной, имеющей предел, теорема о сумме б.м.
8. Простейшие свойства пределов (теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций).
9. Сравнение б.м. и б.б. величин. Эквивалентные б.м. Таблица эквивалентных б.м.
10. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва.
11. Свойства функций, непрерывных в точке (теоремы о непрерывности суммы, произведении, частного двух непрерывных функций, теорема о непрерывности сложной функции).

12. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса и Коши). Класс $C[a, b]$.
13. Понятие производной числовой функции одной переменной. Геометрический и механический смысл производной.
14. Формулы производных, вывести формулу производной функции $y = \sin x$.
15. Производная обратной функции, вывести формулу производной функции $y = \arcsin x$.
16. Простейшие правила вычисления производных. Теоремы о производной суммы, разности, произведения и частного двух функций (одна из теорем с доказательством).
17. Производная сложной функции.
18. Понятие дифференцируемости функции в точке, связь с непрерывностью функции в точке. Класс функций $C^1[a, b]$.
19. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Свойства дифференциалов.
20. Функция, заданная параметрически. Первая и вторая производные.
21. Производные и дифференциалы высших порядков числовой функции одной переменной.
22. Формула Тейлора для многочлена и для произвольной функции.
23. Представление функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ по формуле Тейлора.
24. Представление функций $\ln(1+x)$, $(1+x)^n$ по формуле Тейлора.
25. Свойства функций, дифференцируемых на интервале: теоремы Лагранжа и Ролля, геометрический смысл, теорема Коши.
26. Монотонные функции, достаточные условия монотонности функции.
27. Экстремум функции одной переменной. Необходимое и достаточное условия экстремума.
28. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба.

29. Частные производные функции нескольких переменных, геометрический смысл.
30. Полное приращение и полный дифференциал функции двух переменных.
31. Производные сложных функций нескольких переменных.
32. Производные неявной функции одной и двух переменных.
33. Частные производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Теорема о смешанных производных.
34. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя.

Часть 1. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[4]{4x^4+1}-\sqrt[3]{x^4-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x - 2x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to -2} (5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} (4-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y = 4^{3x}\cdot \operatorname{tg}^2(8x-1)$; б) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}}{(x^6+7)^5}$;

   в) $y = \sqrt[4]{x}\cdot \arcsin\sqrt{x}$; г) $y = \ln\sqrt{3e^x+2x}$;

   д) $y = (\sin x)^{3x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\sin(xy) - \cos(xy) = \operatorname{tg} xy.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \ln^2 t; \\ y = \dfrac{1}{t} + 3. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg} x + x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\operatorname{tg} 3x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{1-\cos x}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$; б) $z = x^3\sqrt{y} + \sqrt{x}y^3 - 3xy$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^3}.$$

Вариант 2

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+\sqrt{x}}{10+x\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\ln^2 \operatorname{tg} \dfrac{2x+1}{4}$; б) $y=\dfrac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;

в) $y=\dfrac{\ln x}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{x}{\cos x}$; г) $y=5^{7x}\cdot 8^{-10x^2}$;

д) $y=(\ln x)^{4x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$3^{xy}+3^{-y}=3^{x-y}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=3\cos 2t; \\ y=\sin t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12^x-3^{-5x}}{3\arcsin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; б) $z=\sqrt[3]{yx}+e^{xy}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^3}{3-x^2}.$$

Вариант 3

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+x}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(e^{2x^2}-1\right)\operatorname{tg} 3x}{\sin^3 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2-1}{2+3x^2}\right)^{x^2}$.

2. Найти производные функций:

а) $y = \operatorname{cth}^3(3x^2+1)$; б) $y = y = \dfrac{\sqrt[5]{x+1}}{(15-7x^5)^8}$;

в) $y = \log_5 x^2 \cdot \operatorname{sh}(3x+1)$; г) $y = \arcsin\sqrt{e^{2x}+x^2}$;

д) $y = (\operatorname{tg} x)^{3x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$x\cos y + y\sin(x+y) = a^2.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = t^2; \\ y = \dfrac{t^3}{3} - t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $z = \ln\left(x^2+y\right)$; б) $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{(x+1)^2}{x^2}.$$

Вариант 4

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+3}+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^4-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{2x+3}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=\operatorname{tg}^5\left(5^{x^2}+3e^{2x}\right)$; б) $y=\dfrac{\ln 8x+e^{2x}}{\sin x+8}$;

   в) $y=\sqrt[4]{7x^2-5}\cdot\operatorname{th}4x$; г) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{tg}x}$;

   д) $y=\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$e^{xy}+\sin(xy)=yx.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=e^{2t}\cdot t^2; \\ y=e^{4t}. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg}x)^{2x}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $z=\arcsin\dfrac{x+y}{y}$; б) $u=z^{\frac{x}{y}}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{1}{x-x^2}.$$

Вариант 5

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-5x+4}-x)$;

   в) $\lim\limits_{x\to 3} (2x-5)^{\frac{5}{x-3}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y = e^{2x}\sin(e^x)$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$;

   в) $y = \operatorname{th}(x+2)\cdot \log_5 x^2$; г) $y = \arcsin\sqrt{\sin x + 1}$;

   д) $y = x^{2\cos x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\operatorname{th}(xy) + \operatorname{cth}\left(x^2+y^2\right) = 1.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = (3t+2)^2; \\ y = t^3 + 2t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 4x}{\ln\sin 3x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+3)^{\frac{1}{x}}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $z = \operatorname{ctg}(xy) + e^{xy}$; б) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

Вариант 6

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{3}{2x^2}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{\sqrt[4]{16+2x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} 3x \cdot \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

2. Найти производные функций:

   а) $y = \operatorname{ch}^4(\operatorname{sh}\sqrt{x})$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}}$;

   в) $y = x^2 \cdot \ln\left(e^{3x} - \dfrac{1}{2x^2}\right)$; г) $y = \arccos\sqrt{\cos^2 +1}$;

   д) $y = (x^3+4)^{7x^2}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$7^{x+y} + 7^{x-y} = 7^{yx}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (2-\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $z = \dfrac{x+y}{\sqrt{xy}} + \dfrac{x-y}{\sqrt{y}}$; б) $z = \ln\sin(xy)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{1-x}{(1+x)^2}.$$

Вариант 7

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x-2x^2-1}{x^3-x^2+3x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{5-\sqrt{5x+5}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x^2)^{\frac{5}{3x^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=\dfrac{(x^3+x)^3}{(x^2-3)^4}$; б) $y=(2x^5+1)^5\cdot\sqrt[4]{x^3-1}$;

   в) $y=\lg(7x^3-1)\cdot\operatorname{sh}4x$; г) $y=\dfrac{1}{\sin(x-\sin x)}$;

   д) $y=(\ln 3x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$yx+\log_2(x^2+y^2)=\sin(xy).$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\arcsin t; \\ y=\arccos^2 t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}(5^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $z=\arcsin(xy)+x^3y^2$; б) $z=\ln(1+x^2+y^2)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^3}{x^2+3}.$$

Вариант 8

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+4x^2-5}}{\sqrt{16x^2+3x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 6x)^{\frac{4}{x}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{8-x}-2}{x-4}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{5x+1}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=\operatorname{ctg}^4(6x^3+5^{x^3})$; б) $y=\dfrac{\cos 3x+9}{\operatorname{sh} 8x+3x^3}$;

   в) $y=\sqrt{e^{2x}+1}\cdot\operatorname{ch} 3x$; г) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

   д) $y=(x^2+3)^{\frac{2}{x}}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$x\sin y+y\cos(x+y)=b^2,\quad b=\text{const}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=t^4+1; \\ y=(t-3)^3+2. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{(4x+1)^2}{4x^2-19x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{e^{4x}+e^{6x}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x\cdot\ln x)$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $u=\sqrt[3]{x^2y^3+z}$; б) $u=\lg(x^2+zy)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{1}{x}+4x^2.$$

Вариант 9

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 3x}{\sin^3 4x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(7x+8)^{11}(6x-4)^{10}}{(3x+8)^{21}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=\operatorname{ctg}(1+x^2)\cdot\operatorname{tg}3x$; б) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}$;

   в) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$; г) $y=\arcsin x^2+2x$;

   д) $y=(\operatorname{sh}3x)^{4x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$(x+y)^2+2\ln(xy)=4.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\ln(1+t^2); \\ y=t-\operatorname{arctg}t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{1+2\ln x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $u=\sqrt[3]{z^2x+y^3}$; б) $u=\lg(x^2+zy^3)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{2x}{x^3+1}.$$

Вариант 10

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 4x^2}{5x^4 + x^3 - x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x+2}{7x-1}\right)^{4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3x^4+1} + \sqrt[3]{x^6+2}}{3x^2-5}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{16x^2+x} - 4x)$.

2. Найти производные функций:

а) $y = \sqrt[5]{(1+x^2e^x)^3}$; б) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$;

в) $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^3 x$; г) $y = 5^{\cos 2x} \cdot 7^{\operatorname{ctg} 4x}$;

д) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ch} 2x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\sqrt{xy} = e^y.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{e^{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{3x} - 3^x}{x - \sin 9x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x - 5x^3 + 2}{4x^3 - 1}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u = \operatorname{ctg}(x^2y + zy)$; б) $u = z^{2xy}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{2x+3}{(x+1)^2}.$$

Вариант 11

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x+9}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{5-\sqrt{2x+7}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{5x}}{\sin 2x-3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(6x^2+5)^5\cdot(3x^8-9)^2}{3x^{26}+2x-5}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=8^{7x^2}\cdot\operatorname{th}(9x-1)$; б) $y=\sqrt[8]{\dfrac{x^4+2}{3-x^7}}$;

в) $y=\operatorname{cth}x+\operatorname{ch}^2(2x+1)$; г) $y=\left(\sqrt{x^2-3}\right)3\cos x$;

д) $y=(\ln x)^{x^2}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$xy=2^{\cos y}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=3t\cdot\cos t; \\ y=3t\cdot\sin t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=\cos\left(\sqrt{xy}+z^2y^3\right)$; б) $u=x^{3zy^2}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2.$$

Вариант 12

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{7-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\operatorname{arctg}(24-4x)}{\operatorname{tg}(36-x^2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{4x+4}$; г) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{3x^2+14x-5}{4x^2+21x+5}$.

2. Найти производные функций:

а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$; б) $y = 7^{\sin 2x}\cdot e^{\cos 3x}$;

в) $y = \dfrac{2x^2+3}{4x^3-5e^x}$; г) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+3}{\cos x+1}$;

д) $y = (\operatorname{cth}(8x+1))^{\operatorname{sh} x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\log_5(x+y) = xy.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg} x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x\cdot \ln(x-1))$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u = \ln\left(x+7^{z^2 y}\right)$; б) $u = z^{4x^2 y}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{3x}{x^2-1}.$$

Вариант 13

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(4-x^2)}{\operatorname{arctg}(10x+20)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\dfrac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y=\cos^3(x+1)\cdot\operatorname{cth}(x^2+2)$;

в) $y=\sqrt[3]{1+x^3}\cdot(x^2+3)$; г) $y=\dfrac{1}{\cos(x-\cos x)}$;

д) $y=(\operatorname{arctg}8x)^{\operatorname{ctg}x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\operatorname{ctg}(xy)=\frac{x}{y}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3}; \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{2}{t}. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-6x^3}{7-9x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\arcsin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=\sqrt[7]{\cos^2(xz+y)}$; б) $u=\operatorname{tg}(x^2yz)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Вариант 14

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2x}{x-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\arcsin(24-4x)}{\sin(36-x^2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\left(e^{x^2}+\cos 3x\right)^3$; б) $y=\dfrac{\sin^2 x+8x}{7x^2+3}$;

в) $y=\operatorname{sh}^2 x\cdot\ln x$; г) $y=\log_5(2x^3+3)$;

д) $y=(\operatorname{th}7x)^{\operatorname{ch}2x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\operatorname{arctg}(x-y)=x^2-y^2.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\arcsin^2 t; \\ y=\arccos t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x^3}{4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{8x}-e^{-5x}}{1-\cos 2x}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=\sqrt[8]{\operatorname{th}(zx+x^2y)}$; б) $u=\operatorname{sh}(xy^2z)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=x\sqrt{x+3}.$$

Вариант 15

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{2x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2+3x}-2x)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \operatorname{tg} x}{1-\cos 4x}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=e^{2x}\cos x+e^{-2x}\sin x$; б) $y=\sin\left(\dfrac{\arccos^2 x}{2}\right)$;

   в) $y=\lg^3(\operatorname{arctg} x)$; г) $y=\sqrt{x}\cdot 5^{\operatorname{tg} x}$;

   д) $y=(\operatorname{arcctg} 3x)^{\sin x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$x+y=e^{x-y}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=2t^2-1; \\ y=1+\cos 3t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-2x+1}{3x^3+4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin 3x)}{1+3\ln x}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $u=\sin\left(zy^2-\sqrt{x^2y}\right)$; б) $u=\operatorname{ch}(3xy+z^2y)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\sqrt[3]{1+x^3}.$$

Вариант 16

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3+2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\sqrt{\left(2-\arccos\dfrac{x}{3}\right)^5}$; б) $y=\operatorname{tg}^2(x^2+4)$;

в) $y=\dfrac{\lg 3x}{5x^3-4}$; г) $y=\dfrac{1}{\sqrt[7]{\cos 8x}}$;

д) $y=(\sin x+\cos x)^{x^2}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=x-y.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=t^2; \\ y=1+\cos^2 t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+5x^2-3}{3x^3+4x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sin(\sqrt{x}-4)}{\operatorname{tg}(x-16)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg} x\cdot\ln\dfrac{1}{x}\right)$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=\ln(\sqrt{2xy}\cdot z^3)$; б) $u=5^{x^2y}\cdot e^{zy}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

Вариант 17

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{36x^2+7x}-6x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)^{1+2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(2-\cos 3x)}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x + x^2}$; б) $y=\dfrac{4x-5}{\sqrt[3]{x^5-1}}$;

в) $y=\operatorname{sh}^3(2x)\cdot\operatorname{cth}(x^3)$; г) $y=\ln\arcsin 3x$;

д) $y=(\sqrt{2}+\sin x)^{\cos x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$y\sin x + x\sin y = 0.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=8\sin^3 t; \\ y=2t-\sin 2t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x-5^{-3x}}{4\arcsin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2x}}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=\sqrt[5]{\operatorname{ch}(3x^2y+z^3)}$; б) $u=e^{\cos zy}+8^{yzx}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

Вариант 18

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x\cdot \sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+5}{4x+1}\right)^{2x-3}$.

2. Найти производные функций:

а) $y = \dfrac{5x^2-4}{\sqrt[3]{x^5+1}}$; б) $y = 2^{\arcsin 2x}$;

в) $y = \ln\sqrt{2x+1}$; г) $y = \operatorname{th}^5(3x+2)$;

д) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{tg} 3x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$y = \arccos(x+y).$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = 1+\cos 2t; \\ y = t^4. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+4)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\ln(1+2x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin 5x}{\ln\sin 8x}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u = \operatorname{ch}^3(x^2y+z^2x)$; б) $u = (x^2+y)^z$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{x^3-4}{x^2}.$$

Вариант 19

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{2x+3}-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x-2}\right)^{6x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{8}{x^2-16}\right)$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\dfrac{(1+\sqrt{2x})^3}{2+\sqrt{x}}$; б) $y=5^{\cos x}\cdot \sin 3x$;

в) $y=\operatorname{tg}^3(\ln 3x)$; г) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3-2}{x^3+2}}$;

д) $y=(x+4)^{x+3}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=e^{2t}; \\ y=t^3-1. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1-4x^2}{\ln 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} 2x}{3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3-5x^2+2}{10x^3+x+1}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=\sqrt[5]{(x+z^2y)^3}$; б) $u=(\cos(xy))^{z^2}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x}{x^2-1}.$$

Вариант 20

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 8x}{\operatorname{arctg}^2 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$; г) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=5^{\operatorname{arctg}2x}+\operatorname{arctg}2x$; б) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

в) $y=\sin^3(e^{3x})$; г) $y=\dfrac{14}{\sqrt[5]{\operatorname{sh}^3(3x+2)}}$;

д) $y=(x+\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\ln 2t; \\ y=-\sin^2 t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-4x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{1-\cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-7}{8+3x^3}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=4\operatorname{arctg}(xy)-2z^2y$; б) $u=\dfrac{2x^2+y}{3z^2-xy}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^3+1}{x^2-2x+2}.$$

Вариант 21

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2+6x})$; б) $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}+2\sqrt{3x^2-6}}{\sqrt[3]{3x^3+8}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 3x)^2}{16x^4}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+x\cdot\operatorname{arcctg}x}$; б) $y=\dfrac{1}{x^3+1}+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$;

в) $y=\ln\sin(5^x+4)$; г) $y=\sqrt[3]{\arccos x^2}$;

д) $y=(1-x^2)^{\arcsin x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$2\operatorname{ctg}x+\ln\sqrt{4y+3}=0.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=1-\cos\dfrac{2t}{3}; \\ y=1-\sin^2 3t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-4x^3+3}{3x^3+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)^{\frac{1}{x}}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=(3z^2x+y)^3+(yx+zy)^2$; б) $u=\dfrac{4y^3+xz}{2x^2-yz}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=x+3\sqrt[3]{x^2}.$$

Вариант 22

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-\sqrt{9x^2-5})$; б) $\lim\limits_{x\to-4}(2x+9)^{\frac{5}{x+4}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3+5x^2-3}}{\sqrt{9x^2-3x+1}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=\sqrt[5]{\arcsin 3x}$; б) $y=\dfrac{2-3\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}$;

   в) $y=\operatorname{tg}(\ln x)\cdot\sin 3x$; г) $y=\dfrac{13}{\sin^3(8x-1)}$;

   д) $y=(2+\sin x)^{x^2}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=2x+y.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=1+\cos 2t; \\ y=t^4. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin 2x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1+x^3}{3x^3-2}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $u=\operatorname{sh}(x^2yz)\cdot y^3z$; б) $u=\dfrac{8z^2x+yz}{yz-xy^2}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{2-x^2}{1+x^2}.$$

Вариант 23

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{8x+4}-\sqrt{x+1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{2-\sqrt{10-x}}{6-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x-3}{1+7x}\right)^{3x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{3x^2-2x-1}$.

2. Найти производные функций:

а) $y = \operatorname{tg} 4x \cdot \operatorname{ctg}(x^2+1)$; б) $y = \ln(\sin\sqrt{x})$;

в) $y = \operatorname{sh}^2(8x-3e^{3x})$; г) $y = \dfrac{\sin x+3}{\operatorname{tg} x-1}$;

д) $y = (x^2-2)^{\frac{2}{x}}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$x + y + 4\ln(xy) = 8.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = t^3+2; \\ y = (t+2)^3. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\operatorname{tg}(x-25)}{\sin(\sqrt{x}-5)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^3-6x+1}{4+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2(x^3+3)}{x^3+1}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u = \sqrt{zx^3+y^2}$; б) $u = \ln(zx^2+y^3)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)}.$$

Вариант 24

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3x-1}}{\sqrt[3]{5-3x^2+8x^3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+9}-3}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{4x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{x-\frac{\pi}{4}}{\sin x-\cos x}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=\operatorname{sh}^4(\operatorname{ch} x^2)$; б) $y=\dfrac{1}{\cos^3(3x^2+5e^x)}$;

   в) $y=\ln x^3\cdot\lg(2x^5+3)$; г) $y=\sqrt[5]{e^{2x}+x^3}$;

   д) $y=(2+x^2)^{x^2}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$y\cos x+x\cos(y+x)=10.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=t^4+3; \\ y=(t-3)^4+2. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3}{x-\operatorname{arctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-5x+3}{3x+2+x^3}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $u=z\cdot 5^{x+y}$; б) $u=\dfrac{y^2+z}{x^2y}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{2x^2}{4x^2-1}.$$

Вариант 25

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0{,}5} \dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3} (7+2x)^{\frac{3}{x+3}}$; г) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\operatorname{tg}^2(2x-8)}{\sin^2(x-4)}$.

2. Найти производные функций:

а) $y = x\cdot\sqrt[3]{3x^2+2}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}$;

в) $y = \operatorname{tg}^2(\sin 3x)$; г) $y = \ln\sqrt{e^{3x}-2}$;

д) $y = (\cos x)^{4x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$2^{xy} + 2^{-y} = 2^{y-x}.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = e^{2t}+2; \\ y = (3-e^{2t})^2. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\operatorname{ch} 3x}{\cos 3x - 1}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(2x-\pi)}{\operatorname{tg} x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} 2x\cdot \ln x)$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u = \sqrt[3]{x^2z+y^3x+1}$; б) $u = \operatorname{ctg}(xy^2z)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2.$$

Вариант 26

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{5}{2x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{3^{2x}-1}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$; б) $y=\sqrt[3]{\sin^2 x^2}$;

   в) $y=\operatorname{sh}(e^{2x}+2)\cdot\operatorname{th}3x$; г) $y=\log_5(3x^2+\sqrt{x})$;

   д) $y=(3+2x^3)^{\cos x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$(2x+y)^2+\ln(x+y)=a.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\arccos t; \\ y=\ln t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2-9x+11}{18x^2-3x-17}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^{2x}-e^{-x}}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $z=\ln(xy)+x^2y^3$; б) $z=\lg(2+x+y)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{8x}{(x-2)^2}.$$

Вариант 27

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-13x+23}{4x^2+15x-21}$; г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\mathrm{tg}(16-x^2)}{\mathrm{arctg}(12-3x)}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\mathrm{ctg}^2(3x^3+2)$; б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\dfrac{1}{x}$;

в) $y=e^{x^3-5x^2}\cdot 7^{3x}$; г) $y=\dfrac{\ln 2x+x}{\sin x+3}$;

д) $y=(\ln 2x)^{3x^2}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$3^{\sin y}=xy^2.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=t\sin 2t; \\ y=t\cos 2t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{1-e^{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+2x^2+3}{4x^3-3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin 4x)}{1+4\ln x}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=\dfrac{x}{\sin\sqrt{yz}}$; б) $u=xy\ln(y-z)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^2}{x^2-1}.$$

Вариант 28

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\arcsin 2x}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x-4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=\sqrt[5]{x+3}\cdot 10^{\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{e^{x+3}+3x}{\arcsin\sqrt{x}}$;

в) $y=\log_4(x^2+e^{2x})$; г) $y=\cos^3 2x\cdot\operatorname{sh}3x$;

д) $y=(\operatorname{ch}x)^{2x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$e^{xy}=\ln(x^2+y^2).$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x=\ln(3t-2); \\ y=\sin^2 6t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10^x-1}{1+10^{x+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3}{e^{3x}}$.

6. Найти частные производные функций:

а) $u=y\cdot e^{x+z}$; б) $u=\dfrac{x^2y}{y^2+z}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

Вариант 29

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)^{100}}{(2n-1)^{97}(n+1)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+4x)}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y = \sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;

   в) $y = \sqrt[3]{\ln^5 \sin \dfrac{3}{5}x}$; г) $y = 2^{3x^2} + \ln\cos 3x$;

   д) $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$yx + \ln(x^2+y^2) - \cos(xy) = 0.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = 2\sin^2 t; \\ y = 4\cos t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\ln 2x}{1-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+4x-7}{15x^3+5x^2+1}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $u = yze^{x^2}$; б) $u = \dfrac{2x^2+y}{z+x}$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}.$$

Вариант 30

1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(4x-5)^{70}}{(4x+3)^{67}(x-3)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{16+x}-4}{2x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{e^{3x}-1}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n+3^n}{5^n-3^n}$.

2. Найти производные функций:

   а) $y = \ln 2^{\sin^2 x}$; б) $y = \ln \dfrac{x^2}{1-x^2}$;

   в) $y = \dfrac{2^x}{\ln 2}\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)$; г) $y = \operatorname{tg}^3 3x \cdot \operatorname{th} 2x$;

   д) $y = (3x^2+3x-2)^x$.

3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\arccos y = x^3y^2 - 3y^2x.$$

4. Найти y''_{xx}, если $\begin{cases} x = t^3; \\ y = \dfrac{t^4}{4} - t. \end{cases}$

5. Найти пределы с помощью правила Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} 2x - \dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x^3+3x^2-1}{5x^3+4x-2}$.

6. Найти частные производные функций:

   а) $u = xy\cos\sqrt{z}$; б) $u = x\ln(y+z)$.

7. Исследовать функцию и построить график:

$$y = \frac{8x}{(x-2)^2}.$$

Часть 2. Методические указания к выполнению индивидуальных задач

Задача 1.

Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-11x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\arcsin(x-3)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+8}\right)^{10x+1}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}(2x-9)^{\frac{4}{x-5}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

Решение.

а) Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой, что при указанном значении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин (неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$). Затем делаем преобразование, чтобы сократить дробь на множитель, стремящийся к нулю.

Разлагаем числитель и знаменатель на множители и сокращаем дробь на $(x-4)$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-9x+4}{3x^2-11x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3(x-4)\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{2x-1}{3x+1}=\frac{7}{13}.$$

б) Данная функция не определена в предельной точке и представляет отношение двух бесконечно малых величин (неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$). Мы можем при нахождении предела отношения двух бесконечно малых величин каждую из них заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной.

Так как при $x \to 3$ $\arcsin(x-3) \sim x-3$, то
$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\arcsin(x-3)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} =$
$= \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 6.$

в) При $x \to \infty$ основание $\dfrac{5x-2}{5x+8}$ стремится к 1, а показатель степени $10x+1$ — к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида $[1^\infty]$.

Представим основание в виде суммы 1 и некоторой бесконечно малой величины:

$$\frac{5x-2}{5x+8} = \frac{5x+8-10}{5x+8} = 1 + \frac{-10}{5x+8}.$$

Тогда
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x+8}\right)^{10x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{-10}{5x+8}\right)^{10x+1} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \left\{ \left[1 + \dfrac{-10}{5x+8}\right]^{\frac{5x+8}{-10}} \right\}^{\frac{-10(10x+1)}{5x+8}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-10(10x+1)}{5x+8}} = e^{-20}$
(используем второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$).

г) При $x \to 5$ основание $(2x-9)$ стремится к единице, а показатель степени $\dfrac{4}{x-5}$ — к бесконечности.

Положим $2x-9 = 1+\alpha$, где $\alpha \to 0$ при $x \to 5$. Имеем $2x-10 = \alpha$, $x-5 = \dfrac{\alpha}{2}$.

Тогда
$\lim\limits_{x\to 5}(2x-9)^{\frac{4}{x-5}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{8}{\alpha}} = \left[\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^8 = e^8,$
или вторым способом
$\lim\limits_{x\to 5}(2x-9)^{\frac{4}{x-5}} = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to 5}(1+(2x-10))^{\frac{4}{x-5}} =$

$$= \left[\lim_{x\to 5}(1+(2x-10))^{\frac{1}{2x-10}}\right]^{\frac{4(2x-10)}{x-5}} = e^{\lim\limits_{x\to 5}\frac{4(2x-10)}{x-5}} = e^8$$

(используем второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$).

д) Выражения, содержащие иррациональности, приводятся к рациональному виду во многих случаях путем введения новой переменной.

Полагая $1+x=y^6$, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)} = \lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2},$$

или вторым способом, используя бесконечно малые величины, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left|\begin{array}{l}\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{x}{2}\\ \sqrt[3]{1+x}-1 \sim \frac{x}{3}\end{array}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x/2}{x/3} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2x} =$$

$$= \frac{3}{2}.$$

е) Другим приемом нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррационального выражения из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Задача 2.

Найти производные функций:

а) $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{8x}}{3+e^{8x}}}$; б) $y = \operatorname{ch}^2 3x \cdot 5^{8x}$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y = (\sin x)^{\cos 3x}$.

Решение.

а) Сначала преобразуем данную функцию

$$y=\ln\sqrt{\frac{e^{8x}}{3+e^{8x}}}=\frac{1}{2}\left[\ln(e^{8x})-\ln(3+e^{8x})\right]=\frac{1}{2}\bigl(8x-\ln(3+e^{8x})\bigr).$$

Теперь найдем производную

$$y'=\frac{1}{2}\left(8-\frac{8e^{8x}}{3+e^{8x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{24+8e^{8x}-8e^{8x}}{3+e^{8x}}\right)=\frac{12}{3+e^{8x}}.$$

б) Используем формулу $(uv)'=u'v+v'u$:

$$y'=(\operatorname{ch}^2 3x)'\cdot 5^{8x}+(5^{8x})'\cdot\operatorname{ch}^2 3x=2\operatorname{ch}3x\cdot\operatorname{sh}3x\cdot 3\cdot 5^{8x}+$$
$$+5^{8x}\ln 5\cdot 8\cdot\operatorname{ch}^2 3x=6\operatorname{sh}3x\operatorname{ch}3x\cdot 5^{8x}+8\operatorname{ch}^2 3x\cdot 5^{8x}\ln 5.$$

в) Воспользуемся формулой $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$:

$$y'=\frac{(\arcsin x)'\cdot\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x^2})'\cdot\arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^2}=$$
$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\arcsin x}{1-x^2}=\frac{1+\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$
$$=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\cdot\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

г) Применяя логарифмическое дифференцирование, находим:

$$\ln y=\cos 3x\ln\sin x;$$
$$\frac{y'}{y}=(\cos 3x)'\cdot\ln\sin x+\cos 3x\cdot(\ln\sin x)'=-3\sin 3x\cdot\ln\sin x+$$
$$+\cos 3x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=-3\sin 3x\cdot\ln\sin x+\frac{\cos 3x\cos x}{\sin x}=$$
$$=-3\sin 3x\cdot\ln\sin x+\cos 3x\operatorname{ctg}x;$$
$$y'=(\sin x)^{\cos 3x}(-3\sin 3x\cdot\ln\sin x+\cos 3x\operatorname{ctg}x).$$

Задача 3.

Найти производную функции, заданной неявно:

а) $x+y=e^{x-y}$; б) $\cos(xy)+\sin(x-y)=xy$.

Решение.

Дифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что y есть функция от x.

а) $1 + y' = e^{x-y}(1 - y')$.
Отсюда находим:

$$1 + y' = e^{x-y} - e^{x-y}y';$$
$$y' = \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} + 1}.$$

б) $-\sin(xy)(y + y'x) + \cos(x - y)(1 - y') = y + xy'$.
Отсюда находим:

$$-\sin(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y'x + \cos(x - y) - \cos(x - y)y' = y + xy';$$
$$y'(-\sin(xy)x - \cos(x - y) - x) = \sin(xy) \cdot y - \cos(x - y) + y;$$
$$y' = -\frac{\sin(xy) \cdot y - \cos(x - y) + y}{\sin(xy)x + \cos(x - y) + x}.$$

Задача 4.

Найти y''_{xx}, если

а) $\begin{cases} x = t^5 + 1; \\ y = t^6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = 2t^3. \end{cases}$

Решение.

Зависимость между переменными x и y задана параметрическими уравнениями. Чтобы найти искомую производную y', находим $\dfrac{dx}{dt}$ и $\dfrac{dy}{dt}$ и затем берем отношение этих производных

$$\frac{dx}{dt} = 5t^4; \quad \frac{dy}{dt} = 6t^5;$$
$$y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t^5}{5t^4} = \frac{6}{5}t.$$

Для производной второго порядка имеет место формула

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{6}{5}t\right)'_t = \frac{6}{5}, \quad y''_{xx} = \frac{\frac{6}{5}}{5t^4} = \frac{6}{25t^4}.$$

б) Имеем:

$$y'_x = \frac{(2t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{6t^2}{1/t} = 6t^3;$$
$$y''_{xx} = \frac{(6t^3)'_t}{(\ln t)'_t} = \frac{18t^2}{1/t} = 18t^3.$$

Задача 5.

Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sh} x} - \dfrac{1}{x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

При раскрытии неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ применяется правило Лопиталя. Перед его повторным применением рекомендуется произвести все допустимые упрощения.

Неопределенность вида $\infty - \infty$ приводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, а неопределенность вида $0 \cdot \infty$ — к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований исследуемой функции.

В случае неопределенности вида 0^0, ∞^0 или 1^∞ следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма.

При нахождении предела функции рационально сочетать правило Лопиталя и свойства функций, имеющих пределы, а также теоремы о замене бесконечно малых (б.м.) и бесконечно больших функций (б.б.ф.) им эквивалентными (с учетом таблицы эквивалентных б.м.ф.).

а) Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, поэтому

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=$$

$$=\frac{6}{4}=1,5.$$

Здесь правило Лопиталя применялось дважды, так как после применения его в первый раз снова пришли к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

б) Применяя правило Лопиталя,находим:

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(1-\cos x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0+}\frac{\cos x/\sin x}{\sin x/(1-\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\cos x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0+}\cos x\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\\ \sin^2 x\sim x^2\end{array}\right|=\lim_{x\to0+}\frac{x^2/2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

в) Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$, которую сведем к неопределенности $\frac{0}{0}$, представив данную разность в виде отношения двух бесконечно малых функций при $x\to0$. Далее воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to0}\frac{x-\operatorname{sh}x}{x\operatorname{sh}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-\operatorname{sh}x)'}{(x\operatorname{sh}x)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(1-\operatorname{ch}x)'}{(\operatorname{sh}x+x\operatorname{ch}x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x+x\operatorname{sh}x}=0$$

(правило Лопиталя применили дважды).

г) Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ сведем к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ путем преобразования данного произведения в дробь, затем применим правило Лопиталя.

Имеем

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{ctg} 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{[\ln(\operatorname{tg} x)]'}{[\operatorname{ctg} 2x]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1/\operatorname{tg} x)\cdot(1/\cos^2 x)}{-2/\sin^2 2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{2\operatorname{tg} x \cos^2 x} =$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{2\sin x\cos x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\sin 2x} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1.$$

д) Имеем неопределенность вида 0^0. Положим $x^{\sin x} = y$ и прологарифмируем

$$\ln y = \sin x \ln x = \frac{\ln x}{1/\sin x}.$$

Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/\sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(1/\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x\cos x}{\cos x + x(-\sin x)} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

е) Имеем неопределенность вида 1^∞. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to 0} \ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(e^x + x))'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + 1)/(e^x + x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2$.

Задача 6.

6.1. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

а) $z = x^2y + 3x^2\sqrt{y} - 2y + \dfrac{y^3}{x}$; б) $z = x^2ye^{y^2-x^2}$.

Решение.

При нахождении частной производной по одной из переменных пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все остальные переменные постоянными.

а) Рассматривая y как постоянную величину, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 6x\sqrt{y} - \frac{y^3}{x^2}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \frac{3x^2}{2\sqrt{y}} - 2 + \frac{3y^2}{x}.$$

б) Считая y постоянной, находим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = 2xye^{y^2-x^2} + x^2ye^{y^2-x^2} \cdot (-2x) = 2xye^{y^2-x^2}(1 - x^2).$$

Считая x постоянной, имеем:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = x^2e^{y^2-x^2} + x^2ye^{y^2-x^2} \cdot (2y) = x^2e^{y^2-x^2}(1 + 2y^2).$$

6.2. Найти вторые частные производные функции $z = xy\ln\dfrac{x}{y}$.

Решение.

Вначале находим частные производные первого порядка:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = y\ln\frac{x}{y} + xy\frac{y}{x}\frac{1}{y} = y\ln\frac{x}{y} + y;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = x\ln\frac{x}{y} + xy\frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = x\ln\frac{x}{y} - x.$$

Затем находим

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{y=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y\frac{y}{x}\frac{1}{y} = \frac{y}{x};$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{x=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y};$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \ln\frac{x}{y} + x\frac{y}{x}\frac{1}{y} = \ln\frac{x}{y} + 1.$$

Задача 7.

Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y = \dfrac{x^2+x-5}{x-2}$.

Решение.

а) 1. Область определения функции находится из условия $x^3 - 1 \neq 0$. Получаем: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Функция не является периодической. Проверяем на четность, нечетность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^3 - 1} = -\frac{x^4}{x^3+1} \neq \pm f(x).$$

Следовательно, функция не относится ни к классу четных, ни к классу нечетных функций.

3. Функция — дробно-рациональная, она непрерывна всюду, где она определена, т. е. на всей оси Ox, за исключением действительных корней знаменателя. Поэтому данная функция непрерывна всюду, кроме $x = 1$. Исследуем характер точки разрыва:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1} = -\infty; \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1} = +\infty.$$

Таким образом, $x = 1$ — точка разрыва второго рода, а прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой.

4. Имеем

$$y' = \frac{4x^3(x^3-1) - 3x^2 \cdot x^4}{(x^3-1)^2} = \frac{x^3(x^3-4)}{2}.$$

Находим критические точки функции по первой производной. Из условия $y' = 0$ следует: $x^3(x^3-4) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{4} \approx$ $\approx 1,59$. Кроме того, y' не существует при $x_3 = 1$.

Составляем таблицу

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4}; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	возр.	max	убыв.	т. разр.	убыв.	min	возр.

Имеем: $y(0) = 0$; $y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4} \approx 2,12$.

5. Найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3-1)^2 - 2(x^3-1)3x^2 \cdot x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^4} =$$

$$= \frac{6x^2[(x^3-2)(x^3-1) - x^3(x^3-4)]}{(x^3-1)^3} = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}.$$

Находим критические точки функции по второй производной. Из условия $y'' = 0$ следует: $6x^2(x^3+2) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt[3]{2} \approx$ $\approx -1,26$. Кроме того, y'' не существует при $x_3 = 1$.

Составляем таблицу

x	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$-$	не сущ.	$+$
y	вогн.	перегиб	вып.	max	вып.	т. разр.	вогн.

Имеем: $y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2} \approx -0,84$.

6. Исследуем график функции на наличие наклонных асимптот $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x(x^3-1)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4}{x^3-1} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4 - x^4 + x}{x^3 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^3 - 1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является асимптотой графика функции как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$.

7. График функции представлен на рис. 1.

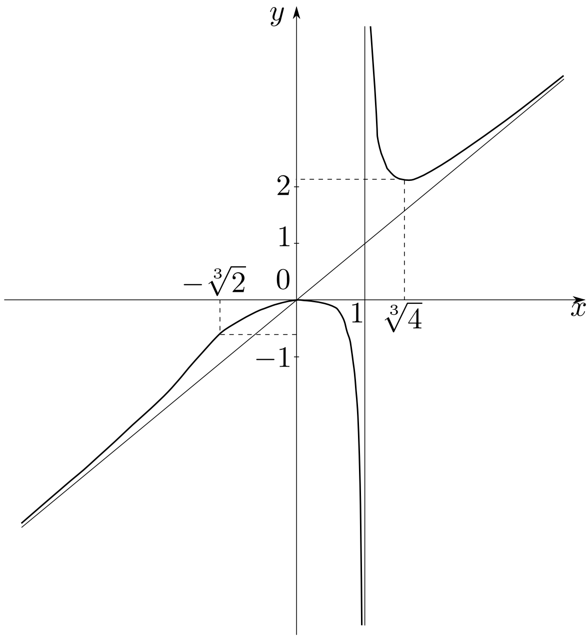

Рис. 1

б) 1. Функция терпит разрыв при $x = 2$. При всех других значениях аргумента она непрерывна.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$.

3. Исследуем функцию на экстремум. Находим первую производную

$$y' = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x + 5)}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 - x + 5}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2},$$

или
$$y' = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}.$$

Первая производная равна нулю при $x = 1$, $x = 3$ и не существует при $x = 2$. Так как при $x = 2$ заданная функция не существует, то эта точка не подлежит исследованию. Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x+3)}{(x-2)^4}.$$

Сократив на $x - 2$ и выполнив преобразования в числителе, получим
$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2-4x+3)}{(x-2)^3} =$$
$$= \frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x-6}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Так как $y''(1) = -2 < 0$, то при $x_1 = 1$ функция имеет максимум. Так как $y''(3) = 2 > 0$, то при $x_2 = 3$ функция имеет минимум.

Вычислим значение функции в точках экстремума: $y(1) = 3$, $y(3) = 7$. Следовательно, точка $(1; 3)$ — точка максимума, а точка $(3; 7)$ — точка минимума.

4. Так как вторая производная ни при каких значениях не обращается в нуль, то график исследуемой функции не имеет точек перегиба.

5. Найдем асимптоты графика функции. Уравнение вертикальной асимптоты имеет вид $x = 2$. Используя соответствующие формулы, выясним вопрос о наличии наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-5}{x(x-2)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+x-5}{x-2} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+x-5-x^2+2x}{x-2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3x-5}{x-2}\right] = 3.$$

Следовательно, $y = x + 3$ — уравнение наклонной асимптоты.

График исследуемой функции представлен на рис. 2.

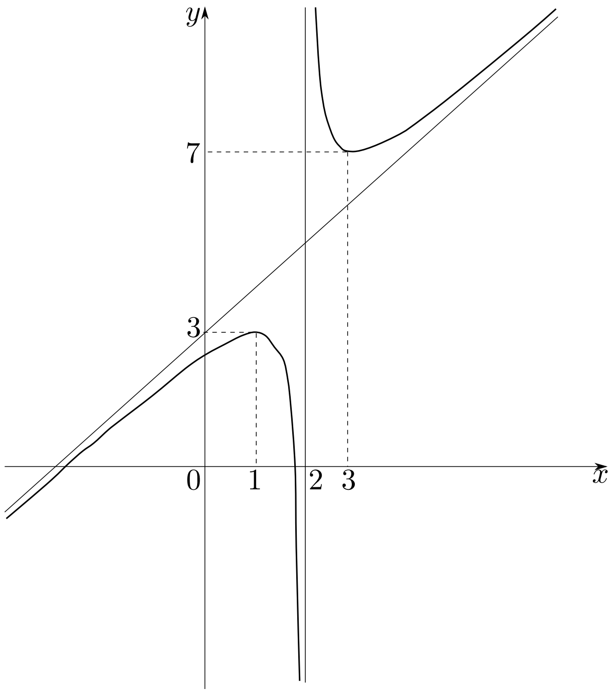

Рис. 2

Приложения

Последовательность. Предел последовательности

Отображение $f : \mathbb{N} \to X$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, а X — произвольное множество, называется последовательностью.

Последовательность обозначают через (x_n), $\{x_n\}$ или

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots. \tag{1}$$

Выражение x_n называют общим членом последовательности. Если $X \subset \mathbb{R}$, то последовательность (1) определяет числовую последовательность.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ (зависящее от ε), такое, что для всех членов последовательности с номерами $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Определение предела последовательности можно записать с помощью логической символики:

$$\left[\lim_{n\to\infty} x_n = a\right] \Longleftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) :\ n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right].$$

Предел числовой функции одной переменной

Отображение $f : X \to Y$ называется числовой функцией одной переменной, если $X \subset \mathbb{R}$ и $Y \subset \mathbb{R}$.

Если $x \in X$, то соответствующее значение функции $y \in Y$ обозначают $y = f(x)$ и говорят, что на множестве X определена числовая функция $f(x)$.

Число y_0 называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$, такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

Используя логические символы, данное определение можно записать следующим образом:

$$\left[\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0\right] \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow [\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \varepsilon]\,.$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых величин при $\alpha \to 0$

$\sin\alpha \sim \alpha$; $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$;

$\arcsin\alpha \sim \alpha$; $\qquad$ $\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$;

$1 - \cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$; $\qquad$ $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$;

$a^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot \ln a$; $\qquad$ $e^\alpha - 1 \sim \alpha$;

$(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha$.

Производная функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx в этой точке при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует и конечен, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta x = x - x_0$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $f(x)$ при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т. е. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — величина угла, образованного касательной с положительным направлением оси Ox.

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производные в некоторой точке x, то основные правила дифференцирования выражаются формулами:

$$(cu)' = cu'; \quad \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c} \quad (c = \mathrm{const});$$

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Если $y = f(g(x))$ является сложной функцией, то производная этой функции определяется равенством

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Таблица дифференцирования основных функций

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(\sin x)' = \cos x$;

4) $(\cos x)' = -\sin x$;

5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

8) $(e^x)' = e^x$;

9) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;

10) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

16) $\operatorname{ch} x' = \operatorname{sh} x$;

17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

18) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Гиперболические функции

Гиперболические функции $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}; \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}.$$

Схема исследования функций и построения графиков

1. Найти область определения функции, определить точки разрыва, изучить поведение кривой в окрестности точки разрыва.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Определить симметричность графика функции:
   если функция четная, т. е. $f(-x) = f(x)$, то ее график симметричен относительно оси Oy;
   если функция нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$, то ее график симметричен относительно начала координат;
   если функция ни четная, ни нечетная, то график несимметричен.
4. Выяснить, периодическая функция или нет.
5. Вычислить первую производную функции и найти экстремумы функции и интервалы монотонности.
6. Вычислить вторую производную функции и найти точки перегиба и интервалы выпуклости графика функции.
7. Найти наклонные асимптоты графика функции:
   $y = kx + b$; $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$.
8. Построить график.

Полный дифференциал и частные производные числовой функции нескольких переменных

Если $z = f(x, y)$, то, полагая, например, y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

которая называется частной производной функции z по переменной x.

Аналогично определяется и обозначается частная производная функции z по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

Для нахождения частных производных можно пользоваться обычными формулами дифференцирования.

Полным приращением функции $z = f(x, y)$ называется разность $\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy. Функция имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется дифференцируемой. Дифференциалы независимых переменных, по определению, совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Полный дифференциал вычисляется по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Заключение

Настоящее учебное пособие составлено для самостоятельной работы студентов–бакалавров первого курса инженерных специальностей. Самостоятельное решение индивидуального варианта задания способствует развитию у студентов навыков решения задач, связанных с использованием производных и пределов. Однако эти навыки скорее всего будут необходимыми, но не достаточными. С целью дальнейшего совершенствования познаний в области дифференциального исчисления студенту необходимо продолжать решать подобные задачи, используя ту литературу, которую авторы привели в библиографическом списке. Для получения необходимых теоретических сведений студенту можно обратиться к книгам [1, 3, 6, 7], а для совершенстования практических навыков незаменимы издания [2, 4, 5], в которых приведено большое количество задач разной степени сложности с подробными изложениями решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.** Лекции по математическому анализу [Текст] / М.: Дрофа, 2008. — 640 с.
2. **Берман Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / СПб.: Профессия, 2007. — 432 с.
3. **Бермант А. Ф., Араманович И. Г.** Краткий курс математического анализа [Текст] / М.: Лань, 2010. — 736 с.
4. **Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1 [Текст] / М.: Мир и Образование, Астрель, Оникс, 2012. — 368 с.
5. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / М.: АСТ, Астрель, 2009. — 560 с.
6. **Пискунов Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 [Текст] / М.: Интеграл-Пресс, 2009. — 416 с.
7. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 [Текст] / СПб.: Лань, 2009. — 608 с.

Оглавление

Учебное издание

Введение в анализ. Дифференцирование функций

КУБЫШКИНА Светлана Николаевна,
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 26.12.2014
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,12. Уч.–изд. л. 3,00
Тираж 80 экз. Рег. №213/13

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Самарский государственный технический университет”
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Главный корпус

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Корпус № 8