Г. А. ПАВЛОВА, О. С. АФАНАСЬЕВА

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Самара 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Г. А. ПАВЛОВА, О. С. АФАНАСЬЕВА

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Учебное пособие

Самара 2015

Печатается по решению редакционно–издательского совета
Самарского государственного технического университета

УДК 517.37
П12

Павлова Г. А.
Кратные интегралы учебное пособие / *Г. А. Павлова, О. С. Афанасьева* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2015. – 54 с.

Содержит 25 вариантов по 7 задач, относящихся к следующим разделам курса математического анализа: двойные, тройные интегралы, криволинейные координаты, приложения кратных интегралов.

Приведён демонстрационный вариант задания с решениями всех типовых задач и методическими указаниями.

Типовой расчёт предназначен для самостоятельной работы студентов–бакалавров направления 010400 «Прикладная математика и информатика» по курсу «Математический анализ».

УДК 517.37
П12

Рецензент: *кан. физ.–мат. наук. Заусаев А. А.*

Предисловие

Дисциплина «Математический анализ» входит в базовую часть плана направления подготовки бакалавров 010400 «Прикладная математика и информатика».

Понятия и постулаты математического анализа пронизывают все математические направления. Несмотря на вычислительные мощности современных компьютеров и возможности численных методов, знания основ математического аппарата остаются всегда востребованными и актуальными.

Решение задач математического анализа развивает у студентов культуру логического мышления, помогает освоить универсальный язык науки, овладеть понятиями математического анализа как рабочими инструментами исследования и анализа математических моделей.

Свой вклад в решение этих непростых задач вносит предлагаемое учебное пособие. Оно предназначено для студентов I курса специальности «Прикладная математика и информатика».

Целью пособия является обучение студентов умению пользоваться одним из самых мощных средств решения прикладных задач каким является — многомерный интеграл. В пособие включены задачи из таких известных как [2, 6], а также оригинальные задачи авторов пособия.

Пособие состоит из двух частей. В первой части приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов, во второй рассмотрен типовой вариант с подробными решениями задач и методическими указаниями.

В конце пособия приведены необходимые для решения задач формулы, а также список книг, из которых студент может почерпнуть необходимые теоретические сведения из области математического анализа.

Порядок выполнения и защиты учебного задания

Подробное и обоснованное решение задач необходимо представить в письменном виде, при этом нумерация задач должна совпадать с их нумерацией в учебном задании. Во время защиты студент должен ответить на теоретические вопросы, пояснить решения примеров из задания, решить подобные им задачи.

Условия задач

Студенту необходимо решить семь задач.

В первой задаче надо в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для указанных замкнутых областей D, при этом область D задаётся с помощью системы неравенств.

Во второй задаче в заданном повторном интеграле надо поменять порядок интегрирования.

В третьей задаче в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ надо перейти к полярной системе координат и записать интеграл в виде $\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr$ и $\int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} g(r,\varphi)d\varphi$.

В четвертой задаче исходя из задания области интегрирования D подобрать наиболее удобные криволинейные координаты и вычислить двойной интеграл.

В пятой задаче требуется записать тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного. Так как подынтегральная функция конкретно не задана, то выбор в какой системе координат — декартовой, цилиндрической или сферической — и порядок записи этого повторного интеграла производится только из рассмотрения области V.

В задаче 6 надо вычислить объём тела V.

Задача 7 представляет собой одно из механических приложений многомерного интеграла.

Часть 1. Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. $D = \left\{(x,y): \quad x^2+y^2 \geqslant 2x+2y-1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}.$
2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{3\sqrt{3}} f(x,y)dy.$
3. D — квадрат с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$.
4. $\iint\limits_D (x^2y^2+y^2)dxdy; \quad D = \left\{(x,y): \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant \dfrac{2}{x}; \quad x \leqslant y \leqslant 3x\right\}.$
5. $V = \left\{(x,y,z): 0 \leqslant z \leqslant 4-x; \quad y^2 \leqslant 2x+2\right\}.$
6. $V = \left\{(x,y,z): z^2 \geqslant 4x; \quad z^2 \geqslant 2y; \quad 0 \leqslant z \leqslant 4; \quad x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0\right\}.$
7. Найти координаты центра масс тела, ограниченного поверхностями
$$az = a^2 - x^2 - y^2; \quad z = 0.$$

Вариант 2

1. $D = \left\{(x,y): 0 < y \leqslant \dfrac{1}{x};\ y \geqslant 0;\ x \geqslant 0;\ y-2x \leqslant 0,\ y - \dfrac{1}{2}x \geqslant 0\right\}.$
2. $\int\limits_{-7}^{1} dy \int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y)dx.$
3. $D = \left\{(x,y): x^2+y^2 \leqslant 1; \quad y-2x \leqslant 0; \quad y - \dfrac{1}{2}x \geqslant 0; \quad x \geqslant 0\right\}.$

4. $\iint\limits_D \dfrac{(x+y)^2}{x} dxdy; \quad D = \left\{(x,y) : 1-x \leqslant y \leqslant 3-x; \quad \dfrac{x}{2} \leqslant y \leqslant 2x\right\}.$

5. $V = \left\{(x,y,z) : x+y+z \leqslant 2,\ 0 \leqslant 4z \leqslant 4-x^2-y^2;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0\right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : y^2 \leqslant 2(2-x); \quad z^2 \leqslant 4x\right\}.$

7. Найти момент инерции относительно оси Oy однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностью
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

Вариант 3

1. $D = \left\{(x,y) : y \geqslant x^2, \quad y \leqslant \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}\right\}.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx.$

3. $D = \left\{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1; \quad x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1\right\}.$

4. $\iint\limits_D (x^3+y^3)dxdy; \quad D = \left\{(x,y) : x^2 \leqslant y \leqslant 3x^2; \quad \dfrac{1}{x} \leqslant 2y \leqslant \dfrac{3}{x}\right\}.$

5. $V = \left\{0 \leqslant z \leqslant 4-x^2-y^2, \quad |x+y| \leqslant 2\right\}.$

6. $V = \{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant xy; \quad x+y \leqslant 1\}.$

7. Найти массу шара радиусом R, если плотность его в каждой точке равна удвоенному расстоянию этой точки до поверхности шара.

Вариант 4

1. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\geqslant 1;\quad (x-2)^2+y^2\geqslant 1;\right.$
$\left.(x-2)^2+(y-2)^2\geqslant 1,\quad x^2+(y-2)^2\geqslant 1\right\}.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{y} f(x,y)dx+\int\limits_1^3 dy \int\limits_{\frac{1}{9}y^2}^{1} f(x,y)dx.$

3. $D=\left\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leqslant 1;\quad 0\leqslant x\leqslant 1\right\}.$

4. $\displaystyle\iint\limits_D xy(x+y)dxdy;\quad D=\left\{(x,y): -1\leqslant x-y\leqslant 1;\quad \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant \frac{2}{x}\right\}.$

5. $V=\left\{(x,y,z): x^2\geqslant y^2+z^2;\quad 5x\leqslant 4+y^2+z^2\right\}.$

6. $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\leqslant a^2;\quad z\geqslant 0;\quad x+y+z\leqslant 4a\right\}.$

7. Найти момент инерции однородного прямого кругового конуса плотностью ρ, радиус основания которого равен R, а высота равна H, относительно его оси.

Вариант 5

1. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 4a^2;\ (x-a)^2+y^2\geqslant a^2;\ (x+a)^2+y^2\geqslant a^2\right\}.$

2. $\displaystyle\int\limits_3^7 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{3} f(x,y)dx+\int\limits_7^9 dy \int\limits_{\frac{9}{y}}^{10-y} f(x,y)dx.$

3. $D=\left\{(x,y): (x-1)^2+y^2\leqslant 1;\quad 1\leqslant x\leqslant 2\right\}.$

4. $\displaystyle\iint\limits_D x^2dxdy;\quad D=\left\{(x,y): x^3\leqslant y\leqslant 2x^3;\quad x\leqslant 2y\leqslant 6x\right\}.$

5. $V=\{(x,y,z): 0\leqslant z\leqslant 4xy,\quad x+4y+z\leqslant 1\}.$

6. $V=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\leqslant a^2;\quad 0\leqslant az\leqslant a^2-2y^2\right\}.$

7. Найти массу тела плотностью $\rho = x^2$, ограниченного поверхностями
$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}; \quad z = 3.$$

Вариант 6

1. $D = \left\{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leqslant 8a^2; \quad x^2 - y^2 \geqslant 2a^2\right\}; \quad M(2a, 0) \in D$.
2. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx + \int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx.$
3. $D = \left\{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1; \quad x^2 + y^2 \geqslant 1\right\}.$
4. $\iint\limits_{D} xy(x + y)dxdy; \quad D = \{(x, y) : x - 1 \leqslant y \leqslant x + 1;$ $-x - 1 \leqslant y \leqslant -x + 1\}.$
5. $V = \left\{(x, y, z) : 0 \leqslant z \leqslant 3 - \sqrt{x^2 + 2y^2}; \quad x \leqslant y\right\}.$
6. $V = \left\{(x, y, z) : 4x \geqslant y^2; \quad 4y \geqslant x^2; \quad 0 \leqslant z \leqslant y\right\}.$
7. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3; \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad z \geqslant 0.$$

Вариант 7

1. $D = \left\{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leqslant 16a^2; \quad x^2 - y^2 \leqslant a^2\right\}.$
2. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x, y)dy.$

3. $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \geqslant 1; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}$.

4. $\iint\limits_D xydxdy; \quad D = \left\{(x, y) : ax^3 \leqslant y \leqslant bx^3; \quad px \leqslant y^2 \leqslant qx\right\}$.

5. $V = \left\{(x, y, z) : y^2 \leqslant z \leqslant 4, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16\right\}$.

6. $V = \left\{(x, y, z) : z \geqslant 0; \quad x + z \leqslant 1; \quad x \geqslant y^2\right\}$.

7. Найти массу конуса $R^2(z - H)^2 \geqslant (x^2 + y^2)H$, $0 \leqslant z \leqslant H$, если плотность равна $\rho = |xy|$.

Вариант 8

1. $D = \left\{(x, y) : 2x = \sin \pi y; \quad y = (1 + x)^2, \quad y = 0\right\}$.

2. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x, y)dy$.

3. $D = \left\{(x, y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4; \quad y - x \leqslant 0; \quad y - \frac{1}{2}x \geqslant 0\right\}$.

4. $\iint\limits_D xydxdy; \quad D = \left\{(x, y) : ax^2 \leqslant y^3 \leqslant bx^2; \quad \alpha x \leqslant y \leqslant \beta x\right\}$.

5. $V = \left\{(x, y, z) : a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 \geqslant 0; \quad x \geqslant 0\right\}$.

6. $V = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2; \quad x^2 + y^2 \leqslant 2az\right\}$.

7. Найти момент инерции относительно оси Ox однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями

$$y = \sqrt{x}; \quad y = 2\sqrt{x}; \quad z = 0; \quad z + x = 4.$$

Вариант 9

1. $D = \left\{ (x,y) : x = \cos \pi y; \quad y^2 - \dfrac{1}{4} - x = 0 \right\}.$
2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$
3. $D = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1; \quad x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1 \right\}.$
4. $\iint\limits_D \dfrac{x^2 \sin xy}{y} dxdy; \quad D = \left\{ (x,y) : ay \leqslant x^2 \leqslant by; \quad px \leqslant y^2 \leqslant qx \right\}.$
5. $V = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 \geqslant 3z^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 2 \right\}.$
6. $V = \left\{ (x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant x; \quad x^2 + y^2 \leqslant 2ax \right\}.$
7. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями
$$x + y = 1; \quad z = x^2 + y^2; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Вариант 10

1. $D = \left\{ (x,y) : y = |x| - 1; \quad y = \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) \right\}.$
2. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx.$
3. $D = \left\{ (x,y) : x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1; \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \right\}.$
4. $\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}} dxdy; \quad D = \left\{ (x,y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1; \quad x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \right\}.$
5. $V = \left\{ (x,y,z) : 3x^2 - y^2 + 3z^2 \geqslant 0; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2ay \right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : x^2 \leqslant by \leqslant b^2; \quad 0 \leqslant az \leqslant x^2 + y^2\right\}$.
7. Найти массу тела плотностью $\rho = y$, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2y$.

Вариант 11

1. $D = \left\{(x,y) : (x-1)^2 + (y-1)^2 \geqslant 1; \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad y \geqslant 0\right\}$.
2. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.
3. $D = \left\{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1; \quad y + x \geqslant 0\right\}$.
4. $\iint\limits_D (2y^2 - 7xy + 6x^2)dxdy$;
   $D = \{(x,y) : 1 - 3x \leqslant 2y \leqslant 4 - 3x; \quad 2x - 1 \leqslant y \leqslant 2x + 3\}$.
5. $V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2ax, \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2\right\}$.
6. $V = \left\{(x,y,z) : (x^2 + y^2)^2 \leqslant 4(x^2 - y^2); \quad 0 \leqslant 2z \leqslant x^2 + y^2\right\}$.
7. Найти момент инерции относительно оси Ox однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$; $z = 1$.

Вариант 12

1. $D = \left\{(x,y) : x - y - 1 \leqslant 0; \quad x + y - 1 \leqslant 0, \quad y^2 \leqslant 2x + 1\right\}$.
2. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$.
3. $D = \{(x,y) : |x-1| + |y| \leqslant 1\}$.

4. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy;$

$$D=\left\{(x,y): \frac{1}{x}\leqslant y\leqslant \frac{3}{x};\quad x\leqslant y\leqslant 2x\right\}.$$

5. $V=\left\{(x,y,z): 4(x^2+y^2)\leqslant z^2,\quad 0\leqslant z\leqslant 1+\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$

6. $V=\left\{(x,y,z): x^2\leqslant ay\leqslant bx;\quad x^2+y^2\leqslant hz\leqslant 2x^2+2y^2\right\}.$

7. Найти момент инерции относительно плоскости xOz однородного тела плотностью ρ_0, ограниченного поверхностями $2z=4-x^2-y^2$; $z=0$.

Вариант 13

1. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\geqslant a^2;\quad y^2\leqslant a^2-\dfrac{ax}{2}\right\}.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{a}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dy\int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx.$

3. $D=\left\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 2;\quad y\leqslant x^2;\quad x\geqslant 0\right\}.$

4. $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2}dxdy;$

$$D=\left\{(x,y): 1-x\leqslant y\leqslant 2-x;\quad \frac{x}{3}\leqslant y\leqslant 3x\right\}.$$

5. $V=\left\{(x,y,z): 4(x^2+y^2)\leqslant z^2,\quad x^2+y^2-z^2+2z-1\geqslant 0\right\}.$

6. $V=\left\{(x,y,z): 0\leqslant z\leqslant 1-y^2;\quad 0\leqslant x\leqslant 2-z\right\}.$

7. Найти массу прямого кругового цилиндра, высота которого равна H, а радиус основания R, если плотность в любой точке равна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.

Вариант 14

1. $D = \left\{(x,y) : (x+1)^2 + (y+1)^2 \geqslant 1; \quad x + y - 1 \leqslant 0; \quad y \geqslant 0\right\}.$

2. $$\int\limits_0^a dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx +$$
$$+ \int\limits_a^{2a\sqrt{2}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

3. $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant a; \quad 0 \leqslant y \leqslant a - x\}.$

4. $\iint\limits_D (2x^3 - 3y^3)dxdy;$
$$D = \left\{(x,y) : x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2; \quad \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{4}{x}\right\}.$$

5. $V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3R^2, \quad Rx \leqslant 2(y^2 + z^2)\right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : x^2 \leqslant az \leqslant 4a^2 - x^2 - y^2\right\}.$

7. Найти момент инерции относительно начала координат тела, ограниченного поверхностями
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4; \quad y = 0; \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (x \geqslant 0;\, y \geqslant 0),$$
если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию этой точки от начала координат.

Вариант 15

1. $D = \left\{(x,y) : -x \leqslant 2y \leqslant x; \quad x^2 - y^2 \leqslant 1\right\}.$

2. $$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1+\sqrt{y}}^{\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)} f(x,y)dx.$$

3. $D = \left\{ (x,y) : \dfrac{1}{4}x^2 - 1 \leqslant y \leqslant x \right\}.$

4. $\iint\limits_D xy(x^2 - y^2)dxdy;$

$D = \left\{ (x,y) : -1 \leqslant x - y \leqslant 2; \quad \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant \dfrac{3}{x} \right\}.$

5. $V = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, \quad y \geqslant 0; \quad z \geqslant 0; \quad x + y \geqslant 0 \right\}.$

6. $V = \left\{ (x,y,z) : a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2; \quad x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0; \quad x \geqslant 0 \right\}.$

7. Найти массу тела плотностью $\rho = |y|$, ограниченного поверхностями

$$x = y^2, \quad x = 4, \quad z = 2, \quad z = 5.$$

Вариант 16

1. $D = \left\{ (x,y) : y^2 \leqslant 2x + 4; \quad y^2 \geqslant 4x + 4 \right\}.$

2. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3 y} f(x,y)dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x,y)dx.$

3. $D = \left\{ (x,y) : 2ay \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4ay; \quad y \geqslant |x| \right\}.$

4. $\iint\limits_D x^4 dxdy;$

$D = \left\{ (x,y) : x^3 \leqslant y \leqslant 3x^3; \quad x \leqslant y \leqslant 4x \right\}.$

5. $V = \left\{ (x,y,z) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \right\}.$

6. $V = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2cz; \quad x^2 + y^2 \geqslant 2az \quad (a < c \leqslant 2a) \right\}.$

7. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

$$z^2 = xy; \quad x = 2; \quad y = 4; \quad z = 0 \quad (z > 0).$$

Вариант 17

1. $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \geqslant 2x + 2y - 1; \quad 1 \leqslant x \leqslant 2; \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}.$
2. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2-1}^{3+2x-x^2} f(x,y)dy.$
3. $D = \left\{(x,y) : -2 \leqslant x \leqslant 0; \quad x^2 \leqslant y \leqslant 2 - x\right\}.$
4. $\iint\limits_D 2xydxdy;$

   $D = \{(x,y) : x - 2 \leqslant y \leqslant x + 1; \quad -x - 1 \leqslant y \leqslant -x + 3\}.$
5. $V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant 2ax; \quad x^2 + y^2 \leqslant a^2 - az; \quad z \geqslant 0\right\}.$
6. $V = \left\{(x,y,z) : (x-2)^2 + y^2 \leqslant 2z \leqslant 8 - 4x\right\}.$
7. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x + y + z = 2a; \quad x = a; \quad y = a; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Вариант 18

1. D — четырехугольник $ABCD$, где $A(-1;1)$, $B(-2;2)$, $C(2;4)$, $D(3;3)$.
2. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-3\sqrt{x}}^{-\sqrt{-2x-x^2}} f(x,y)dy.$
3. D — квадрат с вершинами $O(0;0)$, $A(0;2)$, $B(-2;2)$, $C(-2;0)$.
4. $\iint\limits_D (x+y)dxdy;$

   $D = \left\{(x,y) : \dfrac{2}{x} \leqslant y \leqslant \dfrac{3}{x}; \quad x \leqslant 2y \leqslant 3x\right\}.$

5. $V = \left\{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant 4 - x^2; \quad x^2 - y^2 \geqslant 0; \quad x \geqslant 0\right\}.$
6. $V = \left\{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant ce^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}; \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant R^2\right\}.$
7. Найти статический момент относительно плоскости xOy однородного тела плотностью ρ, ограниченного плоскостями

$$x + y + z = 1; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0.$$

Вариант 19

1. $D = \left\{(x,y) : 3x - 5 \leqslant 0; \quad x + y + 4 \geqslant 0; \quad y \leqslant \sqrt{x+4}\right\}.$
2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{3-y} f(x,y)dx.$
3. $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 9; \quad 2 \leqslant y \leqslant 3\right\}.$
4. $\iint\limits_D (y^2 + xy)dxdy;$

   $D = \left\{(x,y) : 2 - x \leqslant y \leqslant 5 - x; \quad \dfrac{x}{3} \leqslant y \leqslant 3x\right\}.$
5. $V = \left\{(x,y,z) : y^2 + z + x \leqslant a; \quad x \geqslant z \geqslant 0\right\}.$
6. $V = \left\{(x,y,z) : (x^2+y^2)^2 \leqslant 2xy; \quad 0 \leqslant z \leqslant x + y\right\}.$
7. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2; \quad x^2 + y^2 = 2az \quad (x^2 + y^2 \leqslant 2az).$$

Вариант 20

1. $D = \left\{(x,y) : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} \leqslant 1; \quad |y| \leqslant 4\right\}.$

2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

3. $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 - 6y \geqslant 0; \quad 0 \leqslant x \leqslant 3; \quad y \geqslant 0\right\}.$

4. $\iint\limits_D (3x^3 - 2y^3)dxdy;$

   $D = \left\{(x,y) : 2x^2 \leqslant y \leqslant 3x^2; \quad \dfrac{2}{x} \leqslant y \leqslant \dfrac{5}{x}\right\}.$

5. $V = \left\{(x,y,z) : 4x^2 + 3y^2 + z^2 \leqslant 48; \quad x \leqslant 2z \leqslant 4x^2 + 3y^2\right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : x^4 + y^4 \leqslant a^2(x^2 + y^2); \quad 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\right\}.$

7. Найти массу тела плотностью $\rho = z$, ограниченного поверхностями

$$z = 6 - x^2 - y^2; \quad z^2 = x^2 + y^2; \quad z \geqslant 0.$$

Вариант 21

1. $D = \left\{(x,y) : y \geqslant -3x; \quad \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1\right\}.$

2. $\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy.$

3. $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 8; \quad |x| \leqslant 2; \quad y \geqslant 0\right\}.$

4. $\displaystyle\iint\limits_D (x-y)^2(x+y)dxdy;$

$$D = \left\{(x,y) : -2 \leqslant x-y \leqslant 1; \quad -\frac{2}{x} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\right\}.$$

5. $V = \left\{(x,y,z) : 2(x^2+2y^2) \leqslant 2az \leqslant 3a\sqrt{a^2-x^2-2y^2}\right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : 0 \leqslant x \leqslant 4; \quad 0 \leqslant y \leqslant 8; \quad z^2 \leqslant xy\right\}.$

7. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2=3z; \quad z=3.$$

Вариант 22

1. $D = \left\{(x,y) : y \leqslant x^2+1; \quad y \geqslant 9-x^2; \quad x \leqslant 4\right\}.$

2. $\displaystyle\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{5}} dy \int\limits_0^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)dx.$

3. D — прямоугольник с вершинами $O(0,0)$; $A(2,0)$; $B(2,4)$; $C(0,4)$.

4. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2}; \; D = \left\{(x,y) : 2x^3 \leqslant y \leqslant 4x^3; \quad 3x \leqslant y \leqslant 5x\right\}.$

5. $V = \left\{(x,y,z) : (x^2+y^2)^2 \leqslant a^2(x^2-y^2); \; 0 \leqslant az \leqslant 4(x^2+y^2); \; x \geqslant 0\right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}; \quad 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\right\}.$

7. Найти момент инерции относительно плоскости xOy однородного тела плотностью ρ_0, ограниченного поверхностями

$$3z = 9-x^2-y^2; \quad z=0.$$

Вариант 23

1. D — треугольник ABC, где $A(-2,2)$; $B(4,5)$; $C(5,-2)$.
2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^{4-3y} f(x,y)dx.$
3. $D = \{(x,y) : x^2 - 4x + y^2 \geqslant 0; \quad x^2 - 8x + y^2 \leqslant 0\}.$
4. $\iint\limits_D (x^2 + xy)dxdy;$

   $D = \{(x,y) : 3x - 1 \leqslant y \leqslant 3x + 2; \quad 1 - 2x \leqslant y \leqslant 5 - 2x\}.$
5. $V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leqslant 4x; \quad x^2 + y^2 \leqslant 4 - 2z; \quad z \geqslant 0\}.$
6. $V = \{(x,y,z) : z^2 \geqslant 2x; \quad z^2 \geqslant 6y; \quad 0 \leqslant z \leqslant 4; \quad x \leqslant 0; \quad y \geqslant 0\}.$
7. Найти момент инерции относительно оси Ox тела плотностью ρ_0, ограниченного поверхностью

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Вариант 24

1. $D = \left\{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1; \quad y \leqslant \frac{|x|}{2}\right\}.$
2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1+\sqrt{1-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy +$

   $+ \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy.$
3. D — треугольник с вершинами $O(0,0)$; $A(-3,0)$; $B(0,3)$.

4. $\iint\limits_D (2x+y)dxdy;$

   $D = \left\{(x,y) : 2x^3 \leqslant y \leqslant 6x^3; \quad 3x \leqslant y^2 \leqslant 5x\right\}.$

5. $V = \left\{(x,y,z) : 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9; \quad x^2+y^2-z^2 \geqslant 0; \quad x \leqslant 0\right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : y^2 \leqslant 6(2-x); \quad z^2 \leqslant 2x\right\}.$

7. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями

$$x+y+z=2; \quad z=0; \quad x^2+y^2=2 \quad (z>0).$$

Вариант 25

1. $D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \geqslant 9; \quad x+6-\sqrt{3}|y| \geqslant 0\right\}.$

2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{3^x}^{4-x} f(x,y)dy.$

3. $D = \{(x,y) : |x|+|y| \leqslant 2\}.$

4. $\iint\limits_D \frac{y^2\cos xy}{x}dxdy;$

   $D = \left\{(x,y) : 2y \leqslant x^2 \leqslant 3y; \quad 2x \leqslant y^2 \leqslant 3x\right\}.$

5. $V = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leqslant 4Rz; \quad x^2+y^2+z^2 \geqslant Rz; \quad x^2+y^2 \leqslant \frac{z^2}{3}\right\}.$

6. $V = \left\{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant 2\sin\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right); \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant \pi\right\}.$

7. Найти массу куба со стороной a, если плотность его в каждой точке равна квадрату расстояния этой точки до фиксированной вершины куба.

Часть 2. Методические указания к решению задач

Студенту предлагается решить следующий типовой вариант учебного задания и сверить свои результаты с приведёнными ниже.

1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке для замкнутой области

$$D = \left\{ (x,y) : \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1, \quad x \leqslant 4 \right\}.$$

2. Переменить порядок интегрирования в интеграле

$$\int\limits_1^5 dx \int\limits_{3-\frac{3}{2}\sqrt{6x-x^2-5}}^{\frac{x+7}{2}} f(x,y)dy.$$

3. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ перейти к полярным координатам и записать интеграл в виде

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} g(r,\varphi)dr \quad \text{и} \quad \int\limits_{r_1}^{r_2} dr \int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} g(r,\varphi)dr,$$

где $D = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 + 4y \leqslant 0; \quad -2 \leqslant y \leqslant 0\big\}$.

4. Ввести новые переменные u и v и вычислить интеграл

$$\iint\limits_D \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{xy} dxdy;$$

$$D = \left\{ (x,y) : y = \frac{1}{x^2}; \quad y = \frac{4}{x^2}; \quad y = x - 1; \quad y = x + 1 \right\}.$$

5. Записать тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного

$$1)\, V = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + ax - xz \leqslant 0; \quad z \geqslant 0\right\};$$

$$2)\, V = \left\{(x,y,z) : \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \leqslant a^3 z\right\}.$$

6. Вычислить объём тела с помощью двойного интеграла:
1) $V = \big\{(x,y,z) : -x \leqslant y \leqslant x; \quad x^2 + y^2 \leqslant az \leqslant 2x^2 + 2y^2;$
$z \leqslant h\big\}$, $a > 0$;

$$2)\, V = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1; \quad |z| \leqslant 4\right\}.$$

7. 1. Найти массу и определить положение центра масс шара

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z,$$

если плотность в точках шара обратно пропорциональна расстоянию этих точек от начала координат.
2. Найти момент инерции относительно оси Ox тела плотностью ρ, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - ax = 0$, $z^2 = 2ax$, $z = 0$ $(z > 0)$.

Решение задачи 1

$$D = \left\{ (x, y): \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1; \quad x \leqslant 4 \right\}$$

На рис. 1 изображена область интегрирования D. Для расстановки пределов интегрирования найдём точки пересечения прямой $x = 4$ и эллипса.

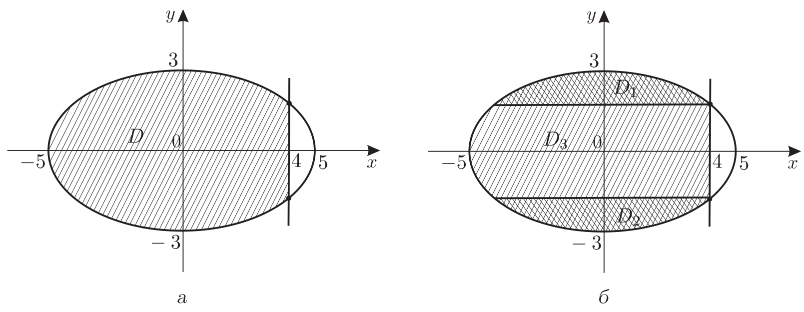

Рис. 1

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x = 4, \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y^2 = \dfrac{81}{25}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4, \\ y = \pm\dfrac{9}{5}. \end{cases}$$

Итак, $M_1\left(4; \dfrac{9}{5}\right)$ и $M_2\left(4; -\dfrac{9}{5}\right)$.

Тогда разрешив уравнение эллипса относительно y, запишем

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_{-5}^{4} dx \int\limits_{-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}} f(x, y)dy.$$

Для расстановки пределов интегрирования в обратную сторону надо разбить область интегрирования D на три правильные области (рис. 1) и разрешить уравнение эллипса относительно переменной x.

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{D_i} f(x, ydxdy =$$

$$= \int\limits_{-3}^{-\frac{9}{5}} dy \int\limits_{-\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{-\frac{9}{5}}^{\frac{9}{5}} dy \int\limits_{-\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}}^{4} f(x,y)dx +$$

$$+ \int\limits_{\frac{9}{5}}^{3} dy \int\limits_{-\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}}^{\frac{5}{3}\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx.$$

Решение задачи 2

$$\boldsymbol{I = \int\limits_{1}^{5} dx \int\limits_{3-\frac{3}{2}\sqrt{6x-x^2-5}}^{\frac{x+7}{2}} f(x,y)dy.}$$

Сначала восстановим область интегрирования D по заданному повторному интегралу I.

Область D находится в полосе

$$\prod = \left\{(x,y): \quad x \in [1,5]; \quad y \in \mathbb{R}^1\right\},$$

снизу она ограничена кривой $Z: \quad y = 3 - \dfrac{3}{2}\sqrt{6x - x^2 - 5}$; сверху прямой $y = \dfrac{x+7}{2}$.

Кривая Z — кривая второго порядка, определим её каноническое уравнение с помощью таких действий, как возведение обеих частей уравнения в квадрат и выделение полного квадрата в квадратном трёхчлене относительно x:

$$y = 3 - \frac{3}{2}\sqrt{6x - x^2 - 5} \Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{2}\sqrt{6x - x^2 - 5} \Rightarrow$$
$$(y-3)^2 = \frac{9}{4}\left(4 - (x-3)^2\right) \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1 \Rightarrow$$

Кривая, ограничивающая область D снизу есть нижняя половина эллипса с центром в точке $(3, 3)$ и полуосями $a = 2$ и $b = 3$. На рис. 2 изображена область D.

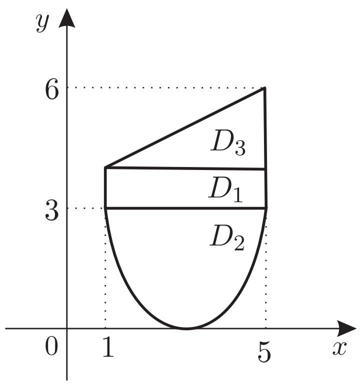

Рис. 2

Для расстановки пределов в обратную сторону разобьём область на три подобласти и разрешим уравнения эллипса и прямой относительно x, тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{3}\iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-\frac{2}{3}\sqrt{6y-y^2}}^{3+\frac{2}{3}\sqrt{6y-y^2}} f(x,y)dx +$$

$$+\int\limits_{3}^{4} dy \int\limits_{1}^{5} f(x,y)dx + \int\limits_{4}^{6} dy \int\limits_{2y-7}^{5} f(x,y)dx.$$

Решение задачи 3

Изобразим заданную область, границами которой являются окружность $x^2+y^2+4y=0$ и прямая $y=-2$:

$x^2+y^2+4y+4=4 \Rightarrow x^2+(y+2)^2=4$ — окружность с центром в точке $(0;-2)$ и радиусом $R=2$.

Разобъём область на три части D_1, D_2, D_3 прямыми $y=\pm x$ (см. рис. 3).

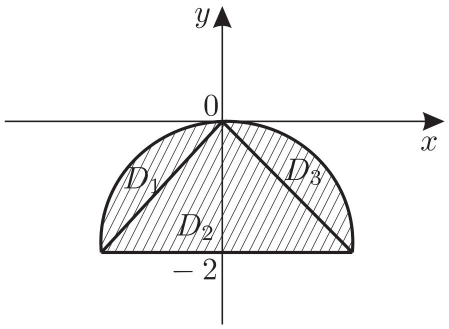

Рис. 3

Уравнение окружности в полярной системе координат:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi;$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + 4r\sin\varphi = 0 \Rightarrow r = -4\sin\varphi;$$
$$y=-2 \Leftrightarrow r\sin\varphi = -2 \Rightarrow r = -\frac{2}{\sin\varphi};$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy = \int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{-4\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr +$$

$$+ \int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{-\frac{2}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr + \int\limits_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{-4\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

Теперь расставим пределы в обратном порядке, для этого разделим область D на три подобласти частью окружности с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом 2 (см. рис. 4).

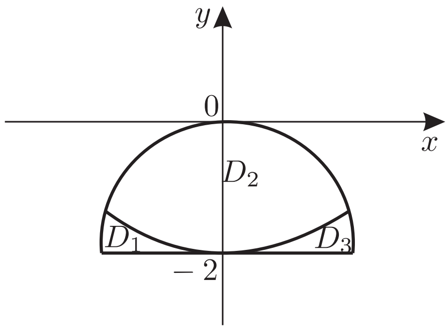

Рис. 4

Разрешим уравнения окружности и прямой в полярной системе координат относительно переменной φ:

$$r = -4\sin\varphi \Leftrightarrow \sin\varphi = -\frac{r}{4} \Rightarrow$$

$$\varphi = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{r}{4}\right) + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{r}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

$$r = -\frac{2}{\sin\varphi} \Leftrightarrow \sin\varphi = -\frac{2}{r} \Rightarrow$$

$$\varphi = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{2}{r} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

Из множества решений (1) и (2) выбираем те, которые находятся в 3-ей и 4-ой четвертях координатной плоскости

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{3} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy,$$

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{2} dr \int\limits_{\pi+\arcsin\frac{r}{4}}^{2\pi-\arcsin\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi,$$

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int\limits_{2}^{2\sqrt{2}} dr \int\limits_{\pi+\arcsin\frac{r}{4}}^{\pi+\arcsin\frac{2}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi,$$

$$\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy = \int\limits_{2}^{2\sqrt{2}} dr \int\limits_{2\pi-\arcsin\frac{2}{r}}^{2\pi-\arcsin\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r d\varphi.$$

Решение задачи 4

Вычислить

$$\boldsymbol{I = \iint\limits_{D} \frac{x^3 - 3xy^2 + 2y^3}{xy} dxdy.}$$

D ограничена линиями

$$y = \frac{1}{x^2}; \quad y = \frac{4}{x^2}; \quad y = x - 1; \quad y = x + 1.$$

Изобразим область D (см. рис. 5)

$$D=\left\{(x,y):\quad \frac{1}{x^2}\leqslant y\leqslant\frac{4}{x^2};\quad x-1\leqslant y\leqslant x+1\right\}=$$
$$=\left\{x,y:1\leqslant x^2y\leqslant 4;\quad x-1\leqslant y-x\leqslant 1\right\}.$$

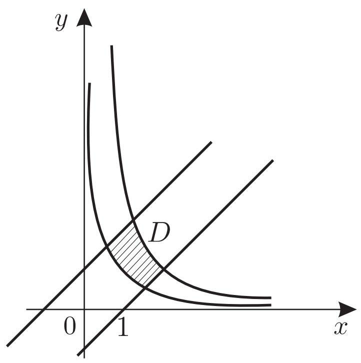

Рис. 5

Для более удобного вычисления интеграла введём криволинейные координаты $u=x^2y$; $v=y-x$, тогда $u\in[1;4]$, $v\in[-1;1]$.

Найдём якобиан отображения $(x,y)\to(u,v)$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{1}{\left|\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|};$$

$$\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2xy & x^2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=x^2+2xy\Rightarrow$$
$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{1}{x^2+2xy}=\frac{1}{x(x+2y)}.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$f(x,y)=\frac{x^3-3xy^2+2y^3}{xy}=\frac{(x^3-xy^2)-(2xy^2-2y^3)}{xy}=$$

$$=\frac{x(x^2-y^2)-2y^2(x-y)}{xy}=\frac{(x-y)(x^2+xy-2y^2)}{xy}=$$

$$=\frac{(x-y)(x^2-xy+2xy-2y^2)}{xy}=\frac{(x-y)(x(x-y)+2y(x-y))}{xy}=$$

$$=\frac{(x-y)^2(x+2y)}{xy}.$$

Таким образом,

$$f(x,y)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{(x-y)^2(x+2y)}{xy}\cdot\frac{1}{x(x+2y)}=\frac{(x-y)^2}{x^2y}=\frac{v^2}{u}.$$

Вычисляем интеграл

$$I=\iint\limits_{D_0}\frac{v^2}{u}dudv,$$

где D_0 — область, являющаяся прообразом D при отображении $(u,v)\to(x,y)$ (см. рис. 6).

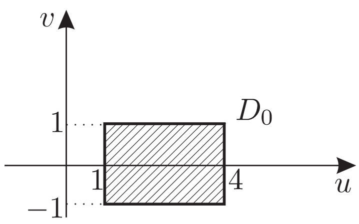

Рис. 6

$$I=\int\limits_1^4 du\int\limits_{-1}^1\frac{v^2}{u}dv=\int\limits_1^4\frac{du}{u}\int\limits_{-1}^1 v^2dv=\ln|u|\Big|_1^4\cdot\frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^1=\frac{2}{3}\ln 4.$$

Решение задачи 5

Записать тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ в виде повторного. Так как подынтегральная функция не задана, то выбор, в какой системе координат — декартовой, цилиндрической или сферической — и порядок записи этого повторного интеграла зависит только от области интегрирование V.

I. 1. $\boldsymbol{V = \left\{(x,y,z): \quad x^2+y^2+ax-xz \leqslant 0; \quad z \geqslant 0\right\}}$.

Так как проекцией данного тела на плоскость xOy $(z=0)$ является круг $x^2+y^2+ax \leqslant 0$ (рис. 7), то для перехода к повторному интегралу используем цилиндрическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \\ z = z; \end{cases} \qquad |J| = r.$$

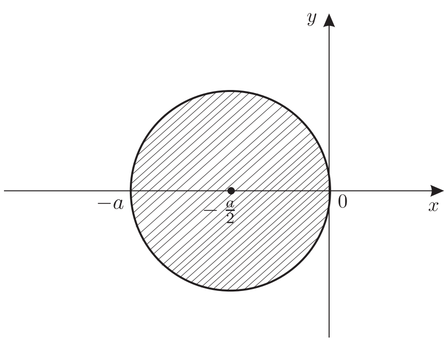

Рис. 7

В первом из неравенств, задающих тело V, выразим z, учитывая, что $x<0$

$$z \leqslant \frac{x^2+y^2}{x} + a.$$

Тогда $0 \leqslant z \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{x} + a$.

С учётом формул цилиндрической системы координат имеем

$$0 \leqslant z \leqslant \frac{r}{\cos\varphi} + a.$$

Тогда повторный интеграл примет вид

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{-a\cos\varphi} r dr \int\limits_{0}^{\frac{r}{\cos\varphi}+a} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) dz.$$

2. $V = \{(x,y,z): \quad x^2+y^2 \leqslant R^2; \quad x^2+z^2 \leqslant R^2\}$.

Тело V представляет собой криволинейный цилиндр с боковой поверхностью $x^2+y^2=R^2$ и проекцией на плоскость xOy в виде круга $x^2+y^2 \leqslant R^2$. Сверху и снизу тело ограничено верхней и нижней частями кругового цилиндра $x^2+y^2=R^2$ с осью симметрии Oy.

На рис. 8 изображена верхняя половина этого криволинейного цилиндра, симметричного относительно плоскости xOy.

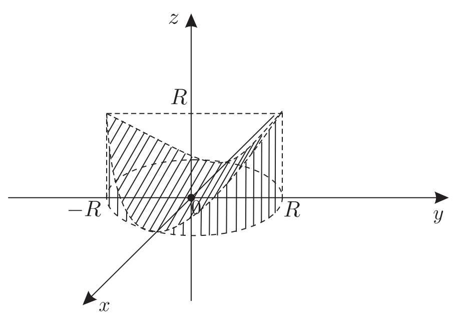

Рис. 8

Расставим пределы интегрирования в повторном интеграле, применяя декартову систему координат:

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)dz.$$

II. $\boldsymbol{V = \left\{(x,y,z): \quad (x^2+y^2+z^2)^2 \leqslant a^3 z\right\}}$

Перейдем в неравенстве к сферическим координатам:

$$(r^2)^2 \leqslant a^3 r \sin\psi.$$

Учитывая условие $r \geqslant 0$, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant r^3 \leqslant a^3 \sin\psi; \\ \sin\psi \geqslant 0. \end{cases}$$

Из первого неравенства следует

$$0 \leqslant r \leqslant a\sqrt[3]{\sin\psi},$$

из второго, учитывая условие

$$\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \quad \psi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\sin\psi}} r^2 \tilde{f}(r,\varphi,\psi)dr.$$

Решение задачи 6

I. Вычислить объем тела

$$\boldsymbol{V = \{(x, y, z): \quad -x \leqslant y \leqslant x;}$$
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 \leqslant az \leqslant 2x^2 + 2y^2; \quad z \leqslant h\}, \quad a > 0.}$$

Обратим внимание, что тело ограничено плоскостями $y = -x$, $y = x$ и $z = h$, а также двумя круговыми параболоидами

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a} \quad \text{и} \quad z = \frac{x^2 + y^2}{2a}.$$

Заметим также, что тело симметрично относительно плоскости zOx, поэтому сначала вычислим объём V_1 части тела, расположенной в полупространстве $y \geqslant 0$. Она будет составлять половину нужного нам объёма.

Для удобства расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле, изобразим проекции V_1 на плоскости xOy (рис. 9) и zOy (рис. 10).

На рис. 9 изображены следы плоскостей $y = x$ и $y = -x$ на плоскость xOy и проекции окружностей

$$\begin{cases} z = h, \\ x^2 + y^2 = az, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} z = h, \\ 2x^2 + 2y^2 = az, \end{cases}$$

получающихся от сечения плоскостью $z = h$ двух параболоидов.

На рис. 10 изображены следы плоскости $z = h$ на координатной плоскости yOz и параболы

$$\begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 = az, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 = az. \end{cases}$$

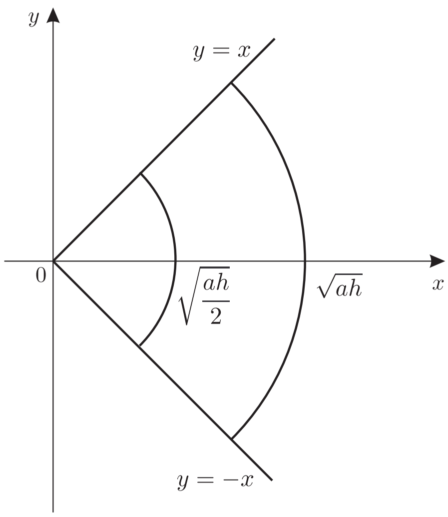

Рис. 9

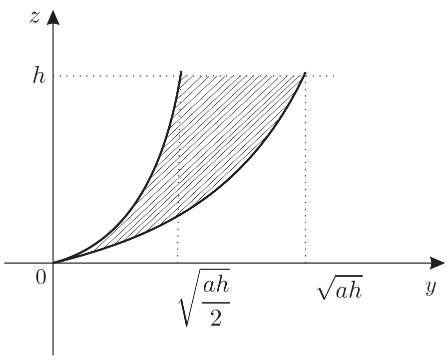

Рис. 10

Теперь можно расставлять пределы интегрирования, причём из рис. 9 видно, что наиболее удобной здесь будет цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \text{якобиан} \quad |J| = r.$$

Уравнения параболоидов в цилиндрической системе координат

$$z = \frac{r^2}{2a} \quad \text{и} \quad z = \frac{r^2}{a}.$$

$$V_1 = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{ah}{2}}} r\left(\frac{2r^2}{a} - \frac{r^2}{a}\right)dr + \frac{\pi}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{\frac{ah}{2}}}^{\sqrt{ah}} r\left(h - \frac{r^2}{a}\right)dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{\frac{ah}{2}}} r^3 dr + \int\limits_{\sqrt{\frac{ah}{2}}}^{\sqrt{ah}} \left(rh - \frac{r^3}{a}\right)dr\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a}\frac{r^4}{4}\bigg|_{0}^{\sqrt{\frac{ah}{2}}} + h\frac{r^2}{2}\bigg|_{\sqrt{\frac{ah}{2}}}^{\sqrt{ah}} - \frac{1}{a}\frac{r^4}{4}\bigg|_{\sqrt{\frac{ah}{2}}}^{\sqrt{ah}}\right) =$$

$$= \frac{\pi a h^2}{16} \Rightarrow V = 2V_1 = \frac{\pi a h^2}{8}.$$

II. Найти объём тела, ограниченного поверхностями

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad |z| = 1.}$$

Тело представляет собой часть однополосного гиперболоида, ограниченную плоскостями $z = \pm 4$ (рис. 11).

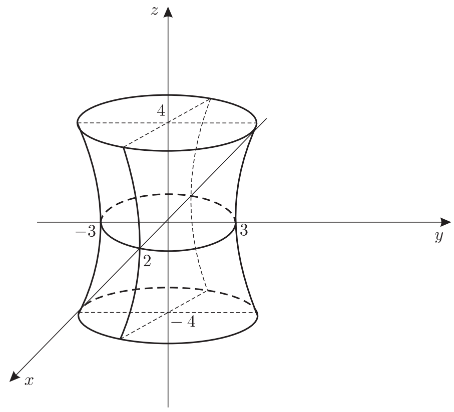

Рис. 11

Плоскость xOy $(z = 0)$ тело пересекает по эллипсу

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

плоскости $z = \pm 4$ по эллипсам

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2.$$

Проекции тела на плоскости yOz и xOy представлены на рис. 12, 13 соответственно.

Из рис. 12 видно, что объём тела складывается из объёма V_1 эллиптического цилиндра высотой $H = 4$ и объёма V_2 тела, полученного из исходного тела за вычетом цилиндра.

В свою очередь объём тела V_2, симметричного относительно плоскости xOy, равен $2V_3$, где V_3 — объём верхней половины V_2, расположенной выше плоскости xOy.

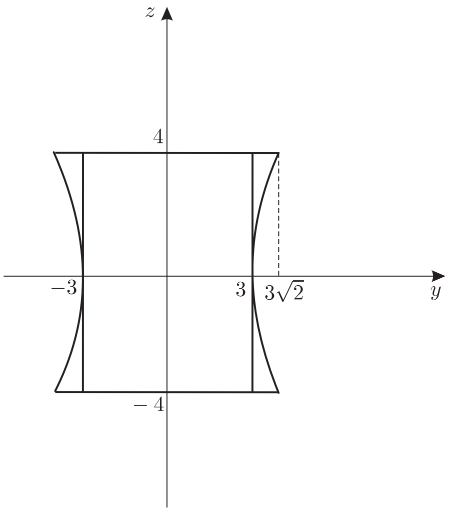

Рис. 12

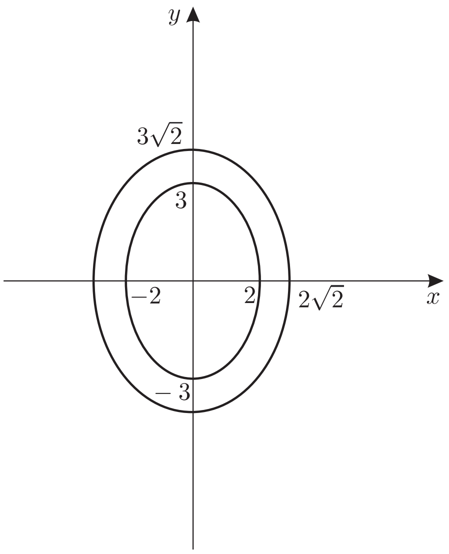

Рис. 13

Из рис. 13 видно, что для вычисления объёма удобно ввести обобщённую цилиндрическую систему координат:

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi; \\ y = 3\sin\varphi; \\ z = z, \end{cases} \qquad |J| = 6r.$$

Объём цилиндра $V_1 = S_{\text{осн}} H = S_{\text{элл}} H = \pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi$ (куб. ед.).

Вычислим V_3. Уравнения эллипса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ в обобщённой полярной системе:

$$\frac{4r^2\cos^2\varphi}{r} + \frac{9r^2\sin^2\varphi}{9} = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1.$$

Аналогично уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 2$ в обобщённой полярной системе $r = \sqrt{2}$.

Уравнение гиперболоида в обобщённой цилиндрической системе

$$z = \pm 4\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1} \Rightarrow z = \pm 4\sqrt{r^2 - 1}.$$

Вычислим V_3

$$V_3 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{2}} 6r dr \int\limits_{4\sqrt{r^2-1}}^{4} dz = 6 \cdot 2\pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} r dr \left(4 - 4\sqrt{r^2 - 1}\right) =$$

$$= 48\pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(r - r\sqrt{r^2 - 1}\right) dr = 48\pi \left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_1^{\sqrt{2}} - \left.\frac{1}{3}(r^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\right|_1^{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= 48\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 8\pi;$$

$$V_2 = 2V_3 \Rightarrow V_2 = 16\pi \text{ куб. ед.};$$
$$V = V_1 + V_2 = 48\pi + 16\pi = 64\pi \text{ куб. ед.}$$

Решение задачи 7

I. $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z$.

Масса шара вычисляется по формуле (см. приложение)

$$M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz.$$

Из условия задачи следует, что $\rho(x, y, z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где k — коэффициент пропорциональности, таким образом, в нашем случае

$$M = k \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Так тело представляет собой шар, а подинтегральная функция содержит выражение $x^2 + y^2 + z^2$, то самыми удобными координатами для вычисления тройного интеграла будут сферические:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi; \\ y = r\sin\varphi\cos\psi; \\ z = z\sin\psi; \\ |J| = r^2\cos\psi, \end{cases} \qquad r \geqslant 0; \quad \varphi \in [0, 2\pi]; \quad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Уравнение шара в сферической системе координат $r = 2\sin\psi$.

Переходим от тройного интеграла к повторному:

$$M = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2\sin\psi} \frac{r^2\cos\psi dr}{r} = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int\limits_0^{2\sin\psi} rdr =$$

$$= 2\pi k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{2\sin\psi} = 4\pi k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin^2\psi d\psi =$$

$$= 4\pi k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi d(\sin\psi) = 4\pi k \frac{\sin^3\psi}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{3} k \left(\sin^3\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{4\pi}{3} k.$$

$M = \dfrac{4}{3}\pi k$ — масса шара.

Теперь найдём координаты центра масс (x_0, y_0, z_0). Так как шар симметричен относительно оси Oz, то $x_0 = y_0 = 0$. Поэтому надо вычислить только третью координату z_0. Для этого посчитаем статический момент тела относительно плоскости xOy (см. приложение):

$$M_{xOy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz,$$

в нашем случае

$$M_{xOy} = k \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z} \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2\sin\psi} \frac{r^2\cos\psi \cdot r \cdot \sin\psi dr}{r} =$$

$$= 2\pi k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi d\psi \int\limits_0^{2\sin\psi} r^2 dr = 2\pi k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi d\psi \cdot \frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2\sin\psi} =$$

$$= \frac{16\pi k}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi \cdot \cos\psi d\psi = \frac{16}{3}\pi k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi d(\sin\psi) =$$

$$= \frac{16}{3}\pi k \frac{\sin^5\psi}{5}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{15}\pi k;$$

$$z_0 = \frac{M_{xOy}}{M} = \frac{\frac{16}{15}\pi k}{\frac{4}{3}\pi k} = \frac{4}{5}.$$

Центр масс имеет координаты $\left(0, 0, \dfrac{4}{5}\right)$.

II. $x^2 + y^2 - ax = 0$, $z^2 = 2ax$, $z = 0$ $(z > 0)$.

Тело представляет собой часть кругового цилиндра, ограниченную снизу плоскостью $z = 0$, сверху частью параболического цилиндра $z = \sqrt{2ax}$.

Проекция тела на плоскость xOy есть круг $x^2 + y^2 = ax < 0$ (рис. 14).

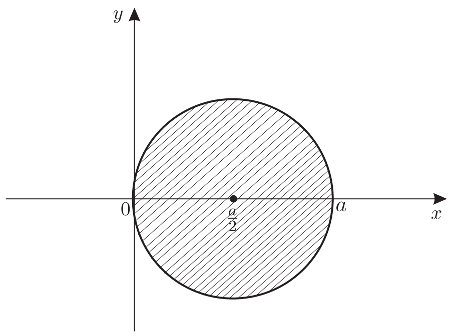

Рис. 14

Момент инерции тела относительно оси Ox находится по формуле

$$J_{ox} = \iiint\limits_V r^2 \rho(x, y, z)\,dxdydz,$$

где r — расстояние переменной точки тела от оси Ox.

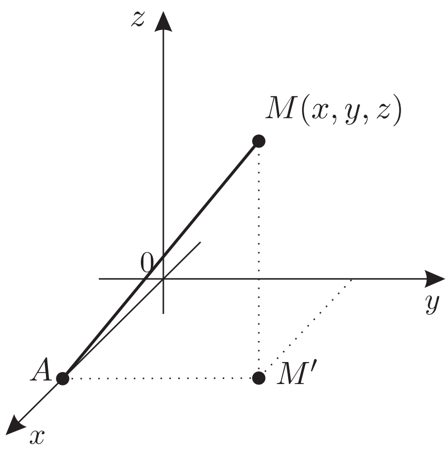

Рис. 15

Найдём это расстояние r (рис. 15).

Из точки $M(x,y,z)$ тела опустим перпендикуляр MM' на плоскость xOy. А из точки M' опустим перпендикуляр на ось Ox. Точка A — основание этого перпендикуляра — имеет координаты $(x,0,0)$. Тогда расстояние

$$r = |AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \\ \sqrt{y^2+z^2} \Rightarrow r^2 = y^2 + z^2$$

и

$$J_{ox} = \rho \iiint\limits_V (y^2+z^2)dxdydz.$$

Из рис. 15 проекции видно, что для вычисления момента инерции удобно выбрать цилиндрическую систему координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \\ z = z, \end{cases} \qquad |J| = r.$$

Итак,

$$J_{ox} = \rho \iiint\limits_V (y^2+z^2)dxdydz = \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} rdr \int\limits_0^{\sqrt{2a\cos\varphi}} (r^2\sin^2\varphi + z^2)dz,$$

где $r = a\cos\varphi$ — уравнение окружности $x^2+y^2-ax=0$ в полярной системе координат, а $z = \sqrt{2a\cos\varphi}$ — уравнение параболического цилиндра в цилиндрической системе координат.

$$J_{ox} = \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \left(r^2\sin^2\varphi\sqrt{2ar\cos\varphi} + \frac{1}{3}(2ar\cos\varphi)^{\frac{3}{2}} \right) rdr =$$

$$= \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \left(r^{\frac{7}{2}}\sin^2\varphi\sqrt{2a\cos\varphi} + \frac{1}{3}(2a)^{\frac{3}{2}} r^{\frac{5}{2}}(\cos\varphi)^{\frac{3}{2}} \right) dr =$$

$$= \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{2}{9} r^{\frac{9}{2}} \Big|_0^{a\cos\varphi} \sin^2\varphi\sqrt{2a\cos\varphi} + \frac{1}{3}(2a)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{7} r^{\frac{7}{2}} \Big|_0^{a\cos\varphi} (\cos\varphi)^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$= \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} a^5 \sin^2\varphi\cos^5\varphi + \frac{2\sqrt{2}}{7} a^5\cos^5\varphi \right) d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\rho a^5 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{9}\sin^2\varphi\cos^5\varphi + \frac{1}{7}\cos^5\varphi \right) d\varphi.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^5\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi) =$$

$$= \left(\frac{\sin^3\varphi}{3} - \frac{2}{5}\sin^5\varphi + \frac{\sin^7\varphi}{7} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{105}.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi) =$$

$$= \left(\sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{\sin^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15},$$

$$I_{ox} = 4a\sqrt{2}\rho a^5 \left(\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{105} + \frac{1}{7}\cdot\frac{8}{15}\right) = \frac{64\sqrt{2}}{315}\rho a^5.$$

Приложения

I. Криволинейные координаты.

1. Полярная система координат (рис. 16)

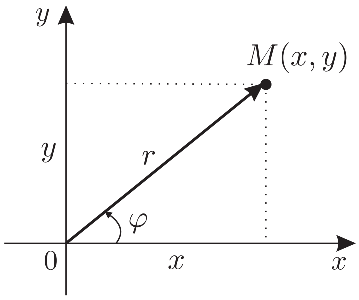

Рис. 16

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad r \in [0; +\infty); \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Якобиан преобразования $|J| = r$.

2. Цилиндрическая система координат (рис. 17)

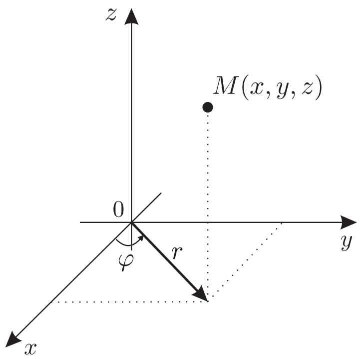

Рис. 17

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi; \qquad r \in [0; +\infty); \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \\ z = z, \end{cases}$$

Якобиан преобразования $|J| = r$.

3. Сферическая система координат (рис. 18)

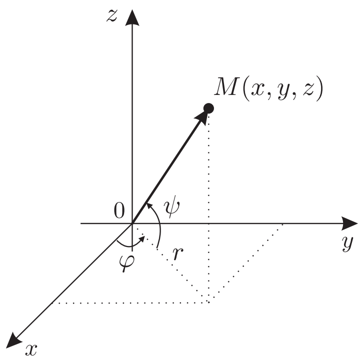

Рис. 18

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi; \\ y = r\sin\varphi\cos\psi; \qquad r \in [0; +\infty); \quad \varphi \in [0, 2\pi); \quad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \\ z = r\sin\psi, \end{cases}$$

Якобиан преобразования $|J| = r^2\cos\psi$.

II. Механические приложения тройного интеграла.

1. Масса тела V плотностью $\rho(x, y, z)$

$$M = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz.$$

2. Статические моменты тела V плотностью $\rho(x, y, z)$

относительно плоскости yOz

$$M_{yOz} = \iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz;$$

относительно плоскости xOz

$$M_{xOz} = \iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz;$$

относительно плоскости xOy

$$M_{xOy} = \iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz.$$

3. Координаты центра масс x_0, y_0, z_0 тела V плотностью $\rho(x,y,z)$

$$x_0 = \frac{M_{yOz}}{M};$$
$$y_0 = \frac{M_{xOz}}{M};$$
$$z_0 = \frac{M_{xOy}}{M}.$$

4. Моменты инерции тела V плотностью $\rho(x,y,z)$
относительно плоскости xOz

$$J_{xOz} = \iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)dxdydz;$$

относительно плоскости yOz

$$J_{yOz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)dxdydz;$$

относительно плоскости xOy

$$J_{xOy} = \iiint\limits_V z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

5. Момент инерции тела V плотностью $\rho(x, y, z)$ относительно оси l

$$J_l = \iiint\limits_V r^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где r — расстояние переменной точки (x, y, z) тела V от оси l.

6. Момент инерции тела V плотностью $\rho(x, y, z)$ относительно начала координат

$$J_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Заключение

Настоящее учебное пособие составлено для самостоятельной работы студентов–бакалавров направления «Прикладная математика и ифнорматика» по курсу математического анализа «Интегральное исчисление функции многих переменных». Решение индивидуального варианта задания способствует развитию у студентов навыков решения задач, связанных с использованием кратных интегралов. Однако эти навыки скорее всего будут необходимыми, но не достаточными для свободного владения данным математическим аппаратом. В случае необходимости пополнения знаний в данной области студенту необходимо продолжать решать подобные задачи, используя ту литературу, которую авторы привели в библиографическом списке. Для получения необходимых теоретических сведений студенту можно обратиться к книгам [1, 3, 5, 7, 8], а для совершенствования практических навыков незаменимы издания [2, 4, 6], в которых приведено большое количество задач разной степен сложности с подробными изложениями решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.** Лекции по математическому анализу [Текст] / М.: Наука, 2004. — 640 с.
2. **Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.** Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 ч. Ч. 1 [Текст] / М.: Дрофа, 2001. — 725 с.
3. **Гаврилов В. Р., Иванова Б. Б., Морозова В. Д.** Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории [Текст] / М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003. — 496 с.
4. **Демидович Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / М.: АСТ, Астрель, 2004. — 558 с.
5. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Основы математического анализа. Ч. 2 [Текст] / М.: Физматлит, 2005. — 448 с.
6. **Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.** Сборник задач по математическому анализу. Т. 3 [Текст] / М.: Физматлит, 2003. — 473 с.
7. **Кудрявцев Л. Д.** Курс математического анализа. Т. 2 [Текст] / М.: Дрофа, 2004. — 720 с.
8. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3 [Текст] / М.: Физматлит, 2001. — 662 с.

Оглавление

Учебное издание

Кратные интегралы

ПАВЛОВА Галина Александровна,
АФАНАСЬЕВА Ольга Сергеевна

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.02.2015
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,12. Уч.–изд. л. 3,00
Тираж 70 экз. Рег. №213/13

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
“Самарский государственный технический университет”
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Главный корпус

Отпечатано в типографии Самарского
государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Корпус № 8