С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Самара 2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

С. Н. КУБЫШКИНА, Е. Ю. АРЛАНОВА

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Самара 2016

Печатается по решению редакционно–издательского совета Самарского государственного технического университета

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
К88

Кубышкина С. Н.
К88 Основные методы интегрирования учебно-методическое пособие / *С. Н. Кубышкина, Е. Ю. Арланова* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2016. – 57 с.

Содержит 30 вариантов по 4 задачи, относящиеся к следующим разделам курса математики: интегрирование путем замены переменной, интегрирование по частям, интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен, интегрирование рациональных дробей.

Приведен демонстрационный вариант задания с решениями всех типовых задач и методическими указаниями.

Типовой расчет предназначен для самостоятельной работы студентов–бакалавров первого курса, изучающих математику один год.

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
К88

Рецензент: *кан. физ.–мат. наук. Небогина Е. В.*

Предисловие

Математика — одна из базовых дисциплин в общем образовании инженера, профессиональный уровень которого во многом зависит от того, насколько хорошо он освоил математический аппарат и умеет ли он его использовать при решении различных задач.

Задачами дисциплины выступает приобретение в рамках освоения теоретического и практического материала знаний основных математических понятий и методов, навыков использования основ математического моделирования, необходимых при решении практических задач, формирование личности студентов, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению.

Предлагаемое пособие посвящено методам вычисления неопределенных интегралов от действительной функции одной переменной. Оно помогает развить у студента математическое мышление, требовательность, расширить математический кругозор и освоить основные методы интегрирования неопределенного интеграла. Часть задач создана авторами, но в пособие также включены задачи из известных изданий, список которых приведен в библиографии. Учебное пособие снабжено методическими указаниями с подробными решениями и справочными материалами.

Порядок выполнения и защиты учебного задания

Подробное и обоснованное решение задач необходимо представить в письменном виде. Нумерация задач должна совпадать с их нумерацией в учебном задании. Во время защиты студент должен уметь отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения примеров из задания, решать примеры аналогичного типа.

Условия задач

Студенту необходимо решить 4 задачи. **В задаче 1** надо найти интегралы, применяя подходящие подстановки. **В задаче 2** вычислить интегралы, используя формулу интегрирования по частям. **В задаче 3** найти интегралы, используя прием выделения полного квадрата. **В задаче 4** разложить дробь на элементарные дроби, для нахождения неизвестных применить метод неопределенных коэффициентов и частных значений.

Так как интегрирование — действие, обратное дифференцированию, то каждому правилу дифференцирования должно соответствовать некоторое правило интегрирования. Поэтому все найденные первообразные от функции можно проверить дифференцированием.

Теоретические вопросы

1. Определение первообразной функции $f(x)$.
2. Что называется неопределенным интегралом от $f(x)$?
3. Что такое подынтегральное выражение и подынтегральная функция?
4. Основные свойства неопределенного интеграла.
5. В чем заключается сущность метода подстановки?
6. На каком свойстве дифференциала основан метод подстановки?

7. На использовании какой формулы основан метод интегрирования по частям?
8. Назовите классы интегралов, которые можно вычислить по частям.
9. Какая функция называется рациональной? Приведите пример.
10. Как выделить целую часть рациональной дроби? Приведите пример.
11. На какие простейшие дроби можно разложить правильную рациональную дробь?
12. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений?

Часть 1. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{8-x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-\sqrt{x+1}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-9}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-e^{2x}}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{3-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int x\sin(3x+7)dx$; б) $\displaystyle\int (2x-1)\operatorname{arctg} x dx$;

в) $\displaystyle\int (x+2)3^x dx$; г) $\displaystyle\int (3x+1)\ln 2x dx$;

д) $\displaystyle\int \arcsin(7-x)dx$; е) $\displaystyle\int e^{-3x}\sin x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+12x+6}$; б) $\displaystyle\int \frac{(4x-8)dx}{x^2-10x+25}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{40+12x-x^2}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2-12x+40}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(x-5)^4}$; б) $\displaystyle\int \frac{5xdx}{(2x+1)(x+7)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(2x^3+1)dx}{x^2-x-6}$; г) $\displaystyle\int \frac{(2x^5+6x^3-1)dx}{x^4+3x^2}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(3x^2+5)dx}{x(x^2+3)}$; е) $\displaystyle\int \frac{(x^2+5)dx}{(x+1)(2x^2+1)}$.

Вариант 2

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x+3)\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sqrt{x+1}}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}dx$; е) $\displaystyle\int x\sqrt{9-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int \arccos 5x dx$; б) $\displaystyle\int (3-2x)\sin 3x dx$;

в) $\displaystyle\int e^{-6x}(x+1)dx$; г) $\displaystyle\int (2x-1)\operatorname{arctg} x dx$;

д) $\displaystyle\int (x-1)\ln x dx$; е) $\displaystyle\int 3^x \sin 2x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+6x+14}$; б) $\displaystyle\int \frac{(x+6)dx}{x^2-8x+13}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(4-2x)dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x+10)^5}$; б) $\displaystyle\int \frac{6xdx}{(x-3)(x+2)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3+14)dx}{x^2+4x+3}$; г) $\displaystyle\int \frac{(4x^4+2x^2-x-3)dx}{x(x^2-1)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{2x^4dx}{x^4-1}$; е) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(1+x^2)^2}$.

Вариант 3

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\sqrt{x+1}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{3x}}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$; е) $\displaystyle\int x\sqrt{5-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int \arcsin 6x dx$; б) $\displaystyle\int (7x+2)\sin 2x dx$;

в) $\displaystyle\int (x-4)\ln x dx$; г) $\displaystyle\int (2x+3)e^{-5x}dx$;

д) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg}\frac{x}{6}dx$; е) $\displaystyle\int e^{3x}\sin 3x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-8x+25}$; б) $\displaystyle\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-6x+24}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(4-2x)dx}{\sqrt{7-8x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x-4)^7}$; б) $\displaystyle\int \frac{3xdx}{(x+2)(x-4)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^5+3x^4+7)dx}{x^3+4x}$; г) $\displaystyle\int \frac{(4x^3+3x+2)dx}{x(x+1)^2}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$.

Вариант 4

1.

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}}$; б) $\int \frac{dx}{4+\sqrt{x-2}}$;

в) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-x}+7}}$;

д) $\int \frac{dx}{(x+6)\sqrt{2x}}$; е) $\int x\sqrt{x+8}dx$.

2.

а) $\int (x+6)\sin(2+x)dx$; б) $\int \arcsin(2-7x)dx$;

в) $\int \operatorname{arcctg}\sqrt{3}xdx$; г) $\int xe^{\sqrt{5}x}dx$;

д) $\int \arccos\frac{x}{4}dx$; е) $\int e^{-x}\sin(x+3)dx$.

3.

а) $\int \frac{x+1}{x^2+3x+5}dx$; б) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^2-6x+10}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+7}}$; е) $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.

4.

а) $\int \frac{10dx}{(3x-15)^4}$; б) $\int \frac{10xdx}{(x-2)(5x+7)}$;

в) $\int \frac{(3x^3+3x+4)dx}{(x^2+1)x}$; г) $\int \frac{2x^2+4x+5}{(x-1)(x+1)^2}dx$;

д) $\int \frac{(4x^2+3)dx}{x^3+3x}$; е) $\int \frac{3x^3dx}{x^3-1}$.

Вариант 5

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-10}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{8+\sqrt{x-1}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{8-x^2}}{x}dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}+3}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(6x+1)\sqrt{x}}$;

е) $\displaystyle\int (9-x)\sqrt{x+6}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (3x+1)\cos(2-x)dx$;

б) $\displaystyle\int \ln(1-x^2)dx$;

в) $\displaystyle\int (6+x)\operatorname{arctg}5xdx$;

г) $\displaystyle\int e^{-x}\cos 3xdx$;

д) $\displaystyle\int x\arcsin 3xdx$;

е) $\displaystyle\int (5x-1)e^{1-2x}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-12x+39}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(4x-7)dx}{x^2-12x+38}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+12x+3}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(4-5x)dx}{\sqrt{1-12x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{11dx}{(x-1)^9}$;

б) $\displaystyle\int \frac{8xdx}{(x+3)(5x-1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(2x^3-5x^2+8)dx}{x(x^2-4)}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x^2+x-3)dx}{x^4+2x^2-3}$;

д) $\displaystyle\int \frac{4dx}{(x+1)(x^2+2)}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)dx}{x^2+x-2}$.

Вариант 6

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+5}-5}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-e^x}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(7x+1)\sqrt{x}}$; е) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{1-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int 3x\sin(7x+3)dx$; б) $\displaystyle\int x6^x dx$;

в) $\displaystyle\int (x+2)\operatorname{arctg} 3x dx$; г) $\displaystyle\int (5x+2)\ln x dx$;

д) $\displaystyle\int \arccos(3-5x)dx$; е) $\displaystyle\int e^{5x}\cos 2x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+12x+24}$; б) $\displaystyle\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+17}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+30}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{30+8x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(7x+12)^5}$; б) $\displaystyle\int \frac{7xdx}{(x+1)(2x-1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2+x-6}$; г) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)(x^2+2)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(x^3-x+2)dx}{x^3(x+2)}$; е) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

Вариант 7

1.

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$; б) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-1}}$;

в) $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{2x}}$; г) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+5}}$; е) $\int x\sqrt[3]{x+1}dx$.

2.

а) $\int (2-3x)\cos 7x dx$; б) $\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{7} dx$;

в) $\int (9x-5)\ln 3x dx$; г) $\int (3x+1)e^{2x}dx$;

д) $\int (4x+1)\arcsin 5x dx$; е) $\int e^{-x}\cos 2x dx$.

3.

а) $\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$; б) $\int \frac{(3x+7)dx}{x^2+6x+37}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+17}}$; г) $\int \frac{(1-5x)dx}{\sqrt{17-6x-x^2}}$.

4.

а) $\int \frac{11dx}{(5x+7)^6}$; б) $\int \frac{5xdx}{(x-3)(x+5)}$;

в) $\int \frac{6x^2dx}{(x+1)(x+2)^2}$; г) $\int \frac{(4x^3-2)dx}{x^3+x}$;

д) $\int \frac{(2x^2+3x+1)dx}{x^3+1}$; е) $\int \frac{3x^2dx}{(x^2+3)(x+1)}$.

Вариант 8

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{8-x^2}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{-x}}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x}}$;

е) $\displaystyle\int x\sqrt{x+5}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (2x+3)e^{2x}dx$;

б) $\displaystyle\int (x+5)\cos 3x dx$;

в) $\displaystyle\int \arccos\frac{2x}{3}dx$;

г) $\displaystyle\int e^{6x}\sin x dx$;

д) $\displaystyle\int (x+2)\operatorname{arcctg} x dx$;

е) $\displaystyle\int (3x+1)\cdot 5^{3x}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(3x-5)dx}{x^2+8x+20}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+1}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(6x+5)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{11dx}{(5x-8)^8}$;

б) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(x+2)(x-1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+2)(x+1)}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x^3+2x^2+x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(x-3)dx}{x^3+x^2-2x}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(4x^2+1)dx}{(x+1)(x^2+4)}$.

Вариант 9

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\sqrt{2x-7}}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+8}}{x}dx$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt{6-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int xe^{3-x}dx$; б) $\displaystyle\int (3x+4)\cos(x-3)dx$;

в) $\displaystyle\int \arccos\frac{3x}{2}dx$; г) $\displaystyle\int (4x+3)\ln 2xdx$;

д) $\displaystyle\int (1-2x)\,\mathrm{arctg}\,xdx$; е) $\displaystyle\int 5^x\sin 5xdx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-9x+5}$; б) $\displaystyle\int \frac{(3x-7)dx}{x^2+6x+16}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+5}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(4-3x)dx}{\sqrt{5+10x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x-7)^6}$; б) $\displaystyle\int \frac{7xdx}{(x+3)(3x+2)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(4x^3+x^2+2)dx}{(x-1)^2(x-2)}$; г) $\displaystyle\int \frac{(2x^2-x+1)dx}{(x^2+1)x^2}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(x^2-5)dx}{x^2-3x}$; е) $\displaystyle\int \frac{(2x^3+3)dx}{(x^2+x+2)(x^2+1)}$.

Вариант 10

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{7+\sqrt{x+7}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{8+x^2}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+6}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-x}-4}}$; е) $\displaystyle\int x\sqrt{10+x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (4-3x)\sin 5x dx$; б) $\displaystyle\int (3x+1)e^{-2x}dx$;

в) $\displaystyle\int \operatorname{arcctg}\frac{5x}{3}dx$; г) $\displaystyle\int x^2\ln x dx$;

д) $\displaystyle\int e^{-2x}\sin x dx$; е) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg}\frac{x}{6}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^2-12x-3}$; б) $\displaystyle\int \frac{(5x-3)dx}{2x^2+3x+2}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+16x+3}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(3x-4)dx}{\sqrt{4x^2+16x-18}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(4x+7)^3}$; б) $\displaystyle\int \frac{7xdx}{(x-3)(2x+1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(3x^2+x+16)dx}{(x-1)(x^2+9)}$; г) $\displaystyle\int \frac{(x^3-6x^2-10)dx}{(x+1)(x+2)^2}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(4x-7)dx}{x^3-4x^2+4x-16}$; е) $\displaystyle\int \frac{(3x^2+3x+1)dx}{x^3+1}$.

Вариант 11

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+7}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+12}}{x}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-11}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sqrt{3x-1}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-5}}$;

е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{3-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (3-2x)\sin(x+5)dx$;

б) $\displaystyle\int x\ln(1-3x)dx$;

в) $\displaystyle\int \arcsin(2x-3)dx$;

г) $\displaystyle\int e^{4x}\sin 3x dx$;

д) $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{3}dx$;

е) $\displaystyle\int (3x+1)e^{-2x}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-6x+18}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(3x+5)dx}{10-4x+x^2}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+16x-18}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{18+16x-4x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x-2)^4}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(7x+5)dx}{x^2-2x-8}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3+9x^2+21x+21)dx}{(x+3)^2(x^2+3)}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x^2+2)dx}{x^2-x}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(x^3+6x^2+13x+9)dx}{(x+1)(x+2)^2}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(4x^3+5)dx}{x^2-x+6}$.

Вариант 12

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5+x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(7x+1)\sqrt{x}}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-1}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{11+\sqrt{x+2}}$; е) $\displaystyle\int x\sqrt{5+x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (3x+7)\cos 5x dx$; б) $\displaystyle\int \arccos(2-3x)dx$;

в) $\displaystyle\int (3x-5)2^x dx$; г) $\displaystyle\int x\ln^2 x dx$;

д) $\displaystyle\int \operatorname{arcctg}\sqrt{2}x dx$; е) $\displaystyle\int e^{6x}\sin 3x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{7x^2+14x+7}$; б) $\displaystyle\int \frac{(2x-3)dx}{x^2+8x+45}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(3x-7)dx}{\sqrt{6+4x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{4dx}{(3x+1)^5}$; б) $\displaystyle\int \frac{(7x+2)dx}{(x+3)(x-5)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^4-3x+1)dx}{x(x-1)^2}$; г) $\displaystyle\int \frac{(x^5+x^4-1)dx}{x^3-4x}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(3x^3+4x^2+6x)dx}{(x^2+2)(x^2+2x+2)}$; е) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^4+x^2-2}$.

Вариант 13

1.

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{x}}$;

в) $\int \frac{\sqrt{x^2-7}}{x}dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-e^{-2x}}}$;

д) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{5x}}$; е) $\int x^2\sqrt[3]{8+x}dx$.

2.

а) $\int (4x-1)\sin 7x dx$; б) $\int x\ln x^2 dx$;

в) $\int x \operatorname{arctg} 5x dx$; г) $\int 3xe^{3x+1}dx$;

д) $\int 3^x \cos 8x dx$; е) $\int \operatorname{arcctg}\frac{x}{3}dx$.

3.

а) $\int \frac{dx}{4x^2-12x+48}$; б) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+10x+35}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$; г) $\int \frac{(4-2x)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

4.

а) $\int \frac{5dx}{(3x-13)^5}$; б) $\int \frac{(4x+1)dx}{(x+1)(x-3)}$;

в) $\int \frac{(2x^2+3x+1)dx}{x^3-1}$; г) $\int \frac{(x^3+x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+2)}$;

д) $\int \frac{(x^3+3x^2-12)dx}{(x-4)(x-2)x}$; е) $\int \frac{(3x^2-2)dx}{(x^2+5)x}$.

Вариант 14

1.

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-12}}$;

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+13}}$;

в) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx$;

г) $\int \frac{dx}{12+\sqrt{x}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}+5}}$;

е) $\int x^2\sqrt{15-x}dx$.

2.

а) $\int (3x+7)e^{x-2}dx$;

б) $\int \arcsin 4x dx$;

в) $\int (3x+2)\cos\frac{x}{2}dx$;

г) $\int \frac{\ln x}{x^4}dx$;

д) $\int x\arccos 5x dx$;

е) $\int e^x\sin(x+2)dx$.

3.

а) $\int \frac{dx}{x^2+12x+44}$;

б) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^2-12x+44}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$;

г) $\int \frac{(3-7x)dx}{\sqrt{10+6x-x^2}}$.

4.

а) $\int \frac{4dx}{(5x+11)^8}$;

б) $\int \frac{(5x+1)dx}{(x+2)(3x+1)}$;

в) $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^2+2x}$;

г) $\int \frac{(2x^3+2x^2+2x+1)dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$;

д) $\int \frac{(2x^3+x^2+7x+12)dx}{x(x+3)(x-1)}$;

е) $\int \frac{(x^3-2x+1)dx}{x^2+4x}$.

Вариант 15

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(7x+1)\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{10-x^2}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+\sqrt{x-5}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}+5}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt{16+x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int 2^x \cos x dx$; б) $\displaystyle\int (3x+4)\ln x dx$;

в) $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{7}dx$; г) $\displaystyle\int (x^2+2)\ln x dx$;

д) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} 5x dx$; е) $\displaystyle\int e^{\sqrt{4x+1}}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+18x+30}$; б) $\displaystyle\int \frac{(3x+4)dx}{x^2-4x+5}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x-5}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(3-4x)dx}{\sqrt{5-12x-4x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{5dx}{(3x-7)^6}$; б) $\displaystyle\int \frac{(x^3-1)dx}{x^2+x}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{x^4-x^2}$; г) $\displaystyle\int \frac{(4x^2+3x+4)dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{4dx}{(2+x^2)^2}$; е) $\displaystyle\int \frac{(x^3+3x^2-12)dx}{(x-4)(x-3)(x-2)}$.

Вариант 16

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-6}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{5-\sqrt{2x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{5-x^2}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(8x+1)\sqrt{x}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-2x}+2}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (x+2)\ln 3x dx$; б) $\displaystyle\int (2-3x)e^{7x}dx$;

в) $\displaystyle\int \arccos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$; г) $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{7}dx$;

д) $\displaystyle\int 3^x\cos 2x dx$; е) $\displaystyle\int e^{\sqrt{7x}}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{3x^2-24x+57}$; б) $\displaystyle\int \frac{(5x-1)dx}{x^2-8x+19}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-3x+5}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{8xdx}{(x^2-5)^3}$; б) $\displaystyle\int \frac{(10x+1)dx}{(x+2)(5x+1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^4-x+1)dx}{x^2-5x}$; г) $\displaystyle\int \frac{(2x^2-x+1)dx}{(x^2+3)(x^2+1)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(3x^3+4x-1)dx}{(x+2)^2(x^2+x+1)}$; е) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

Вариант 17

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5+x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{6-\sqrt{x+1}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-6}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-e^{-3x}}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt{9+x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (5x-1)\sin 7x dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}dx$;

в) $\displaystyle\int x\ln(9-x)dx$; г) $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{9}dx$;

д) $\displaystyle\int e^{7x}\sin x dx$; е) $\displaystyle\int e^{\sqrt{1-x}}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-20x+58}$; б) $\displaystyle\int \frac{(4x-1)dx}{x^2-10x+29}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+25}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{25-8x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{3xdx}{(x^2-8)^9}$; б) $\displaystyle\int \frac{(6x+1)dx}{(x-4)(2x+3)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3+x+1)dx}{x^2-4x}$; г) $\displaystyle\int \frac{(x^3+1)dx}{(x^2-x+1)(x^2+1)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(x^3+4x^2+2)dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$; е) $\displaystyle\int \frac{(4x^3+2x^2+1)dx}{(x^2-4)(x+1)}$.

Вариант 18

1.

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$;

б) $\int \frac{\sqrt{x^2+7}}{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+11}}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-6}}$;

д) $\int \frac{dx}{12+\sqrt{x}}$;

е) $\int x^2\sqrt{3-x}dx$.

2.

а) $\int \ln(x^2+7)dx$;

б) $\int (3x+5)\cos 6x dx$;

в) $\int x \operatorname{arcctg} 3x dx$;

г) $\int (3x^2-1)e^x dx$;

д) $\int e^{-x}\cos x dx$;

е) $\int \arcsin(1-3x)dx$.

3.

а) $\int \frac{dx}{4x^2+16x+100}$;

б) $\int \frac{(3x+7)dx}{x^2+6x+27}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x-3}}$;

г) $\int \frac{(4-2x)dx}{\sqrt{3-10x-x^2}}$.

4.

а) $\int \frac{10dx}{(3x+8)^7}$;

б) $\int \frac{(4x^3-2)dx}{x^3+x}$;

в) $\int \frac{(2x^2+3x+1)dx}{x^3+1}$;

г) $\int \frac{(4x^3-x^2+2)dx}{(x+2)^2(x^2+1)}$;

д) $\int \frac{(x^3-6x^2-8)dx}{x(x+2)^2}$;

е) $\int \frac{(5x^2+3x+2)dx}{(x^2+3)(x^2+4)}$.

Вариант 19

1.

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{14+x^2}}$;

б) $\int \frac{dx}{(7x+2)\sqrt{x}}$;

в) $\int \frac{dx}{5-\sqrt{x+2}}$;

г) $\int \frac{\sqrt{x^2+11}}{x}dx$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-x}-2}}$;

е) $\int (x+3)\sqrt{2+x}dx$.

2.

а) $\int (3-2x)\cos 3x dx$;

б) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;

в) $\int (3x+1)\operatorname{arcctg} x dx$;

г) $\int x^2 e^{1-x}dx$;

д) $\int \arcsin\frac{x}{10}dx$;

е) $\int 3^{-x}\cos x dx$.

3.

а) $\int \frac{dx}{x^2-8x+48}$;

б) $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2-12x+24}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+16}}$;

г) $\int \frac{(4-7x)dx}{\sqrt{16-4x-x^2}}$.

4.

а) $\int \frac{5xdx}{3(x^2+7)^6}$;

б) $\int \frac{(3x+2)dx}{(2x-1)(x-3)}$;

в) $\int \frac{(x^3-x+1)dx}{x^2+4x}$;

г) $\int \frac{(4x^2+3)dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$;

д) $\int \frac{(4x^3+2x+3)dx}{(x^2+3)x^2}$;

е) $\int \frac{(x^3-6x^2+11x-10)dx}{(x+2)(x-2)^3}$.

Вариант 20

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3+x^2}}$;   б) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$;   г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$;

д) $\displaystyle\int \sqrt{e^x+5}dx$;   е) $\displaystyle\int x\sqrt{x+12}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (5-4x)\cos 2x dx$;   б) $\displaystyle\int (x+1)\ln 2x dx$;

в) $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{4}dx$;   г) $\displaystyle\int (x^2+4)e^x dx$;

д) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 7x dx$;   е) $\displaystyle\int (x+5)\,\mathrm{arctg}\,5x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+14x+38}$;   б) $\displaystyle\int \frac{(6x-7)dx}{x^2-16x+100}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+7}}$;   г) $\displaystyle\int \frac{(4-5x)dx}{\sqrt{7+12x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(5x+9)^8}$;   б) $\displaystyle\int \frac{9xdx}{(2x+3)(x-1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^4+1)dx}{(x+1)(x^2+1)}$;   г) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x+1)^2(x+2)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-x^2+2x-2}$;   е) $\displaystyle\int \frac{(3x^4-5x^2-8)dx}{x(x^2-4)}$.

Вариант 21

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{10-x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{11+\sqrt{x+1}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(6x-1)\sqrt{x}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{5-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{7}+1\right)\cos\frac{x}{7}dx$; б) $\displaystyle\int (2-3x)e^{3x}dx$;

в) $\displaystyle\int x\ln(2x+3)dx$; г) $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{3}dx$;

д) $\displaystyle\int 7x\,\mathrm{arcctg}\,\sqrt{7}x dx$; е) $\displaystyle\int e^x\cos(1-x)dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+24x+60}$; б) $\displaystyle\int \frac{(8x+7)dx}{x^2+8x+20}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+10}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(7x+4)dx}{\sqrt{10-4x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{9dx}{(3x-5)^8}$; б) $\displaystyle\int \frac{(9x+1)dx}{(x-2)(x-4)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^5+x-1)dx}{x^2+3x}$; г) $\displaystyle\int \frac{(4x^3+x^2+2)dx}{(x-1)(x^2+2)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(4x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)(x-2)}$; е) $\displaystyle\int \frac{(x^3+6x^2-10)dx}{(x+1)(x+5)^3}$.

Вариант 22

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25+x^2}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+5}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x}dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{12+\sqrt{x+1}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{-5x}-5}}$;

е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (5x+4)\sin 5x dx$;

б) $\displaystyle\int 8^x(x+5)dx$;

в) $\displaystyle\int x\ln(6+x)dx$;

г) $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{9}dx$;

д) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arcctg}\,\frac{x}{3}dx$;

е) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 2x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+16x+20}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(5x+3)dx}{x^2+7x+19}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-12x+3}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(3-5x)dx}{\sqrt{3+12x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{4xdx}{(x^2-5)^6}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(x^4+x+1)dx}{x^2+x}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3+6x^2-8)dx}{x(x+2)^3}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x^3+x^2+1)dx}{(x^2+1)(x+2)^2}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(4x^4-2x^2-3)dx}{(x^2+3)x^2}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(4x^4+2x^2-x-3)dx}{x(x^2-1)}$.

Вариант 23

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{11+x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3x+2)\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{16+\sqrt{x+3}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-9}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{4-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (10-3x)\sin 7x dx$; б) $\displaystyle\int x\ln(7-x)dx$;

в) $\displaystyle\int \arccos(3x+2)dx$; г) $\displaystyle\int 5^x\cos x dx$;

д) $\displaystyle\int x \operatorname{arcctg} 6x dx$; е) $\displaystyle\int e^{\sqrt{8x}}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+16x+16}$; б) $\displaystyle\int \frac{(4x-9)dx}{x^2+10x+15}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+8}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{15dx}{(3x-12)^4}$; б) $\displaystyle\int \frac{(5x-1)dx}{(x-2)(2x+1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(3x^3+5)dx}{x^2-x-2}$; г) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(2x^4-4x^2-8)dx}{x(x^2-4)}$; е) $\displaystyle\int \frac{(x^3+x+1)dx}{(x^2-x+1)x^2}$.

Вариант 24

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3-x^2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\sqrt{3x+1}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+5}}$; г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-e^x}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{10-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int \frac{x}{6}\cos\frac{x}{6}dx$; б) $\displaystyle\int (x+3)\ln x dx$;

в) $\displaystyle\int \arccos 2x dx$; г) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} 7x dx$;

д) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 3x dx$; е) $\displaystyle\int e^{\sqrt{8x}}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{11dx}{3x^2+12x+57}$; б) $\displaystyle\int \frac{(3x-7)dx}{x^2+4x+19}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+25}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(7x+1)dx}{\sqrt{25+4x-4x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(3x-7)^6}$; б) $\displaystyle\int \frac{(3x+1)dx}{(2x-1)(x+5)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)dx}{x^2+x-2}$; г) $\displaystyle\int \frac{(x^4-1)dx}{x^3-x^2+x+1}$;

д) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2-16)(x+1)}$; е) $\displaystyle\int \frac{(3x^2+x+5)dx}{(x^2+3)(x^2+4)}$.

Вариант 25

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+4\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x-11}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+2}}$;

е) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (3x+7)\cos 8x dx$;

б) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx$;

в) $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{3}dx$;

г) $\displaystyle\int (x^2+2)e^{2x}dx$;

д) $\displaystyle\int (x+3)\operatorname{arcctg} 2x dx$;

е) $\displaystyle\int e^x\cos 5x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+24x+45}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(3x+25)dx}{x^2-6x+12}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+5}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{5-8x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(4x-5)^3}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(5x-4)dx}{x^2-8x+25}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+2)}$;

г) $\displaystyle\int \frac{x^3-2}{x^2+x}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{(2x-3)dx}{(x^2-3x+2)^2}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(3x^3+25)dx}{x^2-3x+2}$.

Вариант 26

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{5+x^2}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{3x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{10+\sqrt{2x+1}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$;

е) $\displaystyle\int x\sqrt{x-10}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (2-x)\cos(2x+7)dx$;

б) $\displaystyle\int (x+2)5^x dx$;

в) $\displaystyle\int (3x+4)\ln 3x dx$;

г) $\displaystyle\int x \operatorname{arcctg} 6x dx$;

д) $\displaystyle\int e^{8x}\sin x dx$;

е) $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{5}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-20x+52}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(9x+1)dx}{2x^2+3x-5}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+15}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(3-4x)dx}{\sqrt{15-4x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{2dx}{(3x-7)^5}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(3x-4)dx}{x^2-3x+9}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x^2+5)dx}{(x^2+1)(x-1)}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(4x^3+3x-2)dx}{(x+3)^2(x^2+x+1)}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(x^3-3x+2)dx}{x^2+4x}$.

Вариант 27

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x^2}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{11+\sqrt{x+11}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{2x}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}dx$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-7}}$;

е) $\displaystyle\int (8-x)\sqrt{x-5}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int (2x+1)\sin(3-x)dx$;

б) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^5}dx$;

в) $\displaystyle\int 4^{2x}(3x+1)dx$;

г) $\displaystyle\int \arccos\frac{x}{3}dx$;

д) $\displaystyle\int e^x\cos(x+2)dx$;

е) $\displaystyle\int e^{\sqrt{10x}}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+12x+54}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(5x-8)dx}{x^2-10x+25}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(4x-5)^4}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(7x+1)dx}{(2x+1)(3x+4)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(2x^3+1)dx}{x^2-x+6}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x^5+x^3+1)dx}{x^2+x}$;

д) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(5+x^2)^2}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(4x^3-6x^2-4)dx}{(x+3)(x+1)^3}$.

Вариант 28

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+11}}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+\sqrt{7x+1}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+9}}$; е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{x+5}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int 10^x(3x+2)dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x}{7}\cos\frac{x}{7}dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; г) $\displaystyle\int \arcsin\frac{x}{4}dx$;

д) $\displaystyle\int x\,\mathrm{arctg}\,3x dx$; е) $\displaystyle\int e^{-3x}\cos x dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{8dx}{3x^2-9x+36}$; б) $\displaystyle\int \frac{(3x-7)dx}{x^2+8x+35}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+13}}$; г) $\displaystyle\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{13-4x-4x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{5dx}{(4x+3)^5}$; б) $\displaystyle\int \frac{(8x+3)dx}{(x-4)(x+1)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(2x^3+6x^2+4)dx}{(x+2)(x+1)^3}$; г) $\displaystyle\int \frac{(3x^3+5x-3)dx}{(x^2+2)(x-3)^2}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(4x^2+3x+2)dx}{x^3+1}$; е) $\displaystyle\int \frac{(4x^2+5)dx}{2x^2-x}$.

Вариант 29

1.

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-7}}$;

б) $\int \frac{\sqrt{8-x^2}}{x}dx$;

в) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+3}}$;

г) $\int \frac{dx}{3x\sqrt{x-12}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{10+e^{-x}}}$;

е) $\int x^2\sqrt[3]{x+7}dx$.

2.

а) $\int (4-x)e^{2x+5}dx$;

б) $\int \frac{(x+1)}{10}\sin\frac{x}{10}dx$;

в) $\int x\ln(x-2)dx$;

г) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{5x}dx$;

д) $\int 5^{-x}\sin 3x dx$;

е) $\int x\arccos 2x^2 dx$.

3.

а) $\int \frac{dx}{2x^2-8x+36}$;

б) $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2-4x+12}$;

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+10x-30}}$;

г) $\int \frac{(2-4x)dx}{\sqrt{30-10x-x^2}}$.

4.

а) $\int \frac{4dx}{(x-5)^7}$;

б) $\int \frac{(5x+3)dx}{(x-2)(x+3)}$;

в) $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2+4x}$;

г) $\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$;

д) $\int \frac{(x^4+2x^2+4)dx}{x^2(x^2+4)}$;

е) $\int \frac{(x^3+6x^2+8)dx}{(x+1)(x+2)^3}$.

Вариант 30

1.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{10-x^2}}$;

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{15+4\sqrt{x}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+5}}$;

д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8-e^{-2x}}}$;

е) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{5-x}dx$.

2.

а) $\displaystyle\int 7x\cos(1-5x)dx$;

б) $\displaystyle\int 2x\ln(5+x)dx$;

в) $\displaystyle\int x\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}dx$;

г) $\displaystyle\int \arcsin(5x-7)dx$;

д) $\displaystyle\int 6^x\cos 6x dx$;

е) $\displaystyle\int e^{\sqrt{7x+2}}dx$.

3.

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-30x+72}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(5x+2)dx}{x^2-12x+37}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(2x-5)dx}{\sqrt{13-4x-4x^2}}$.

4.

а) $\displaystyle\int \frac{7dx}{(4x-9)^5}$;

б) $\displaystyle\int \frac{(5x+3)dx}{(x-3)(2x+4)}$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3-x+2)dx}{(x^2+2)x^2}$;

г) $\displaystyle\int \frac{(x^3+6)dx}{x^4+6x^2+8}$;

д) $\displaystyle\int \frac{(3x^3+4)dx}{x(x^2+3)}$;

е) $\displaystyle\int \frac{(4x^4+5x^3+3)dx}{x^3(x+2)}$.

Часть 2. Методические указания к выполнению индивидуальных задач

1. Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки)

Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется методом замены переменной, или методом подстановки. Он основан на следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X — множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Пример 1. Найти $\displaystyle\int \frac{3x^2dx}{(4x-5)^2}$.

Решение. Положим $4x - 5 = t$, тогда

$$x = \frac{t+5}{4}, \quad dx = \frac{1}{4}dt.$$

По формуле (1)

$$\int \frac{3x^2dx}{(4x-5)^2} = 3\int \frac{(t+5)^2dt}{16\cdot t^2\cdot 4} = \frac{3}{64}\int \frac{t^2+10t+25}{t^2}dt =$$
$$\frac{3}{64}\int \left(1+\frac{10}{t}+\frac{25}{t^2}\right)dt = \frac{3}{64}t + \frac{15}{32}\ln|t| - \frac{75}{64t} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int \frac{3x^2dx}{(4x-5)^2} = \frac{3}{64}(4x-5) + \frac{15}{32}\ln|4x-5| - \frac{75}{64(4x-5)} + C.$$

Пример 2. Найти $\int x\sqrt{x+15}dx.$

Решение. Положим $\sqrt{x+15}=t$, тогда

$$x+15=t^2, \quad x=t^2-15, \quad dx=2tdt,$$

$$\int x\sqrt{x+15}dx = \left| \begin{array}{l} x+15=t^2 \\ x=t^2-15 \\ dx=2tdt \end{array} \right| = 2\int (t^2-15)t^2dt = 2\int (t^4-15t^2)dt =$$

$$=\frac{2t^5}{5}-\frac{30t^3}{3}+C=\frac{2\sqrt{(x+15)^5}}{5}-10\sqrt{(x+15)^3}+C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx.$

Решение. Положим $\sqrt{x^2-3}=t$, тогда

$$x^2=t^2+3, \quad x=\sqrt{t^2+3}, \quad dx=\frac{2tdt}{2\sqrt{t^2+3}}=\frac{tdt}{\sqrt{t^2+3}},$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-3=t^2 \\ x^2=t^2+3 \\ x=\sqrt{t^2+3} \\ dx=\dfrac{2tdt}{2\sqrt{t^2+3}} \end{array} \right| = \int \frac{t\cdot tdt}{\sqrt{t^2+3}\cdot\sqrt{t^2+3}} = \int \frac{t^2dt}{t^2+3} =$$

$$=\int \frac{(t^2+3-3)dt}{t^2+3} = \int dt - 3\int \frac{dt}{t^2+3} = t-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\sqrt{x^2-3}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 4. Найти $\int \sqrt{4-x^2}dx.$

Решение. Положим $x=2\sin t$, тогда

$$dx=2\cos tdt, \quad \sin t=\frac{x}{2}, \quad t=\arcsin\frac{x}{2},$$

$$\int \sqrt{4-x^2}dx=\int \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos tdt = 4\int \cos^2 tdt =$$

$$=4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int dt + \int \cos 2td(2t) = 2t+\sin 2t+C.$$

Возвращаясь к переменной x, окончательно получим

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2t + \sin 2t + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}} + C.$$

Пример 5. Найти $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^{8x}-5}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{8x}-5}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^{8x}-5} = t \\ e^{8x}-5 = t^2 \\ e^{8x} = t^2+5 \\ 8e^{8x}dx = 2tdt \\ dx = \dfrac{2tdt}{8(t^2+5)} = \frac{1}{4}\frac{tdt}{t^2+5} \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{tdt}{(t^2+5)\cdot t} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+5} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^{8x}-5}}{\sqrt{5}} + C.$$

2. Метод интегрирования по частям

Интегрирование по частям основано на применении формулы

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{2}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые на некотором интервале функции. Формула (2) дает возможность заменить вычисление интеграла $\int udv$ вычислением $\int vdu$, который во многих случаях оказывается более простым.

I. Интеграл вида

$$\int P(x)f(x)dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, $f(x)$ — одна из следующих функций $e^{\alpha x}$, $a^{\alpha x}$ $(a>0)$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$, $\operatorname{sh}\alpha x$, $ch\alpha x$.

Чтобы свести в этом случае интеграл к табличному, надо последовательно применять формулу (2) столько раз, какова степень $P(x)$, причем положив в первый раз $u = P(x)$, $dv = f(x)dx$.

Пример 1. Найти $\int (x+7)\sin 3x dx$.

Решение. Положим $u = x+7$, $dv = \sin 3x dx$, найдем du, v:

$$du = d(x+7) = dx, \quad v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

Тогда:

$$\int (x+7)\sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x+7,\ du = dx \\ dv = \sin 3x dx, \\ v = -\frac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x+7}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{x+7}{3}\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

Пример 2. Найти $\int (x+2)5^{x+1}dx$.

Решение.

$$\int (x+2)5^{x+1}dx = \left| \begin{array}{l} u = x+2,\ du = dx, \\ dv = 5^{x+1}dx,\ v = \frac{5^{x+1}}{\ln 5} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(x+2)5^{x+1}}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5}\int 5^{x+1}dx = \frac{(x+2)5^{x+1}}{\ln 5} - \frac{5^{x+1}}{\ln^2 5} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (x^2-5x+6)e^{3x}dx$.

Решение.

$$\int (x^2-5x+6)e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2-5x+6, \\ du = (2x-5)dx, \\ dv = e^{3x}dx,\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(x^2-5x+6)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int (2x-5)e^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x-5, \\ du = 2dx, \\ dv = e^{3x}dx,\ v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(x^2-5x+6)e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\frac{(2x-5)e^{3x}}{3} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{(x^2-5x+6)e^{3x}}{3} - \frac{(2x-5)e^{3x}}{9} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

II. Интеграл вида

$$\int P(x)f(x)dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, $f(x)$ — одна из следующих функций $\ln \alpha x$, $\arcsin \alpha x$, $\arccos \alpha x$, $\operatorname{arctg} \alpha x$, $\operatorname{arcctg} \alpha x$.

В этом случае за u принимается $f(x)$, за dv — выражение $P(x)dx$.

Пример 4. Найти $\int \ln(x^2+7)dx$.

Решение.

$$\int \ln(x^2+7)dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x^2+7),\ du = \frac{2xdx}{x^2+7}, \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \ln(x^2+7) - \int \frac{2x^2dx}{x^2+7} = x \cdot \ln(x^2+7) - 2\int \frac{x^2+7-7}{x^2+7}dx =$$

$$= x \cdot \ln(x^2+7) - 2\int \frac{x^2+7}{x^2+7}dx + 14\int \frac{dx}{x^2+7} =$$

$$= x \cdot \ln(x^2+7) - 2x + \frac{14}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C =$$

$$= x \cdot \ln(x^2+7) - 2x + 2\sqrt{7} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \arccos 4x dx$.

Решение.

$$\int \arccos 4x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos 4x, \\ du = \frac{-4}{\sqrt{1-16x^2}}dx, \\ dv = dx,\ v = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos 4x + 4\int \frac{xdx}{\sqrt{1-16x^2}} =$$

$$= x \cdot \arccos 4x + \frac{4}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{1-16x^2}} = x \cdot \arccos 4x - \frac{2}{16}\int \frac{d(1-16x^2)}{\sqrt{1-16x^2}} =$$

$$= x \cdot \arccos 4x - \frac{1}{8}\int \frac{d(1-16x^2)}{\sqrt{1-16x^2}} = x \cdot \arccos 4x - \frac{2}{8}\sqrt{1-16x^2} + C =$$

$$= x \cdot \arccos 4x - \frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2} + C.$$

Пример 6. Найти $\int (x+1)\operatorname{arctg} 2x dx$.

Решение.

$$\int (x+1)\operatorname{arctg} 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x,\ du = \frac{2dx}{1+4x^2}, \\ dv = (x+1)dx,\ v = \frac{x^2}{2} + x \end{array} \right| =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\operatorname{arctg} 2x - 2\int \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\frac{dx}{1+4x^2} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\operatorname{arctg} 2x - \int \frac{x^2 dx}{1+4x^2} - 2\int \frac{xdx}{1+4x^2} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\int \frac{4x^2+1-1}{1+4x^2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{d(4x^2+1)}{1+4x^2} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln|1+4x^2| + C.$$

Пример 7. Найти $\int x^2 \ln(x+3)dx$.

Решение.

$$\int x^2 \ln(x+3)dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+3),\ du = \frac{dx}{x+3}, \\ dv = x^2 dx,\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3 dx}{x+3} = \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+27-27)dx}{x+3} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+27)dx}{x+3} + \frac{27}{3}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)dx}{x+3} + 9\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x\right) + 9\ln|x+3| + C =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} - 3x + 9\ln|x+3| + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{x\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Данный интеграл не относится ни к одному из рассмотренных выше типов, но он также может быть вычислен интегрированием по частям, если принять $u = \arcsin x$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x,\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C.$$

Пример 9. Найти $\displaystyle\int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln \cos x, \\ du = \dfrac{-\sin x}{\cos x} dx = -\operatorname{tg} x dx, \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x},\ v = -\operatorname{ctg} x \end{array} \right| =$$

$$= -\operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x - \int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} x dx = -\operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x - \int dx =$$

$$= -\operatorname{ctg} x \cdot \ln \cos x - x + C.$$

III. Интегралы вида

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx, \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \quad \int \operatorname{sh} \alpha x \sin \beta x dx,$$

$$\int \operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x dx, \quad \int \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x dx, \quad \int \operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x dx.$$

В этом случае осуществляется двукратное интегрирование по частям. В результате получается линейное относительно исходного интеграла уравнение, позволяющее выразить интеграл в элементарных функциях. Первоначальный выбор u и dv произволен.

Пример 10. Найти $\displaystyle\int e^{3x} \sin 2x dx$.

Решение.

$$\int e^{3x} \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{3x},\ du = 3e^{3x}, \\ dv = \sin 2x dx,\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-e^{3x} \cos 2x}{2} + \frac{3}{2} \int \cos 2x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{3x},\ du = 3e^{3x}, \\ dv = \cos 2x dx,\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-e^{3x}\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{e^{3x}\sin 2x}{2} - \frac{3}{2}\int \sin 2x e^{3x} dx\right) =$$
$$= \frac{-e^{3x}\cos 2x}{2} + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}\int \sin 2x e^{3x} dx + C.$$

Обозначим искомый интеграл $\int e^{3x}\sin 2x dx = J$. Тогда последнее уравнение примет вид

$$J = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}J + C.$$

Отсюда

$$J + \frac{9}{4}J = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x + C,$$
$$J = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x + C\right) =$$
$$= \frac{e^{3x}}{13}(-2\cos 2x + 3\sin 2x) + C.$$

3. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен

1. Интегралы вида

$$\text{а)} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{и} \quad \text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

после выделения полного квадрата в квадратном трехчлене сводятся к табличным

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2} = \left| \begin{array}{l} t = x + \frac{b}{2a} \\ dt = dx \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{t^2 \pm k^2};$$

б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится

$$\text{при } a > 0 \text{ к } \int \frac{dx}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}; \qquad \text{при } a < 0 \text{ к } \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 - t^2}}.$$

2. Интегралы вида

$$\text{а)}\ \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx \quad \text{и} \quad \text{б)}\ \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

после выделения в числителе производной $2ax+b$ квадратного трехчлена можно представить в виде суммы двух интегралов, один из которых сводится к интегралу

$$\text{а)}\ \int \frac{du}{u} = \ln u + C \quad \text{и} \quad \text{б)}\ \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C,$$

а другой есть интеграл вида

$$\text{а)}\ \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{и} \quad \text{б)}\ \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+6x+18}$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$3x^2+6x+18 = 3(x^2+2x+6) = 3((x^2+2\cdot x\cdot 1+1)-1+6) = 3((x+1)^2+5).$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3x^2+6x+18} = \int \frac{dx}{3((x+1)^2+5)} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+5} =$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{16y-4y^2}}$.

Решение. Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене:

$$16y-4y^2 = -4(y^2-4y) = -4((y^2-2\cdot 2y+4)-4) =$$
$$= -4((y-2)^2-4) = 4(4-(y-2)^2).$$

Следовательно,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{16y-4y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{4(4-(y-2)^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(y-2)}{\sqrt{4-(y-2)^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{y-2}{2} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x+4}{x^2+4x+2}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную знаменателя, получим

$$\int \frac{x+4}{x^2+4x+2}dx = \left| \begin{array}{l} (x^2+4x+2)' = 2x+4 \\ (x+4)dx = \left(\frac{1}{2}(2x+4)+2\right)dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+2}{x^2+4x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+2} + \int \frac{2dx}{x^2+4x+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4x+2)}{x^2+4x+2} + 2\int \frac{dx}{(x^2+2\cdot 2\cdot x+4)-4+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+2| + 2\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+2| + \frac{2}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right| + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x-3}{\sqrt{6x+x^2}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{6x+x^2}} = \left| \begin{array}{l} (x^2+6x)' = 2x+6 \\ (x-3)dx = \left(\frac{1}{2}(2x+6)-6\right)dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{6x+x^2}} - 6\int \frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+6x)}{\sqrt{6x+x^2}} -$$

$$-6\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2\cdot 3\cdot x+9)-9}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6x+x^2} - 6\int \frac{d(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-9}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6x+x^2} - 6\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x}| + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{4x-3}{\sqrt{2x^2+2x+5}}dx$.

Решение. Так как $(2x^2+2x+5)' = 4x+2$, то $(4x-3)dx = (4x+2-5)dx$. Тогда

$$\int \frac{4x-3}{\sqrt{2x^2+2x+5}}dx = \int \frac{(4x+2)dx}{\sqrt{2x^2+2x+5}} - \int \frac{5dx}{\sqrt{2x^2+2x+5}} =$$

$$= \int \frac{d(2x^2+2x+5)}{\sqrt{2x^2+2x+5}} - \frac{5}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+\frac{5}{2}}} =$$

$$= 2\sqrt{2x^2+2x+5} - \frac{5}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\frac{5}{2}\right)}} =$$

$$= 2\sqrt{2x^2+2x+5} - \frac{5}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}} =$$

$$= 2\sqrt{2x^2+2x+5} - \frac{5}{\sqrt{2}} \ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{5}{2}}\right| + C.$$

4. Интегрирование рациональных дробей

Функция, заданная отношением двух многочленов

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n+\dots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+\dots+b_{m-1}x+b_m}, \quad (a_0\neq 0,\ b_0\neq 0) \qquad (3)$$

называется рациональной функцией или рациональной дробью.

При $n<m$ рациональная дробь (3) называется правильной, в противном случае — неправильной.

Неправильную дробь можно привести к виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $M(x)$ — многочлен (целая часть дроби (3)); $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь. Чтобы выделить целую часть, нужно выполнить деление многочленов.

Пример.

а) $\dfrac{x^3+1}{x^3+3} = \dfrac{x^3+3-3+1}{x^3+3} = \dfrac{x^3+3}{x^3+3} - \dfrac{2}{x^3+3} = 1 - \dfrac{2}{x^3+3}$;

б) $\dfrac{x^5+3x^2+1}{x^3+3} = x^2 + \dfrac{1}{x^3+3}$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+3x^2+1 & x^3+3 \\
\cline{2-2}
\underline{x^5+3x^2} & x^2 \\
1 &
\end{array}
$$

Любая правильная рациональная дробь может быть разложена на сумму конечного числа простейших рациональных дробей одного из следующих типов:

$$\frac{A}{x-a}; \quad \frac{A}{(x-a)^k}; \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}; \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l},$$

где трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $D=\frac{p^2}{4}-q<0$.

Пример.

а) $\dfrac{5x^2+1}{x^2(x+3)(x^2+3)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+3}+\dfrac{Dx+K}{x^2+3}+\dfrac{Lx+M}{(x^2+3)^2}$, где x^2+3 не имеет действительных корней.

б) $\dfrac{x^3+4x^2+1}{(x+3)^2(x^2+x+1)^2}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{(x+3)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}+$ $+\dfrac{Kx+L}{(x^2+x+1)^2}$, где трехчлен x^2+x+1 не имеет действительных корней.

Коэффициенты A, B, C, D, K, L, M — действительные постоянные, подлежащие определению.

Найти их можно методом неопределенных коэффициентов. Для этого нужно привести равенство

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\dots+\frac{A_k}{x-a}+\dots+$$
$$+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^l}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{l-1}}+\dots+\frac{B_lx+C_l}{x^2+px+q}+\dots \quad (4)$$

к общему знаменателю. Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решить систему линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов.

Неизвестные постоянные можно найти и по-другому: подставляя в обе части равенства (4) после умножения обеих его частей на $Q(x)$ значения x, равные действительным корням знаменателя $Q(x)$ (метод частных значений).

На практике часто комбинируют оба метода.

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь неправильная, выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x},$$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 \quad + x^4 \qquad - 8 & x^3-4x \\
\cline{2-2}
x^5 - 4x^3 & x^2+x+4 \\
\cline{1-1}
\qquad\quad x^4 + 4x^3 & \\
\qquad\quad x^4 - 4x^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 4x^3 + 4x^2 & \\
\qquad\qquad\quad 4x^3 - 16x & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 4x^2 + 16x - 8 &
\end{array}$$

и разложим полученную в результате правильную дробь на простейшие дроби.

1. Корни знаменателя — действительные числа, среди которых нет кратных. Разложим знаменатель на простейшие действительные множители:

$$x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2).$$

2. Запишем разложение правильной дроби на простейшие:

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

3. Освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $x(x-2)(x+2)$:

$$4x^2+16x-8 = A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

4. Подставим действительные корни знаменателя в обе части этого равенства:

$x = 0:\quad 4\cdot 0 + 16\cdot 0 - 8 = A(0-2)(0+2) + B\cdot 0(0+2) + C\cdot 0(0-2),$

$\qquad -8 = -4A, \quad A = 2,$

$x = 2:\quad 4\cdot 2^2 + 16\cdot 2 - 8 = A(2-2)(2+2) + B\cdot 2(2+2) + C\cdot 2(2-2),$

$\qquad 40 = 8B, \quad B = 5,$

$x = -2:\ 4(-2)^2 + 16(-2) - 8 = A(-2-2)(-2+2) +$

$\qquad + B(-2)(-2+2) + C(-2)(-2-2),$

$\qquad -24 = 8C, \quad C = -3.$

Можно составить систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A + B + C = 4, \\ x^1 & 2B - 2C = 16, \quad A = 2,\ B = 5,\ C = -3. \\ x^0 & \quad -4A = -8; \end{array}$$

5. Подставим найденные значения A, B, C в формулу разложения:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{(x^2 - 8x + 7)dx}{(x^2 - 3x - 10)^2}$.

Решение. Корни знаменателя — действительные числа, среди них есть кратные.

1. $(x^2 - 3x - 10)^2 = (x-5)^2(x+2)^2$.

2. $\displaystyle\frac{x^2 - 8x + 7}{(x-5)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$.

3. $x^2 - 8x + 7 =$

$$= A(x-5)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x-5)^2(x+2) + D(x-5)^2.$$

4. Составим систему уравнений, применяя метод сравнения коэффициентов и метод частных значений:

$$\begin{array}{l|ll} x=5 & -8=49B, & B=-\frac{8}{49}; \\ x=-2 & 27=49D, & D=\frac{27}{49}; \\ x^3 & A+C=0, & A=\frac{30}{343}; \\ x^2 & -A-8C+B+D=1. & C=-\frac{30}{343}. \end{array}$$

5. $\dfrac{x^2-8x+7}{(x-5)^2(x+2)^2}=$

$$=\frac{30}{343(x-5)}-\frac{8}{49(x-5)^2}-\frac{30}{343(x+2)}+\frac{27}{49(x+2)^2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{(x^2-8x+7)dx}{(x^2-3x-10)^2}=$$

$$=\int\left(\frac{30}{343(x-5)}-\frac{8}{49(x-5)^2}-\frac{30}{343(x+2)}+\frac{27}{49(x+2)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{30}{343}\ln|x-5|+\frac{8}{49(x-5)}-\frac{30}{343}\ln|x+2|-\frac{27}{49(x+2)}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{13x^2+18x+9}{x^2(x^2-9)}dx.$

Решение. Корни знаменателя — действительные числа, среди них есть кратные.

1. $x^2(x^2-9)=x^2(x-3)(x+3)$.

2. $\dfrac{13x^2+18x+9}{x^2(x-3)(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-3}+\dfrac{D}{x+3}.$

3. $13x^2+18x+9=$

$$=Ax(x^2-9)+B(x^2-9)+Cx^2(x+3)+Dx^2(x-3).$$

4. Составим систему уравнений, применяя метод сравнения коэффициентов и метод частных значений:

$$\begin{array}{l|ll} x=0 & 9=-9B, & B=-1; \\ x=3 & 180=54C, & C=\frac{10}{3}; \\ x=-3 & 72=-54D, & D=-\frac{4}{3}; \\ x^1 & 18=-9A. & A=-2. \end{array}$$

5. $\dfrac{13x^2+18x+9}{x^2(x-3)(x+3)}=-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{10}{3(x-3)}-\dfrac{4}{3(x+3)}.$

Следовательно,
$$\int \frac{13x^2+18x+9}{x^2(x^2-9)}dx = -2\int\frac{dx}{x} - \int\frac{dx}{x^2} + \frac{10}{3}\int\frac{dx}{x-3} - \frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+3} =$$
$$= -2\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{10}{3}\ln|x-3| - \frac{4}{3}\ln|x+3| + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{4x^2+8x+3}{(x-1)^2(x^2+4)}dx$.

Решение. Знаменатель дроби кроме действительных корней имеет комплексные, но среди комплексных корней нет кратных.

1. $\displaystyle\frac{4x^2+8x+3}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$.

2. $4x^2+8x+3 = A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2$,
$4x^2+8x+3 =$
$= A(x^3-x^2+4x-4) + B(x^2+4) + C(x^3-2x^2+x) + D(x^2-2x+1)$.

3. Составим систему уравнений, применяя метод сравнения и метод частных значений:
$$\begin{array}{l|ll} x=1 & 15=5B, & B=3; \\ x^3 & 0=A+C, & A=2; \\ x^2 & 4=-A+B-2C+D, & C=-2; \\ x^1 & 8=4A+C-2D. & D=-1. \end{array}$$

4. $\displaystyle\frac{4x^2+8x+3}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2x+1}{x^2+4}$.

Следовательно,
$$\int \frac{(4x^2+8x+3)dx}{(x-1)^2(x^2+4)} = 2\int\frac{dx}{x-1} + 3\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \int\frac{(2x+1)dx}{x^2+4} =$$
$$= 2\int\frac{dx}{x-1} + 3\int\frac{dx}{(x-1)^2} - \int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - \int\frac{dx}{x^2+4} =$$
$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \ln|x^2+4| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{(x^3+4)dx}{(x+1)^2(x^2+x+3)}$.

Решение. Знаменатель дроби кроме действительных корней имеет комплексные, но среди комплексных корней нет кратных.

1. $\displaystyle\frac{(x^3+4)}{(x+1)^2(x^2+x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+3}$.

2. $x^3+4=A(x+1)(x^2+x+3)+B(x^2+x+3)+(Cx+D)(x+1)^2$.

3. Составим систему уравнений, применяя метод сравнения и метод частных значений:

$$\begin{array}{l|ll} x=-1 & 3=3B, & A=\frac{4}{3}; \\ x=0 & 4=3A+3B+D, & B=1; \\ x=1 & 5=10A+5B+4C+4D, & C=-\frac{1}{3}; \\ x^3 & 1=A+C. & D=-3. \end{array}$$

4. $\dfrac{x^3+4}{(x+1)^2(x^2+x+3)}=\dfrac{4}{3(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{-\frac{1}{3}x-3}{x^2+x+3}$.

У дроби, содержащей квадратный трехчлен, выделим полный квадрат:

$$x^2+x+3=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{(x^3+4)dx}{(x+1)^2(x^2+x+3)}=\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\int\frac{(\frac{1}{3}x+3)dx}{x^2+x+3}=$$
$$=\frac{4}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+3|-\frac{17}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}.$$

Вычислим отдельно

$$\int\frac{(\frac{1}{3}x+3)dx}{x^2+x+3}=\int\frac{(\frac{1}{6}(2x+1)-\frac{1}{6}+3)dx}{x^2+x+3}=\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+3}+$$
$$+\frac{17}{6}\int\frac{dx}{x^2+x+3}=\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+3)}{x^2+x+3}+\frac{17}{6}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}=$$
$$=\frac{1}{6}\ln|x^2+x+3|+\frac{17}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{11}}+C=$$
$$=\frac{1}{6}\ln|x^2+x+3|+\frac{17}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C.$$

Приложения

Таблица дифференцирования основных функций

1) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $(\sin x)' = \cos x$;

4) $(\cos x)' = -\sin x$;

5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

8) $(e^x)' = e^x$;

9) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$;

10) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

16) $\operatorname{ch} x' = \operatorname{sh} x$;

17) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

18) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Таблица основных интегралов

1) $\int x^\alpha dx = \left[\begin{array}{l} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\ \alpha \in R; \\ \ln|x| + C,\ \alpha = -1; \end{array} \right.$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$

2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$,

в частности, при $a = e$: $\int e^x dx = e^x + C$;

3) $\int \cos x dx = \sin x + C$; 4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

7) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$;

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$;

9) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$;

10) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

12) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$; 13) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$; 15) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$;

16) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$; 17) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$

18) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$; 19) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Заключение

Настоящее учебное пособие составлено для самостоятельной работы студентов–бакалавров первого курса инженерных направлений. Самостоятельное решение индивидуального варианта задания способствует развитию у студентов навыков решения задач, связанных с использованием производных и неопределенных интегралов. Однако эти навыки скорее всего будут необходимыми, но не достаточными. С целью дальнейшего совершенствования познаний в области интегрального исчисления студенту необходимо продолжать решать подобные задачи, используя ту литературу, которую авторы привели в библиографическом списке. Для получения необходимых теоретических сведений студенту можно обратиться к книгам [1, 3, 6, 7], а для совершенстования практических навыков незаменимы издания [2, 4, 5], в которых приведено большое количество задач разной степени сложности с подробными изложениями решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.** Лекции по математическому анализу [Текст] / М.: Дрофа, 2008. — 640 с.
2. **Берман Г. Н.** Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] / СПб.: Профессия, 2007. — 432 с.
3. **Бермант А. Ф., Араманович И. Г.** Краткий курс математического анализа [Текст] / М.: Лань, 2010. — 736 с.
4. **Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч. 1 [Текст] / М.: Мир и Образование, Астрель, Оникс, 2012. — 368 с.
5. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / М.: АСТ, Астрель, 2009. — 560 с.
6. **Пискунов Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1 [Текст] / М.: Интеграл-Пресс, 2009. — 416 с.
7. **Федорова О. С., Балабан О. М., Московский И. Г.** Неопределенные интегралы. Учебное пособие по дисциплине «Высшая математика» для студентов всех направлений [Текст] / Саратов: ИЦ «Наука», 2015.
8. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 [Текст] / СПб.: Лань, 2009. — 608 с.

Оглавление

Учебное издание

Основные методы интегрирования

КУБЫШКИНА Светлана Николаевна,
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 26.06.2016
Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,31. Уч.–изд. л. 3,09

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Самарский государственный технический университет"
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Главный корпус

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Корпус № 8