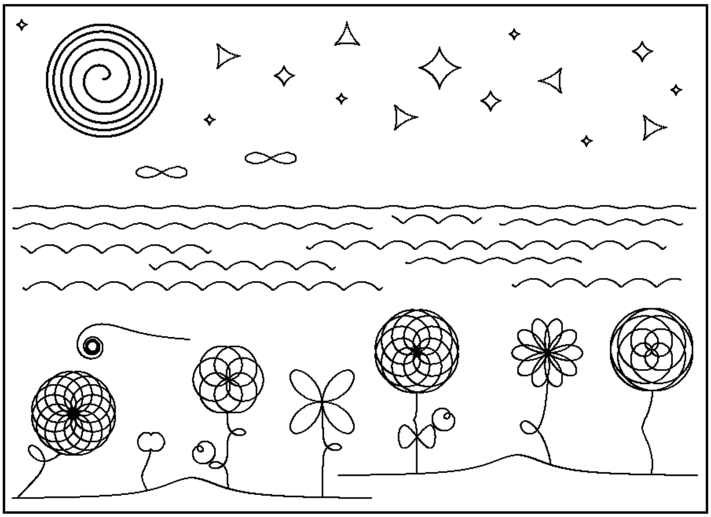
Г. А. ПАВЛОВА, А. Ю. СМЫСЛОВ,
С. В. ГОРБУНОВ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовой расчёт



Самара 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Г. А. ПАВЛОВА, А. Ю. СМЫСЛОВ,
С. В. ГОРБУНОВ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Типовой расчёт

Самара 2011

УДК 517.1

Введение в математический анализ: Типовой расчёт / *Г. А. Павлова, А. Ю. Смыслов, С. В. Горбунов*; Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2011. 39 с.

Содержит 12 задач по 25 вариантов, относящихся к следующим разделам математического анализа: графики функций, элементы теории множеств, теория пределов.

Приведён демонстрационный вариант с решениями всех типовых задач.

Типовой расчёт предназначен для самостоятельной работы студентов специальности 01.05.01 «Прикладная математика и информатика» по курсу «Математический анализ».

Библиогр.: 9 назв.

Печатается по решению методического совета инженерно–экономического факультета Самарского государственного технического университета.

Рецензент: *к.т.н. А. Н. Маляров*

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие "Введение в математический анализ" предназначено для студентов I курса специальности "Прикладаная математика и информатика". Опубликованием этой работы авторы преследуют две цели:

1) освежить в памяти студентов некоторые главы "Алгебры и начал анализа" школьной программы по математике (задачи на построение графиков, элементы теории множеств, алгебраические уравнения и неравенства);
2) подготовить студентов к решению задач по математическому анализу, относящихся к такому важнейшему понятию как предел.

В пособие включены задачи из широко известных изданий, в частности, из сборника задач и упражнений по математическому анализу И. А. Виноградовой и др. [3] и из сборника задач по математическому анализу Л. Д. Кудрявцева [7].

Пособие состоит из двух частей. В первой части приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов, во второй рассмотрен демонстрационный вариант с подробными решениями. В приложении приведены графики и уравнения некоторых замечательных кривых.

Часть 1. Варианты индивидуальных заданий

Задача 1.

Дана функция $y = f(x)$. Указать для неё:
а) область определения $D(f)$;
б) множество значений $E(f)$;
в) особенности (чётность, нечётность, периодичность).
Построить эскиз графика функции.

1.1. $y = 3\left|\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$.

1.2. $y = 2\sin x + \sqrt[3]{\sin x} + 3$.

1.3. $y = 2\arcsin\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{2}$.

1.4. $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.

1.5. $y = 2\arcsin\frac{1-5x}{4}$.

1.6. $y = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$.

1.7. $y = \arccos\frac{1-|x|}{2}$.

1.8. $y = \sqrt{3\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$.

1.9. $y = \frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$.

1.10. $y = 2\left|\cos\frac{2\pi x+\pi}{4}\right|$.

1.11. $y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

1.12. $y = \arccos\frac{8x-1}{4}$.

1.13. $y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$.

1.14. $y = 3\arcsin\frac{2+3|x|}{4}$.

1.15. $y = \cos 2x + 2\sqrt{\cos 2x} - 1$.

1.16. $y = -2\operatorname{tg}\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)$.

1.17. $y = 5\sqrt{\sin\frac{x}{4}}$.

1.18. $y = \arccos\frac{1-4x}{3}$.

1.19. $y = \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)\cos^2 x - 3\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$.

1.20. $y = -2\sqrt{\sin 2x} + 4$.

1.21. $y = -4\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) + 2$.

1.22. $y = 2\arcsin\frac{4|x|-1}{2}$.

1.23. $y = \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

1.24. $y = 3\arcsin\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$.

1.25. $y = 3\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$.

Задача 2.

Построить эскиз графика функции.

2.1. $y = 2 + \sin^2\frac{1}{x}$.

2.2. $y = \log_{\frac{1}{7}}\cos\frac{3\pi x-\pi}{5}$.

2.3. $y = \operatorname{arcctg}\lg\frac{x+1}{x-1}$.

2.4. $y = 2\cos\frac{\pi}{x}$.

2.5. $y = 2^{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$.

2.6. $y = \frac{x^2 \operatorname{sign} \cos \pi x}{1+x^2}$.

2.7. $y = \mathrm{e}^{-x^2+x}$.

2.8. $y = 2 - \sin \frac{1}{x}$.

2.9. $y = \arccos \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$.

2.10. $y = \log_5 |1 - 2^{-x}|$.

2.11. $y = \frac{1}{2^{\frac{x}{1-x}}-1}$.

2.12. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\cos x}$.

2.13. $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x+1}}-1}$.

2.14. $y = \operatorname{sign} \sin \pi x + \operatorname{sign} \cos \pi x$.

2.15. $y = \log_{\frac{1}{\pi}} \sin \frac{2\pi x - \pi}{3}$.

2.16. $y = -\sin^2 \frac{\pi}{x}$.

2.17. $y = 3^{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2.18. $y = x \operatorname{arctg} \lg x$.

2.19. $y = x \arcsin \frac{1}{x}$.

2.20. $y = \mathrm{e}^{-x^2} \sin 2\pi x$.

2.21. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} \frac{2x-\pi}{3}} - 1$.

2.22. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} \ln x}$.

2.23. $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

2.24. $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{\sin x}$.

2.25. $y = 2^{\overline{\cos \frac{2\pi x - 3\pi}{8}}^{\,1}}$.

Задача 3.

Построить эскизы графиков функций. Для функции в пункте б) найти значения в указанных точках a, b, c. Указать для каждой из функций точки разрыва, если они есть, и определить их тип.

3.1. а) $y = x\,(3 - |x|)$;

б) $y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{если } x > 0, \\ -x + 5, & \text{если } x \leqslant 0; \end{cases}$
$a = -5;\ b = 4;\ c = 5;$

в) $y = x \operatorname{sign} \cos x$.

3.2. а) $y = \frac{(2-x)\left(x^2-x-2\right)}{|x+1|}$;

б) $y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 3; \\ 3, & \text{если } 3 \leqslant x < 4; \\ 2^x, & \text{если } x \geqslant 4; \end{cases}$
$a = 2;\ b = 3,5;\ c = 5;$

в) $y = x^2 \operatorname{sign} x$.

3.3. а) $y = |x|\,(2 - |x|)$;

б) $y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{если } x \geqslant 0; \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{если } x < 0; \end{cases}$
$a = -\frac{\pi}{2};\ b = 0;\ c = \frac{\pi}{2};$

в) $y = \{3x + 1\}$.

3.4. а) $y = |\sin x| + \sin x$;

б) $y = \begin{cases} \log_2 x, & \text{если } x > 0; \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0; \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$
$a = -\frac{1}{8};\ b = \frac{1}{4};\ c = 16;$

в) $y = \left(x - x^2\right) \operatorname{sign} x$.

3.5. а) $y = |x| - x$;

б) $y = \begin{cases} 3^x, \text{ если } -1 < x < 0; \\ 4, \text{ если } 0 \leqslant x < 1 \\ 3x+1, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 3; \end{cases}$

$a = 2;\ b = 0,5;\ c = 0;$

в) $y = \eta(x)\, x\left(x^2 - 1\right)$.

3.6. а) $y = -2^{-|x|}$;

б) $y = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ если } x < 0; \\ 1 - x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 0;\ c = 4;$

в) $y = \frac{1}{2}[x]$.

3.7. а) $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$;

б) $y = \begin{cases} -3^{\frac{x}{2}}, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x^2 - 2x - 1, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

$a = -3;\ b = 0;\ c = 4;$

в) $y = [x - 4] + 3$.

3.8. а) $y = (1 - x)\,|x + 1|$;

б) $y = \begin{cases} x + 1, \text{ если } x \leqslant 1; \\ 3 - x^2, \text{ если } x > 1; \end{cases}$

$a = -4;\ b = 1;\ c = 4;$

в) $y = x\eta(x)\sin x$.

3.9. а) $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$;

б) $y = \begin{cases} x - 1, \text{ если } x \leqslant 0; \\ x^2, \text{ если } 0 < x < 2; \\ 2x, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 0;\ c = 4;$

в) $y = [2x - 1]$.

3.10. а) $y = \left|x^2 - 4\right| + 1$;

б) $y = \begin{cases} 3x + 1, \text{ если } x < 0; \\ x^2 + 1, \text{ если } 0 \leqslant x < 1; \\ 0, \text{ если } x \geqslant 1; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 0,5;\ c = 5;$

в) $y = x \operatorname{sign}\left(x^2 - 1\right)$.

3.11. а) $y = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin^2 x}$;

б) $y = \begin{cases} \sin x \cos x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -\frac{1}{2}\sin x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

$a = \frac{\pi}{4};\ b = -\frac{\pi}{3};\ c = \frac{\pi}{6};$

в) $y = \left|x - x^2\right| \eta(x)$.

3.12. а) $y = x + |2x - 3|$;

б) $y = \begin{cases} 2^x - 1, \text{ если } 0 < x \leqslant 2; \\ -x^2 - 2x, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0; \\ x, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 2;\ c = 4;$

в) $y = |x + 1| - |x - 1| \operatorname{sign} x$.

3.13. а) $y = 2x - |x - 2| + 1$;

б) $y = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ если } x \leqslant 1; \\ 2x, \text{ если } 1 < x \leqslant 3; \\ x + 2, \text{ если } x > 3; \end{cases}$

$a = 0;\ b = 1;\ c = 2;$

в) $y = \frac{1}{x - x^3} \operatorname{sign} x$.

3.14. а) $y = \frac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}$;

б) $y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \leqslant 0; \\ x, \text{ если } 0 < x \leqslant 1; \\ 2, \text{ если } x > 1; \end{cases}$

$a = -2;\ b = 0,5;\ c = 4;$

в) $y = [x - 2] + 3$.

3.15. а) $y = \left|-x^2 - x + 2\right|$;

б) $y = \begin{cases} x-1, \text{ если } x \leqslant 0; \\ x^2, \text{ если } 0 < x < 2; \\ 2x, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 0,5;\ c = 2;$

в) $y = \eta(x) \lg|x-1|$.

3.16. а) $y = \sqrt{10^{\lg x}}$;

б) $y = \begin{cases} \sqrt{1-x}, \text{ если } x \leqslant 0; \\ 0, \text{ если } 0 < x \leqslant 2; \\ x-2, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

$a = -\frac{1}{8};\ b = 1;\ c = 3;$

в) $y = \cos x \operatorname{sign} x$.

3.17. а) $y = \frac{|x|}{x} - \frac{1}{2}x$;

б) $y = \begin{cases} x^2-1, \text{ если } x < 2; \\ 8-3x, \text{ если } 2 \leqslant x \leqslant 4; \\ -4, \text{ если } x > 4; \end{cases}$

$a = 0;\ b = 3;\ c = 5;$

в) $y = \eta(x) \arccos(\cos 3x)$.

3.18. а) $y = (x-2)|2-x|$;

б) $y = \begin{cases} 2^x, \text{ если } x > -1; \\ 0,5, \text{ если } x \leqslant -1; \end{cases}$

$a = -0,5;\ b = 0;\ c = 1;$

в) $y = 2[x] + 1$.

3.19. а) $y = \frac{\left|x^4-1\right|}{x^2+1}$;

б) $y = \begin{cases} x-3, \text{ если } x < 0; \\ x+1, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 3+\sqrt{x}, \text{ если } x > 4; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 2;\ c = 9;$

в) $y = \eta(x) \sin\left(\arcsin \frac{x+2}{5}\right)$.

3.20. а) $y = x + |x+3|$;

б) $y = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0; \\ \operatorname{tg} x, \text{ если } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ x, \text{ если } x \geqslant \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

$a = -\frac{\pi}{4};\ b = \frac{\pi}{3};\ c = \pi;$

в) $y = [x-1]$.

3.21. а) $y = x - |x| + 2$;

б) $y = \begin{cases} \cos x, \text{ если } x \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ 0, \text{ если } \frac{\pi}{2} < x < \pi; \\ \frac{\pi}{2}, \text{ если } x \geqslant \pi; \end{cases}$

$a = \frac{\pi}{6};\ b = \frac{3}{4}\pi;\ c = \frac{7}{3}\pi;$

в) $y = \eta(x) \sin^2 \frac{x}{2}$.

3.22. а) $y = |2-x| + |2+x|$;

б) $y = \begin{cases} -\frac{x}{2}, \text{ если } x \leqslant 0; \\ \cos x, \text{ если } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}; \\ x-\frac{\pi}{2}, \text{ если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

$a = -1;\ b = \frac{\pi}{3};\ c = \pi;$

в) $y = \left(x^3 + 3x^2\right) \operatorname{sign} x$.

3.23. а) $y = x + \frac{|x|}{x}$;

б) $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, \text{ если } x \leqslant 0; \\ 3, \text{ если } 0 < x \leqslant 3; \\ x, \text{ если } x > 3; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 2;\ c = 4;$

в) $y = \{2x-1\} - (2x-1)$.

3.24. а) $y = x|x| + 1$;

б) $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant 0; \\ \sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi; \\ x-2, \text{ если } x > \pi; \end{cases}$

$a = -\frac{\pi}{3};\ b = \frac{\pi}{6};\ c = 3;$

в) $y = 2\{x\}$.

3.25. а) $y = |x+1| + |x-3|$;

б) $y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 0; \\ \mathrm{e}^x, \text{ если } 0 < x < 2; \\ 7, \text{ если } x \geqslant 2; \end{cases}$

$a = -1;\ b = 1;\ c = 3;$

в) $y = \left(1 - \sqrt{|x|}\right) \operatorname{sign} x$.

Задача 4.

Дано уравнение параболы. С помощью выделения полного квадрата найти вершину параболы. Определить точки пересечения с осями координат. Построить кривую.

4.1. $5y^2 + 10y + 5x + 8 = 0$.

4.2. $x^2 - 2x + 3y + 5 = 0$.

4.3. $2x^2 + 6x + 2y - 15 = 0$.

4.4. $2y^2 + 6y + 2x - 15 = 0$.

4.5. $x^2 - 2x + y + 3 = 0$.

4.6. $y^2 + 2y - x + 4 = 0$.

4.7. $4x - y^2 - 2y + 8 = 0$.

4.8. $4y^2 + 8y + 2x + 5 = 0$.

4.9. $x^2 + 2x + 2y - 4 = 0$.

4.10. $y^2 - 4y + 2x - 3 = 0$.

4.11. $2x - 4y + 2y^2 + 5 = 0$.

4.12. $2y + y^2 - 2x + 1 = 0$.

4.13. $2y^2 - 6y - 2x + 3 = 0$.

4.14. $x^2 + 2x + 4y + 4 = 0$.

4.15. $4x^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

4.16. $2y^2 - 4y + 3 - 2x = 0$.

4.17. $2x^2 + 4x - y + 1 = 0$.

4.18. $x^2 - x + 2y + 4 = 0$.

4.19. $y^2 + y + 2x + 4 = 0$.

4.20. $2x - 2y^2 + 2y + 3 = 0$.

4.21. $3x^2 - 6x + 3y + 5 = 0$.

4.22. $2y - x^2 - 4x + 3 = 0$.

4.23. $2y + x^2 + 6x + 3 = 0$.

4.24. $6x^2 + 12x - 3y + 4 = 0$.

4.25. $x^2 - x + 0,5y + 3 = 0$.

Задача 5.

а) Построить кривую в полярной системе координат. Указать область определения функции, период. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат.

б) Найти уравнение кривой в полярной системе координат, указать область определения и период функции. Построить кривую.

$a = \text{const}$.

5.1. а) $\rho = 4\cos\varphi$; б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 18xy$.

5. 2. а) $\rho = 2\sin\varphi + 5$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2\left(x^2-y^2\right)$.

5. 3. а) $\rho = 5\sin^2\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^4$.

5. 4. а) $\rho = \cos^2\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(4x^2+y^2\right)$.

5. 5. а) $\rho = 5\sin 2\varphi$;

б) $x^2+y^2 = 2ax$.

5. 6. а) $\rho = 5\cos 2\varphi$;

б) $x^4 = a^2\left(3x^2-y^2\right)$.

5. 7. а) $\rho = 2\left(1+\cos\varphi\right)$;

б) $x^6 = a^2\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$.

5. 8. а) $\rho = 2\left(1-\cos\varphi\right)$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2ax^3$.

5. 9. а) $\rho = 2\left(1+\sin\varphi\right)$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^3 = x^4+y^4$.

5. 10. а) $\rho = 2\left(1-\sin\varphi\right)$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$.

5. 11. а) $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$;

б) $x^2+y^2 = x+y$.

5. 12. а) $\rho = 2+\cos\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2y^3$.

5. 13. а) $\rho = 2+\sin\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}} = 5\left(x^2-y^2\right)^2$.

5. 14. а) $\rho = \frac{1}{2}\sin\varphi + \frac{3}{4}$;

б) $x^2+y^2 = 2\sqrt{x^2+y^2}+3$.

5. 15. а) $\rho = a\cos 5\varphi$;

б) $2\sqrt{x^2+y^2}+y = 3$.

5. 16. а) $\rho = 3+\cos 4\varphi$;

б) $2\sqrt{x^2+y^2}+x = 1$.

5. 17. а) $\rho = 2-\cos 4\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = 6xy$.

5. 18. а) $\rho = 2+3\sin\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = 9x^2$.

5. 19. а) $\rho = a\cos 3\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}} = 24x^2y^2$.

5. 20. а) $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$;

б) $6\sqrt{x^2+y^2}+3x = 1$.

5. 21. а) $\rho = 1+\cos 2\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^3 = 4x^2y^2$.

5. 22. а) $\rho = 2\sin^2 2\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(4x^2+5y^2\right)$.

5. 23. а) $\rho = a\sin 3\varphi$;

б) $x^4+y^4 = a^2xy$.

5. 24. а) $\rho = 3+\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sqrt{x^2+y^2} = x+3$.

5. 25. а) $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(3x^2+2y^2\right)$.

Задача 6.

Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты a, b, c, при которых справедливо тождество.

6.1. $f(x+1) - f(x) = 8x + 3.$

6.2. $f(x+2) + f(x) = 6x - 4.$

6.3. $f(x-1) - f(x) = 2x - 3.$

6.4. $f(x-2) - f(x) = 2x - 1.$

6.5. $f(2x) - f(x) = 3x.$

6.6. $f(x+4) - f(x-2) = 3x + 4.$

6.7. $f(3x) - f(x-1) = 2x + 1.$

6.8. $f(x) + f(x+4) = 2x + 5.$

6.9. $f(3x) - f\left(x - \frac{8}{3}\right) = 3x + 4.$

6.10. $f(x-3) - f(x+3) = 2x + 7.$

6.11. $f(-x) - f(-x+1) = 4x + 3.$

6.12. $f(-x+1) - f(-x+2) = 8x + 1.$

6.13. $f(x-4) - f(x+5) = 18x - 27.$

6.14. $f(x+1) - f(x-5) = 24x + 6.$

6.15. $f(-x) - f(-x-3) = 6x - 3.$

6.16. $f(x+3) - f(x) = 7x + 2.$

6.17. $f(4x) - f(-x) = 2x^2 + x.$

6.18. $f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f(x-1) = 3x + 5.$

6.19. $f(2x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) = 5x^2 + 3.$

6.20. $f(x-3) - 2f(x+4) = x^2 + 23x.$

6.21. $f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x+1) = 5x^2 + 8x + 2.$

6.22. $f\left(\frac{x}{3}\right) - f(2x+1) = 35x^2 + 21x.$

6.23. $f(x+4) + f(x-1) = 6x + 3.$

6.24. $f\left(-\frac{x}{2}\right) + f(-x-1) = 10x^2 + x + 4.$

6.25. $2f(2x) - 3f(x+1) = 10x^2.$

Задача 7.

Описать множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

7.1. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1\right\},$
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1\right\}.$

7.2. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < \frac{2}{x-2}\right\},$
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 - 4x + 6\right) < -2\right\}.$

7.3. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lg \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| < 0 \right\}$.

7.4. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+7} > 0 \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{5}} \frac{3x-1}{x+2} < 1. \right\}$.

7.5. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < \frac{2}{x+2} \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_{0,1} \left(x^2 + 1 \right) < \log_{0,1} (2x - 5) \right\}$.

7.6. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2x-3} \leqslant \frac{1}{2x+5} \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_4 \frac{3x+2}{x} \leqslant 0,5 \right\}$.

7.7. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-5x+4}{x-4} \geqslant 0 \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_5 (2x - 4) < \log_5 (x + 3) \right\}$.

7.8. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+4}{x-2} < \frac{2}{x+1} \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{3}} \left(x^2 + 2x \right) > 0 \right\}$.

7.9. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^3-2x^2+5x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1 \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_5 \left(x^2 - 11x + 43 \right) < 2 \right\}$.

7.10. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2}{|x+2|} \leqslant 1 \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lg \left(x^2 - 2x - 2 \right) \leqslant 0 \right\}$.

7.11. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{4}{3}} \left(\sqrt{x+3} - x \right) > 0 \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : (x + 1)(3 - x)(x - 2)^2 > 0 \right\}$.

7.12. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leqslant 1 \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0 \right\}$.

7.13. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{3x^2-16x+2}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0 \right\}$,
$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x} \right\}$.

7.14. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{1,2}(x-2) + \log_{1,2}(x+2) < \log_{1,2} 5\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|12x^2 - 9x + 15\right| \geqslant 20\right\}$.

7.15. $A = \{x \in \mathbb{R} : \log_4(x+7) > \log_2(x+1)\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - 5x\right| < 6\right\}$.

7.16. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{0,3} \frac{x-1}{x+5} \geqslant 0\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{15}{4+3x-x^2} > 1\right\}$.

7.17. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\log_5\left(x^2+3\right)}{4x^2-16x} < 0\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : 0,2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25\right\}$.

7.18. $A = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(1 + \log_3 x - \log_9 x) < 1\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : 5 - x - \frac{6}{x} \geqslant 0\right\}$.

7.19. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_3 \frac{1+2x}{1+x} < 1\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-9}{3x-x^2-24} < 0\right\}$.

7.20. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2 + 5x + 1\right) < 0\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} > 0\right\}$.

7.21. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-6}{x\sqrt{x-2}} < \sqrt{x-2}\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_2 \frac{x^2-4x+2}{x+1} \leqslant 1\right\}$.

7.22. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 5x + 4} > x - 3\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < 0\right\}$.

7.23. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_8\left(x^2 - 4x + 3\right) < 1\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16+x}\right\}$.

7.24. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \lg\left(3x - x^2 + 4\right) > \lg(8 - 2x)\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - x - 6} \leqslant x + 5\right\}$.

7.25. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x - 10} > \sqrt{6 - x}\right\}$,
$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \lg\left(x^2 + 2x + 2\right) > 1\right\}$.

Задача 8.

Доказать равенство.

8.1. $(A \cup B) \cap \overline{B \setminus A} = A.$

8.2. $\left((A \cup B) \setminus \overline{A}\right) \setminus \left((A \cap B) \setminus \overline{B}\right) = A \setminus B.$

8.3. $\left(\overline{A} \setminus (A \cup B)\right) \setminus \left(\overline{B} \setminus (A \cap B)\right) = \varnothing.$

8.4. $A \setminus (B \cup C) = \left(A \setminus B\right) \cap \left(A \setminus C\right).$

8.5. $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \overline{A \setminus B} = \overline{A}.$

8.6. $\left(\overline{A \cap B} \setminus A\right) \setminus \left(\overline{A \cup B} \setminus B\right) = B \setminus A.$

8.7. $A \setminus \overline{A \setminus B} = A \setminus B.$

8.8. $A \setminus (B \cap C) = \left(A \setminus B\right) \cup \left(A \setminus C\right).$

8.9. $\overline{A \setminus B} \cap (A \cup B) = B.$

8.10. $\left((A \cup B) \setminus \overline{A}\right) \cup \left((A \cap B) \setminus \overline{B}\right) = A.$

8.11. $\overline{A \setminus B} \setminus (A \cap B) = \overline{A}.$

8.12. $\overline{A \setminus C} \setminus (A \cup B) = \overline{A \cup B}.$

8.13. $\overline{B \setminus A} \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \overline{B}.$

8.14. $\left((A \cap B) \setminus \overline{A}\right) \cup \left((A \cup B) \setminus \overline{B}\right) = B.$

8.15. $\overline{C \setminus A} \setminus \overline{A \cap B} = A \cap B.$

8.16. $\overline{A \setminus B} \setminus \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = B.$

8.17. $\left(\overline{A \cup B} \setminus A\right) \cup \left(\overline{A \cap B} \setminus B\right) = \overline{B}.$

8.18. $\overline{A \setminus B} \cup \left(\overline{A} \cap B\right) = \overline{A} \cup B.$

8.19. $\overline{A \cap B} \setminus \left(B \setminus A\right) = \overline{B}.$

8.20. $\left(A \setminus (A \cap B)\right) \cup \left(\overline{A \cap B} \setminus B\right) = \overline{B}.$

8.21. $\overline{B \setminus A} \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A \cup \overline{B}.$

8.22. $\left(\overline{A \cap B} \setminus A\right) \cup \left(\overline{A \cup B} \setminus B\right) = \overline{A}.$

8.23. $\overline{A \cap B} \setminus \left(A \cup \overline{C}\right) = C \setminus A.$

8.24. $(A \cap B) \setminus \overline{A \setminus C} = (A \cap B) \setminus C.$

8.25. $\left(A \setminus \overline{A \cup B}\right) \setminus \left(B \setminus \overline{A \cap B}\right) = A \setminus B.$

Задача 9.

Записать приведённое высказывание, не используя символы математической логики. Установить, истинно оно или ложно (буквами x, y, z, a, b, c обозначены действительные числа).

9.1. $\forall x\ \exists y\colon x + y = 3$.

9.2. $\exists x > 0 \wedge \exists y > 0\colon x + y = 0$.

9.3. $\forall x, y\colon x < y\ \exists z\colon x < z < y$.

9.4. $\forall x, y \Rightarrow x^2 \neq 2y^2$.

9.5. $\exists x\colon \sqrt{x^2} < x$.

9.6. $\exists! y\ \forall x\ \Rightarrow x - y = 3$.

9.7. $\forall x \wedge \forall y \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$.

9.8. $\forall x \Rightarrow \left(x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0\right)$.

9.9. $\forall x\ \exists y\colon xy = 4$.

9.10. $\forall y\ \exists x\colon \frac{x}{y} = 3$.

9.11. $\exists b\ \forall a\ \exists x\colon x^2 + ax + b = 0$.

9.12. $\forall b\ \exists a\ \forall x \Rightarrow x^2 + ax + b > 0$.

9.13. $\forall x\ \exists y\colon x + y = |x|$.

9.14. $\forall x > 0\ \exists z\colon 0 < z < x$.

9.15. $\forall a \wedge \forall b\ \exists x\colon ax^2 + bx = 0$.

9.16. $\exists a\ \forall b\ \exists x\colon x^2 + ax + b = 0$.

9.17. $\forall x \wedge \forall y \Rightarrow (x > y \Leftrightarrow x - y > 0)$.

9.18. $\forall z\ \exists x, y\colon z^2 = x^2 + y^2$.

9.19. $\forall x, y \Rightarrow |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

9.20. $\forall x \Rightarrow -x < 0$.

9.21. $\forall z \wedge \forall x\ \exists y\colon x^2 + y^2 = z^2$.

9.22. $\forall x\ \exists! y\colon |x + y| = |x| + |y|$.

9.23. $\exists x \wedge \exists y\colon x + y^2 = 0$.

9.24. $\exists x, y\colon x + y = 0 \wedge x - y = 2$.

9.25. $\forall x\ \exists! y\colon x^2 - y^2 = 0$.

Задача 10.

Используя символы математической логики, записать высказывание.

10.1. Существуют такие значения x, принадлежащие множеству рациональных чисел, при которых значение выражения $\lg\left(x^2 - 5x + 6{,}1\right)$ равно 1.

10.2. Каково бы ни было положительное число ε, существует положительное число δ такое, что неравенство $|x - a| < \delta$ влечёт за собой неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

10.3. Всякий квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами a, b, c и положительным дискриминантом можно представить в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — некоторые действительные числа.

10.4. Переменная x_n есть бесконечно большая величина, если для любого сколь угодно большого положительного числа M существует натуральное число N, начиная с которого $|x_n| > M$.

10.5. Последовательность $\{a_n\}$ сходится к a тогда и только тогда, когда для любого положительного ε существует ν, зависящее от ε, такое, что для любого n, не меньшего ν_ε, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

10.6. Функцию $f(x)$, определённую на множестве X, называют строго возрастающей, если для любых x_1, x_2, принадлежащих множеству X, причём x_1 меньше x_2, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

10.7. Функция $f(x)$, заданная на множестве X, равномерно непрерывна на X, если для любого положительного ε существует положительное δ и для любых x_1, x_2, принадлежащих множеству X, из неравенства $|x_1 - x_2| < \delta$ следует неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

10.8. Последовательность α_1, α_2, ..., α_n, ... называют бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует δ, зависящее от ε, такое, что неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$ выполняется для любого n, не меньшего δ_ε.

10.9. Функцию $f(x)$, определённую на множестве X, называют строго убывающей, если для любых x_1, x_2, принадлежащих множеству X, причём x_1 меньше x_2, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

10.10. Уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное действительное решение.

10.11. Для любых x, кроме $x = 1$, имеет место равенство

$$\frac{x^3 - 3x + 5}{x - 1} = x^2 + x - 2 + \frac{3}{x - 1}.$$

10.12. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если существует положительное число A такое, что имеет место соотношение $|x_n| < A$, выполняющееся для любого натурального n.

10.13. Переменная x_n есть бесконечно малая величина, если для любого положительного числа ε существует натуральное число N такое, что при n, большем N, выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

10.14. Для любых вещественных чисел x и y имеет место соотношение $x^2 + y^2 \geqslant 0$.

10.15. Каково бы ни было число a, существует такое целое число n, что $n > a$.

10.16. Для любого числа a, отличного от нуля, существует число, обозначаемое $\frac{1}{a}$, такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

10.17. Если $a < b$, то для любого числа c выполняется $a + c < b + c$.

10.18. Последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, если для любого натурального n выполняется $x_n < x_{n+1}$.

10.19. Совокупность всех элементов, каждый из которых принадлежит множеству A, но не принадлежит множеству B, называют разностью множеств A и B и обозначают $A \setminus B$.

10.20. Число $y_0 \in Y$ называется пределом функции $y = f(x)$ в бесконечно удалённой точке (при $x \to \infty$), если для любого положительного ε существует такое число $P = P(\varepsilon) > 0$, что для всех значений $x \in A$, удовлетворяющих условию $|x| > P$, выполняется неравенство $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

10.21. Пусть A есть подмножество множества вещественных чисел $\mathbb{R}$. Тогда число $\overline{x}$, принадлежащее $\mathbb{R}$, называется точной верхней гранью множества A (обозначение $\overline{x} = \sup A$), если выполнены условия:
   а) для любого x, принадлежащего подмножеству A, имеет место соотношение $x \leqslant \overline{x}$;
   б) для любого x_0, принадлежащего $\mathbb{R}$, при условии, что $x_0 < \overline{x}$, найдётся x_1, принадлежащее A, такое, что $x_1 > x_0$.

10.22. Если x, y, z — действительные числа и $x > y$, то $x + z > y + z$.

10.23. Для выполнения неравенства $\sqrt{2 - 2\cos x} < \frac{1}{2}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось двойное неравенство:

$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}.$$

10.24. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует положительное число T (период функции) такое, что для любых x, принадлежащих области определения функции $f(x)$, имеет место соотношение $f(x + T) = f(x)$.

10.25. Частное от деления двух целых чисел при неравном нулю делителе есть число рациональное.

Задача 11.

Используя определение предела, доказать равенство.

11. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x+3} = \frac{1}{2}$.

11. 2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(2-x)^4} = +\infty$.

11. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n+1}{5n+2} = \frac{7}{5}$.

11. 4. $\lim\limits_{x\to 3} (5x+7) = 22$.

11. 5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^4+1} = 0$.

11. 6. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\sqrt[3]{n}} = +\infty$.

11. 7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\ln x = +\infty$.

11. 8. $\lim\limits_{x\to-2} (10x-4) = -24$.

11. 9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$.

11. 10. $\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

11. 11. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0$.

11. 12. $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{1}{(x-2)^3} = +\infty$.

11. 13. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$.

11. 14. $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$.

11. 15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}$.

11. 16. $\lim\limits_{x\to 2} 3^x = 9$.

11. 17. $\lim\limits_{x\to-7} (11+2x) = -3$.

11. 18. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 2x = 0$.

11. 19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n^3+4n} = 0$.

11. 20. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+3} = 1$.

11. 21. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sign} x)^2 = 1$.

11. 22. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_3\log_3 n = +\infty$.

11. 23. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3} = \frac{1}{2}$.

11. 24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+4}{5n+3} = \frac{3}{5}$.

11. 25. $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Задача 12.

Вычислить пределы.

12. 1. а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sin x-\sin 3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2+2x+3}{5x^2-x-4}\right)^{\frac{x^2+2x}{5x+4}}$.

12. 2. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos 2x}{\cos 4x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

12. 3. а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin 3\pi x)^{\operatorname{ctg} 2\pi x}$.

12.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-\sqrt[7]{1+5x}}{\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(2+\cos\pi x)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

12.5. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[16]{x+3}-1}{\sqrt[11]{2x+5}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{2x}{x^2-9}}$.

12.6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^{n}$.

12.7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1-\sqrt[4]{x}\right)\left(1-\sqrt[5]{x}\right)}{(1-x)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{2\pi n}{4n+1}\right)^{n^2}$.

12.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos 2x-\cos 2}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x+4}\left(\ln\left(x^2+2x+3\right)-\ln\left(x^2+5x+4\right)\right)$.

12.9. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\operatorname{tg}3x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[\sin 3x]{x^2+3x+1}$.

12.10. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+4x^2+5}\right)^{2x+7}$.

12.11. а) $\lim\limits_{x\to 625}\frac{\sqrt{x}-25}{\sqrt[4]{x}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right)^{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$.

12.12. а) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{2\pi}{x}}{\cos\frac{2\pi}{x}}\right)^{x^2}$.

12.13. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{(x+2)(x+7)}+x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin 3x\cdot\cos 2x}{1+\sin 3x\cdot\cos 6x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 2x}$.

12.14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x^2}{\sin\pi x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^3+\mathrm{e}^{2x}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

12.15. а) $\lim\limits_{x\to 125}\frac{\sqrt{x-25}-10}{\sqrt[3]{x}-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}2x}{1+\sin 4x}\right)^{\operatorname{ctg}5x}$.

12.16. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}3}{x^3-27}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}$.

12.17. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2}{x^3-8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{x^2}+3^{x^2}}{2^x+3^x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

12.18. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sec x-\sec\frac{1}{2}}{8x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+xa^x}{1+xb^x}\right)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$, $a>0$, $b>0$.

12.19. а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x^2-5x-3\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{x+1}+3^{x+1}+6^{x+1}}{11}\right)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}$.

12.20. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4+\sqrt[n]{3}}{5}\right)^n$.

12.21. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}-2\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{3x^2-2x+1}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{x^2-2}{\operatorname{tg} 3x}}$.

12.22. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)-0{,}25}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x+7)\left(\ln(2x+3)-\ln(2x+5)\right)$.

12.23. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\frac{1}{2}}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^4+x^2+1}{x^4+5x^2+2}\right)^{7x^2+3}$.

12.24. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}\,\sqrt[3]{1+5x}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2\frac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\ln^2(1+\arcsin 2x)}}$.

12.25. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+7}+x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\operatorname{tg}\frac{3x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{3x}{2}}$.

Часть 2. Методические указания к решению задач

Задача 1.

Дана функция $y = 5\arcsin(|x| - 3) + \frac{3}{2}\pi$. Указать для неё:

а) область определения $D(f)$;

б) множество значений $E(f)$;

в) особенности (чётность, нечётность, периодичность).

Построить эскиз графика функции.

Решение

Область определения функции $D(y)$ находим из условия того, что функция $\arcsin z$ определена при $z \in [-1;\, 1]$. Таким образом, имеем:

$$-1 \leqslant |x| - 3 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 2 \leqslant |x| \leqslant 4 \;\Rightarrow\; D(y) = \left\{x \in \mathbb{R}^1 : x \in [-4;\, -2] \cup [2;\, 4]\right\}.$$

Множество значений функции $E(y)$ определяем из условия, что значения функции $\arcsin z$ принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right]$. Имеем:

$$y_1 = 5\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{2}\pi = -\pi;\; y_2 = 5\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 4\pi \;\Rightarrow\; E(y) = \left\{y \in \mathbb{R}^1 : -\pi \leqslant y \leqslant 4\pi\right\}.$$

Особенности функции: в силу чётности аргумента $|x|$, сложная функция $y = 5\arcsin(|x| - 3) + \frac{3}{2}\pi$ также является чётной, значит её график симметричен относительно оси ординат OY; функция непериодическая.

В силу чётности исходной функции строим график функции $y = 5\arcsin(x - 3) + \frac{3}{2}\pi$, а затем ту часть графика, которая находится в правой полуплоскости, симметрично относительно оси OY отображаем на левую полуплоскость; все этапы построения представлены на рис. 1–5.

Задача 2.

Построить эскиз графика функции $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$.

Решение

Заметим сразу, что функция периодическая с периодом $T = 2\pi$ и чётная. Поэтому достаточно построить график на промежутке $[0;\, \pi]$, отобразить его симметрично относительно оси OY на промежутке $[-\pi;\, 0]$, затем продолжить периодически график функции на всю числовую ось.

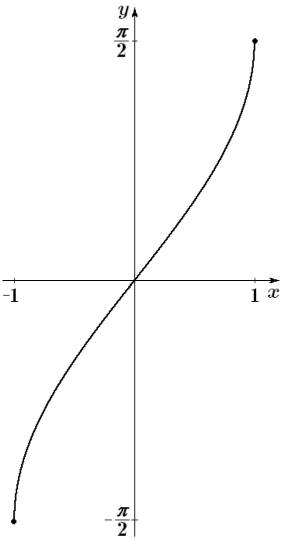


Рис. 1. График функции $y = \arcsin x$

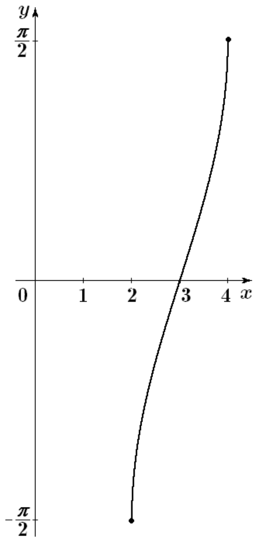


Рис. 2. График функции $y = \arcsin(x-3)$

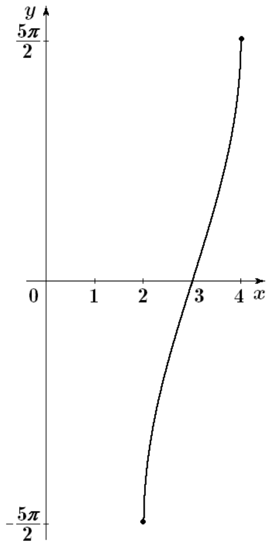


Рис. 3. График функции $y = 5\arcsin(x-3)$

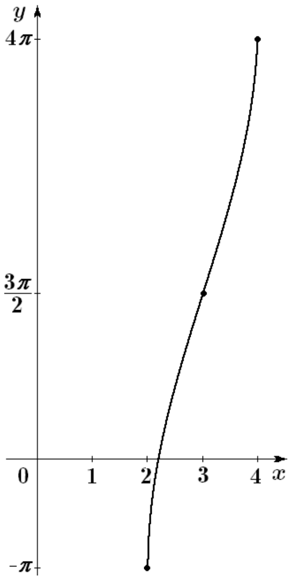


Рис. 4. График функции $y = 5\arcsin(x-3) + \frac{3\pi}{2}$

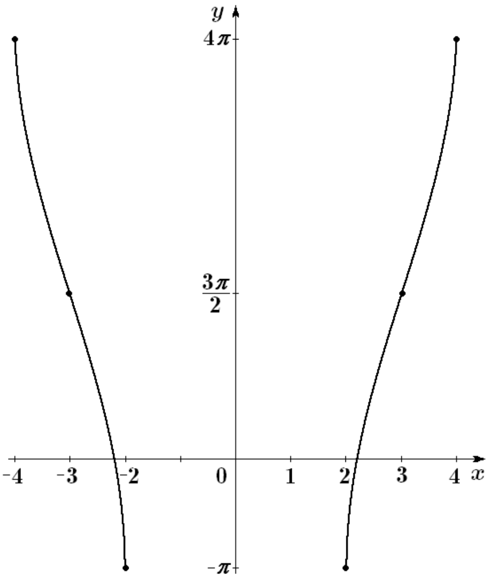


Рис. 5. График функции $y = 5\arcsin(|x|-3) + \frac{3\pi}{2}$

Сначала построим эскиз графика функции $u = \frac{1}{\cos x}$ (рис. 6). Обратим внимание, что при подходе к точке $x = -\frac{\pi}{2}$ справа, функция $y_1 = \cos x$ стремится к нулю, оставаясь положительной, значит функция $u = \frac{1}{\cos x}$ устремится к $+\infty$; при подходе слева $y_1 = \cos x$ стремится к нулю, оставаясь отрицательной, значит функция $u = \frac{1}{\cos x}$ устремится в $-\infty$.

Теперь с помощью метода суперпозиции на промежутке $[0;\,\pi]$ строим эскиз графика функции $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$. Изобразим три системы координат $(x,\,u)$, $(u,\,y)$ и $(x,\,y)$. В первой системе строим график $u = \frac{1}{\cos x}$, во второй $y = e^u$, в третьей — нужный нам график. На промежутке $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$ функция $u = \frac{1}{\cos x}$ возрастает от 1 до $+\infty$. На промежутке $[1;\,+\infty)$ функция $y = e^u$ возрастает от e до $+\infty$. Значит на промежутке $\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$ возрастает от e до $+\infty$. Далее, на $\left[\frac{\pi}{2};\,\pi\right]$ u возрастает от $-\infty$ до -1, тогда y возрастает от нуля до e^{-1} (рис. 7).

Продолжим чётным образом полученный на отрезке $[0;\,\pi]$ график на промежуток $[-\pi;\,0]$ (рис. 8). Продолжим график функции, полученный на отрезке $[-\pi;\,\pi]$, периодически на всю числовую ось; получим исходный график (рис. 9).

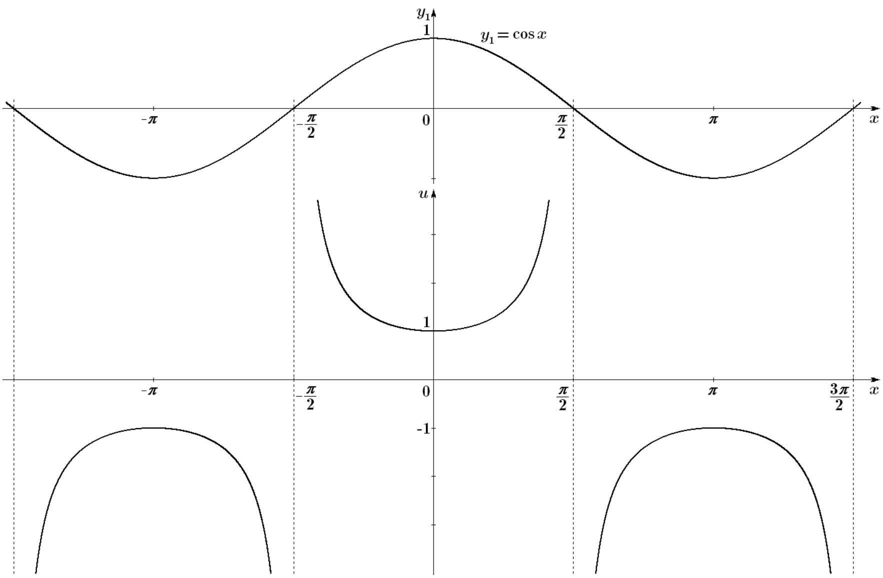


Рис. 6. График функции $u = \frac{1}{\cos x}$

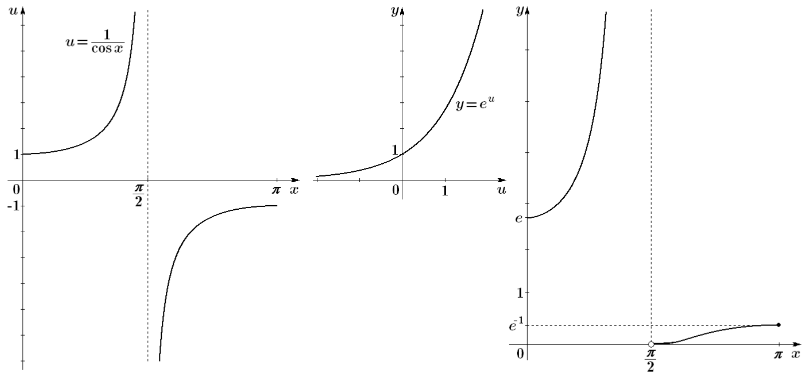


Рис. 7. График функции $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$ на $[0;\, \pi]$

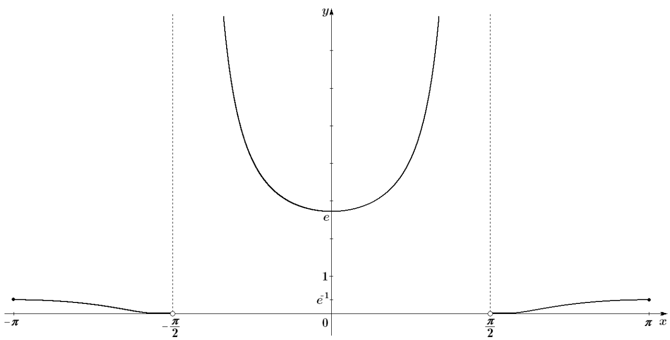


Рис. 8. График функции $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$ на $[-\pi;\, \pi]$

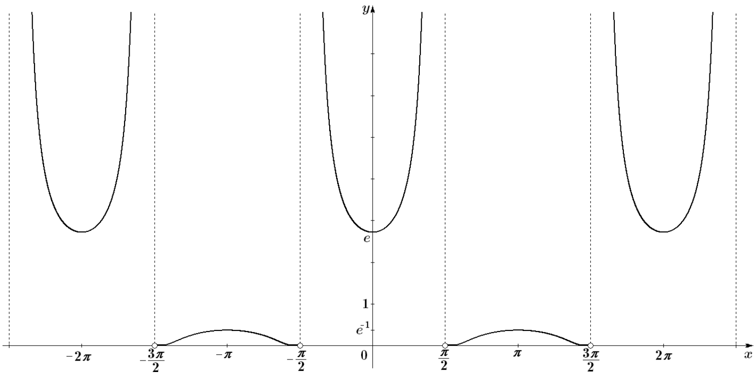


Рис. 9. График функции $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$

Задача 3.

Построить эскизы графиков функций. Для функции в пункте б) найти значения в указанных точках a, b, c. Указать для каждой из функций точки нарушения непрерывности, если они есть, и определить их тип.

а) $y = \cos x + |\cos x|$.

Решение

$$y = \cos x + |\cos x| = \begin{cases} 2\cos x, & \text{если } \cos x \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } \cos x < 0. \end{cases}$$

Удваивая неотрицательные ординаты функции $y = \cos x$ при значениях $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, и принимая $y = 0$ вне указанных отрезков, строим исходный график (рис. 10). Функция всюду непрерывна.

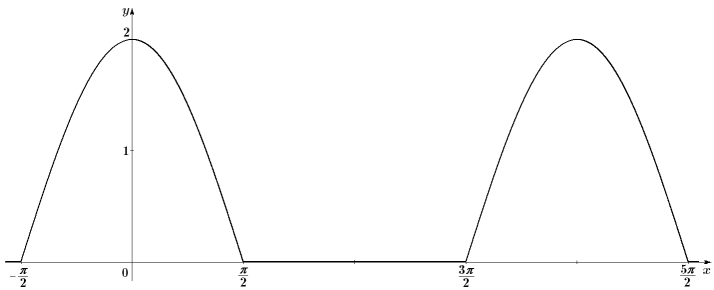


Рис. 10. График функции $y = \cos x + |\cos x|$

б) $y = \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{если } -1 \leqslant x < 0; \\ \sin^2 x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi; \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{если } \pi < x \leqslant 5; \end{cases}$

$a = -\frac{1}{2}$, $\quad b = \frac{\pi}{2}$, $\quad c = 4$.

Решение

Функция определена при $x \in [-1;\ 5]$.

1. $x \in [-1;\ 0)$ $y = x^2 + x + 1$ — парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$;
2. $x \in [0;\ \pi]$ $y = \sin^2 x$;

3. $x \in (\pi;\, 5]$ $y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ — гипербола, смещённая по оси OY на 1 вверх и по оси OX на (-1). Построение можно провести смещением осей в точку $(-1;\, 1)$. График функции изображён на рис. 11.

$$f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(x^2 + x + 1\right)\Big|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4};$$

$$f(b) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 x\Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = 1;$$

$$f(c) = f(4) = \frac{x-1}{x+1}\Bigg|_{x=4} = 0,8.$$

При $x = 0$ и $x = \pi$ функция терпит разрыв, т. к. левосторонние и правосторонние пределы не равны. В силу того, что они конечны, точка $x = 0$ — точка разрыва I рода со скачком $h = -1$, $x = \pi$ — точка разрыва I рода с $h = \frac{\pi-1}{\pi+1} \approx 0,52$.

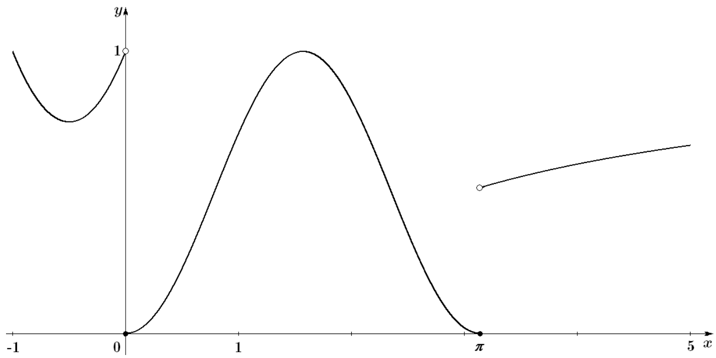


Рис. 11.

в) $y = x \operatorname{sign}\left(4 - x^2\right)$.

Решение

Функция $f(x) = 4 - x^2$ положительна в интервале $(-2;\, 2)$, отрицательна на множестве $(-\infty;\, -2) \cup (2;\, +\infty)$; зная это, строим график функции $y = \operatorname{sign}\left(4 - x^2\right)$ (рис. 12).

Методом умножения графиков функций $y = x$ и $y = \operatorname{sign}\left(4 - x^2\right)$ построим график исходной функции (рис. 13).

Точки разрыва функции $x_1 = -2$; $x_2 = 2$. Т. к. в них левосторонние и правосторонние пределы функции конечны, то это точки разрыва I рода. В точке $x_1 = -2$ скачок $h = f(x_1+0) - f(x_1-0) = -4$, в точке $x_2 = 2$ скачок $h = -4$.

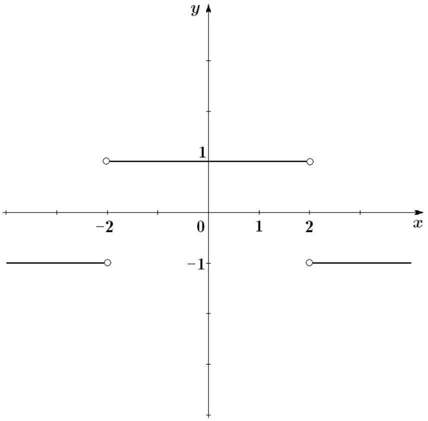


Рис. 12. График функции $y = \operatorname{sign}\left(4 - x^2\right)$

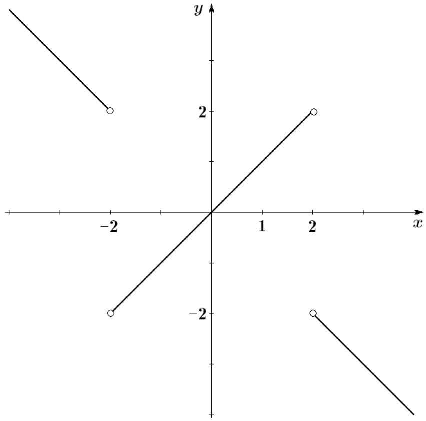


Рис. 13. График функции $y = x \operatorname{sign}\left(4 - x^2\right)$

Задача 4.

Дано уравнение параболы. С помощью выделения полного квадрата найти вершину параболы. Определить точки пересечения с осями координат. Построить кривую.

$$3y^2 - 4y + 2x - \frac{8}{3} = 0.$$

Решение

Выпишем члены, содержащие y:

$$3y^2 - 4y = 3\left(y^2 - 2\cdot\frac{2}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) = 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}.$$

Имеем

$$3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 2(x-2) + 4 - \frac{8}{3} = 0;$$

$$(x-2) = -\frac{3}{2}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2.$$

Сделаем параллельный перенос системы координат в точку $O_1\ \left(2;\ \frac{2}{3}\right)$. Тогда в новой системе координат $(X,\ O_1,\ Y)$ уравнение параболы имеет вид $X = -1,5Y^2$, где $X = x-2$, $Y = y - \frac{2}{3}$.

Таким образом, координаты вершины параболы $x_0 = 2$, $y_0 = \frac{2}{3}$. Точки пересечения с осями координат: если $x = 0$, то $3y^2 - 4y - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow y_1 = 1,8$; $y_2 = -0,5$; если $y = 0$, то $2x - \frac{8}{3} = 0$, $x = \frac{4}{3}$.

График параболы представлен на рис. 14.

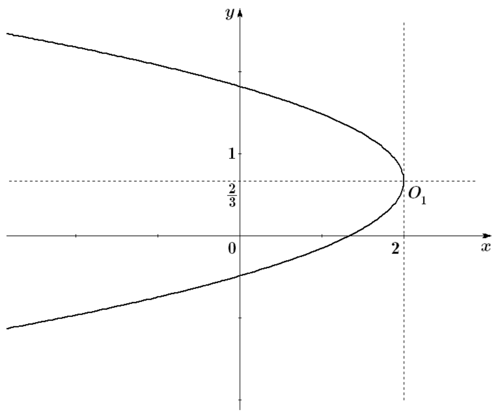


Рис. 14. График параболы $3y^2 - 4y + 2x - \frac{8}{3} = 0$

Задача 5.

а) Построить кривую в полярной системе координат. Указать область определения функции, период. Найти уравнение кривой в декартовой прямоугольной системе координат.

б) Найти уравнение кривой в полярной системе координат, указать область определения и период функции. Построить кривую.

$a = \text{const}$.

а) $\rho^2 = 9\sin 2\varphi$;

б) $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right)$.

Пояснения

В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется её расстоянием $|OM| = \rho$ от полюса O (ρ — полярный радиус — длина радиуса–вектора точки) и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью OX; φ — полярный угол точки. Угол φ считается положительным при отсчёте от полярной оси против часовой стрелки.

Если точка M имеет полярные координаты $\rho > 0$ и $\varphi > 0$, где $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то этой точке отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(\rho;\ \varphi + 2\pi k)$ и $(-\rho;\ \varphi + (2k+1)\pi)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось OX направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и её полярные координаты ρ и φ связаны формулами:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

а) $\rho^2 = 9\sin 2\varphi$.

Решение

Функция периодическая с периодом $T = \pi$. Поскольку левая часть данного уравнения не отрицательна, то $\sin 2\varphi \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Для вычисления значений ρ (ограничиваясь точностью $0{,}01$) составим табл. 1.

В силу периодичности функции линия в третьей четверти $\left(\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right)$ будет расположена симметрично относительно начала координат. Для построения графика проводим из полюса лучи, соответствующие выбранным значениям φ, и на каждом луче откладываем вычисленные значения полярного радиуса. Полученные точки соединяем плавной кривой (рис. 15). Построенная линия носит название лемнискаты Бернулли. Найдём её уравнение в декартовой системе координат. Для этого распишем $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ и подставим в уравнение линии $\rho^2 = 9\sin 2\varphi = 18\sin\varphi\cos\varphi$ выражения для ρ, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 18\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad x^2 + y^2 = \frac{18xy}{x^2+y^2};$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 18xy.$$

Таблица 1. Расчёт полярных координат точек кривой $\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$

φ	2φ	$\sin 2\varphi$	$\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$0,50$	$2,12$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$0,87$	$2,79$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$0,87$	$2,79$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$0,50$	$2,12$
$\frac{\pi}{2}$	π	0	0

б) $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right).$

Решение

Заметим, что уравнение линии содержит x и y только в чётной степени, т. е. кривая расположена симметрично относительно осей координат OX и OY.

Запишем уравнение линии в полярной системе координат, учитывая, что $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^3 = a^2\rho^2\cos^2\varphi\left(4\rho^2\cos^2\varphi + 3\rho^2\sin^2\varphi\right);$$

$$\rho^2 = a^2\cos^2\varphi\left(4\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi\right); \qquad \rho^2 = a^2\cos^2\varphi\left(3+\cos^2\varphi\right);$$

$$\rho = \pm a\cos\varphi\sqrt{3+\cos^2\varphi}.$$

Период функции $T = \pi$. Область определения $\varphi \in [0;\, 2\pi)$. Для вычисления ρ составим табл. 2 (ограничиваясь точностью $0,01$) для значений φ из первой координатной четверти.

С учётом симметрии кривой относительно осей OX и OY строим по точкам график (рис. 16).

Таблица 2. Расчёт полярных координат точек кривой $\rho = a\cos\varphi\sqrt{3+\cos^2\varphi}$

φ	$\cos\varphi$	$\cos^2\varphi$	$\sqrt{3+\cos^2\varphi}$	$\rho = a\cos\varphi\sqrt{3+\cos^2\varphi}$
0	1	1	2	$2\,a$
$\frac{\pi}{12}$	$0,96$	$0,92$	$1,98$	$1,90\,a$
$\frac{\pi}{6}$	$0,87$	$0,75$	$1,93$	$1,69\,a$
$\frac{\pi}{4}$	$0,7$	$0,49$	$1,87$	$1,31\,a$
$\frac{\pi}{3}$	$0,5$	$0,25$	$1,80$	$0,90\,a$
$\frac{5\pi}{12}$	$0,26$	$0,07$	$1,75$	$0,45\,a$
$\frac{\pi}{2}$	0	0	$1,71$	0

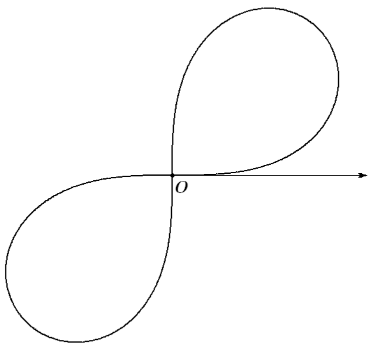


Рис. 15. График кривой $\rho^2 = 9\sin 2\varphi$

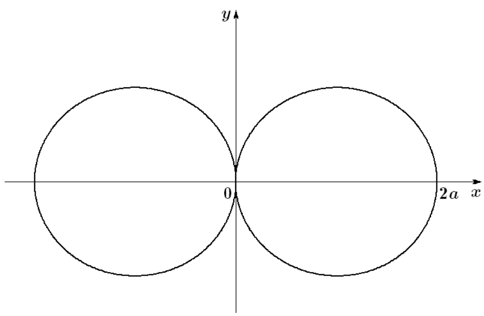


Рис. 16. График кривой $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right)$

Задача 6.

Для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ найти коэффициенты a, b, c, при которых справедливо тождество

$$f(x+2) + f(x-1) = 4x + 10.$$

Решение

Распишем правую часть заданного равенства.

$$f(x+2) + f(x-1) = a(x+2)^2 + b(x+2) + c + a(x-1)^2 + b(x-1) + c =$$

$$= 2ax^2 + 2(a+b)x + 5a + b + 2c.$$

Имеем

$$2ax^2 + 2(a+b)x + 5a + b + 2c = 4x + 10.$$

Два многочлена тождественно равны друг другу, т. е. равны при любых значениях x, тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Это даёт

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x\ \ : \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 2a = 0; \\ 2(a+b) = 4; \\ 5a + b + 2c = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; \\ 2b = 4; \\ 2 + 2c = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; \\ b = 2; \\ c = 4. \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = 2x + 4$.

Задача 7.

Описать множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$, если:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 2x + 1} \leqslant 3\right\},$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + x - 2\right) > -2\right\}.$$

Решение

Первое неравенство можно переписать в виде $\sqrt{(x-1)^2} \leqslant 3$. Используя тождество $\sqrt{a^2} = |a|$, справедливое на множестве $\mathbb{R}$, получаем равносильное неравенство $|x-1| \leqslant 3$ или $-3 \leqslant x - 1 \leqslant 3 \ \Rightarrow\ -2 \leqslant x \leqslant 4$. Таким образом, $A = [-2; 4]$.

Второе неравенство перепишем в виде

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x-2\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2>0.$$

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\frac{\left(x^2+x-2\right)}{4}>\log_{\frac{1}{2}}1,\\ x^2+x-2>0;\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\frac{\left(x^2+x-2\right)}{4}<1,\\ x^2+x-2>0;\end{cases}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-6<0,\\ x^2+x-2>0;\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}-3<x<2,\\ x<-2 \text{ или } x>1.\end{cases}$$

Множество решений последней системы неравенств (а значит, и исходного неравенства) находим как пересечение множеств $(-3;\ 2)\cap\{(-\infty;\ -2)\cup(1;\ \infty)\}$.

В результате получаем:

$$A=\{x\in\mathbb{R}:x\in[-2;\ 4]\}\,,\quad B=\{x\in\mathbb{R}:x\in(-3;\ -2)\cup(1;\ 2)\}\,.$$

Окончательный ответ:

$$A\cup B=(-3;\ 4],\quad A\cap B=(1;\ 2),$$

$$A\setminus B=\{x\in\mathbb{R}:x\in[-2;\ 1]\cup[2;\ 4]\}\,,\quad B\setminus A=(-3;\ -2).$$

Задача 8.

Доказать равенство

$$\left(\overline{A\cap B}\setminus B\right)\setminus\left(\overline{A\cup B}\setminus A\right)=A\setminus B.$$

Пояснения

Решение задач этого типа основано на использовании следующих равенств.

1. $A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$ — коммутативность.
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ — ассоциативность.
3. $A\cup A=A,\quad A\cap A=A$ — идемпотентность.

4. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $\quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — дистрибутивность.
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — формулы двойственности.
6. $A \cup (A \cap B) = A$, $\quad A \cap (A \cup B) = A$ — законы поглощения.
7. $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
8. $\overline{\overline{A}} = A$ — свойство рефлексивности.
9. $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
10. $A \cup S = S$, $\quad A \cap S = A$, S — основное (универсальное) множество.

Решение

Используя все предложенные равенства, левую часть доказываемого равенства последовательно преобразуем к виду

$$\left(\overline{A \cap B} \backslash B\right) \setminus \left(\overline{A \cup B} \backslash A\right) = \left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap \overline{B}\right) \setminus \left(\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cap \overline{A}\right) =$$

$$= \overline{B} \setminus \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \overline{B} \cap (A \cup B) = \left(\overline{B} \cap A\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \varnothing = A \backslash B.$$

Задача 9.

Записать приведённое высказывание, не используя символы математической логики. Установить, истинно оно или ложно (буквами a, b обозначены действительные числа).

$$\forall f(x) \in C[a;\, b] \quad \exists\, x_0 \in [a;\, b]: \quad f\,(x_0) = 0.$$

Решение

Какова бы ни была функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a;\, b]$, на этом отрезке найдётся точка, в которой функция обращается в нуль.

Высказывание ложное. Например, функция $y = e^x$, непрерывная на любом отрезке числовой оси, никогда в нуль не обращается.

Задача 10.

Используя символы математической логики, записать высказывание.

Элемент $x \in X$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое натуральное число n_0, зависящее от ε, начиная с которого выполняется неравенство $\rho\,(x_n,\, x) < \varepsilon$.

Решение

Приведённое высказывание можно выразить следующей формулой:

$$\left(x = \lim_{n\to\infty} x_n\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geqslant n_0 \;\Rightarrow\; \rho\,(x_n,\, x) < \varepsilon)\,.$$

Задача 11.

С помощью определения предела доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2+4} = 0.$$

Решение

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists p(\varepsilon) > 0: \;\forall x: |x| > p \;\Rightarrow\; |f(x) - a| < \varepsilon.$$

В нашем случае:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2+4} = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\; \exists p > 0: \;\forall x: |x| > p \;\Rightarrow\; \left|\frac{\sin x}{x^2+4}\right| < \varepsilon.$$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2+4}\right| = \frac{|\sin x|}{x^2+4} \leqslant \frac{1}{x^2+4} \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad p \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Итак, $\forall\varepsilon > 0$ найдено $p(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}: \;\forall x: |x| > p \;\Rightarrow\; \left|\frac{\sin x}{x^2+4}\right| < \varepsilon \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2+4} = 0.$$

Задача 12.

Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\frac{3\pi}{2}x^2}{\ln\left(2x-\sqrt[7]{x}\right)}$.

Решение

При решении используем известные отношения: $1+\sqrt[m]{1+\alpha}\sim\frac{1}{m}\alpha$, $\sin\alpha\sim\alpha$, $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, $\alpha\to0$.

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{3\pi}{2}x^2}{\ln\left(2x-\sqrt[7]{x}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=[y=x-1]=\lim_{y\to0}\frac{\cos\frac{3\pi}{2}(y+1)^2}{\ln\left(2y+2-\sqrt[7]{y+1}\right)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\left(2y+y^2\right)\right)}{\ln\left(1+2y+1-\sqrt[7]{y+1}\right)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\left(2y+y^2\right)}{2y+1-\sqrt[7]{y+1}}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\frac{3\pi}{2}\left(2y+y^2\right)}{2y-\frac{1}{7}y+o(y)}=\frac{3\pi}{2}\lim_{y\to0}\frac{y(y+2)}{\frac{13}{7}y+o(y)}=\frac{21\pi}{13}.$$

б) $\lim\limits_{x\to3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}}$.

Решение

$$\lim_{x\to3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}}=[1^\infty]=\lim_{x\to3}\left(1+1-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to3}\left(1-\frac{x}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}}=e^A.$$

$$A=\lim_{x\to3}\left(1-\frac{x}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}=[x-3=t]=\lim_{t\to0}\left(1-\frac{t+3}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}(t+3)\right)=$$

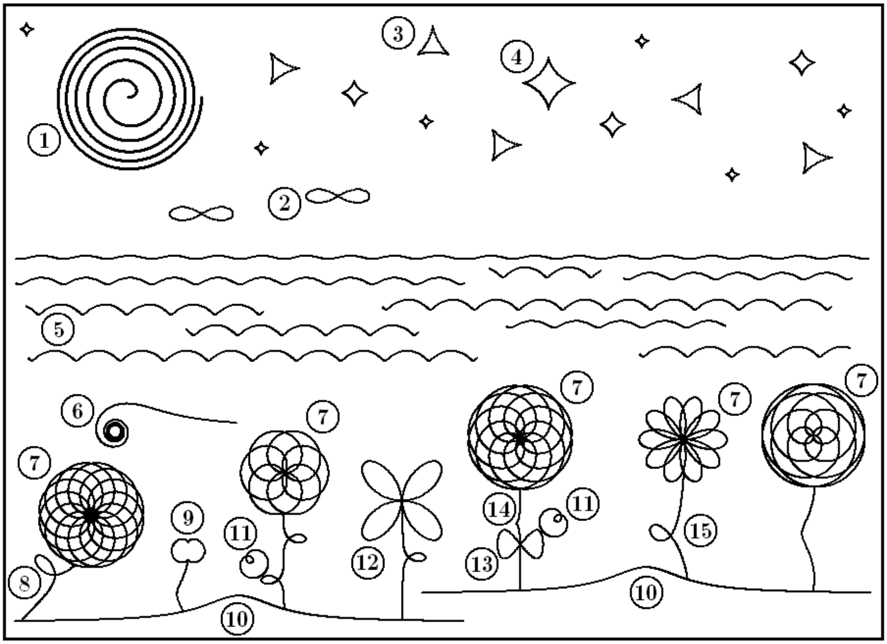
$$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}t\right)=-\frac{1}{3}\lim_{t\to0}t\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}t=-\frac{1}{3}\lim_{t\to0}\frac{t}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}t}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\pi}=-\frac{1}{\pi}.$$

Итак,

$$\lim_{x\to3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}}=e^{-\frac{1}{\pi}}.$$

Приложение

Некоторые замечательные кривые



1. *Архимедова спираль*: $\rho = k\varphi$.

2. *Лемниската Бернулли*: $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$; $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.

3. *Дельтоида*: $\left(x^2+y^2\right)^2 + 18\left(x^2+y^2\right) = 8x^3 - 24y^2x + 27$.

4. *Астроида*: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$; $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$.

5. *Трохоиды (укороченные циклоиды)*: $x = rt - h\sin t$, $y = r - h\cos t$.

6. *Жезл*: $\rho = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}$.

7. *Роза*: $\rho = a\sin k\varphi$.

8. *Декартов лист*: $x^3 + y^3 = 3axy$; $\quad \rho = \frac{3a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$.

9. *Нефроида*: $\left(x^2 + y^2 - 4a^2\right)^3 = 108a^4y^2$.

10. *Верзьера Аньези*: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$.

11. *Улитка Паскаля*: $\left(x^2 + y^2 - ay\right)^2 = h^2\left(x^2 + y^2\right)$; $\quad \rho = h - a\sin\varphi$.

12. *Цветок жасмина — четыре петли декартова листа.*

13. *Лемниската Жероно*: $x^4 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$.

14. *Циссоида Диокла*: $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$; $\quad \rho = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$.

15. *Строфоида*: $y^2(x - a) - 2x^2y\cos\alpha + x^2(x + a) = 0$; $\quad \rho = -\frac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$.

$$a,\ h,\ k,\ r,\ \alpha \text{ — const.}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Архипов, Г. И.** Лекции по математическому анализу [Текст] / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. — М.: Дрофа, 2004. — 640 с.
2. **Белов, Ю. А.** Элементы теории множеств и математической логики [Текст]: Учеб. пособие / Ю. А. Белов. Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2002. — 60 с.
3. **Виноградова, И. А.** Задачи и упражнения по математическому анализу [Текст]. Т. 1. / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М.: Высшая школа, 2000. — 725 с.
4. **Вирченко, Н. А.** Графики функций [Текст] / Н. А. Вирченко, Н. И. Ляшко, К. И. Швецов. — Киев: Наукова думка, 1979. — 320 с.
5. **Камынин, Л. И.** Курс математического анализа [Текст]. Т. 1. / Л. И. Камынин. — М.: Изд. МГУ, 2001. — 432 с.
6. **Кудрявцев, Л. Д.** Курс математического анализа [Текст]. Т. 1. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: Дрофа, 2003. — 704 с.
7. **Кудрявцев, Л. Д.** Сборник задач по математическому анализу [Текст]. Т. 1. / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.
8. **Куратовский, К.** Теория множеств [Текст] / К. Куратовский, А. Мостовский. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
9. **Шилов, Г. Е.** Математический анализ. Функции одного переменного [Текст] / Г. Е. Шилов. — СПб.: Лань, 2002. — 880 с.

Оглавление

Введение в математический анализ
Типовой расчёт

Составители
ПАВЛОВА Галина Александровна,
СМЫСЛОВ Андрей Юрьевич,
ГОРБУНОВ Сергей Владимирович

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 31.03.2011
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 2,32. Уч.-изд. л. 2,27
Тираж 70 экз. Рег. №54/11

Заказ №

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус.

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Корпус № 8.