Е. Н. ОГОРОДНИКОВ, Е. Ю. АРЛАНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практикум

Самара 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Е. Н. ОГОРОДНИКОВ, Е. Ю. АРЛАНОВА

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Практикум

Самара 2019

Печатается по решению ученого совета СамГТУ
(протокол № 9 от 27.04.2018)

УДК 517(076.5)
ББК 22.161я73
О-39

Огородников Е. Н.
О-39 Применение аппарата дробного исчисления при решении интегральных и дифференциальных уравнений практикум / *Е. Н. Огородников, Е. Ю. Арланова* — Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2019. – 94 с.

В первом разделе практикума приведены необходимые сведения по теории и некоторым приложениям дробного интегро-дифференцирования, сопутствующим специальным функциям и функциональным пространствам. Во втором разделе представлены задачи и упражнения для самостоятельного овладения навыками практического использования теории для решения некоторых классов интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Предназначено для магистрантов направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и может быть полезным для студентов бакалавриата направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», аспирантов и научных работников в качестве справочного пособия.

УДК 517(076.5)
ББК 22.161я73
О-39

Рецензент: *док. физ.–мат. наук Жданов А. И.*

Предисловие

Предлагаемый практикум по спецкурсу «Дробное исчисление в задачах математического моделирования динамических процессов» предназначен для магистрантов первого курса направления 01.04.02 «Прикладная математики и информатика». Его цель — помочь магистрантам — слушателям лекционного курса самостоятельно овладеть навыками практического использования теории для решения некоторых классов интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в задачах моделирования динамических процессов в сложных системах и системах с памятью.

Практикум состоит из двух разделов. Первый раздел носит справочный характер. В нем приведены необходимые для решения задач сведения по теории и некоторым приложениям дробного интегро-дифференцирования, сопутствующим специальным функциям и функциональным пространствам. Для удобства ссылок все формулы пронумерованы. Первая цифра соответствует номеру пункта.

Во втором разделе представлены задачи и упражнения для закрепления теоретического материала. Задачи систематизированы по разделам, но имеют сквозную нумерацию. К задачам, рассчитанным на вычисления, даны ответы.

Раздел I. Необходимые теоретические сведения

1.Основные функциональные пространства

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, дополненное нулем, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — множество действительных чисел (действительная числовая ось). Для положительной и неотрицательной полуоси иногда используются обозначения $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ и $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$.

Пусть $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ — конечный отрезок, полуинтервалы $(-\infty, b]$ или $[a, +\infty)$, или вся числовая ось $\mathbb{R}$.

Через $L_p = L_p(\Omega)$ обозначается множество всех измеримых по Лебегу на Ω функций $f(x)$, вообще говоря комплекснозначных, для которых

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < +\infty,$$

где $1 \leqslant p < +\infty$, а норма определяется равенством

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left[\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Известно, что $L_p(\Omega)$ — полное нормированное пространство.

Класс непрерывных на Ω функций обозначается $C(\Omega)$, а класс непрерывно дифференцируемых до порядка n функций — через $C^n(\Omega)$. Если $\Omega = [a, b]$ — конечный отрезок $(-\infty < a < b < +\infty)$, мы пишем $C[a, b]$ и $C^n[a, b]$. В случае интервала (a, b) эти классы функций обозначаются соответственно $C(a, b)$ и $C^n(a, b)$.

Множество суммируемых по Лебегу на отрезке $[a, b]$ функций L_p при $p = 1$ обозначают $L(a, b)$.

Пусть далее $\Omega = [a, b]$ — конечный отрезок.

В дробном исчислении, основанном на лебеговской конструкции интеграла, важную роль играет множество (класс) абсолютно непрерывных функций, которое обозначается $AC(\Omega)$ или $AC[a, b]$.

Строгое определение этого класса функций содержится в лекционном курсе. Здесь лишь отметим, что класс $AC(\Omega)$ совпадает с классом первообразных от суммируемых функций:

$$f(x) \in AC(\Omega) \Leftrightarrow \exists \varphi(x) \in L(\Omega) : f(x) = C + \int\limits_a^x \varphi(t)\, dt, \quad C = \mathrm{const}.$$

Поэтому абсолютно непрерывные функции имеют почти всюду на $[a, b]$ суммируемую производную $f'(x)$ и $f'(x) = \varphi(x)$, а $C = f(a)$, откуда следует равенство

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\, dt, \tag{1.2}$$

часто принимаемое за определение абсолютной непрерывности функции $f(x)$.

Отметим важное обстоятельство. Из существования почти всюду суммируемой производной не вытекает абсолютная непрерывность.

Через $H^\lambda = H^\lambda(\Omega)$ обозначается класс всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Гельдера (порядка λ):

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant A|x_1 - x_2|^\lambda \tag{1.3}$$

для всех $x_1, x_2 \in \Omega$, где A — константа, а λ — фиксированное число (показатель Гельдера). При $\lambda = 1$ класс функций $H^1(\Omega)$ называют липшицевым и обозначают $Lip(\Omega)$. При $\lambda > 1$ класс H^λ содержит только постоянные $f(x) = \mathrm{const}$. При $\lambda = 0$ полагают $H^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Очевидно включение $H^1(\Omega) \subset AC(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Через $AC^n(\Omega)$ $(n \in \mathbb{N})$ обозначают класс функций $f(x) : f(x) \in C^{n-1}(\Omega)$, причем производная $f^{(n-1)}(x) \in AC(\Omega)$, что гарантирует существование почти всюду на Ω суммируемой производной $f^{(n)}(x)$.

Очевидно, что $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$. Доказано, что класс $AC^n(\Omega)$ состоит из тех и только тех функций $f(x)$, которые представимы в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)\, dt, \tag{1.4}$$

где $\varphi(t) \in L(\Omega)$, c_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ — константы. Ясно, что $\varphi(t) = f^{(n)}(t)$, $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Включение $C^n(\Omega) \subset$ $\subset AC^n(\Omega)$ очевидно.

2.Определения и основные функциональные соотношения для некоторых специальных функций и символов

Пусть $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел z (комплексная плоскость); множество $\mathbb{C}^+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\})$ — правая комплексная полуплоскость.

2.1. Символ Похгаммера определяется равенствами

$$(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad (z)_0 = 1 \tag{2.1}$$

Очевидно, что

$$(z)_n = (-1)^n (1-n-z)_n, \quad (1)_n = n!. \tag{2.2}$$

2.2. Гамма-функция $\boldsymbol{\Gamma(z)}$ может быть определена одним из следующих выражений:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} x^{z-1} \mathrm{e}^{-x}\, dx \,(\text{Эйлер}), \tag{2.3}$$

где $z \in \mathbb{C}^+$, $x^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln x}$, $x \in \mathbb{R}^+$;

$$\Gamma(z) = z^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \text{(Гаусс)}; \tag{2.4}$$

$$\Gamma^{-1}(z) = z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}} \text{(Вейерштрасс)}, \tag{2.5}$$

где $\gamma = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \ln m\right) = 0{,}5772156649\ldots$ — постоянная Эйлера—Маскерони.

Из равенств (2.4) и (2.5) следует, что гамма-функция является аналитической функцией от z всюду, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$, в которых она имеет простые полюсы.

Используя определение (2.3) нетрудно получить равенство

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{2.6}$$

Если $n \in \mathbb{N}$, то по индукции доказывается, что

$$\Gamma(z+n) = (z)_n\Gamma(z), \tag{2.7}$$

откуда легко получить следующие равенства:

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (z-1)(z-2)\ldots(z-n) = (-1)^n\frac{\Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\Gamma(-z+n)}{\Gamma(-z)} = (-1)^n z(z-1)\ldots(z-n+1) = (-1)^n\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}, \tag{2.9}$$

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \tag{2.10}$$

Так как $\Gamma(1) = 1$, то из формулы (2.6) следует, что

$$\Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2,\ \ldots,\ \Gamma(n+1) = n!. \tag{2.11}$$

Из (2.5) следует, что

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -z^2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1},$$

и, так как
$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$
то
$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}. \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{2.13}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}. \tag{2.14}$$

Полагая в (2.13) $z = 1/2$ или в (2.14) $z = 0$, получим
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.15}$$

2.3. Бета-функция определяется эйлеровым интегралом первого рода
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \tag{2.16}$$
где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^+$. Связь функции $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ с гамма-функцией выражается формулой
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{2.17}$$

Некоторые свойства бета-функции:
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha); \tag{2.18}$$
$$\mathrm{B}(\alpha,\beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta); \tag{2.19}$$
$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta+1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta). \tag{2.20}$$

2.4. Функция $\psi(z)$.

Через $\psi(z)$ обозначают логарифмическую производную гамма-функции:

$$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \qquad (2.21)$$

Из определения (2.21) ясно, что $\int\limits_1^z \psi(z)\, dz = \ln \Gamma(z)$, а из равенств (2.4) и (2.5) можно получить такие представления:

$$\psi(z) = \lim_{n\to\infty} \left(\ln n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \ldots - \frac{1}{z+n} \right), \qquad (2.22)$$

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z+n)} = -\gamma + (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(z+n)}. \qquad (2.23)$$

Функция $\psi(z)$ мероморфна и имеет простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$. Очевидно, $\psi(1) = -\gamma$.

Некоторые функциональные соотношения для $\psi(z)$ — в следующих равенствах:

$$\psi(1+z) - \psi(z) = \frac{1}{z}; \qquad (2.24)$$

$$\psi(n+z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+n-1} + \psi(z), \quad n \in \mathbb{N}; \qquad (2.25)$$

$$\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \operatorname{ctg}(\pi z); \qquad (2.26)$$

$$\psi(z) - \psi(-z) = -\pi \operatorname{ctg}(\pi z) - \frac{1}{z}; \qquad (2.27)$$

$$\psi(1+z) - \psi(1-z) = -\pi \operatorname{ctg}(\pi z) + \frac{1}{z}; \qquad (2.28)$$

$$\psi\left(\frac{1}{2} + z\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - z\right) = -\pi \operatorname{tg}(\pi z). \qquad (2.29)$$

2.5. Гипергеометрическая функция Гаусса определяется при $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда

$${}_2\mathrm{F}_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \qquad (2.30)$$

где параметры a, b, c и переменная z — комплексные числа, причем $c \neq 0, -1, -2, \ldots$. Ряд (2.30) сходится абсолютно при $|z| < 1$, если $a, b \neq 0, -1, -2, \ldots$, и при $|z| = 1$, если $\mathrm{Re}(c - a - b) > 0$. При остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда, например, в виде интегрального представления Эйлера

$$\mathrm{F}(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\, dt, \qquad (2.31)$$

где $0 < \mathrm{Re} b < \mathrm{Re} c$, $|\arg(1-z)| < \pi$, $(1-tz)^{-a} = \mathrm{e}^{-a\ln(1-tz)}$.

Простейшие свойства гипергеометрической функции легко получить из ее определения в форме ряда (2.30):

$$\mathrm{F}(a, b; c; z) = \mathrm{F}(b, a; c; z); \qquad (2.32)$$

$$\mathrm{F}(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}; \qquad (2.33)$$

$$\mathrm{F}(a, b; c; 0) = \mathrm{F}(0, b; c; z) = 1; \qquad (2.34)$$

$$\mathrm{F}(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \mathrm{Re}(c-a-b) > 0; \qquad (2.35)$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{F}(a, b; c; z) = \frac{ab}{c}\mathrm{F}(a+1, b+1; c+1; z); \qquad (2.36)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^a \mathrm{F}(a, b; c; z)\right] = az^{a-1}\mathrm{F}(a+1, b; c; z); \qquad (2.37)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{c-1}\mathrm{F}(a, b; c; z)\right] = (c-1)z^{c-2}\mathrm{F}(a, b; c-1; z); \qquad (2.38)$$

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z)^a \mathrm{F}(a, b; c; z)\right] = \frac{a(b-c)}{c}(1-z)^{a-1}\mathrm{F}(a+1, b; c+1; z). \qquad (2.39)$$

Это далеко не полный список формул, связанных с гипергеометрической функцией Гаусса. Формулы дифференцирования, в частности, обобщаются на случай $(d/dx)^n$, например,

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{F}(a, b; c; z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n}\mathrm{F}(a+n, b+n; c+n; z). \qquad (2.40)$$

Дополнительную информацию можно подчерпнуть в справочнике «Высшие трансцендентные функции», том 1, Бейтмена Г. и

Эрдейи А. Здесь приведем еще две практически полезных формулы:

$$\mathrm{F}(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\mathrm{F}\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) \tag{2.41}$$

и формулу автотрансформации:

$$\mathrm{F}(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}\mathrm{F}(c-a, c-b; c; z), \tag{2.42}$$

где $|\arg(1-z)| < \pi$.

Вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера) определяется по формуле

$$\Phi(a;c;z) = {}_1\mathrm{F}_1(a;c;z) = \lim_{b\to\infty} {}_2\mathrm{F}_1\left(a,b;c;\frac{z}{b}\right), \quad |z| < \infty. \tag{2.43}$$

2.6. Функция типа Миттаг—Леффлера определяется как сумма ряда

$$\mathrm{E}_\alpha(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\mu)} \quad (\alpha > 0, \mu \in \mathbb{C}) \tag{2.44}$$

и является целой функцией порядка $\rho = 1/\alpha$.

При $\mu = 1$ функция $\mathrm{E}_\alpha(z;1)$ обозначается $\mathrm{E}_\alpha(z)$ и называется собственно функцией Миттаг—Леффлера.

Следующая группа формул вытекает непосредственно из определения $\mathrm{E}_\alpha(z;\mu)$ (2.44). При некоторых целых значениях параметра α справедливы равенства:

$$\mathrm{E}_1(z) = \mathrm{E}_1(z;1) = \mathrm{e}^z, \quad \mathrm{E}_1(z;2) = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z}; \tag{2.45}$$

$$\mathrm{E}_2(z^2;1) = \operatorname{ch} z, \quad z\mathrm{E}_2(z^2;2) = \operatorname{sh} z; \tag{2.46}$$

$$z\mathrm{E}_2(-z^2;2) = \sin z, \quad \mathrm{E}_2(-z^2;1) = \cos z; \tag{2.47}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\mathrm{E}_n(\lambda z^n) = \lambda \mathrm{E}_n(\lambda z^n), \quad n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}; \tag{2.48}$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{n-1}\mathrm{E}_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right)\right] = \frac{(-1)^n\lambda}{z^{n+1}}\mathrm{E}_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), \quad z \neq 0. \tag{2.49}$$

Отметим одну полезную формулу в случае $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\mathrm{E}_{\frac{1}{2}}(z;1) = \mathrm{E}_{\frac{1}{2}}(z) = \mathrm{e}^{z^2}\left(1 + \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\,dt\right) = \mathrm{e}^{z^2}\left[1 + \mathrm{erf}(z)\right], \quad (2.50)$$

где функция ошибок $\mathrm{erf}(z)$ определяется равенствами

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{2z}{\sqrt{\pi}}\,{}_1\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{2z\mathrm{e}^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}\,{}_1\mathrm{F}_1\left(1, \frac{3}{2}; z^2\right), \quad (2.51)$$

а вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1\mathrm{F}_1(a, b; z)$ определена в (2.43). Справедливы также представления функции $\mathrm{erf}(z)$ в виде рядов:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k!(2k+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2z)^{2k+1}}{(2k+1)!!}. \quad (2.52)$$

Далее для любых $\alpha > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$

$$z\mathrm{E}_\alpha(z; \mu + \alpha) = \mathrm{E}_\alpha(z; \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)}; \quad (2.53)$$

$$\mathrm{E}_\alpha(z; \mu) = \mu\mathrm{E}_\alpha(z; \mu + 1) + z\alpha\mathrm{E}'_\alpha(z; \mu + 1); \quad (2.54)$$

$$\frac{d^m}{dz^m}\left[z^{\mu-1}\mathrm{E}_\alpha(z^\alpha; \mu)\right] = \left[\begin{array}{ll} z^{\mu-m-1}\mathrm{E}_\alpha\left(z^\alpha; \mu - m\right), & \mu \neq m, \\ z^{\alpha-1}\mathrm{E}_\alpha(z^\alpha; \alpha), & \mu = m. \end{array}\right. \quad (2.55)$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда при $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\mu > 0$

$$\int\limits_0^z \mathrm{E}_\alpha\left(\lambda t^\alpha; \mu\right) t^{\mu-1}\,dt = z^\mu\mathrm{E}_\alpha\left(\lambda z^\alpha; \mu + 1\right); \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z (z-t)^{\alpha-1}\mathrm{E}_\sigma(\lambda t^\sigma; \mu)t^{\mu-1}\,dt = z^{\mu+\alpha-1}\mathrm{E}_\sigma(\lambda z^\sigma; \mu + \alpha). \quad (2.57)$$

Существуют различные обобщения функции типа Миттаг–Леффлера, в частности, на случай n комплексных переменных:

$$\mathrm{E}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(z_1, z_2, \ldots, z_n; \mu) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty}\frac{z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots z_n^{k_n}}{\Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i k_i + \mu\right)}. \quad (2.58)$$

Ограничиваясь случаем двух переменных, отметим справедливость формул:

$$x\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x,y;\mu+\alpha)=\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)-\mathrm{E}_{\beta}(y;\mu),$$
$$y\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x,y;\mu+\beta)=\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x,y;\mu)-\mathrm{E}_{\alpha}(x;\mu), \tag{2.59}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$; $x,y,\mu\in\mathbb{C}$.

При $\beta=\alpha$

$$\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(x,y;\mu)=\left[\begin{array}{l}\dfrac{x\mathrm{E}_{\alpha}(x;\mu)-y\mathrm{E}_{\alpha}(y;\mu)}{x-y},\quad y\neq x,\\ \mathrm{E}_{\alpha}(x;\mu)+x\mathrm{E}'_{\alpha}(x;\mu),\quad y=x,\end{array}\right. \tag{2.60}$$

в частности, при $\alpha=1$ и $\mu=1$

$$\mathrm{E}_{1,1}(x,y;1)=\left[\begin{array}{l}\dfrac{x\mathrm{e}^{x}-y\mathrm{e}^{y}}{x-y},\quad y\neq x,\\ (1+x)\mathrm{e}^{x},\quad y=x.\end{array}\right. \tag{2.61}$$

Если, кроме того, $x=\lambda_1 t$, $y=\lambda_2 t$, где $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}_0^+$, то равенства (2.61) приводят к следующим элементарным функциям:

$$\mathrm{E}_{1,1}\left(\lambda_1 t,\lambda_2 t;1\right)=\left[\begin{array}{l}\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\quad \lambda_1\neq\lambda_2,\\ (1+\lambda t)\mathrm{e}^{\lambda t},\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda.\end{array}\right. \tag{2.62}$$

В целом ряде случаев удобно ввести дробные аналоги гиперболических функций по формулам

$$\mathrm{Ch}_{\alpha}(z;\mu)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{E}_{\alpha}(z;\mu)+\mathrm{E}_{\alpha}(-z;\mu)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k\alpha+\mu)}, \tag{2.63}$$

$$\mathrm{Sh}_{\alpha}(z;\mu)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{E}_{\alpha}(z;\mu)-\mathrm{E}_{\alpha}(-z;\mu)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k\alpha+\alpha+\mu)}, \tag{2.64}$$

где $\alpha>0$, $\mu\in\mathbb{C}$; $\mathrm{Ch}_{\alpha}(z;\mu)$ и $\mathrm{Sh}_{\alpha}(z;\mu)$ — дробные (двухпараметрические) аналоги гиперболических косинуса и синуса соответственно, причем,

$$\mathrm{E}_{\alpha}(z;\mu)=\mathrm{Ch}_{\alpha}(z;\mu)+\mathrm{Sh}_{\alpha}(z;\mu). \tag{2.65}$$

Обозначая $\mathrm{Ch}_\alpha(z) = \mathrm{Ch}_\alpha(z;1)$ и $\mathrm{Sh}_\alpha(z) = \mathrm{Sh}_\alpha(z;1)$, нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств при $\alpha = 1/2$:

$$\mathrm{Ch}_{1/2}(\lambda z) = \mathrm{e}^{\lambda^2 z^2}, \tag{2.66}$$

$$\mathrm{Sh}_{1/2}(\lambda z) = \mathrm{e}^{\lambda^2 z^2}\mathrm{erf}(\lambda z), \tag{2.67}$$

или

$$\mathrm{Sh}_{1/2}(\lambda z) = \mathrm{Ch}_{1/2}(\lambda z)\mathrm{erf}(\lambda z), \tag{2.68}$$

откуда следует такое представление функции ошибок:

$$\mathrm{erf}(\lambda z) = \frac{\mathrm{Sh}_{1/2}(\lambda z)}{\mathrm{Ch}_{1/2}(\lambda z)} = \mathrm{Th}_{1/2}(\lambda z) \tag{2.69}$$

в терминах дробного аналога тангенса гиперболического $\mathrm{Th}_\alpha(\lambda z)$ при $\alpha = 1/2$.

Отметим, наконец, еще одну полезную формулу

$$\mathrm{Sh}_{1/2}(\lambda z) = \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} z \Phi\left(1; \frac{3}{2}; \lambda^2 z^2\right),$$

где $\Phi(a;c;z) = {}_1\mathrm{F}_1(a;c;z)$ — функция Куммера (2.43).

3. Основные формы дробного интегро-дифференцирования

3.1. Дробные интегралы и производные Римана—Лиувилля на отрезке

Пусть $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ — конечный отрезок действительной оси R, $f(x)$ — некоторая измеримая функция с областью определения $D(f) \subset \Omega$, $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера. Интегралы

$$\left(I^\alpha_{a+} f\right)(x) = I^\alpha_{ax} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > a), \tag{3.1}$$

$$\left(I_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = I_{xb}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{b} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x < b), \tag{3.2}$$

называются соответственно левосторонним и правосторонним интегралами Римана—Лиувилля порядка α. Операторы I_{ax}^{α} и I_{xb}^{α} называют операторами дробного интегрирования Римана—Лиувилля (интегральными операторами Римана—Лиувилля дробного порядка).

Дробные интегралы определены на функциях $f(x) \in L(a,b)$ и существуют почти всюду.

Связь между операторами I_{ax}^{α} и I_{xb}^{α} устанавливается равенствами

$$QI_{ax}^{\alpha} = I_{xb}^{\alpha} Q, \quad QI_{xb}^{\alpha} = I_{ax}^{\alpha} Q, \tag{3.3}$$

где Q — оператор отражения: $Q\varphi(x) = \varphi(a+b-x)$.

Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то определения (3.1) и (3.2) сводятся к хорошо известным формулам для n—кратных интегралов ($\Gamma(n) = (n-1)!$):

$$I_{ax}^{n} f = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{a}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\,dt = \int\limits_{a}^{x} dt_1 \int\limits_{a}^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_{a}^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n,$$

$$I_{xb}^{n} f = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x}^{b} (t-x)^{n-1} f(t)\,dt = \int\limits_{x}^{b} dt_1 \int\limits_{t_1}^{b} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{n-1}}^{b} f(t_n)\,dt_n.$$

Дробные производные Римана—Лиувилля произвольного порядка $\alpha > 0$ определяются, исходя из следующих соображений.

Если $\alpha \in \mathbb{N}_0$, то под дробными производными (левосторонней и правосторонней) понимается обычное дифференцирование:

$$D_{a+}^{\alpha} = D_{ax}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad D_{b-}^{\alpha} = D_{xb}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{N}_0),$$

причем при $\alpha = 0$ — $D_{ax}^{0} = D_{xb}^{0} = I$, где I — тождественный оператор.

Если $\alpha \in (0,1)$, то равенства

$$D_{ax}^{\alpha} f = \frac{d}{dx} I_{ax}^{1-\alpha} f, \quad D_{xb}^{\alpha} f = -\frac{d}{dx} I_{xb}^{1-\alpha} f \tag{3.4}$$

определяют соответственно левостороннюю и правостороннюю производные Римана—Лиувилля указанного порядка α.

Если $\alpha > 0$ ($\alpha \notin \mathbb{N}$), то, обозначая $[\alpha]$ — целую часть числа α, а $\{\alpha\}$ — дробную его часть, и учитывая равенство $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, дробные производные $D^{\alpha}_{ax}f$ и $D^{\alpha}_{xb}f$ определяют формулами:

$$D^{\alpha}_{ax}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{ax} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{ax} f,$$

$$D^{\alpha}_{xb}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D^{\{\alpha\}}_{xb} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I^{1-\{\alpha\}}_{xb} f,$$

где использованы определения дробных производных Римана—Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$ (3.4), возникающие в процессе решения соответствующих интегральных уравнений Абеля.

Таким образом, принимая $n = [\alpha] + 1$ для любых $\alpha > 0$, левостороннюю и правостороннюю дробные производные Римана—Лиувилля порядка α определяют равенствами:

$$D^{\alpha}_{ax}f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n-\alpha}_{ax} f =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \ (x > a), \quad (3.5)$$

$$D^{\alpha}_{xb}f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} I^{n-\alpha}_{xb} f =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n} \int\limits_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \ (x < b), \quad (3.6)$$

соответственно, причем при $\alpha = k \in \mathbb{N}_0$ формулы (3.5) и (3.6) сводятся к формулам обычного целочисленного дифференцирования. Действительно, при $\alpha = 0$, $n = [\alpha] + 1 = 1$ и

$$D^{0}_{ax}f = \frac{d}{dx} I^{1}_{ax} f = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

$$D_{xb}^0 f = \left(-\frac{d}{dx}\right) I_{xb}^1 f = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(-\frac{d}{dx}\right) \int\limits_x^b f(t)\,dt = f(x).$$

При $\alpha = k$, $n = k+1$ и

$$D_{ax}^k f = \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+1} I_{ax}^1 f = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k+1} \int\limits_a^x f(t)\,dt = f^{(k)}(x),$$

$$D_{xb}^k f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{k+1} I_{xb}^1 f = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{k+1} \int\limits_x^b f(t)\,dt = (-1)^k f^{(k)}(x).$$

Достаточное условие существования почти всюду на Ω суммируемых производных $D_{ax}^\alpha f$ и $D_{xb}^\alpha f$ состоит в том, что $I_{ax}^{n-\alpha} f$, $I_{xb}^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b]$. Заметим, что из условия $f(x) \in AC^n[a,b]$ не следует, вообще говоря, принадлежность интегралов $I_{ax}^{n-\alpha} f$ и $I_{xb}^{n-\alpha} f$ этому же классу функций. Для таких функций производные $D_{ax}^\alpha f$ и $D_{xb}^\alpha f$ будут существовать почти всюду на Ω, однако в общем случае они не суммируемы (см. подпункт 3 пункта 3.2.).

Операторы D_{ax}^α и D_{xb}^α называют операторами дробного дифференцирования Римана—Лиувилля или дифференциальными операторами Римана—Лиувилля дробного (а на самом деле произвольного) порядка. Напомним, что термин «дробное интегро-дифференцирование» является исторически сложившимся термином, и, как видно из определений выше, речь идет о произвольном действительном порядке.

Путем объединения определений (3.1), (3.5) и (3.2), (3.6) в одну запись вводится понятие интегро-дифференциальных операторов Римана—Лиувилля любого действительного порядка α.

Пусть $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, $f(x)$ — измеримая функция с областью определения $D(f) \subset \Omega$, $\alpha \in R$. Тогда

$$I_{ax}^\alpha f = D_{ax}^{-\alpha} f = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{ax}^{n+\alpha} f = \left(\frac{d}{dx}\right)^n D_{ax}^{-(n+\alpha)} f, \quad \alpha \leqslant 0; \end{array}\right. \tag{3.7}$$

$$I_{xb}^{\alpha} f = D_{xb}^{-\alpha} f = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad \alpha > 0, \\ \left(-\frac{d}{dx}\right)^n I_{xb}^{n+\alpha} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n D_{xb}^{-(n+\alpha)} f, \ \alpha \leqslant 0, \end{array} \right. \tag{3.8}$$

где $n = [-\alpha] + 1$.

Результат применения интегро-дифференциальных операторов (3.7) и (3.8) к некоторым элементарным функциям — в следующих примерах.

1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Для степенных функций $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}$, $\varphi(x) = (b-x)^{\beta-1}$ при $\beta > 0$ имеем соответственно

$$I_{ax}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}, \tag{3.9}$$

$$I_{xb}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta-1}. \tag{3.10}$$

Из формул (3.9) и (3.10) при $\alpha \geqslant 0$ и $\beta = 1$, в частности, следуют равенства:

$$I_{ax}^{\alpha}1 = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad I_{xb}^{\alpha}1 = \frac{(b-x)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)};$$

$$D_{ax}^{\alpha}1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad D_{xb}^{\alpha}1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Последние два равенства означают, что дробные производные Римана—Лиувилля от константы не равны нулю.

При $\alpha + \beta = 1$ имеем

$$I_{ax}^{\alpha}(x-a)^{-\alpha} = \Gamma(1-\alpha), \quad I_{xb}^{\alpha}(b-x)^{-\alpha} = \Gamma(1-\alpha), \tag{3.11}$$

то есть результат вычисления дробного интеграла от определенной степенной функции может оказаться равным константе.

Дифференцируя равенства (3.11) по x, получим

$$\frac{d}{dx}I_{ax}^{\alpha}(x-a)^{-\alpha} = D_{ax}^{1-\alpha}(x-a)^{-\alpha} = D_{ax}^{\beta}(x-a)^{-(1-\beta)} = \frac{d}{dx}\Gamma(\beta) = 0.$$

Аналогично,

$$D_{xb}^{\beta}(b-x)^{-(1-\beta)} = 0.$$

Полученные результаты означают, что функции $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}$ и $\varphi(x) = (b-x)^{\beta-1}$ при $\beta \in (0,1)$ выполняют ту же роль для дробных производных D^{β}_{ax} и D^{β}_{xb}, что и постоянная для обычного дифференцирования. Более того, для любого $\alpha > 0$ и $k = 1, 2, \ldots, n$, где $n = [\alpha] + 1$,

$$D^{\alpha}_{ax}(x-a)^{\alpha-k} = 0, \quad D^{\alpha}_{xb}(b-x)^{\alpha-k} = 0. \tag{3.12}$$

Доказывается, что для $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, равенство $D^{\alpha}_{ax} f = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x-a)^{\alpha-k}, \tag{3.13}$$

а равенство $D^{\alpha}_{xb} f = 0$ — тогда и только тогда, когда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k (b-x)^{\alpha-k}, \tag{3.14}$$

где c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные (возможно комплексные) константы.

Обозначая далее всюду результат применения операторов I^{α}_{ax} и I^{α}_{xb} к функции $f(x)$ символом $f_{\alpha}(x)$, то есть, например, $I^{\alpha}_{ax} f = f_{\alpha}(x)$, получим, что

$$f_{\alpha}(a) = \lim_{x \to a+0} I^{\alpha}_{ax}(x-a)^{\beta-1} =$$
$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \lim_{x \to a+0} (x-a)^{\alpha+\beta-1} = \left[\begin{array}{l} 0,\ \alpha+\beta > 1, \\ \Gamma(1-\alpha),\ \alpha+\beta = 1, \\ +\infty,\ \alpha+\beta < 1. \end{array} \right.$$

Аналогично, для правостороннего дробного интеграла

$$f_{\alpha}(b) = \lim_{x \to b-0} I^{\alpha}_{xb}(b-x)^{\beta-1} = \left[\begin{array}{l} 0,\ \alpha+\beta > 1, \\ \Gamma(1-\alpha),\ \alpha+\beta = 1, \\ +\infty,\ \alpha+\beta < 1. \end{array} \right.$$

2. При $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ справедливы формулы

$$I_{ax}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}\right] = \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-x)^{\beta}}, \quad a < x < b,$$

$$I_{ax}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(x-c)^{\alpha+\beta}}\right] = \frac{1}{(a-c)^{\alpha}}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(x-c)^{\beta}}, \quad c < a < x.$$

3. Дробное интегро-дифференцирование Римана—Лиувилля на отрезке $\Omega = [a,b]$ «не сохраняет» экспоненциальную функцию. Непосредственно применяя оператор I_{0x}^{α} $(\alpha \in R)$ к функции $\mathrm{e}^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$, разложенной в ряд, получим

$$I_{0x}^{\alpha}\mathrm{e}^{\lambda x} = x^{\alpha}\mathrm{E}_1(\lambda x; \alpha+1) = \mathrm{Exp}(1, \alpha+1; \lambda; x),$$

где $\mathrm{E}_{\sigma}(z;\mu)$ — принятое в пособии обозначение функции типа Миттаг—Леффлера (2.44), $\mathrm{Exp}(\alpha,\beta;\lambda;z)$ — обобщенная дробная экспоненциальная функция. Определение и некоторые свойства этой и других специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера, — в пункте 4.

3.2. Свойства дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля на отрезке

1. Основным свойством дробных интегралов Римана—Лиувилля является полугрупповое свойство.

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда тождества

$$I_{ax}^{\alpha}I_{ax}^{\beta}f = I_{ax}^{\beta}I_{ax}^{\alpha}f = I_{ax}^{\alpha+\beta}f, \quad I_{xb}^{\alpha}I_{xb}^{\beta}f = I_{xb}^{\beta}I_{xb}^{\alpha}f = I_{xb}^{\alpha+\beta}f \qquad (3.15)$$

выполняются почти всюду на $\Omega = [a,b]$, если $f(x) \in L(a,b)$, и в каждой точке отрезка Ω, если $f(x) \in C[a,b]$ или $\alpha+\beta > 1$.

2. Следующее свойство характеризует дробное дифференцирование как обратную операцию к дробному интегрированию.

Пусть $\alpha > 0$, $f(x) \in L(a,b)$. Тогда равенства

$$D_{ax}^{\alpha}I_{ax}^{\alpha}f = f(x) \text{ и } D_{xb}^{\alpha}I_{xb}^{\alpha}f = f(x), \qquad (3.16)$$

выполняются почти всюду на Ω.

Обращаем внимание: свойство утверждает, что дифференцирование является *левым* обратным оператором к дробному интегрированию, а не наоборот.

3. Приведем достаточные условия существования дробных производных для «достаточно хороших» функций.

Пусть $\alpha \geqslant 0$, $n = [\alpha] + 1$. Если $f(x) \in AC^n[a, b]$, тогда дробные производные $D_{ax}^{\alpha} f$ и $D_{xb}^{\alpha} f$ существуют почти всюду на Ω и могут быть представлены в виде

$$D_{ax}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha} + I_{ax}^{n-\alpha} f^{(n)}, \tag{3.17}$$

$$D_{xb}^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (b-x)^{k-\alpha} + (-1)^n I_{xb}^{n-\alpha} f^{(n)}, \tag{3.18}$$

соответственно. Более того, если производные $f^{(k)}(x)$ для $k = 0, 1, \ldots, n-2$ обращаются в ноль на соответствующих концах отрезка $[a, b]$, то в соответствии с (3.17) и (3.18) дробные производные

$$D_{ax}^{\alpha} f = \frac{f^{(n-1)}(a)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha-1} + I_{ax}^{n-\alpha} f^{(n)},$$

$$D_{xb}^{\alpha} f = \frac{(-1)^{n-1} f^{(n-1)}(b)}{\Gamma(n-\alpha)} (b-x)^{n-\alpha-1} + (-1)^n I_{xb}^{n-\alpha} f^{(n)}$$

не только существуют почти всюду, но и суммируемы на Ω. В частности, если $\alpha \in [0, 1)$ и $f(x) \in AC[a, b]$, то производные

$$D_{ax}^{\alpha} f = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} + I_{ax}^{1-\alpha} f', \tag{3.19}$$

$$D_{xb}^{\alpha} f = \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha} - I_{xb}^{1-\alpha} f', \tag{3.20}$$

являются суммируемыми на Ω.

Заметим, что возникающие в правых частях формул (3.17)—(3.20) дробные интегралы от целочисленных производных есть так называемые нормализованные дробные производные по Капуто. Таким образом,

$$ {}^{C}D_{ax}^{\alpha} f = I_{ax}^{n-\alpha} f^{(n)} \text{ и } {}^{C}D_{xb}^{\alpha} f = I_{xb}^{n-\alpha} f^{(n)}, \tag{3.21} $$

где $n = [\alpha] + 1$.

4. Известно, что «римановская» концепция дробного интегро—дифференцирования имеет прямое отношение к проблеме разрешимости интегрального уравнения Абеля.

Уравнением Абеля мы называем интегральное уравнение Вольте́рры первого рода, которое в терминах интегрального оператора (3.1) записывается в виде

$$ I_{ax}^{\alpha} \varphi = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.22} $$

где $\alpha > 0$, $f(x)$ — заданная, а $\varphi(x)$ — искомая функции.

Необходимые и достаточные условия его разрешимости дает теорема об описании класса $I_{ax}^{\alpha}(L)$ функций $f(x)$, представимых интегралом $I_{ax}^{\alpha}\varphi$ от суммируемой функции $\varphi(x)$. Напомним определение и теорему.

$$ f(x) \in I_{ax}^{\alpha}(L)(\alpha > 0) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \varphi(x) \in L(a,b) : f(x) = I_{ax}^{\alpha}\varphi. $$

В соответствии с этим определением вопрос о представимости функции $f(x)$ дробным интегралом сводится к нахождению некоторой суммируемой функции $\varphi(x)$, то есть решению интегрального уравнения (3.22).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. *Функция* $f(x) \in I_{ax}^{\alpha}(L)$ *тогда и только тогда, когда* $f_{n-\alpha}(x) = I_{ax}^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b]$ *и*

$$ f_{n-\alpha}^{(k)}(a+) = \lim_{x \to a+0} \left(\frac{d}{dx}\right)^k I_{ax}^{n-\alpha} f = \lim_{x \to a+0} D_{ax}^{\alpha-m} f = 0, $$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ $(m = 1, \ldots, n)$.

Аналогично определяется класс $I^{\alpha}_{xb}(L)$ функций $f(x)$, представимых дробным интегралом $I^{\alpha}_{xb}\varphi$.

5. Следующее свойство устанавливает ограничение на класс функций, для которых дифференцирование является правым обратным оператором к дробному интегрированию.

Пусть $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Тогда почти всюду на Ω

$$I^{\alpha}_{ax} D^{\alpha}_{ax} f = f(x), \quad I^{\alpha}_{xb} D^{\alpha}_{xb} f = f(x), \tag{3.23}$$

если $f(x) \in I^{\alpha}_{ax}(L)$ или $f(x) \in I^{\alpha}_{xb}(L)$ соответственно.

6. Если же $f(x) \in L(a,b)$ и $f_{n-\alpha}(x) \in AC^n[a,b]$, тогда почти всюду на Ω справедливы дробные аналоги формул Ньютона—Лейбница

$$I^{\alpha}_{ax} D^{\alpha}_{ax} f = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(n-k)}_{n-\alpha}(a+)}{\Gamma(\alpha-k+1)} (x-a)^{\alpha-k}, \tag{3.24}$$

где $f^{(n-k)}_{n-\alpha}(a+) = \lim\limits_{x \to a+} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} I^{n-\alpha}_{ax} f = \lim\limits_{x \to a+} D^{\alpha-k}_{ax} f$, $k = 1, 2, ..., n$; и

$$I^{\alpha}_{xb} D^{\alpha}_{xb} f = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k} f^{(n-k)}_{n-\alpha}(b-)}{\Gamma(\alpha-k+1)} (b-x)^{\alpha-k}, \tag{3.25}$$

где $(-1)^{n-k} f^{(n-k)}_{n-\alpha}(b-) = \lim\limits_{x \to b-} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n-k} I^{n-\alpha}_{xb} f = \lim\limits_{x \to b-} D^{\alpha-k}_{xb} f$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В частности, если $\alpha \in (0,1)$ и $f_{1-\alpha}(x) \in AC[a,b]$, то

$$I^{\alpha}_{ax} D^{\alpha}_{ax} f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a+)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha-1}, \tag{3.26}$$

$$I^{\alpha}_{xb} D^{\alpha}_{xb} f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(b-)}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\alpha-1}. \tag{3.27}$$

Более того, при $\alpha \in (0,1)$ для $f(x) \in AC[a,b]$ вместо (3.26) и (3.27), а при $\alpha \in (n-1, n)$ для $f(x) \in AC^n[a,b] : f(a) = f^{(1)}(a) = \cdots = f^{(n-2)}(a) = 0$ или $f(b) = f^{(1)}(b) = \cdots = f^{(n-2)}(b) = 0$ вместо (3.24) и (3.25) имеем равенства (3.23).

Замечание. При $\alpha = n$ формулы (3.24), (3.25), а при $\alpha = 1$ формулы (3.26), (3.27), превращаются в классические аналоги формул Ньютона—Лейбница, например,

$$I^n_{ax} D^n_{ax} f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a+)}{k!} (x-a)^k.$$

7. Тождества (3.16), (3.23)—(3.25) можно предъявить в усиленной редакции.

Пусть $f(x) \in L(a,b)$. Тогда:

(а) если $\beta > \alpha \geqslant 0$, то

$$D^\alpha_{ax} I^\beta_{ax} f = I^{\beta-\alpha}_{ax} f; \tag{3.28}$$

(б) если $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$ и $D^{\alpha-\beta}_{ax} f$ существует, то

$$D^\alpha_{ax} I^\beta_{ax} f = D^{\alpha-\beta}_{ax} f; \tag{3.29}$$

(в) если существует $D^\beta_{ax} f$ (то есть $I^{n-\beta}_{ax} f \in AC^n[a,b]$, $n = [\beta]+1$), то для любого α $(\alpha > 0)$

$$I^\alpha_{ax} D^\beta_{ax} f = D^{\beta-\alpha}_{ax} f - \sum_{k=1}^{n} \frac{D^{\beta-k}_{ax} f(a+)}{\Gamma(\alpha-k+1)} (x-a)^{\alpha-k}, \tag{3.30}$$

где $D^{\beta-k}_{ax} f(a+) = \lim\limits_{x\to a+} D^{\beta-k}_{ax} f(x)$.

Аналогичные свойства справедливы и для правосторонних операторов.

8. Следующий факт показывает, что полугрупповое свойство дробных интегралов, вообще говоря, не распространяется на дробные производные.

Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha \in (n-1, n]$, $\beta \in (m-1, m]$ $(n, m \in \mathbb{N})$ и $\alpha + \beta < n$. Пусть $f \in L(a,b)$ и $f_{m-\beta} \in AC^m[a,b]$. Тогда

$$D^\alpha_{ax} D^\beta_{ax} f = D^{\alpha+\beta}_{ax} f - \sum_{k=1}^{m} \frac{D^{\beta-k}_{ax} f(a+)}{\Gamma(1-\alpha-k)} (x-a)^{-(\alpha+k)}. \tag{3.31}$$

Заметим, что для $\alpha, \beta \in (0,1)$: $\alpha+\beta \in (0,1)$ и $f(x) \in AC[a,b]$ все-таки выполняется равенство

$$D^{\alpha}_{ax} D^{\beta}_{ax} f = D^{\beta}_{ax} D^{\alpha}_{ax} f = D^{\alpha+\beta}_{ax} f. \tag{3.32}$$

Аналогичные факты имеют место для правосторонних дробных производных Римана—Лиувилля.

9. Полезны формулы дробного интегрирования по частям.

Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in L(a,b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\left(I^{\alpha}_{ax}\psi\right)\,dx = \int\limits_a^b \psi(x)\left(I^{\alpha}_{xb}\varphi\right)\,dx.$$

Пусть $f(x), g(x) \in I^{\alpha}_{ax}(L)$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\left(D^{\alpha}_{ax} g\right)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\left(D^{\alpha}_{xb} f\right)\,dx.$$

10. Действие операторов дробного интегрирования в пространствах суммируемых функций — в следующих двух теоремах.

Теорема 2. *Операторы дробного интегрирования* I^{α}_{ax} *и* I^{α}_{xb} ($\alpha > 0$) *ограничены в* $L_p(a,b)$ ($1 \geqslant p \geqslant +\infty$), *причем*

$$\|I^{\alpha}_{ax} f\|_{L_p} \leqslant k\|f\|_{L_p}, \quad \|I^{\alpha}_{xb} f\|_{L_p} \leqslant k\|f\|_{L_p}, \quad k = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Более тонкий результат при $\alpha \in (0,1)$ известен как теорема Харди—Литтлвуда с предельным показателем.

Теорема 3. *Если* $\alpha \in (0,1)$, $p \in \left(1, \frac{1}{\alpha}\right)$, *то операторы* I^{α}_{ax} *и* I^{α}_{xb} *ограниченно действуют из пространства* $L_p(a,b)$ *в пространство* $L_q(a,b)$, *где* $q = \frac{p}{1-\alpha p}$.

11. Дробные производные непрерывных функций с интегрируемыми особенностями на концах отрезка Ω.

В лекционном курсе введен класс функций

$$AC\left([a,b];(x-a)^{\mu},(b-x)^{\nu}\right) =$$
$$= \left\{f(x) : f(x)\in C(a,b), (x-a)^{\mu}(b-x)^{\nu}f(x)\in AC[a,b]\right\}. \quad (3.33)$$

Очевидно, если $\mu,\nu\in[0,1)$, то

$$AC\left([a,b];(x-a)^{\mu},(b-x)^{\nu}\right)\supset C^{1}(a,b)\cap L(a,b).$$

Доказывается, что при $\alpha\in(0,1)$ и $\mu,\nu\in[0,1-\alpha)$ функции из класса (3.33) представимы дробными интегралами $I^{\alpha}_{ax}\varphi$ или $I^{\alpha}_{xb}\varphi$ от суммируемой функции $\varphi(x)\in L(a,b)$, то есть условие

$$f(x)\in AC\left([a,b];(x-a)^{\mu},(b-x)^{\nu}\right)$$

влечет принадлежность $f(x)\in I^{\alpha}_{ax}(L)$ или $f(x)\in I^{\alpha}_{xb}(L)$, и как следствие существование суммируемых дробных производных $D^{\alpha}_{ax}f$ и $D^{\alpha}_{xb}f$, для которых справедливы формулы

$$D^{\alpha}_{ax}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)}\int\limits_{a}^{x}\frac{(1-\alpha)f(t)+(t-a)f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt =$$
$$= (x-a)^{-1}I^{1-\alpha}_{ax}(x-a)^{\alpha}\left[(x-a)^{1-\alpha}f(x)\right]', \quad (3.34)$$

$$D^{\alpha}_{xb}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)}\int\limits_{x}^{b}\frac{(1-\alpha)f(t)-(b-t)f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}\,dt =$$
$$= -(b-x)^{-1}I^{1-\alpha}_{xb}(b-x)^{\alpha}\left[(b-x)^{1-\alpha}f(x)\right]'. \quad (3.35)$$

Формулы (3.34) и (3.35) распространяются на значения $\alpha>1$, например,

$$D^{\alpha}_{ax}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)(x-a)^{n}}\int\limits_{a}^{x}\frac{(t-a)^{\alpha}\left[(t-a)^{n-\alpha}f(t)\right]^{(n)}}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\,dt =$$
$$= (x-a)^{-n}I^{n-\alpha}_{ax}(x-a)^{\alpha}\left[(x-a)^{n-\alpha}f(x)\right]^{(n)}. \quad (3.36)$$

3.3. Дробное интегро-дифференцирование на полуоси и всей действительной оси. Дробная производная Маршо

Дробные интегралы (3.1), (3.2) распространяются на случай полуоси или оси. Подинтегральные функции должны быть такими, чтобы соответствующие интегралы сходились на бесконечности.

Для полуосей $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$ мы сохраняем прежние обозначения:

$$I_{0x}^{\alpha}\varphi = \left(I_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (0 < x < +\infty), \tag{3.37}$$

$$I_{x0}^{\alpha}\varphi = \left(I_{0-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^0 \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (-\infty < x < 0). \tag{3.38}$$

Правосторонний дробный интеграл $\left(I_{-}^{\alpha}\varphi\right)(x)$ на полуоси $\mathbb{R}^{+} = (0, +\infty)$ будем обозначать $I_{x\infty}^{\alpha}\varphi$ и писать

$$I_{x\infty}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (x > 0). \tag{3.39}$$

В случае полуоси $\mathbb{R}^{+}$ и $\alpha \geqslant 0$ дробные производные $\left(D_{0+}^{\alpha}f\right)(x)$ и $\left(D_{-}^{\alpha}f\right)(x)$ мы обозначаем $D_{0x}^{\alpha}f$ и $D_{x\infty}^{\alpha}f$ соответственно и определяем равенствами

$$D_{0x}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{0x}^{n-\alpha}f, \tag{3.40}$$

$$D_{x\infty}^{\alpha}f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_x^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n I_{x\infty}^{n-\alpha}f. \tag{3.41}$$

Результат применения интегралов (3.37), (3.39) и производных (3.40), (3.41) к некоторым элементарным функциям — в следующих примерах:

– если $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, то

$$I_{0x}^{\alpha} x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{\beta+\alpha-1}, \quad D_{0x}^{\alpha} x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1};$$

– если $\alpha > 0$, $\alpha+\beta < 1$, то $I_{x\infty}^{\alpha} x^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+\alpha-1}$;

– если $\alpha > 0$, $\alpha+\beta-[\alpha] < 1$, то $D_{x\infty}^{\alpha} x^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta-\alpha-1}$;

– если $\alpha > 0$, $\lambda \in C$: $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то $I_{x\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda^{-\alpha} \mathrm{e}^{-\lambda x}$;

– если $\alpha \geqslant 0$, $\lambda \in C$: $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то $D_{x\infty}^{\alpha} \mathrm{e}^{-\lambda x} = \lambda^{\alpha} \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Дробные интегралы по всей числовой прямой $\mathbb{R}$ обозначают

$$\left(I_{+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{3.42}$$

$$\left(I_{-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{3.43}$$

Их можно записать также в виде свертки

$$I_{\pm}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t_{\pm}^{\alpha-1} \varphi(x-t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} \varphi(x \mp t)\,dt, \tag{3.44}$$

где $\quad t_{+}^{\alpha-1} = \left[\begin{array}{l} t^{\alpha-1},\ t > 0, \\ 0,\ t < 0, \end{array}\right. \qquad t_{-}^{\alpha-1} = \left[\begin{array}{l} 0,\ t > 0, \\ |t|^{\alpha-1},\ t < 0. \end{array}\right.$

Доказывается, что при $\alpha \in (0,1)$ и $1 \leqslant p < 1/\alpha$ интегралы (3.37) и (3.39) определены на функциях $\varphi(x) \in L_p(\mathbb{R}^{+})$, а интегралы (3.42) и (3.43) — на функциях $\varphi(x) \in L_p(\mathbb{R})$.

Дробные производные при $\alpha \geqslant 0$ определяются равенствами

$$\left(D_+^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} = \\ = \left(I_+^{n-\alpha} f\right)^{(n)}(x), \quad (3.45)$$

$$\left(D_-^\alpha f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} = \\ = (-1)^n \left(I_-^{n-\alpha} f\right)^{(n)}(x), \quad (3.46)$$

где $n = [\alpha]+1$, $x \in \mathbb{R}$. Объединяя (3.45) и (3.46) можно определить

$$\left(D_\pm^\alpha f\right)(x) = \frac{(\pm 1)^\alpha}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int\limits_{0}^{+\infty} t^{n-\alpha-1} f(x \mp t)\,dt. \qquad (3.47)$$

Интеграл (3.39) и производную (3.41) на полуоси, а также интегралы и производные (3.42)–(3.47) называют лиувиллевской формой дробного интегро-дифференцирования.

Укажем ряд элементарных функций $\varphi(x)$, для которых $I_\pm^\alpha \varphi$ вычисляются также в терминах элементарных функций.

Для $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\pm x}$ получим $\left(I_\pm^\alpha \varphi\right)(x) = \mathrm{e}^{\pm x}$ $(\alpha > 0)$. Более того:

$$I_\pm^\alpha \left(\mathrm{e}^{\pm ax}\right) = a^{-\alpha} \mathrm{e}^{\pm ax} \quad (\alpha > 0, \mathrm{Re}\, a > 0). \qquad (3.48)$$

Из формулы (3.48) следуют формулы

$$I_\pm^\alpha \left(\mathrm{e}^{\pm ax} \sin bx\right) = \frac{\mathrm{e}^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \sin(bx \mp \alpha\varphi), \qquad (3.49)$$

$$I_\pm^\alpha \left(\mathrm{e}^{\pm ax} \cos bx\right) = \frac{\mathrm{e}^{\pm ax}}{(a^2+b^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \cos(bx \mp \alpha\varphi), \qquad (3.50)$$

где $a > 0$, $b \geqslant 0$, $\varphi = \arg(a + bi) \in [0, \pi/2]$ и $\alpha > 0$. Если же $a = 0$, $b > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$, то

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{\pm}(\sin bx) &= b^{-\alpha}\sin\left(bx \mp \frac{\alpha\pi}{2}\right), \\ I^{\alpha}_{\pm}(\cos bx) &= b^{-\alpha}\cos\left(bx \mp \frac{\alpha\pi}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Дробные производные Лиувилля (3.45), (3.46) на оси приводятся к более удобному виду, например, для непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, убывающих вместе с производной $f'(x)$ не медленнее, чем $|x|^{\alpha-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Операторы

$$\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}}\,dt = \\ = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \tag{3.52}$$

$$\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{-}f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}}\,dt = \\ = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{x}^{+\infty}\frac{f(x) - f(t)}{(t-x)^{1+\alpha}}\,dt \tag{3.53}$$

называют дробными производными Маршо. Таким образом, при $\alpha \in (0, 1)$ для указанных выше функций $\mathbf{D}^{\alpha}_{+}f = D^{\alpha}_{+}f$ и $\mathbf{D}^{\alpha}_{-}f = D^{\alpha}_{-}f$.

Аналоги дробной производной Маршо $\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{a+}f\right)(x)$, $\left(\mathbf{D}^{\alpha}_{b-}f\right)(x)$ на отрезке $\Omega = [a, b]$ для функций $f(x) \in C^1[a, b]$ определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{D}^{\alpha}_{ax}f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{a}^{x}\frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}}\,dt, \tag{3.54}$$

$$\mathbf{D}_{xb}^{\alpha} f = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_x^b \frac{f(x)-f(t)}{(t-x)^{1+\alpha}}\, dt. \tag{3.55}$$

Таким образом, для дифференцируемых функций $D_{ax}^{\alpha} f = \mathbf{D}_{ax}^{\alpha} f$ и $D_{xb}^{\alpha} f = \mathbf{D}_{xb}^{\alpha} f$. Ясно также, что правые части в (3.54) и (3.55) определены не только на дифференцируемых функциях $f(x)$, но и, например, на функциях, удовлетворяющих условию Гельдера порядка $\lambda > \alpha$. Доказывается, что производная Римана—Лиувилля и производная Маршо совпадают на функциях, представимых дробными интегралами от суммируемых функций, однако, интегралы в (3.54), (3.55) следует понимать, вообще говоря, как условно сходящиеся.

3.4. Операторы типа Эрдейи—Кобера

В теории и приложениях возникают и используются различные модификации и обобщения классических операторов дробного интегро–дифференцирования Римана—Лиувилля. К таким модификациям относятся операторы типа Эрдейи—Кобера: левосторонний —

$$I_{ax;\sigma,\eta}^{\alpha} f = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sigma x^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_a^x \frac{t^{\sigma\eta+\sigma-1} f(t)}{(x^{\sigma}-t^{\sigma})^{1-\alpha}}\, dt, \ \alpha > 0, \\ x^{-\sigma(\alpha+\eta)} \left(\dfrac{d}{\sigma x^{\sigma-1}\, dx} \right)^n x^{\sigma(\alpha+n+\eta)} I_{ax;\sigma,\eta}^{n+\alpha} f, \ \alpha \leqslant 0, \end{array} \right. \tag{3.56}$$

и правосторонний —

$$I_{xb;\sigma,\eta}^{\alpha} f = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sigma x^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_x^b \frac{t^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1}}{(t^{\sigma}-x^{\sigma})^{1-\alpha}} f(t)\, dt, \ \alpha > 0, \\ x^{\sigma\eta} \left(-\dfrac{d}{\sigma x^{\sigma-1}\, dx} \right)^n x^{\sigma(n-\eta)} I_{xb;\sigma,\eta-n}^{n+\alpha} f, \ \alpha \leqslant 0, \end{array} \right. \tag{3.57}$$

где $n = [-\alpha] + 1$, $\sigma \in \mathbb{R}$, если $0 \leqslant a < x < b \leqslant +\infty$, а в случае $-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty$, $\sigma \in \mathbb{N}$. В частности, при $a = 0$, $b = +\infty$ и

$\sigma = 1$ интегральные операторы в (3.56) и в (3.57) принимают вид

$$I^{+}_{\eta,\alpha} f(x) = I^{\alpha}_{0x;1,\eta} f = \frac{x^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{t^{\eta} f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (\alpha > 0), \tag{3.58}$$

$$K^{-}_{\eta,\alpha} f(x) = I^{\alpha}_{x\infty;1,\eta} f = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^{+\infty} \frac{t^{-(\alpha+\eta)} f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \quad (\alpha > 0). \tag{3.59}$$

Интегральные операторы в (3.56) и в (3.57) при $a = 0$, $b = +\infty$ называют операторами Эрдейи, а (3.58) и (3.59) — операторами Кобера (или Кобера—Эрдейи).

После замены $x^{\sigma} = y$, $t^{\sigma} = \tau$ формулы (3.56)—(3.57) сводятся к обычным определениям интегралов и производных Римана—Лиувилля:

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta} f &= y^{-(\alpha+\eta)} I^{\alpha}_{a^{\sigma}y} \varphi(y), \quad \varphi(y) = y^{\eta} f(x), \quad x^{\sigma} = y, \\ I^{\alpha}_{xb;\sigma,\eta} f &= y^{\eta} I^{\alpha}_{yb^{\sigma}} \psi(y), \quad \psi(y) = y^{-(\alpha+\eta)} f(x), \quad x^{\sigma} = y. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Соотношения (3.60) позволяют известные свойства интегралов Римана—Лиувилля I^{α}_{ax}, I^{α}_{xb} перенести на операторы типа Эрдейи—Кобера. Основные свойства в следующих формулах:

а) формулы сдвига:

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta} x^{\sigma\beta} f &= x^{\sigma\beta} I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta+\beta} f, \\ I^{\alpha}_{xb;\sigma,\eta} x^{\sigma\beta} f &= x^{\sigma\beta} I^{\alpha}_{xb;\sigma,\eta-\beta} f; \end{aligned} \tag{3.61}$$

б) формулы композиции:

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta} I^{\beta}_{ax;\sigma,\eta+\alpha} f &= I^{\alpha+\beta}_{ax;\sigma,\eta} f, \\ I^{\alpha}_{xb;\sigma,\eta} I^{\beta}_{xb;\sigma,\eta+\alpha} f &= I^{\alpha+\beta}_{xb;\sigma,\eta} f, \end{aligned} \tag{3.62}$$

которые имеют место при $\beta > 0$, $\alpha + \beta \geqslant 0$ или $\beta < 0$, $\alpha > 0$ или же $\alpha < 0$, $\alpha + \beta \leqslant 0$ на соответствующих классах функций $f(x)$;

в) значения обратных операторов:

$$\left(I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta}\right)^{-1} f = I^{-\alpha}_{ax;\sigma,\eta+\alpha} f,$$
$$\left(I^{\alpha}_{xb;\sigma,\eta}\right)^{-1} f = I^{-\alpha}_{xb;\sigma,\eta+\alpha} f; \tag{3.63}$$

г) формула дробного интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b x^{\sigma-1} f(x) I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta} g(x)\, dx = \int\limits_a^b x^{\sigma-1} g(x) I^{\alpha}_{xb;\sigma,\eta} f(x)\, dx. \tag{3.64}$$

Заметим, что как и для операторов Римана—Лиувилля вместе с обозначением операторов Эрдейи—Кобера $I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta}$ и $I^{\alpha}_{xb;\sigma,\eta}$ мы используем $D^{-\alpha}_{ax;\sigma,\eta}$ и $D^{-\alpha}_{xb;\sigma,\eta}$, причем при $\alpha > 0$, например, $I^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta} f = D^{-\alpha}_{ax;\sigma,\eta} f$ — является дробным интегралом, а при $\alpha < 0$ — дробной производной; $I^{-\alpha}_{ax;\sigma,\eta} f = D^{\alpha}_{ax;\sigma,\eta} f$ и является дробной производной при $\alpha > 0$ или дробным интегралом при $\alpha < 0$.

Основное внимание в лекционном курсе отведилось операторам (3.56)—(3.57) при $\sigma = 1$, причем для функций, заданных на конечном отрезке $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, естественной представляется следующая их модификация:

$$I^{\alpha}_{ax;\eta} f = D^{-\alpha}_{ax;\eta} f = \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-a)^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_a^x \dfrac{(t-a)^{\eta} f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \ \alpha > 0, \\ (x-a)^{-(\alpha+\eta)} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n+\alpha+\eta} I^{n+\alpha}_{ax;\eta} f, \ \alpha \leqslant 0; \end{array}\right. \tag{3.65}$$

$$I^{\alpha}_{xb;\eta} f = D^{-\alpha}_{xb;\eta} f = \left[\begin{array}{l} \dfrac{(b-x)^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_x^b \dfrac{(b-t)^{-(\alpha+\eta)}}{(t-x)^{1-\alpha}} f(t)\, dt, \ \alpha > 0, \\ (b-x)^{\eta} \left(-\dfrac{d}{dx}\right)^n (b-x)^{n-\eta} I^{n+\alpha}_{xb;\eta-n} f, \ \alpha \leqslant 0. \end{array}\right. \tag{3.66}$$

Эти операторы мы называем операторами Кобера—Эрдейи. Очевидно, при $a = 0$ модифицированный оператор (3.65) совпадает с оператором, определенным формулами (3.56) при $a = 0$ и $\sigma = 1$ и оператором в формуле (3.58).

Операторы, заданные формулами (3.65)—(3.66), легко записываются в терминах интегро–дифференциальных операторов Римана—Лиувилля:

$$I^{\alpha}_{ax;\eta}f = D^{-\alpha}_{ax;\eta}f = \left[\begin{array}{l} (x-a)^{-(\alpha+\eta)} I^{\alpha}_{ax}(x-a)^{\eta} f(x),\ \alpha > 0, \\ (x-a)^{-(\alpha+\eta)} D^{-\alpha}_{ax}(x-a)^{\eta} f(x),\ \alpha \leqslant 0; \end{array}\right. \tag{3.67}$$

$$I^{\alpha}_{xb;\eta}f = D^{-\alpha}_{xb;\eta}f = \left[\begin{array}{l} (b-x)^{\eta} I^{\alpha}_{xb}(b-x)^{-(\alpha+\eta)} f(x),\ \alpha > 0, \\ (b-x)^{\eta} D^{-\alpha}_{xb}(b-x)^{n-\alpha-\eta} f(x),\ \alpha \leqslant 0, \end{array}\right. \tag{3.68}$$

где $n = [-\alpha] + 1$.

3.5. Операторы М. Сайго

Еще одной модификацией операторов Римана—Лиувилля являются операторы М. Сайго: левосторонний —

$$I^{\alpha,\beta,\eta}_{ax} f = \left[\begin{array}{l} \dfrac{(x-a)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mathrm{F}\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t)\,dt, \alpha > 0, \\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^n I^{\alpha+n,\,\beta-n,\,\eta-n}_{xb} f, \quad \alpha < 0, \end{array}\right. \tag{3.69}$$

и правосторонний —

$$I^{\alpha,\beta,\eta}_{xb} f = \left[\begin{array}{l} \dfrac{(b-x)^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int\limits_x^b (t-x)^{\alpha-1} \mathrm{F}\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; \frac{t-x}{b-x}\right) f(t)\,dt, \alpha > 0, \\ \left(-\dfrac{d}{dx}\right)^n I^{\alpha+n,\,\beta-n,\,\eta-n}_{xb} f, \quad \alpha < 0, \end{array}\right. \tag{3.70}$$

где $n = [-\alpha] + 1$, $\beta, \eta \in \mathbb{C}$; $\mathrm{F}(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса (см. пункт 2).

Приведем основные свойства операторов М. Сайго, справедливые для достаточно гладких функций $f(x)$:

а) при $\alpha > 0$ справедливы равенства:

$$
\begin{gathered}
I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta}(x-a)^{\beta-\eta}f = I_{ax}^{\alpha,\eta,\beta}f,\\
I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta}f = (x-a)^{-\alpha-\beta-\eta}I_{ax}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta}f,
\end{gathered} \tag{3.71}
$$

$$
\begin{gathered}
I_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}(b-x)^{\beta-\eta}f = I_{xb}^{\alpha,\eta,\beta}f,\\
I_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}f = (b-x)^{-\alpha-\beta-\eta}I_{xb}^{\alpha,-\alpha-\eta,-\alpha-\beta}f;
\end{gathered} \tag{3.72}
$$

б) при $\gamma > 0$ справедливы формулы композиции:

$$
\begin{gathered}
I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta}I_{ax}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f = I_{ax}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f,\\
I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta}I_{ax}^{\gamma,\delta,\eta-\beta-\gamma-\delta}f = I_{ax}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\delta}f,
\end{gathered} \tag{3.73}
$$

$$
\begin{gathered}
I_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}I_{xb}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}f = I_{xb}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}f,\\
I_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}I_{xb}^{\gamma,\delta,\eta-\beta-\gamma-\delta}f = I_{xb}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta-\gamma-\delta}f;
\end{gathered} \tag{3.74}
$$

в) при $0 < \alpha < 1$ выполняется тождество

$$
\begin{gathered}
\left(I_{0+}^{-\alpha,\,\alpha,\,\eta}\left(I_{1-}^{\alpha,\,\beta,\,-\alpha}\varphi\right)(t)\right)(x) =\\
= \frac{\cos(\pi\alpha)\varphi(x)}{(1-x)^{\alpha+\beta}} + \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int\limits_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} \frac{\varphi(t)dt}{(1-t)^{\alpha+\beta}(t-x)};
\end{gathered} \tag{3.75}
$$

г) значения обратных операторов:

$$
\begin{gathered}
\left(I_{ax}^{\alpha,\beta,\eta}\right)^{-1}f = I_{ax}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta}f,\\
\left(I_{xb}^{\alpha,\beta,\eta}\right)^{-1}f = I_{xb}^{-\alpha,-\beta,\alpha+\eta}f.
\end{gathered} \tag{3.76}
$$

4.Интегральные уравнения Вольтéрры с ядром Абеля, некоторые специальные функции, операторы и их свойства

В лекционном курсе приведена классификация линейных интегральных уравнений вольтерровского типа, доказаны теоремы существования единственного решения в классах непрерывных и суммируемых функций и предъявлены методы решения уравнения Вольте́рры второго рода с ядром Абеля, которое в терминах левостороннего дробного интеграла Римана—Лиувилля записывается в виде

$$y(x) - \lambda I_{0x}^{\alpha} y(x) = f(x), \tag{4.1}$$

где $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y(x)$ — искомая, а $f(x)$ — заданная функции. Если $f(x) \in L(0,l)$, $l > 0$, то суммируемое решение уравнения (4.1) имеет вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha}\left[\lambda(x-t)^{\alpha}; \alpha\right] f(t)\,dt, \tag{4.2}$$

где $\mathrm{E}_{\alpha}\left(\lambda x^{\alpha}; \mu\right)$ — функция типа Миттаг—Леффлера (2.44).

Вводится интегральный оператор

$$E_{ax;\lambda}^{\alpha,\sigma} f = \int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\sigma}\left[\lambda(x-t)^{\sigma}; \alpha\right] f(t)\,dt. \tag{4.3}$$

С его помощью решение (4.2) интегрального уравнения (4.1) записывается в таком виде:

$$y(x) = f(x) + \lambda E_{0x;\lambda}^{\alpha,\alpha} f. \tag{4.4}$$

Некоторые свойства оператора (4.3) приведены ниже.

Пусть $f(x) \in L(a,b)$; α, β, μ, ν, $\sigma > 0$; λ, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$. Отметим

а) связь с дробным интегралом Римана—Лиувилля:

$$E_{ax;0}^{\alpha,\sigma} f = I_{ax}^{\alpha} f; \tag{4.5}$$

б) аналог полугруппового свойства с интегралом Римана—Лиувилля:

$$I_{ax}^{\alpha} E_{ax;\lambda}^{\beta,\sigma} f = E_{ax;\lambda}^{\beta,\sigma} I_{ax}^{\alpha} f = E_{ax;\lambda}^{\alpha+\beta,\sigma} f, \tag{4.6}$$

откуда, например, следует равенство

$$I_{ax}^{\alpha} E_{ax;\lambda}^{\beta,\sigma} I_{ax}^{\mu} f = E_{ax;\lambda}^{\alpha+\beta+\mu,\sigma} f,$$

а также возможность записать решение (4.4) интегрального уравнения (4.1) в виде (Хилле—Тамаркин)

$$y(x) = \frac{d}{dx} E^{1,\alpha}_{0x;\lambda} f = \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \mathrm{E}_\alpha \left[\lambda (x-t)^\alpha\right] f(t)\, dt;$$

в) результат применения оператора (4.3) к степенной функции:

$$E^{\mu,\sigma}_{0x;\lambda} x^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha) x^{\mu+\alpha-1} \mathrm{E}_\sigma \left(\lambda x^\sigma; \mu+\alpha\right); \tag{4.7}$$

г) справедливость равенства

$$\left(I + \lambda \mathrm{E}^{\alpha,\alpha}_{0x;\lambda}\right) x^{\mu-1} = \Gamma(\mu) x^{\mu-1} \mathrm{E}_\alpha \left(\lambda x^\alpha; \mu\right) \tag{4.8}$$

легко установить с помощью формулы (4.7) и свойства (2.53) функции $\mathrm{E}_\alpha\left(\lambda x^\alpha; \mu\right)$;

д) результат применения к функции типа Миттаг—Леффлера с весом:

$$E^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1} x^{\nu-1} \mathrm{E}_\beta \left(\lambda_2 x^\beta; \nu\right) = x^{\mu+\nu-1} \mathrm{E}_{\alpha,\beta} \left(\lambda_1 x^\alpha, \lambda_2 x^\beta; \mu+\nu\right), \tag{4.9}$$

где $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z_1, z_2; \mu)$ — частный случай функции, определенной в (2.58):

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z_1, z_2; \mu) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{z_1^k z_2^n}{\Gamma(\alpha k + \beta n + \mu)}; \tag{4.10}$$

отметим, что при $\mu = 1$ допустима запись этой функции в виде $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z_1, z_2)$;

е) симметрия относительно параметров:

$$E^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1} x^{\nu-1} \mathrm{E}_\beta \left(\lambda_2 x^\beta; \nu\right) = E^{\nu,\beta}_{0x;\lambda_2} x^{\mu-1} \mathrm{E}_\alpha \left(\lambda_1 x^\alpha; \mu\right); \tag{4.11}$$

ж) равенство

$$\begin{aligned} E^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1} x^{\nu-1} \mathrm{E}_\alpha(\lambda_2 x^\alpha; \nu) &= x^{\mu+\nu-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 x^\alpha, \lambda_2 x^\alpha; \mu+\nu) = \\ &= x^{\mu+\nu-1} \frac{\lambda_1 \mathrm{E}_\alpha\left(\lambda_1 x^\alpha; \mu+\nu\right) - \lambda_2 \mathrm{E}_\alpha\left(\lambda_2 x^\alpha; \mu+\nu\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

является следствием тождества (4.9) при $\beta = \alpha$ и формулы (2.60) при $y \neq x$.

Подобно определению (4.3) вводится интегральный оператор с функцией типа Миттаг—Леффлера двух аргументов (4.10):

$$E^{\mu,\alpha,\beta}_{ax;\lambda_1,\lambda_2} f = \\ = \int\limits_a^x (x-t)^{\mu-1} \mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left[\lambda_1(x-t)^{\alpha}, \lambda_2(x-t)^{\beta}; \mu)\right] f(t)\,dt, \quad (4.13)$$

с помощью которого удается найти композицию двух операторов типа (4.3):

з) $$E^{\mu,\alpha}_{ax;\lambda_1} E^{\nu,\beta}_{ax;\lambda_2} f = E^{\nu,\beta}_{ax;\lambda_2} E^{\mu,\alpha}_{ax;\lambda_1} f = E^{\mu+\nu,\alpha,\beta}_{ax;\lambda_1,\lambda_2} f; \quad (4.14)$$

и) при $\alpha = \beta$ тождество (4.14) принимает вид

$$E^{\mu+\nu,\alpha,\alpha}_{ax;\lambda_1,\lambda_2} f = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} E^{\mu+\nu,\alpha}_{ax;\lambda_1} f - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} E^{\mu+\nu,\alpha}_{ax;\lambda_2} f. \quad (4.15)$$

В курсе лекций введен ряд специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера.

Пусть $\alpha > 0$; $z, \mu \in \mathbb{C}$. Функции

$$\mathrm{C}_{\alpha}(z;\mu) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{E}_{\alpha}(iz;\mu) + \mathrm{E}_{\alpha}(-iz;\mu)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2\alpha k+\mu)}, \quad (4.16)$$

$$\mathrm{S}_{\alpha}(z;\mu) = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{E}_{\alpha}(iz;\mu) - \mathrm{E}_{\alpha}(-iz;\mu)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{\Gamma(2\alpha k+\alpha+\mu)} \quad (4.17)$$

являются дробными аналогами функций $\cos z$ и $\sin z$, совпадая с последними при $\alpha = \mu = 1$, а формула

$$\mathrm{E}_{\alpha}(iz;\mu) = \mathrm{C}_{\alpha}(z;\mu) + i\mathrm{S}_{\alpha}(z;\mu) \quad (4.18)$$

является аналогом формулы Эйлера для этих функций.

Так же вводятся функции

$$\mathrm{Ec}_{\alpha}(z;\mu) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{E}_{\alpha}(z;\mu) + \mathrm{E}_{\alpha}(\overline{z};\mu)\right] = \operatorname{Re}\mathrm{E}_{\alpha}(z,\mu), \quad (4.19)$$

$$\mathrm{Es}_\alpha(z;\mu) = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{E}_\alpha(z;\mu) - \mathrm{E}_\alpha(\overline{z};\mu)\right] = \operatorname{Im}\mathrm{E}_\alpha(z,\mu). \tag{4.20}$$

Для $z = \lambda t^\alpha$, где $\lambda = \sigma + \omega i \in \mathbb{C}$, $t \geqslant 0$, они являются дробными аналогами функций $\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t$ и $\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t$, совпадая с последними при $\alpha = \mu = 1$. Очевидно, что

$$\mathrm{E}_\alpha(z;\mu) = \mathrm{Ec}_\alpha(z;\mu) + i\mathrm{Es}_\alpha(z;\mu). \tag{4.21}$$

В качестве обобщенной (двупараметрической) дробной экспоненциальной функции предложено использовать функцию

$$\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;t) = t^{\mu-1}\mathrm{E}_\alpha\left(\lambda t^\alpha;\mu\right). \tag{4.22}$$

Вводятся так же следующие функции:

$$\begin{aligned}\mathrm{Expc}(\alpha,\mu;\lambda;t) = t^{\mu-1}\mathrm{Ec}_\alpha\left(\lambda t^\alpha;\mu\right),\\ \mathrm{Exps}(\alpha,\mu;\lambda;t) = t^{\mu-1}\mathrm{Es}_\alpha\left(\lambda t^\alpha;\mu\right).\end{aligned} \tag{4.23}$$

Очевидно,

$$\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;t) = \mathrm{Expc}(\alpha,\mu;\lambda;t) + i\mathrm{Exps}(\alpha,\mu;\lambda;t). \tag{4.24}$$

Для функций (4.22) и (4.23) формулы целочисленного дифференцирования имеют вид:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;t) = \mathrm{Exp}(\alpha,\mu-m;\lambda;t),\\ \left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{Expc}(\alpha,\mu;\lambda;t) = \mathrm{Expc}(\alpha,\mu-m;\lambda;t),\\ \left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathrm{Exps}(\alpha,\mu;\lambda;t) = \mathrm{Exps}(\alpha,\mu-m;\lambda;t).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Формулы дробного интегрирования и дифференцирования функции (4.22) будут следующими:

$$\begin{aligned}I_{0t}^\alpha \mathrm{Exp}(\sigma,\mu;\lambda;t) = \mathrm{Exp}(\sigma,\mu+\alpha;\lambda;t),\\ D_{0t}^\alpha \mathrm{Exp}(\sigma,\mu;\lambda;t) = \mathrm{Exp}(\sigma,\mu-\alpha;\lambda;t).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Аналогичные формулы справедливы и для функций (4.23).

В терминах обобщенной дробной экспоненциальной функции (4.22) удобно записывать выражение ядра оператора (4.3):

$$\mathrm{E}^{\alpha,\sigma}_{ax;\lambda} f = \int\limits_a^x \mathrm{Exp}(\sigma,\alpha;\lambda;x-t) f(t)\,dt. \tag{4.27}$$

Обозначая символом $(*)$ — свертку функций, можно записать равенство (4.27) так:

$$\mathrm{E}^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda} f = \mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;x) * f(x). \tag{4.28}$$

В терминах функции (4.22) формулы (4.7) и (4.8) принимают вид соответственно

$$\mathrm{E}^{\mu,\sigma}_{0x;\lambda} x^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)\mathrm{Exp}(\sigma,\mu+\alpha;\lambda;x), \tag{4.29}$$

$$\left(I + \lambda \mathrm{E}^{\alpha,\alpha}_{0x;\lambda}\right) x^{\mu-1} = \Gamma(\mu)\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;x). \tag{4.30}$$

Свойство симметрии относительно параметров (4.11) теперь записывается так:

$$\mathrm{E}^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1} \mathrm{Exp}(\beta,\nu;\lambda_2;x) = \mathrm{E}^{\nu,\beta}_{0x;\lambda_2} \mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda_1;x), \tag{4.31}$$

а равенство (4.12) —

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1} \mathrm{Exp}(\alpha,\nu;\lambda_2;x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}&\mathrm{Exp}(\alpha,\mu+\nu;\lambda_1;x) - \\ &- \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,\mu+\nu;\lambda_2;x). \end{aligned} \tag{4.32}$$

По аналогии с функцией (4.22) вводится обобщенная дробная экспоненциальная функция двух аргументов

$$\mathrm{Exp}(\alpha,\beta;\mu;\lambda_1,\lambda_2;x) = x^{\mu-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\lambda_1 x^\alpha, \lambda_2 x^\beta;\mu\right), \tag{4.33}$$

где функция $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(\lambda_1 x^\alpha, \lambda_2 x^\beta;\mu\right)$ определена в (4.10). Тогда свойство (4.9) запишется в виде

$$\mathrm{E}^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1} \mathrm{Exp}(\beta,\nu;\lambda_2;x) = \mathrm{Exp}(\alpha,\beta;\mu+\nu;\lambda_1,\lambda_2;x). \tag{4.34}$$

Также справедлива формула

$$\left(I+\lambda_1 E^{\alpha,\alpha}_{0x;\lambda_1}\right)\mathrm{Exp}(\beta,\mu;\lambda_2;x)=\mathrm{Exp}(\alpha,\beta;\mu;\lambda_1,\lambda_2;x) \tag{4.35}$$

и ее частный случай при $\beta=\alpha$

$$\left(I+\lambda_1 E^{\alpha,\alpha}_{0x;\lambda_1}\right)\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda_2;x)=\mathrm{Exp}(\alpha,\alpha;\mu;\lambda_1,\lambda_2;x)=$$
$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda_1;x)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda_2;x). \tag{4.36}$$

Представление оператора (4.13) с учетом определения (4.33) принимает вид

$$\mathrm{E}^{\mu,\alpha,\beta}_{ax;\lambda,\nu}f=\int\limits_a^x \mathrm{Exp}(\alpha,\beta;\mu;\lambda,\nu;x-t)f(t)\,dt. \tag{4.37}$$

Существуют иные формулы и определения дробной экспоненциальной функции и аналогов функций $\sin z$ и $\cos z$. Так, например,

$$\mathrm{Exp}(\alpha,\alpha;\lambda;t)=t^{\alpha-1}\mathrm{E}_\alpha(\lambda t^\alpha;\alpha)=\mathrm{Exp}_\alpha(t) \tag{4.38}$$

— обобщенная однопараметрическая (дробная) экспоненциальная функция. Вводятся также следующие дробные аналоги функций $\sin z$ и $\cos z$:

$$\begin{aligned}\sin_\alpha(z)&=z\mathrm{E}_\alpha\left(-z^\alpha;2\right)=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+2)},\\ \cos_\alpha(z)&=\mathrm{E}_\alpha\left(-z^\alpha;1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k+1)}.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Решение интегрального уравнения второго рода с правосторонним дробным интегралом Римана—Лиувилля

$$y(x)-\lambda I^\alpha_{x1}y(x)=f(x) \tag{4.40}$$

может быть найдено теми же методами, что и решение уравнения (4.1). В терминах интегрального оператора

$$\mathrm{E}^{\alpha,\sigma}_{xb;\lambda} f = \int\limits_x^b (t-x)^{\alpha-1} \mathrm{E}_\sigma \left[\lambda(t-x)^\sigma; \alpha\right] f(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_x^b \mathrm{Exp}(\sigma, \alpha; \lambda; t-x) f(t)\, dt \quad (4.41)$$

его решение можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \mathrm{E}^{\alpha,\alpha}_{x1;\lambda} f. \quad (4.42)$$

Свойства оператора $\mathrm{E}^{\alpha,\sigma}_{xb;\lambda} f$ аналогичны свойствам оператора $\mathrm{E}^{\alpha,\sigma}_{ax;\lambda} f$. Например, справедлива формула

$$\mathrm{E}^{\mu,\sigma}_{x1;\lambda} (1-x)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)(1-x)^{\mu+\alpha-1} \mathrm{E}_\sigma \left[\lambda(1-x)^\sigma; \mu+\alpha\right] =$$

$$= \Gamma(\alpha) \mathrm{Exp}(\sigma, \mu+\alpha; \lambda; 1-x). \quad (4.43)$$

В заключении раздела приведем два частных случая интегральных уравнений (4.1) и (4.40) при $\lambda = \Gamma(\alpha)$ и $\alpha = \frac{1}{2}$, решения которых легко находятся редукцией к простейшим дифференциальным уравнениям первого порядка и в ряде случаев выписываются в терминах элементарных функций.

Решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int\limits_0^x \frac{y(t)\, dt}{\sqrt{x-t}} = f(x) \quad (4.44)$$

указанным выше приемом (Лиувилль) может быть найдено в виде

$$y(x) = \varphi(x) + \pi \int\limits_0^x \mathrm{e}^{\pi(x-t)} \varphi(t)\, dt, \quad (4.45)$$

где $\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}$.

Нетрудно доказать совпадение решения, найденного по формуле (4.45), с решением по формуле (4.4) при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\lambda = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Для этого удобно воспользоваться еще одной формой представления решения интегрального уравнения (4.1) при $\lambda = \Gamma(\alpha)$, именно,

$$y(x) = f(x) + \Gamma(\alpha) I_{0x}^{\alpha} f + \Gamma^2(\alpha) E_{0x,\Gamma(\alpha)}^{2\alpha,\alpha} f. \tag{4.46}$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ формула решения (4.46) принимает вид

$$y(x) = f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} + \pi \int\limits_0^x \mathrm{E}_{1/2}\left(\sqrt{\pi(x-t)}\right) f(t)\,dt. \tag{4.47}$$

Используя представление функции типа Миттаг—Леффлера $\mathrm{E}_{1/2}(z)$ по формуле (2.50), получим такое представление решения (4.47):

$$y(x) = f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} + \\ + \pi \int\limits_0^x \mathrm{e}^{\pi(x-t)} \left[1 + \mathrm{erf}\left(\sqrt{\pi(x-t)}\right)\right] f(t)\,dt. \tag{4.48}$$

Осталось воспользоваться легко проверяемым тождеством

$$\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\pi t} \mathrm{erf}\left(\sqrt{\pi(x-t)}\right) f(t)\,dt = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\pi t}\,dt \int\limits_0^t \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{4.49}$$

Тем же приемом редукции к дифференциальному уравнению можно найти решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int\limits_x^1 \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{t-x}} = f(x) \tag{4.50}$$

с правосторонним интегральным оператором Римана—Лиувилля порядка $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\lambda = \sqrt{\pi}$. Оно имеет вид

$$y(x) = \varphi(x) + \pi \int\limits_x^1 \mathrm{e}^{\pi(t-x)} \varphi(t)\, dt, \tag{4.51}$$

где $\varphi(x) = f(x) + \int\limits_x^1 \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{t-x}}$. Это же решение может быть записано через резольвенту в терминах функции Миттаг—Леффлера (2.44) и оператора (4.41) по формуле (4.42).

5.Дифференцальные уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля

Математические модели некоторых процессов, протекающих в средах с памятью или с фрактальной структурой, сводятся к интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям с ядрами, зависящими от разности аргументов. В случае степенной слабополярной зависимости ядер от разности аргументов интегральные операторы записываются в терминах дробных интегралов Римана—Лиувилля или их модификаций и обобщений. Производные по независимому аргументу дробных интегралов оказываются соответствующими дробными производными. Для решения возникающих таким образом модельных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений становится возможным эффективно использовать хорошо разработанный аппарат дробного исчисления.

Уравнения, в которых неизвестная функция $y(x)$ присутствует под знаками производных дробного порядка принято называть обыкновенными дифференциальными уравнениями дробного порядка, в отличии от дифференциальных уравнений с частными дробными производными функций нескольких аргументов.

Заметим, что порядок дифференциального уравнения как обычно определяется порядком старшей производной в уравнении.

При моделировании динамических процессов в средах с памятью возникают также и обыкновенные дифференциальные уравнения целого порядка с младшими дробными производными.

В курсе лекций сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности решения так называемой задачи типа Коши для простейшего нелинейного дифференциального уравнения произвольного действительного порядка

$$D_{ax}^{\alpha} y = f(x, y) \tag{5.1}$$

с начальными условиями

$$\lim_{x \to a+} D_{ax}^{\alpha - k} y = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.2}$$

где $\alpha, a_k \in R$, $n - 1 < \alpha < n$ ($n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ — целая часть числа α); $D_{ax}^{\alpha} y$ — левосторонняя производная Римана—Лиувилля порядка α, $D_{ax}^{\alpha - k} y$ — левосторонний интегро-дифференциальный оператор Римана—Лиувилля (при $k = n$ оператор $D_{ax}^{\alpha - n} y = I_{ax}^{n - \alpha} y$ и является левосторонним интегралом порядка $n - \alpha$).

Доказательства теорем опираются на идею редукции задачи типа Коши к соответствующему интегральному уравнению Вольтéрры второго рода и теорему Банаха о неподвижной точке. Указанная редукция осуществляется с помощью свойства (3.24) дробных интегралов и производных Римана—Лиувилля, предполагающего суммируемость старшей производной $D_{ax}^{\alpha} y$. Вводится специальный класс функций $L^{\alpha}(a, b)$.

Результаты исследования задачи (5.1), (5.2) распространяется на уравнения более общего вида

$$D_{ax}^{\alpha} y = f(x, y, D_{ax}^{\alpha_1} y, \ldots, D_{ax}^{\alpha_m} y) = f(x, D_{ax}^{\alpha_s} y), \tag{5.3}$$

где $s = 0, 1, \ldots, m$; $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m < \alpha$, частным случаем которого является линейное уравнение

$$D_{ax}^{\alpha} y + \sum_{k=0}^{m} a_k(x) D_{ax}^{\alpha_k} y = f(x) \tag{5.4}$$

с переменными $a_k(x)$ или постоянными ($a_k(x) = A_k = \mathrm{const}$) коэффициентами. Если в уравнении (5.4) $m = 0$ и $a_0(x) = -\lambda = \mathrm{const}$, то оно превращается в хорошо известное уравнение Барретта:

$$D_{ax}^{\alpha} y - \lambda y = f(x), \tag{5.5}$$

для которого корректна задача с начальными условиями (5.2), и ее решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{Exp}(\alpha, \alpha - k + 1; \lambda; x) + E_{ax;\lambda}^{\alpha,\alpha} f, \tag{5.6}$$

где $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ — обобщенная дробная экспоненциальная функция (4.22), $E_{ax;\lambda}^{\alpha,\sigma} f$ — интегральный оператор (4.3).

Отмечается, что условия типа Коши (5.2), в которых a_k — произвольные константы, являются естественными в каком-то смысле слова начальными условиями для дифференциального уравнения (5.5), переходящими при $\alpha = m$ $(m \in N)$в классические условия Коши: $y(a) = a_m$, $y'(a) = a_{m-1}$, $\ldots$, $y^{(m-1)} = a_1$. В то же время для дифференциальных уравнений (5.3) и (5.4) начальная задача с условиями (5.2) разрешима не при любых значениях a_k. На примере простейшего линейного однородного дифференциального уравнения

$$D_{0x}^{\alpha} y - \lambda D_{0x}^{\beta} y = 0 \quad (\alpha > \beta) \tag{5.7}$$

показано влияние требования суммируемости старшей производной $D_{0x}^{\alpha} y$ в уравнении (5.7) на величину порядка младшей производной $D_{0x}^{\beta} y$ или на свободу выбора начальных значений a_k в условиях (5.2).

В курсе лекций рассмотрены дифференциальные уравнения

$$D_{0x}^{\alpha} y - \lambda D_{0x}^{\beta} y = f\left(x, D_{0x}^{\alpha_s} y\right) \quad (s = 0, 1, \ldots, m) \tag{5.8}$$

с парамметрами α, β, $\alpha_s : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m < \beta < \alpha$, $n - 1 < \alpha < n$ $(n = [\alpha] + 1)$, и в частности,

$$D_{0x}^{\alpha} y - \lambda D_{0x}^{\beta} y - \sum_{k=0}^{m} A_k D_{0x}^{\alpha_k} y = f(x), \tag{5.9}$$

для которых при определенных условиях ($\beta < \alpha - n + 1$) обосновывается корректность задачи типа Коши (5.2) при $a = 0$. В случае $\beta < \alpha$, $\alpha_s < \alpha - n + 1$ доказывается существование единственного решения видоизмененной задачи Коши с условиями

$$\lim_{x \to 0+} \left(D_{0x}^{\alpha - k} - \lambda D_{0x}^{\beta - k} \right) y = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m \tag{5.10}$$

в специальном классе функций $L^{\alpha,\beta}(0, l)$ ($l > 0$). В случае $a - s \leqslant \leqslant \beta < \alpha - s + 1$ ($s = 1, 2, \ldots, n$) показана возможность замены s условий в (5.10) локальными условиями

$$\lim_{x \to 0+} \left[x^{n-\alpha} y(x) \right]^{(k)} = b_{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, s - 1. \tag{5.11}$$

Отдельное внимание уделено дифференциальным уравнениям вида

$$y^{(n)} = f\left(x, D_{0x}^{\alpha_s} y^{(k)} \right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n - 1), \tag{5.12}$$

где $\alpha_s \in [0, 1)$ ($s = 0, 1, \ldots, m$), которые возникают в задачах моделирования динамических процессов в рамках некоторых обобщенных (дробных) реологических моделей и для которых может быть поставлена классическая задача Коши:

$$y^{(k)}(0) = b_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n - 1). \tag{5.13}$$

В разделе лекционного курса, посвященном некоторым приложениям дробного исчисления, отмечается, что дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с дробными операторами возникают, в частности, в задачах математического моделирования динамических систем, наделенных свойствами эридитарности (наследственности) или, по другой терминологии, диссипативной памяти. Особый интерес представляют динамические системы (не только механической природы), изменение состояния которых носит колебательный характер. Такие системы принято называть осцилляторами, причем как динамическую систему, так и явление колебаний следует понимать в самом широком смысле.

Дробным осциллятором называют динамическую систему, математическая модель которой представлена уравнениями, содержащими дробные производые (интегралы) искомых функций, характеризующих состояние системы во времени, а сами уравнения — дробными осцилляционными уравнениями.

В качестве обобщенного дробного осцилляционного уравнения рассмотрено линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{u} + \sum_{k=0}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{s=0}^{m} b_s D_{0t}^{\beta_s} u = f(t), \tag{5.14}$$

где $u = u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции, $t \in [0, T]$ $(T > 0)$, $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $D_{0t}^{\alpha} u = \left(D_{0+}^{\alpha} u\right)(t)$ — левосторонняя дробная производная Римана—Лиувилля (3.5) порядка α; параметры $\alpha_k \in (0, 1)$, $\beta_s \in [0, 2)$, а коэффициенты $a_k, b_s \in \mathbb{R}$. Если считать, что параметры $\alpha_k \in [0, 1)$, причем $\alpha_0 = 0$, а $\beta_s \in [0, 1) \cup (1, 2)$, где $\beta_0 = 0$, то уравнение (5.14), записанное в виде

$$\ddot{u} + a_0 \dot{u} + b_0 u + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{s=1}^{m} b_s D_{0t}^{\beta_s} u = f(t),$$

или по убыванию порядка производных в следующем виде:

$$\ddot{u} + \sum_{s:\beta_s \in (1,2)} b_s D_{0t}^{\beta_s} u + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + a_0 \dot{u} + \\ + \sum_{s:\beta_s \in (0,1)} b_s D_{0t}^{\beta_s} u + b_0 u = f(t), \tag{5.15}$$

представляет собой определенное обобщение дифференциального уравнения классического осциллятора с вязким трением:

$$\ddot{u} + a_0 \dot{u} + b_0 u = f(t).$$

Пусть $f(t) \in L(0, T)$. Доказано, что в случае, когда $\alpha_k, \beta_s \in [0, 1)$ $(k = 0, \ldots, n;\ s = 0, \ldots, m)$ для дифференциального уравнения (5.14) корректно поставлена классическая задача

Коши с условиями

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0. \tag{5.16}$$

Решение указанной задачи может быть найдено в классе функций $u(t) \in AC^2[0,T]$ путем редукции уравнения (5.14) к соответствующему интегральному уравнению вольтерровского типа и применения метода последовательных приближений.

При тех же требованиях к функции $f(t)$ начальная задача (5.16) для дифференциального уравнения (5.15) не будет разрешима для произвольных значений u_0 и $\dot{u}_0$, если существует $\beta_s \in (1,2)$. Естественной постановкой начальной задачи для уравнения (5.15) будет задача с условиями

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} \left(\dot{u} + \sum_{s:\beta_s\in(1,2)} b_s D_{0t}^{\beta_s - 1} u \right) = u_1. \tag{5.17}$$

Найденное решение будет таким, что

$$\dot{u} + \sum_{s:\beta_s\in(1,2)} b_s D_{0t}^{\beta_s - 1} u \in AC[0,T].$$

Интегральное уравнение, к которому редуцируется начальная задача с условиями Коши (5.16) или видоизмененными условиями (5.17), в общем случае имеет вид

$$u(t) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{m_k} a_{kn} I_{0t}^{n\alpha_k} u = f_1(t), \tag{5.18}$$

где I — тождественный оператор, $I_{0t}^{\alpha} u = \left(I_{0+}^{\alpha} u\right)(t)$ — левосторонний дробный интеграл Римана—Лиувилля (3.1), $f_1(t)$ — известная суммируемая функция, связанная с заданной в уравнениях (5.14) или (5.15) функцией $f(t)$ и начальными условиями задачи; коэффициенты $a_{kn} \in \mathbb{R}$, параметры $\alpha_k > 0$. Показано, что если левую часть интегрального уравнения (5.18) удается представить в виде композиции вольтерровых операторов

$$\prod_{k=1}^{m} \prod_{n=1}^{m_k} (I - q_{kn} I_{0t}^{\alpha_k})\, u = f_1(t), \tag{5.19}$$

то, переобозначая коэффициенты $q_{nk} = \lambda_i$, где $i = 1, 2, \ldots, s$, $s = \sum\limits_{k=1}^{m} m_k$, уравнение (5.19) можно записать в виде

$$\prod_{i=1}^{s} (I - \lambda_i I_{0t}^{\alpha_i})\, u = f_1(t). \tag{5.20}$$

Путем введения вспомогательных функций

$$u_0(t) = f_1(t), \quad u_{i-1}(t) = (I - \lambda_i I_{0t}^{\alpha_i})\, u_i, \quad i = 2, \ldots, s,$$

где $u_s(t) = u(t)$ — искомая функция, решение интегрального уравнения (5.20) сводится к системе интегральных уравнений

$$(I - \lambda_1 I_{0t}^{\alpha_1})\, u_1 = u_0,\ (I - \lambda_2 I_{0t}^{\alpha_2})\, u_2 = u_1,\ \ldots,\ (I - \lambda_s I_{0t}^{\alpha_s})\, u_s = u_{s-1},$$

решая которые последовательно, начиная с первого уравнения, находим

$$u(t) = \prod_{i=1}^{s} \left(I - \lambda_i E_{0t;\lambda_i}^{\alpha_i,\alpha_i} \right) f_1(t),$$

где оператор $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} f$ определен в (4.3). Для дальнейших вычислений следует использовать композиционное свойство (4.14) этого оператора и его обобщение на случай n операторов подобного типа:

$$E_{0t;\lambda_1}^{\mu_1,\alpha_1} E_{0t;\lambda_2}^{\mu_2,\alpha_2} \cdots E_{0t;\lambda_n}^{\mu_n,\alpha_n} = E_{0t;\bar{\lambda}}^{\mu,\bar{\alpha}} \varphi,$$

где $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ — мультииндексы, а

$$E_{0t;\bar{\lambda}}^{\mu,\bar{\alpha}} \varphi = \int\limits_0^t (t-\tau)^{\mu-1} E_{\bar{\alpha}}[\ldots, \lambda_i (t-\tau)^{\alpha_i}, \ldots; \mu] \varphi(\tau) d\tau$$

— оператор с функцией типа Миттаг—Леффлера n переменных (2.58), обобщающий определение этого оператора с функцией типа Миттаг—Леффлера двух переменных, данное в (4.13).

Описанная выше процедура решения интегрального уравнения (5.18) использует идею факторизации интегрального оператора $I + \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{m_k} a_{kn} I_{0t}^{n\alpha_k}$. Ставя в соответствие оператору $I_{0t}^{\alpha_k}$ число z_k^{-1}, получаем многочлен с m переменными $P(z_1, z_2, \ldots, z_m)$. Если его удается представить в виде

$$P(z_1, z_2, \ldots, z_m) = P_1^{m_1}(z_1) P_2^{m_2}(z_2) \cdots P_m^{m_k}(z_m) = \\ = \prod_{k=1}^{m} P_k^{m_k}(z_k) = \prod_{k=1}^{m} \prod_{n=1}^{m_k} (z_k - p_{kn}),$$

где $p_{kn} \in \mathbb{C}$ — суть корни многочленов $P_k^{m_k}(z_k)$ степени m_k, то проблема успешно решается.

В качестве примеров модельных дробных осцилляционных уравнений в лекционном курсе рассмотрены два дифференциальных уравнения:

$$\ddot{u} + pD_{0t}^{\beta}\dot{u} + qD_{0t}^{2\beta}u = f(t), \tag{5.21}$$

$$\ddot{u} + pD_{0t}^{1+\beta}u + qD_{0t}^{2\beta}u = f(t), \tag{5.22}$$

где $u = u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная суммируемая функция ($t \geqslant 0$); коэффициенты $p, q \in \mathbb{R}$, параметр $\beta \in (0, 1/2)$. Отмечено, что на функциях $u(t) \in AC^2[0, T]$, $u(0) = u_0 = 0$, в силу тождества

$$D_{0t}^{1+\beta}u = \frac{u_0}{\Gamma(-\beta)} t^{-1-\beta} + D_{0t}^{\beta}\dot{u},$$

при $u_0 = 0$ уравнения (5.21) и (5.22) совпадают. В противном случае требование существования почти всюду на $[0, T]$ производной $D_{0t}^{1+\beta}u$ не обеспечивает, вообще говоря, ее суммируемости. Это обстоятельство отражается на постановке задач с начальными данными при $t = 0$.

Отметим, что при $\beta \to 0$ оба дифференциальных уравнения (5.21) и (5.22) превращаются в классическое уравнение возмущенного осциллятора с вязким трением, пропорциональным скорости $\dot{u}$:

$$\ddot{u} + p\dot{u} + qu = f(t). \tag{5.23}$$

Для дифференицального уравнения (5.21) доказано существование единственного в классе функций $u(t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$ решения классической задачи Коши с данными (5.16) и ее решение находится в явном виде в терминах обобщенной дробной экспоненциальной функции (4.22). В случае, когда λ_1, λ_2 — различные действительные корни многочлена $\lambda^2+p\lambda+q$, $\alpha = 1-\beta$, оно имеет вид

$$
\begin{gathered}
u(t) = u_0 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(\alpha, 1; \lambda_2; t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(\alpha, 1; \lambda_1; t) \right] + \\
+ \dot{u}_0 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1; t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2; t) \right] + \\
+ \int\limits_0^t \Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1; t-\tau) - \\
- \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2; t-\tau) \Big] f(\tau) d\tau. \quad (5.24)
\end{gathered}
$$

Случай, когда один из корней многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$ равен нулю, получается непосредственно из (5.24).

Предельным переходом при $\lambda_1 \to \lambda_2$ в формуле (5.24) получается решение для случая $\lambda_1 = \lambda_2$. Оно имеет вид

$$
\begin{gathered}
u(t) = u_0 \left[\mathrm{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t) - \frac{1}{\alpha} \lambda t \mathrm{Exp}(\alpha, \alpha; \lambda; t) \right] + \\
+ \frac{\dot{u}_0}{\alpha} \left[(\alpha - 1) \mathrm{Exp}(\alpha, 2; \lambda; t) + t \mathrm{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t) \right] + \\
+ \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^t [(\alpha - 1) \mathrm{Exp}(\alpha, 2; \lambda; t-\tau) + \\
+ (t-\tau) \mathrm{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t-\tau)] f(\tau) d\tau, \quad (5.25)
\end{gathered}
$$

где $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$.

Если $\lambda_{1,2} = \sigma \pm \omega i$, то решение (5.24) принимает вид

$$u(t) = u_0 \left[\mathrm{Expc}(\alpha, 1; \lambda; t) - \frac{\sigma}{\omega}\mathrm{Exps}(\alpha, 1; \lambda; t)\right] +$$
$$+ \frac{\dot{u}_0}{\omega}\mathrm{Exps}(\alpha, 2-\alpha; \lambda; t) + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \mathrm{Exps}(\alpha, 2-\alpha; \lambda_1; t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (5.26)$$

где $\lambda = \sigma + \omega i$, а функции $\mathrm{Expc}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ и $\mathrm{Exps}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ определены формулами (4.23). Решение (5.26) можно перезаписать в терминах функций $\mathrm{Ec}(\alpha, \mu; \lambda; t)$ и $\mathrm{Es}(\alpha, \mu; \lambda; t)$. В случае чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ оно имеет вид

$$u(t) = u_0 \mathrm{C}_\alpha(\omega t^\alpha; 1) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} t^{1-\alpha} \mathrm{S}_\alpha(\omega t^\alpha; 2-\alpha) +$$
$$+ \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} \mathrm{S}_\alpha[\omega(t-\tau)^\alpha; 2-\alpha] f(\tau) d\tau, \quad (5.27)$$

где функции $\mathrm{C}_\alpha(z; \mu)$ и $\mathrm{S}_\alpha(z; \mu)$ определены в (4.16) и (4.17).

Показано, что решение классической задачи Коши с начальными условиями (5.16) для дифференциального уравнения (5.21) является непрерывной функцией параметра $\alpha \in (1/2, 1)$, причем при $\alpha \to 1$ ($\beta \to 0$) оно переходит в хорошо известное решение уравнения (5.23). В частности, в случае чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ из формулы (5.27) получаем хорошо известное решение

$$u(t) = u_0 \cos\omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \sin\omega(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (5.28)$$

Полагая в решении задачи Коши (5.24) $u_0 = C_0$, $\dot{u}_0 = C_1$, где C_0, C_1 — произвольные действительные числа, вводится понятие общего в смысле Коши решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего (5.21):

$$u(t) = C_0 u_0(t) + C_1 u_1(t), \quad (5.29)$$

где функции $u_0(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,1;\lambda_2;t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,1;\lambda_1;t)$ и $u_1(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,2;\lambda_1;t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,2;\lambda_2;t)$ — суть фундаментальная система решений этого дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения (5.22) в начале обосновывается корректность начальной задачи с условиями типа Коши

$$u(0) = u_0(t), \quad \lim_{t\to 0+}\left[\dot{u}(t) + pD_{0t}^{\beta}u\right] = u_1. \tag{5.30}$$

Ее решение при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ в классе функций $u(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) = u_0 &\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,1;\lambda_1;t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,1;\lambda_2;t)\right] + \\ &+ u_1\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,2;\lambda_1;t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,2;\lambda_2;t)\right] + \\ &+ \int_0^t \Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,2;\lambda_1;t-\tau) - \\ &- \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,2;\lambda_2;t-\tau)\Big] f(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Нетрудно показать, что при $\alpha \to 1$ $(\beta \to 0)$ оно так же переходит в решение дифференциального уравнения (5.23), но с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+}\left[\dot{u}(t) + pu(t)\right] = u_1. \tag{5.32}$$

Вид второго начального условия в (5.32) подсказывает иную конструкцию второго условия в (5.30), обладающего тем свойством, что при $\beta \to 0$ оно переходит в классическое начальное условие $\lim\limits_{t\to 0+}\dot{u}(t) = u_2$. Этим свойством будет обладать видоизмененная задача типа Коши с начальными условиями

$$\lim_{t\to 0+} u(t) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+}\left\{\dot{u}(t) + p\left[D_{0t}^{\beta}u - u(t)\right]\right\} = u_2. \tag{5.33}$$

Решение дифференциального уравнения (5.22) в классе функций $u(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T)$ существует, единственно и может быть найдено по формуле (5.31), в которой следует заменить u_1 на $pu_0 + u_2$. Теперь при $\beta \to 0$ ($\alpha \to 1$) условия (5.33) переходят в классические начальные условия (5.16), а решение — в соответствующее решение дифференциального уравнения (5.23).

В лекционном курсе рассмотрены различные подклассы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и младшими дробными производными Римана—Лиувилля вида (5.14), начальные задачи для которых редуцируются к интегральным уравнениям типа Вольтерры второго рода, допускающим факторизацию (5.20) с $s = 3$ и $s = 4$.

Методы интегральных преобразований, в частности преобразование Лапласа и приемы операционного исчисления для решения дробных интегральных и дифференциальных уравнений в настоящем пособии не рассматриваются.

Раздел II. Задачи и упражнения

1.Специальные функции

1.1. Гамма– и бета–функции

1. Докажите формулы понижения и повышения:

$$\Gamma(z+n) = (z)_n \Gamma(z); \quad \Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n}\Gamma(z).$$

2. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\Gamma(n-z)}{\Gamma(-z)} = (-1)^n \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}.$$

3. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Покажите, что

$$\Gamma(0-) = \lim_{x\to 0-} \Gamma(z) = -\infty, \quad \text{а} \quad \Gamma(0+) = \lim_{x\to 0+} \Gamma(z) = +\infty.$$

4. Используя асимптотическое разложение

$$\Gamma(z) = (-1)^k \left[k!(z+k)\right]^{-1} \left[1 + O(z+k)\right]$$

при $z \to -k$, $k = 0, 1, \ldots$, показать, что $\operatorname*{res}_{z=-k} \Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$.

5. Используя формулу $\sin(\pi z) = \pi z \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ и представление Вейерштрасса для $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ (2.5), доказать справедливость равенств:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad \text{и} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}.$$

6. Вычислить значение $\dfrac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/6)}{\Gamma(1/3)\Gamma(2/3)}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

7. Докажите свойства $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \mathrm{B}(\beta,\alpha)$, $\mathrm{B}(\alpha,\beta+1) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{B}(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$, используя непосредственно определение $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ эйлеровым интегралом первого рода (2.16).

Указания. Первое тождество — заменой переменной интегрирования $x = 1 - t$; второе — интегрированием по частям.

8. Доказать справедливость равенства

$$\mathrm{B}(\alpha,\alpha) = \frac{1}{2^{2\alpha-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\alpha\right).$$

Указание. Применить подстановку $\dfrac{1}{2} - x = \dfrac{\sqrt{t}}{2}$.

9. Доказать справедливость интегрального представления

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(t+1)^{-\alpha-\beta}\,dt.$$

Указание. Применить подстановку $x = \dfrac{t}{t+1}$.

10. Используя представление $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ из упражнения 9, доказать формулу

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

11. Убедиться в справедливости свойств, перечисленных в упражнении 7, с помощью равенства из упражнения 10.

12. Вычислить значения $\mathrm{B}(\alpha,1)$, $\mathrm{B}(\alpha,n)$, $\mathrm{B}(m,n)$ $(n,m \in \mathbb{N})$.

Ответы: $\dfrac{1}{\alpha}$; $\dfrac{(n-1)!}{(\alpha)_n}$; $\dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$.

13. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+at)^{-\alpha-\beta}\,dt$ $(a, \alpha, \beta > 0)$.

Ответ: $a^{-\alpha}\mathrm{B}(\alpha, \beta)$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}(1+bt)^{-\alpha-\beta}\,dt$ $(b>-1;$ $\alpha, \beta>0)$.

Ответ: $(1+b)^{-\alpha}\mathrm{B}(\alpha, \beta)$.

15. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b (t-b)^{\alpha-1}(a-t)^{\beta-1}\,dt$ $(b < a;\ \alpha, \beta > 0)$.

Ответ: $(a-b)^{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha, \beta)$.

16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{(t-b)^{\alpha-1}(a-t)^{\beta-1}}{(t-c)^{\alpha+\beta}}\,dt$ $(c < b < a;$ $\alpha, \beta > 0)$.

Ответ: $\dfrac{(a-b)^{\alpha+\beta-1}}{(a-c)^{\alpha}(b-c)^{\beta}}\mathrm{B}(\alpha, \beta)$.

17. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x)^{2\alpha-1}(\cos x)^{2\beta-1}\,dx$ $(\alpha, \beta > 0)$. Чему равно его значение, если $\alpha = m$, $\beta = n$ $(n, m \in \mathbb{N})$?

Указание. Применить подстановку $\sin^2 x = t$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\mathrm{B}(\alpha, \beta)$; $\dfrac{(n-1)!(m-1)!}{2(m+n-1)!}$.

1.2. Функция $\psi(z)$

18. Докажите справедливость представления функции $\psi(z)$ в виде:

$$\psi(z) = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)} - \frac{1}{z} - \gamma,$$

где γ — постоянная Эйлера—Маскерони.

Указание. Воспользуйтесь представлением Вейерштрасса (2.5) в виде

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{1 + z/n}.$$

19. Доказать рекурентную формулу

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Указание. Прологарифмировать равенство $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

20. Доказать, что $\psi(n+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \gamma$ $(n \in \mathbb{N})$.

21. Доказать, что $\psi(z+n) = \psi(z) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{z+k-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

22. Доказать равенства:

а) $\psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \operatorname{ctg}(\pi z)$;

б) $\psi(z) - \psi(-z) = -\pi \operatorname{ctg}(\pi z) - \frac{1}{z}$;

в) $\psi(1+z) - \psi(1-z) = \frac{1}{z} - \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$;

г) $\psi\left(\frac{1}{2} + z\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - z\right) = \pi \operatorname{tg}(\pi z)$.

23. Доказать справедливость представления

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1-t}\, dt \quad (\mathrm{Re} z > 0).$$

Указание. Разложить $(1-t)^{-1}$ *в ряд и интегрировать почленно.*

1.3. Гипергеометрическая функция Гаусса

24. Убедиться в справедливости элементарных соотношений для гипергеометрической функции:

а) $\mathrm{F}(a,b;c;z)=\mathrm{F}(b,a;c;z)$;
б) $\mathrm{F}(a,b;b;z)=(1-z)^{-a}$;
в) $\mathrm{F}(a,b;c;0)=\mathrm{F}(0,b;c;z)=1$;
г) $\mathrm{F}(a,b;c;1)=\dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$, $c-a-b>0$.

Указание. Воспользоваться представлением гипергеометрической функции гипергеометрическим рядом ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$ (2.30).

25. Известно, что шесть функций $\mathrm{F}(a\pm1,b;c;z)$, $\mathrm{F}(a,b\pm1;c;z)$ и $\mathrm{F}(a,b;c\pm1;z)$ называют смежными с функцией $\mathrm{F}(a,b;c;z)$. Между $\mathrm{F}(a,b;c;z)$ и любыми двумя смежными с ней функциями существует линейная зависимость. Существует 15 соотношений этого типа (Гаусс). Доказать одно из них:

$$c\mathrm{F}(a,b-1;c;z)+(a-b)z\mathrm{F}(a,b;c+1;z)=c\mathrm{F}(a-1,b;c;z).$$

Смотри указание к предыдущему упражнению.

26. Убедиться в справедливости формул дифференцирования:

а) $\dfrac{d}{dz}\mathrm{F}(a,b;c;z)=\dfrac{ab}{c}\mathrm{F}(a+1,b+1;c+1;z)$;

б) $\dfrac{d}{dz}\left[z^a\mathrm{F}(a,b;c;z)\right]=az^{a-1}\mathrm{F}(a+1,b;c;z)$;

в) $\dfrac{d}{dz}\left[z^{c-1}\mathrm{F}(a,b;c;z)\right]=(c-1)z^{c-2}\mathrm{F}(a,b;c-1;z)$;

г) $\dfrac{d}{dz}\left[(1-z)^a\mathrm{F}(a,b;c;z)\right]=\dfrac{a(b-c)}{c}(1-z)^{a-1}\mathrm{F}(a+1,b;c+1;z)$;

д) $\dfrac{d}{dz}\left[z^{c-1}(1-z)^{a+b-c}\mathrm{F}(a,b;c;z)\right]=$
$=(c-1)z^{c-2}(1-z)^{a+b-c-1}\mathrm{F}(a-1,b-1;c-1;z)$.

Смотри указание к упражнению 24.

27. Доказать справедливость равенства

$$\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{F}(a,b;c;z)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\mathrm{F}(a+n,b+n;c+n;z).$$

28. Записать функцию $f(z)=(1+z)^a$ с помощью гипергеометрической функции ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$.

Ответ: $f(z) = \mathrm{F}(-a, b; b; -z)$.

29. Представить функцию $\mathrm{F}(-n, b; b; -x)$ через элементарную функцию.

Ответ: $(1+x)^n$.

30. Записать функции $f(z) = \arcsin z$ и $f(z) = \operatorname{arctg} z$ через гипергеометрическую функцию.

Ответ: $z\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right)$; $z\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right)$.

31. Записать функцию $f(z) = \ln(z+1)$ через гипергеометрическую функцию.

Ответ: $z\mathrm{F}(1, 1; 2; -z)$.

32. Проверить справедливость равенства

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = 2z\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right).$$

33. Доказать непосредственно через определение функции $F(a, b; c; z)$ гипергеометрическим рядом, что

$$\lim_{a\to\infty} \mathrm{F}\left(a, b; b; \frac{z}{a}\right) = \lim_{b\to\infty} \mathrm{F}\left(a, b; a; \frac{z}{b}\right) = \mathrm{e}^z.$$

34. Доказать, что для любого $a > 0$: ${}_1\mathrm{F}_1(a; a; \lambda z) = \mathrm{e}^{\lambda z}$, где функция ${}_1\mathrm{F}_1(a; c; z)$ определена в (2.43).

35. По определению ${}_0\mathrm{F}_1(c; z) = \lim\limits_{a\to\infty} {}_1\mathrm{F}_1\left(a; c; \frac{z}{a}\right)$, $|z| < \infty$. Убедитесь в справедливости представления функции Бесселя первого рода

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0\mathrm{F}_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right).$$

36. Найти представление модифицированной функции Бесселя $I_\nu(z)$ через вырожденную гипергеометрическую функцию

${}_0\mathrm{F}_1(c;z)$. Определение функции ${}_0\mathrm{F}_1(c;z)$ — в предыдущем упражнении.

37. Доказать равенство

$$\cos z = {}_0\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{2}; -z^2\right).$$

Указание. Определение функции ${}_0\mathrm{F}_1(c;z)$ — *в упражнении 35.*

38. Проверить непосредственной подстановкой, что гипергеометрическая функция, определенная рядом ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению Гаусса

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{dy}{dz} - aby = 0.$$

39. Доказать формулу Эйлера:

$$\mathrm{F}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt$$

($\mathrm{Re}c > \mathrm{Re}b > 0$, $|\arg(1-z)| < \pi$).

40. Доказать равенства

$$\mathrm{F}(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\mathrm{F}\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) = (1-z)^{-b}\mathrm{F}\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right)$$

($|\arg(1-z)| < \pi$).

Указание. Использовать замену переменной $t = 1-s$ *в интегральном представлении Эйлера.*

41. Доказать, что

$$\mathrm{F}(a,b;c;1-z) = z^{-a}\mathrm{F}\left(a, c-b; c; \frac{z-1}{z}\right) = z^{-b}\mathrm{F}\left(c-a, b; c; \frac{z-1}{z}\right).$$

42. Доказать формулу автотрансформации

$$\mathrm{F}(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b}\mathrm{F}(c-a,c-b;c;z), \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

43. Вычислить $\dfrac{d}{dz}[z\mathrm{F}(1,1;2;z)]$.
Ответ: $(1-z)^{-1}$.

44. Вычислить $\dfrac{d}{dz}[z\mathrm{F}(a,1;2;z)]$.
Ответ: $(1-z)^{-a}$.

1.4. Функции типа Миттаг—Леффлера

45. Используя определение функции типа Миттаг—Леффлера (2.44), показать, что $z\mathrm{E}_1(z;2) = \mathrm{e}^z - 1$; $z^2\mathrm{E}_1(z;3) = \mathrm{e}^z - 1 - z$.

46. Показать, что остаток ряда $R_n(z) = \mathrm{e}^z - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} = z^{n+1}\mathrm{E}_1(z;n+2)$.

47. Записать функцию $f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ с помощью функции типа Миттаг—Леффлера.
Ответ: $f(t) = A\omega t\mathrm{E}_2(-\omega^2t^2;2) + B\mathrm{E}_2(-\omega^2t^2;1)$.

48. Доказать тождество

$$\mathrm{E}_1(z;1) - z\mathrm{E}_1(z;2) = \mathrm{E}_2^2(-z;1) + z\mathrm{E}_2^2(-z;2).$$

49. Доказать тождество

$$\mathrm{E}_2(\pm z;2)\mathrm{E}_2(\pm z;1) = \mathrm{E}_2(\pm 4z;2).$$

50. Записать функцию $\mathrm{E}_3(z)$ с помощью элементарных функций.

Ответ: $\mathrm{E}_3(z) = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$, где $t = \sqrt[3]{z}$.

51. Записать функцию $\mathrm{E}_4(z)$ с помощью элементарных функций.

Ответ: $\mathrm{E}_4(z) = \frac{1}{2}\left(\cos t + \operatorname{ch} t\right)$, где $t = \sqrt[4]{z}$.

52. Доказать справедливость формулы дифференцирования

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \mathrm{E}_n\left(\lambda z^n\right) = \lambda \mathrm{E}_n\left(\lambda z^n\right) \quad (n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

53. Доказать, что

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left[z^{n-1}\mathrm{E}_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right)\right] = \frac{(-1)^n\lambda}{z^{n+1}}\mathrm{E}_n\left(\frac{\lambda}{z^n}\right), \quad z \neq 0.$$

54. Доказать тождество

$$\lambda t^\alpha \mathrm{E}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu + \alpha) = \mathrm{E}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) - \frac{1}{\Gamma(\mu)} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C};\ t \in \mathbb{R},\ \alpha > 0).$$

55. Доказать тождество

$$\alpha z \mathrm{E}'_\alpha(z; \mu + 1) = \mathrm{E}_\alpha(z; \mu) - \mu \mathrm{E}_\alpha(z; \mu + 1).$$

56. Доказать тождество

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[t^{\mu-1}\mathrm{E}_\sigma(\lambda t^\sigma; \mu)\right] = t^{\mu-m-1}\mathrm{E}_\sigma(\lambda t^\sigma; \mu - m) \quad (m \neq \mu).$$

57. Вычислить $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 [z^2\mathrm{E}_1(\lambda z; 3)]$.

Ответ: $\mathrm{e}^{\lambda z}$.

58. Доказать тождество

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[t^{m-1}\mathrm{E}_\sigma(\lambda t^\sigma; m)\right] = \lambda t^{\sigma-1}\mathrm{E}_\sigma(\lambda t^\sigma; \sigma).$$

59. Доказать тождество

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m \left[z^{\mu-1}\mathrm{E}_m(z^m; \mu)\right] = z^{\mu-1}\mathrm{E}_m(z^m; \mu)$$

для любого $\mu = 0, 1, \ldots, m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Указание. Воспользоваться тождеством (2.55).

60. Доказать тождество

$$\int_0^t \mathrm{E}_\sigma(\lambda\tau^\sigma; \mu)\tau^{\mu-1}d\tau = t^\mu \mathrm{E}_\sigma(\lambda t^\alpha; \mu+1) \quad (\mu > 0).$$

61. Доказать тождество

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\mathrm{E}_\sigma\left(\lambda t^\sigma; \mu\right) t^{\mu-1}\, dt = x^{\mu+\alpha-1}\mathrm{E}_\sigma\left(\lambda x^\sigma; \mu+\alpha\right).$$

Указание к упражнениям 52—61: воспользоваться определением функции типа Миттаг—Леффлера рядом и возможностью его почленного дифференцирования и интегрирования.

С помощью формулы, доказанной в предыдущем упражнении (смотри также (2.57)), вычислить нижеследующие интегралы $(\alpha > 0)$:

62. $\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\, dt.$

Ответ: $\Gamma(\alpha)x^\alpha \mathrm{E}_1(\lambda x; \alpha+1)$.

63. $\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}t\, dt.$

Ответ: $\Gamma(\alpha)x^\alpha \mathrm{E}_2(\lambda x^2; \alpha+1)$.

64. $\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} t \, dt$.

Ответ: $\sqrt{\lambda}\Gamma(\alpha)x^{\alpha+1}\mathrm{E}_2(\lambda x^2; \alpha+2)$.

65. $\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} \cos \omega t \, dt$.

Ответ: $\Gamma(\alpha)x^{\alpha}\mathrm{E}_2(-\omega^2 x^2; \alpha+1)$.

66. $\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} \sin \omega t \, dt$.

Ответ: $\omega\Gamma(\alpha)x^{\alpha+1}\mathrm{E}_2(-\omega^2 x^2; \alpha+2)$.

Указание к упражнениям 62—66. Записать подынтегральные функции с помощью функции типа Миттаг—Леффлера.

67. Вычислить $\int\limits_0^x \sqrt{t(x-t)}\mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{t}; 1/2)\, dt$.

Ответ: $\sqrt{\pi}\mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{x}) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^x \left[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{x})\right]$.

68. Доказать тождество

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^\alpha, \lambda_2 t^\alpha; \mu) = \lambda_1 \mathrm{E}_\alpha(\lambda_1 t^\alpha; \mu) - \lambda_2 \mathrm{E}_\alpha(\lambda_2 t^\alpha; \mu).$$

Выразить функцию $\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^\alpha, \lambda_2 t^\alpha; \mu)$ при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ через функцию $\mathrm{E}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu)$.

Ответ: $\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha, \lambda t^\alpha; \mu) = \mathrm{E}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) + \lambda t^\alpha \mathrm{E}'_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu)$.

69. Показать, что $\mathrm{E}_{1,1}(\lambda_1 t, \lambda_2 t; 1) = \dfrac{\lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

70. Доказать, что $\mathrm{E}_{1,1}(\lambda t, \lambda t; 1) = (1 + \lambda t)\mathrm{e}^{\lambda t}$.

71. Пусть $\lambda = \sigma + \omega i$ — произвольное комплексное число ($\omega \neq 0$). Показать, что

$$\mathrm{E}_{1,1}\left(\lambda t, \overline{\lambda} t; 1\right) = \mathrm{e}^\sigma \sin(\omega t + \varphi) \operatorname{cosec} \varphi,$$

где $\operatorname{ctg} \varphi = \sigma/\omega$.

72. Показать, что $\mathrm{E}_{1,1}\left(i\omega t; -i\omega t; 1\right) = \cos \omega t$.

Указание к упражнениям 71 и 72. Воспользоваться формулой из упражнения 69.

73. Записать функцию $\mathrm{E}_{2,2}(x^2, y^2; 1)$ $(x \neq y)$ через элементарные функции.

Ответ: $\dfrac{x^2 \operatorname{ch} x - y^2 \operatorname{ch} y}{x^2 - y^2}$.

74. Доказать тождества:

$$x\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x, y; \mu + \alpha) = \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) - \mathrm{E}_{\beta}(y; \mu),$$

$$y\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x, y; \mu + \beta) = \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) - \mathrm{E}_{\alpha}(x; \mu).$$

75. Доказать справедливость тождеств

$$\sin_\alpha(t) = t\left[1 - t^\alpha \mathrm{E}_\alpha(-t^\alpha; \alpha + 2)\right],$$

$$\cos_\alpha(t) = 1 - t^\alpha \mathrm{E}_\alpha(-t^\alpha; \alpha + 1),$$

где $\sin_\alpha(t)$ и $\cos_\alpha(t)$ — функции определенные в (4.39).

76. Показать, что $\sin_\alpha(t)' = \cos_\alpha(t)$, однако

$$(\cos_\alpha(t))' = -t^{\alpha-1}\mathrm{E}_\alpha(-t^\alpha; \alpha) \neq \sin_\alpha(t).$$

77. Выразить функцию $\sin_\alpha(t)$ через функцию $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$.

Ответ: $\mathrm{Exp}(\alpha, 2; -1; t)$.

78. Выразить функцию $\cos_\alpha(t)$ через функцию $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$.

Ответ: $\mathrm{Exp}(\alpha, 1; -1; t)$.

79. Записать функции $\sin_\alpha(\omega t)$ и $\cos_\alpha(\omega t)$ в терминах функции $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$.

Ответы: $\mathrm{Exp}\,(\alpha, 2; -\omega^\alpha; t)$, $\mathrm{Exp}\,(\alpha, 1; -\omega^\alpha; t)$.

80. Записать тождества из упражнений 56, 58—61 в терминах обобщенной дробной экспоненциальной функции $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t)$.

Указание к упраждениям 77—80. Воспользоваться определением функции (4.22).

2.Дробное интегро-дифференцирование Римана—Лиувилля

В следующих примерах вычислить интегралы непосредственно с помощью подходящей замены переменной интегрирования.

81. $\displaystyle\int\limits_0^x \sqrt{\frac{t}{x-t}}\,dt.$

Ответ: $\dfrac{\pi x}{2}$.

82. $\displaystyle\int\limits_x^1 \sqrt{\frac{1-t}{t-x}}\,dt.$

Ответ: $\dfrac{\pi(1-x)}{2}$.

83. $\displaystyle\int\limits_2^x \frac{dt}{\sqrt{(t-2)(x-t)}}.$

Ответ: π.

84. $\displaystyle\int\limits_x^5 \frac{dt}{\sqrt{(5-t)\,(t-x)}}.$

Ответ: π.

85. $\displaystyle\int\limits_0^x \left(\frac{t}{x-t}\right)^{3/4} dt.$

Ответ: $\dfrac{3}{4}\Gamma\left(\dfrac{3}{4}\right)\Gamma^2\left(\dfrac{1}{4}\right)x$.

86. $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{t\,dt}{\sqrt[3]{x-t}}.$

Ответ: $0{,}9\sqrt[3]{x^5}$.

87. $\displaystyle\int\limits_x^2 \sqrt[3]{\frac{2-t}{(t-x)^2}}\,dt.$

Ответ: $\dfrac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\sqrt[3]{(2-x)^2}$.

Указание к примерам 81—87. Использовать определение бета-функции (2.16).

88. Записать интегралы из примеров 81—87 с помощью интегральных операторов Римана—Лиувилля, определив предварительно их порядок, и найти значения с помощью формул (3.9) и (3.10).

89. В следующих примерах вычислить значения дробных производных, пользуясь их определениями (3.5), (3.6) и вычисляя интегралы непосредственно: $D_{0x}^{1/2}\sqrt{x}$; $D_{x1}^{1/2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; $D_{x1}^{1/2}\sqrt{1-x}$; $D_{0x}^{1/2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Ответы: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; 0; $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$; 0.

90. Какие из перечисленных в упражнении 89 производных можно вычислить по формулам (3.19) и (3.20)?

91. Вычислить дробные производные, исходя только из определения и вычисляя непосредственно интегралы: $D_{ax}^{3/2}(x-a)^{-1/4}$; $D_{xb}^{3/2}(b-x)^{-1/2}$; $D_{ax}^{3/2}(x-a)^{-1/2}$; $D_{xb}^{3/2}(b-x)^{-1/4}$.

Ответы: $-\dfrac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}(x-a)^{-7/4}$; 0; 0; $\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(-\frac{3}{4}\right)}(b-x)^{-7/4}$.

92. Вычислить дробные производные из упражнений 89 и 91 по формулам (3.34), (3.35) и (3.36). Являются ли они суммируемыми функциями на соответствующих отрезках?

93. Доказать справедливость формулы

$$D_{ax}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

94. Доказать справедливость формулы

$$D_{xb}^{\alpha}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1} \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

95. Найти с помощью формул из упражнений 93 и 94 значения $D_{ax}^{\alpha}1$ и $D_{xb}^{\alpha}1$.

96. Пусть $\alpha > 0$, функция $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$, где $\beta > 0$, а γ — произвольное число. Доказать справедливость равенства

$$I_{ax}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{1-\gamma}}F\left(1-\gamma,\beta;\alpha+\beta;\frac{x-a}{b-a}\right), \quad a < x < b.$$

Указание. Воспользоваться интегральным представлением Эйлера (2.31) *для гипергеометрической функции.*

97. В условиях задачи 96 доказать равенство

$$D_{ax}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\frac{(x-a)^{\beta-\alpha-1}}{(b-a)^{1-\gamma}}F\left(1-\gamma,\beta;\beta-\alpha;\frac{x-a}{b-a}\right), \quad a < x < b.$$

Указание. Записать производную $D_{ax}^{\alpha}\varphi$ по определению и воспользоваться формулой из предыдущего упражнения.

98. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$; функция $\varphi(x) = (x-a)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}$, где $c < a$. Доказать справедливость равенства

$$I_{ax}^{\alpha}\varphi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a-c)^{1-\gamma}}F\left(1-\gamma,\beta;\alpha+\beta;-\frac{x-a}{a-c}\right).$$

Указание. Рассмотреть отдельно случаи $\alpha > 0$ и $\alpha \leqslant 0$ и воспользоваться указаниями к задачам 96 и 97.

99. Используя формулу из задачи 98, вычислить $I_{ax}^{\alpha}(x\pm c)^{\gamma-1}$.

Ответ: $\dfrac{(a\pm c)^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^{\alpha}F\left(1,1-\gamma;\alpha+1;\dfrac{a-x}{a\pm c}\right)$, $a\pm c > 0$, $\gamma \in \mathbb{C}$.

100. Доказать равенство

$$I_{ax}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(b-x)^{\alpha+\beta}}\right]=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(b-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}},\quad a<x<b,$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$.

101. Доказать равенство

$$I_{ax}^{\alpha}\left[\frac{(x-a)^{\beta-1}}{(x-c)^{\alpha+\beta}}\right]=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{(a-c)^{\alpha}(x-c)^{\beta}},\quad c<a<x,$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$.

Указания к задачам 100 и 101. Формулы являются частными случаями формул из задач 96, 97 и 98.

102. Доказать равенство

$$I_{ax}^{\alpha}\ln(x-a)=\frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\ln(x-a)-\psi(\alpha+1)-\gamma\right],\quad x>a,$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\psi(z)$ — пси-функция (2.21), γ — постоянная Эйлера—Маскерони: $\gamma=-\psi(1)$.

103. Доказать равенство

$$I_{ax}^{\alpha}\left[(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)\right]=$$
$$=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}\left[\ln(x-a)+\psi(\beta)-\psi(\alpha+\beta)\right],$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$.

Указание к задачам 102 и 103. После замены $t=a+s(x-a)$ в интеграле для дальнейших вычислений воспользоваться дифференцированием $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ *по параметру* β.

104. Доказать справедливость равенства

$$I_{ax}^{\alpha}\mathrm{e}^{\lambda x}=\mathrm{e}^{\lambda a}(x-a)^{\alpha}\mathrm{E}_1\left[\lambda(x-a);\alpha+1\right],$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x > a$, $\mathrm{E}_\sigma(z;\mu)$ — функция типа Миттаг—Леффлера (2.44), в частности,

$$I_{0x}^{\alpha}\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{Exp}(1; \alpha+1; \lambda; x),$$

где $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; x)$ — обобщенная дробная экспоненциальная функция (4.22).

Указание. Воспользоваться разложением функции $\mathrm{e}^{\lambda x}$ *в ряд Маклорена и почленно проинтегрировать.*

105. Вычислить значение интеграла $I_{0x}^{\alpha}x^{\mu-1}\mathrm{E}_\sigma\left(\lambda t^\sigma; \mu\right)$.

Ответ: $x^{\mu+\alpha-1}\mathrm{E}_\sigma((\lambda x^\sigma; \mu+\alpha)$.

Указание. Воспользоваться тождеством (2.57). *По поводу его доказательства смотри задачу 61 и указания к упражнениям 52—61.*

106. Записать тождество (2.57) в терминах дробного интеграла I_{0x}^{α} и обобщенной дробной экспоненциальной функции $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; x)$.

Ответ: $I_{0x}^{\alpha}\mathrm{Exp}(\sigma, \mu; \lambda; x) = \mathrm{Exp}(\sigma, \mu+\alpha; \lambda; x)$.

В следующих пяти упражнениях вычислить значения дробных интегралов Римана—Лиувилля порядка α от элементарных функций. Ответ записать в терминах функции типа Миттаг—Леффлера и обобщенной дробной экспоненциальной функции.

107. $I_{0x}^{\alpha}\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Ответ: $x^\alpha\mathrm{E}_1\left(\lambda x; \alpha+1\right) = \mathrm{Exp}(1, \alpha+1; \lambda; x)$.

108. $I_{0x}^{\alpha}\operatorname{ch}\lambda x$.

Ответ: $x^\alpha\mathrm{E}_2\left(\lambda^2x^2; \alpha+1\right) = \mathrm{Exp}\left(2, \alpha+1; \lambda^2; x\right)$.

109. $I_{0x}^{\alpha}\operatorname{sh}\lambda x$.

Ответ: $\lambda x^{\alpha+1}\mathrm{E}_2\left(\lambda^2x^2; \alpha+2\right) = \lambda\mathrm{Exp}\left(2, \alpha+2; \lambda^2; x\right)$.

110. $I_{0x}^{\alpha}\cos\omega x$.

Ответ: $x^\alpha\mathrm{E}_2\left(-\omega^2x^2; \alpha+1\right) = \mathrm{Exp}\left(2, \alpha+1; -\omega^2; x\right)$.

111. $I_{0x}^{\alpha}\sin\omega x$.

Ответ: $\omega x^{\alpha+1}\mathrm{E}_2\left(-\omega^2x^2; \alpha+2\right) = \omega\mathrm{Exp}\left(2, \alpha+2; -\omega^2; x\right)$.

Указание к упражнениям 107—111. Записать указанные подынтегральные функции с помощью функции типа Миттаг—Леффлера и воспользоваться тождеством (2.57), *записанным с помощью дробного интеграла* I_{0x}^{α} (*смотри результат упражнения 105*). *Можно воспользоваться первым из тождеств* (4.26), *которое доказывается в упражнении 106.*

3.Интегральные уравнения Вольтéрры первого и второго рода

112. Найти решение уравнения Абеля $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \sqrt{x}$.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{2}$.

113. Найти решение уравнения Абеля $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = 1$.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}$.

Решить следующие интегральные уравнения первого рода:

114. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} = x^n \ (a \in (0,1))$.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{x^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$.

115. $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \sin x$.

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^x \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{x-t}}$.

116. $\displaystyle\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \mathrm{e}^x.$

Ответ: Ответ можно записать в следующих видах: $\varphi(x) =$
$$= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{\mathrm{e}^t\,dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \int\limits_0^x \frac{\mathrm{e}^t\,dt}{\sqrt{x-t}}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \int\limits_0^x \mathrm{e}^{x-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\mathrm{e}^x \mathrm{erf}(\sqrt{x})\right).$$

117. Найти решение интегрального уравнения

$$\int\limits_x^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{t-x}} = \sqrt{1-x}.$$

Ответ: $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}$.

118. Найти решение интегрального уравнения

$$\int\limits_x^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{t-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

если оно существует.

Ответ: не существует.

119. Не решая интегральное уравнение

$$\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

объяснить, почему решение не существует.

Решить интегральные уравнения первого рода:

120. $\displaystyle\int\limits_0^x (x-t)^{1/3}\varphi(t)\,dt = x^{4/3} - x^2.$

Ответ: $\varphi(x) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2x^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}.$

121. $\int\limits_0^x (x-t)^{1/2}\varphi(t)\,dt = \pi x.$

Ответ: $\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

122. $\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = x^3.$

Ответ: $\varphi(x) = 3.$

123. $\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = 2\cos x - 2 + x^2.$

Ответ: $\varphi(x) = \sin x.$

Указание к задачам 112—123. Записать интегральное уравнение с помощью соответствующего дробного интеграла Римана—Лиувилля и воспользоваться свойствами (3.16).

124. Пусть $\alpha > -1$. Исследовать вопрос разрешимости уравнения Абеля $\int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\alpha} = Cx^\beta$, где C — const, в зависимости от параметра $\beta \in \mathbb{R}$.

125. Пусть $f(x) \in C^\infty[0,l]$ $(l > 0)$ — регулярная функция: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ $(c_k = \mathrm{const})$. Найти решение интегрального уравнения Абеля $I^\alpha_{0x}\varphi = f(x)$ $(\alpha > 0)$.

Ответ: $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^{k\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}.$

126. Пусть $\beta > 0$, а функция $f(x)$ представима обобщенным степенным рядом: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^{\beta k}$. Найти решение интегрального уравнения Абеля $I^\alpha_{0x}\varphi = f(x)$ $(\alpha > 0)$.

Ответ: $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta k+1)}{\Gamma(\beta k+1-\alpha)} c_k x^{\beta k-\alpha}.$

127. Исследовать вопрос разрешимости уравнения Абеля $I_{0x}^{\alpha} = \operatorname{Exp}(\sigma, \mu; \lambda; x)$ ($\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

Решить следующие интегральные уравнения второго рода путем редукции к обыкновенному дифференциальному уравнению.

128. $\varphi(x) - \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = x.$

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\left\{e^{\pi x}[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{\pi x})] - 2\sqrt{x} - 1\right\}.$

129. $\varphi(x) - \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

Ответ: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \pi e^{\pi x}[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{\pi x})].$

130. $\varphi(x) - \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = 2\sqrt{x}.$

Ответ: $\varphi(x) = e^{\pi x}[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{\pi x})] - 1.$

131. $\varphi(x) - \int\limits_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = 1.$

Ответ: $\varphi(x) = e^{\pi x}[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{\pi x})].$

132. $\varphi(x) - \int\limits_x^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{t-x}} = 1.$

Ответ: $\varphi(x) = e^{\pi(1-x)}[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{\pi(1-x)})].$

133. $\varphi(x) - \int\limits_x^1 \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{t-x}} = 1 - 2\sqrt{1-x}.$

Ответ: $\varphi(x) = 1.$

Указание к задачам 128–133. Воспользоваться формулами (4.45) *и* (4.51) *решений интегральных уравнений* (4.44) *и* (4.50).

134*. Найти решения интегральных уравнений, представленных в задачах 128–133, с помощью резольвенты в терминах обобщенной дробной экспоненциальной функции (4.22) и, в конечном итоге, в терминах функции Миттаг—Леффлера $\mathrm{E}_\alpha(z)$.

Ответ к задаче 128: $\varphi(x) = \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}, 2; \sqrt{\pi}; x\right) = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) - 1 - 2\sqrt{x}\right]$.

Ответ к задаче 129: $\varphi(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \sqrt{\pi}; x\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \pi\mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{\pi x})$.

Ответ к задаче 130: $\varphi(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \sqrt{\pi}; x\right) = \mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) - 1$.

Ответ к задаче 131: $\varphi(x) = \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}, 1; \sqrt{\pi}; x\right) = \mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{\pi x})$.

Ответ к задаче 132: $\varphi(x) = \mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{\pi(1-x)})$.

Ответ к задаче 133: $\varphi(x) = 1$.

135*. Показать, что решения интегральных уравнений, записанных в терминах функции Миттаг—Леффлера в ответах к задаче 134*, эквивалентны ответам к задачам 128–132, полученным в терминах экспоненциальной функции и специальной функции $\mathrm{erf}(z)$.

Указание. Воспользоваться тождеством (2.50).

136*. Показать, что решения интегральных уравнений из задач 128–131 удобно и единообразно записываются в терминах дробных аналогов гиперболических функций $\mathrm{Sh}_\alpha(z)$ и $\mathrm{Ch}_\alpha(z)$.

Ответ к задаче 128: $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}[\mathrm{Ch}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) + \mathrm{Sh}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) - 2\sqrt{x} - 1]$.

Ответ к задаче 129: $\varphi(x) = \pi[\mathrm{Ch}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) + \mathrm{Sh}_{1/2}(\sqrt{\pi x})] + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Ответ к задаче 130: $\varphi(x) = \mathrm{Ch}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) + \mathrm{Sh}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) - 1$.

Ответ к задаче 131: $\varphi(x) = \mathrm{Ch}_{1/2}(\sqrt{\pi x}) + \mathrm{Sh}_{1/2}(\sqrt{\pi x})$.

Указание. Можно воспользоваться формулами (2.66) *и* (2.67) *в ответах к задачам 128–131*, *записанных с помощью специаль-*

ной функции $\operatorname{erf}(z)$, *или формулой* (2.65) *в ответах, записанных с помощью функции Миттаг—Леффлера в задаче 134**.

137. Доказать, что решение интегрального уравнения

$$y(x) - \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x)$$

(см. уравнение (4.1) при $\lambda = \Gamma(\alpha)$) может быть записано в виде (4.46):

$$y(x) = f(x) + \Gamma(\alpha) I_{0x}^{\alpha} f + \Gamma^2(\alpha) E_{0x;\Gamma(\alpha)}^{2\alpha,\alpha} f.$$

Указание. Воспользоваться решением интегрального уравнения (4.1) *в форме* (4.2) *при* $\lambda = \Gamma(\alpha)$ *и свойством* (2.53) *функции типа Миттаг—Леффлера.*

138*. Доказать тождество

$$\int_0^x e^{-\pi t} \operatorname{erf}(\sqrt{\pi(x-t)}) f(t)\,dt = \sqrt{\pi} \int_0^x e^{-\pi t} I_{0t}^{1/2} f(t)\,dt$$

(см. формулу (4.49)).

Указание. Записать внутренний интеграл в правой части тождества по определению (3.1). *При доказательстве тождества «слева–направо» записать функцию* $\operatorname{erf}(x)$ *по определению* (2.51) *и выполнить замену переменных* $s = \sqrt{\pi(\tau - t)}$ *во внутреннем интеграле. Изменив порядок интегрирования в повторных интегралах в заключение поменять переменные* t *на* τ, *а* τ *на* t.

При доказательстве «справа–налево» вначале изменить порядок интегрирования в повторных интегралах, затем выполнить замену переменных $\sqrt{\pi(t-\tau)} = s$ *во внутреннем интеграле.*

139*. Доказать, что решение интегрального уравнения (4.44)

$$y(x) - \int_0^x \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} = f(x)$$

в форме Лиувилля (4.45)

$$y(x) = \varphi(x) + \pi \int\limits_0^x e^{\pi(x-t)} \varphi(t)\, dt,$$

где $\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}}$, и решение этого же уравнения

$$y(x) = f(x) + \sqrt{\pi} E^{1/2,1/2}_{0x;\sqrt{\pi}} f$$

по формуле (4.4) при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\lambda = \sqrt{\pi}$ совпадают.

Указание. Воспользоваться результатом решения задачи 137 при $\alpha = 1/2$ *и, используя формулу* (2.50), *найти решение интегрального уравнения в виде* (4.48):

$$y(x) = f(x) + \int\limits_0^x \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{x-t}} + \pi \int\limits_0^x \mathrm{e}^{\pi(x-t)} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\pi(x-t)}\right)\right] f(t)\, dt.$$

Далее, воспользоваться тождеством, доказанным в задаче 138.*

140*. Доказать, что решение интегрального уравнения (4.50)

$$y(x) - \int\limits_x^1 \frac{y(t)\,dt}{\sqrt{t-x}} = f(x)$$

в виде (4.51)

$$y(x) = \varphi(x) + \pi \int\limits_x^1 e^{\pi(t-x)} \varphi(t)\, dt,$$

где $\varphi(x) = f(x) + \int\limits_x^1 \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{t-x}}$, и его решение

$$y(x) = f(x) + \sqrt{\pi} E^{1/2,1/2}_{x1;\sqrt{\pi}} f$$

по формуле (4.42) при $\lambda = \sqrt{\pi}$ и $\alpha = \frac{1}{2}$ совпадают.

Указание. Задачи 137 и 138 изложить для правосторонних интегральных операторов и доказать соответствующие формулы и тождества.*

В следующих задачах требуется установить свойства оператора $E^{\alpha,\sigma}_{ax;\lambda}f$, определенного в формулах (4.3) или (4.27).

141. Доказать, что (4.29)

$$E^{\mu,\sigma}_{0x;\lambda}x^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)\mathrm{Exp}(\sigma,\mu+\alpha;\lambda;x) \quad (\alpha,\sigma,\mu>0;\lambda\in\mathbb{C}).$$

142. Доказать, что (4.30)

$$\left(I+\lambda E^{\alpha,\alpha}_{0x;\lambda}\right)x^{\mu-1} = \Gamma(\mu)\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;x) \quad (\alpha,\mu>0;\lambda\in\mathbb{C}).$$

143. Доказать равенства (см (4.31) и (4.34))

$$E^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1}\mathrm{Exp}(\beta,\nu;\lambda_2;x) = E^{\nu,\beta}_{0x;\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda_1;x) = \\ = \mathrm{Exp}(\alpha,\beta,\mu+\nu;\lambda_1,\lambda_2;x),$$

где α, β, μ, $\nu>0$; λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{C}$, а функция $\mathrm{Exp}(\alpha,\beta,\mu+\nu;\lambda_1,\lambda_2;x)$ определена в (4.33).

144. Доказать равенство (4.32)

$$E^{\mu,\alpha}_{0x;\lambda_1}\mathrm{Exp}(\alpha,\mu+\nu;\lambda_1;x) = \\ = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,\mu+\nu;\lambda_1;x) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\mathrm{Exp}(\alpha,\mu+\nu;\lambda_2;x).$$

Указание. В связи с доказываемой формулой (4.32) *смотри формулу* (4.12) *и пояснения к ней.*

145. Доказать, что (4.43)

$$E^{\mu,\sigma}_{x1;\lambda}(1-x)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)\mathrm{Exp}(\sigma,\mu+\alpha;\lambda;1-x) \quad (\alpha,\sigma,\mu>0;\ \lambda\in\mathbb{C}).$$

146. Доказать, что

$$\left(I+\lambda E^{\alpha,\alpha}_{x1;\lambda}\right)(1-x)^{\mu-1}=\Gamma(\mu)\mathrm{Exp}(\alpha,\mu;\lambda;1-x)\quad(\alpha,\mu>0;\ \lambda\in\mathbb{C}).$$

В следующих примерах найти решения интегральных уравнений второго рода с левосторонними интегральными операторами Римана—Лиувилля.

147. $y(x)-\int\limits_0^x\frac{y(t)\,dt}{\sqrt[4]{x-t}}=1.$

Ответ: $y(x)=\mathrm{Exp}\left(\frac{3}{4},1;\Gamma\left(\frac{3}{4}\right);x\right)=\mathrm{E}_{3/4}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{3}{4}}\right].$

148. $y(x)-\int\limits_0^x\frac{y(t)\,dt}{\sqrt[3]{x-t}}=x.$

Ответ: $y(x)=\mathrm{Exp}\left(\frac{2}{3},2;\Gamma\left(\frac{2}{3}\right);x\right)=x\mathrm{E}_{2/3}\left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}};2\right].$

149. $y(x)-\int\limits_0^x(x-t)y(t)\,dt=ke^{\lambda x}.$

Ответ: $y(x)=k\mathrm{E}_{2,1}(x^2,\lambda x;1).$

Указание к задачам 147–149. Записать интегральные уравнения с помощью соответствующих дробных интегралов Римана—Лиувилля и воспользоваться формулой решения (4.4); *затем в задачах 147, 148 воспользоваться формулой* (4.30), *а в задаче 149 — формулой* (4.35).

150. Найти решение интегрального уравнения из задачи 149 путем его редукции к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Ответ: $y(x)=\frac{k}{1-\lambda^2}(\operatorname{ch}x+\lambda\operatorname{sh}x-\lambda^2e^{\lambda x}).$

151*. Убедиться непосредственно в справедливости равенства

$$2\mathrm{E}_{2\alpha,\alpha}(x^2, y; \mu) = \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(x, y; \mu) + \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(-x, y; \mu)$$

для любых x, y, $\mu \in \mathbb{C}$.

152*. Доказать тождество

$$\mathrm{E}_{2\alpha,\alpha}(x^2, y; \mu) = \frac{x^2}{x^2 - y^2}\mathrm{Ch}_\alpha(x; \mu) + \frac{xy}{x^2 - y^2}\mathrm{Sh}_\alpha(x; \mu) - \frac{y^2}{x^2 - y^2}\mathrm{E}_\alpha(y; \mu).$$

*Указание. Воспользоваться равенством из упражнения 151**, *формулой* (2.60) *и определениями* (2.63), (2.64).

153*. Показать, что решения интегрального уравнения из задачи 149, представленные в ответах к задачам 149 и 150, совпадают.

Указание. Воспользоваться тождеством из задачи 152 при $\alpha = = \mu = 1:$

$$\mathrm{E}_{2,1}(x^2, y; 1) = \frac{x^2 \operatorname{ch} x + xy \operatorname{sh} x - y^2 e^y}{x^2 - y^2}.$$

154. Решить уравнение $y(x) - \lambda I^\alpha_{0x} = Ae^{\nu x}$ ($\alpha > 0$; A, λ, $\nu = = \mathrm{const}$).

Ответ: $y(x) = A\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda x^\alpha, \nu)$.

Указание. Воспользоваться формулой (4.35).

155. Найти решения интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda I^\alpha_{0x} y = f(x)$$

для а) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$; б) $f(x) = x^{\sigma-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^{\gamma k}$, где σ, $\gamma > 0$, c_k — известные константы.

Ответы: а) $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k k! \mathrm{Exp}(\alpha, k+1; \lambda; x)$;

$$\text{б) } y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Gamma(\gamma k + \sigma)\mathrm{Exp}(\alpha, \gamma k + \sigma; \lambda; x).$$

156*. Найти решения интегрального уравнения

$$y(t) - \lambda I_{0t}^{\alpha} y = f(t)$$

для $f(t) = A\sin\omega t$ и $f(t) = A\cos\omega t$.

Ответы: $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\lambda t^{\alpha})^k \mathrm{S}_1(\omega t; \alpha k + 1)$;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda t^{\alpha})^k \mathrm{C}_1(\omega t; \alpha k + 1).$$

Указание. Рассмотреть данное интегральное уравнение при $f(t) = Ae^{i\omega t}$, *воспользоваться решением и указаниями к задаче 154 и формулами* (4.16), (4.17).

157. Исследовать вопрос о разрешимости интегрального уравнения

$$aI_{0x}^{\alpha} y - bI_{0x}^{\beta} y = f(x) \quad (\alpha, \beta > 0;\ a, b \neq 0)$$

в классе суммируемых функций.

158. Исследовать разрешимость в классе суммируемых функций интегрального уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_{ax}^{\alpha k} y = \varphi(x) \quad (\alpha > 0,\ x > a)$$

и найти его решение.

Ответ: $y(x) = \varphi(x) - \lambda I_{ax}^{\alpha} \varphi,\ \varphi \in L(a, b)$.

4. Дифференциальные уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля

159. Показать эквивалентность задачи типа Коши для дифференциального уравнения

$$D_{ax}^{\alpha} y = f(x), \quad \alpha \in (0, 1),$$

с функцией $f(x) \in L(a, b)$ и начальным условием

$$\lim_{x \to a+} I_{ax}^{1-\alpha} y = y_0$$

начальной задаче с видоизмененным (весовым) начальным условием

$$\Gamma(\alpha) \lim_{x\to a+} (x-a)^{1-\alpha} y(x) = y_0.$$

Записать общее (в смысле Коши) решение указанного дифференциального уравнения.

Ответ: $y(x) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} + I^{\alpha}_{ax} f$.

В следующих примерах найти решения простейших дифференциальных уравнений с начальными условиями типа Коши.

160. $(x-a)^{\alpha} D^{\alpha}_{ax} y = 1, \ \lim\limits_{x\to a+} I^{1-\alpha}_{ax} = 1, \ \alpha \in (0,1)$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[(x-a)^{\alpha-1} + \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\right]$.

161. $\sqrt{x} D^{1/2}_{0x} y = 1, \ \lim\limits_{x\to 0+} I^{1/2}_{0x} y = \sqrt{\pi}$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\pi}$.

162. $D^{1/4}_{0x} y = x^{-1/4} + x^{-3/4}, \ \lim\limits_{x\to 0+} I^{1/4}_{0x} y = \dfrac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{\pi}}$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{\pi}}(x^{-3/4} + x^{-1/2}) + \Gamma(3/4)$.

163. $D^{1/2}_{0x} y = e^{\lambda x}, \ \lim\limits_{x\to 0+} I^{1/2}_{0x} y = \sqrt{\pi}$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}[1 + \mathrm{E}_1(\lambda x; 3/2)]$.

Указание к задачам 160–163. Решение предложенных начальных задач легко находится, используя тождество (3.26), *в котором учтено соответствующее начальное условие типа Коши. Можно также воспользоваться общим в смысле Коши решением дифференциального уравнения из задачи 159, вычислив соответствующий интеграл от правой части* (*см. ответ к задаче 159*).

164. Путем непосредственных вычислений показать, что функция $y(x) = \dfrac{y_0}{\sqrt{\pi x}} - \dfrac{\lambda\Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)\sqrt[4]{x^3}}$ является решением дифференциального уравнения $D_{0x}^{1/2} y = \lambda x^{-5/4}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) с несуммируемой на $[0, l]$ ($l > 0$) правой частью и видоизмененным начальным условием типа Коши: $\lim\limits_{x \to 0+} \left(I_{0x}^{1/2} y + 4\lambda x^{-1/4} \right) = y_0$.

165. Показать, что единственное в классе функций $AC[0, l]$ ($l > 0$) решение простейшего дифференциального уравнения $D_{0x}^{\alpha} y = f(x)$, $\alpha \in (0, 1)$, должно удовлетворять однородному классическому условию Коши $y(0) = 0$. Найти это решение.

Ответ: $y(x) = I_{0x}^{\alpha} f$.

166*. Показать, что задача Коши для дифференциального уравнения с производной Римана—Лиувилля $D_{0x}^{\alpha} y = f(x)$, $\alpha \in (0, 1)$, и классическим начальным условием $y(0) = y_0$ в классе функций $y(x) \in AC[0, l]$ ($l > 0$) корректна тогда и только тогда, когда правая часть $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx^{-\alpha} + \varphi(x)$, где k — некоторая константа, а $\varphi(x) \in C[0, l]$, причем начальное значение y_0 не произвольно, а предопределено структурой функции $f(x)$, именно, $y_0 = k\Gamma(1 - \alpha)$. Переформулировать начальное условие в терминах правой части $f(x)$ и записать это решение. Можно ли ослабить требования на гладкость функции $\varphi(x)$?

Ответ: $y(0) = \Gamma(1 - \alpha) \lim\limits_{x \to 0+} x^{\alpha} f(x)$; $y(x) = I_{0x}^{\alpha} f = y(0) + I_{0x}^{\alpha} \varphi$. Да, можно. Например, $\varphi(x) \in C(0, l) \cap L(0, l)$. В конечном итоге, необходимым условием является существование предела $\lim\limits_{x \to 0+} I_{0x}^{\alpha} \varphi = 0$.

167. Найти решение задачи типа Коши для уравнения Барретта:

$$D_{0x}^{\alpha} y - \lambda y(x) = f(x), \quad \alpha \in (0, 1),$$
$$D_{0x}^{\alpha - 1} y(0+) = I_{0x}^{1 - \alpha} y(0+) = y_0.$$

Ответ: $y(x) = y_0 x^{\alpha - 1} \mathrm{E}_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}; \alpha) + \mathrm{E}_{0x;\lambda}^{\alpha,\alpha} f = y_0 \mathrm{Exp}(\alpha, \alpha; \lambda; x) + \mathrm{E}_{0x;\lambda}^{\alpha,\alpha} f$.

168. Для однородного дифференциального уравнения Барретта сформулировать задачу типа Коши с весовым начальным условием и найти ее решение. Обосновать непрерывную зависимость решения от параметра α при $\alpha \to 1$.

Указание. Можно воспользоваться общим в смысле Коши решением из ответа к задаче 167, затем показать, что $\lim\limits_{\alpha\to 1-0} y(x) = = y_0 \lim\limits_{\alpha\to 1-0} \mathrm{Exp}(\alpha,\alpha;\lambda;x) = y_0\mathrm{Exp}(1,1;\lambda;x) = y_0\mathrm{e}^{\lambda x}$ *— решение задачи Коши для уравнения* $y' - \lambda y = 0$ *с условием* $y(0) = y_0$.

169. Найти решение задачи типа Коши:

$$D_{0x}^{1/2} y - y(x) = 1, \lim_{x\to 0+} I_{0x}^{1/2} y = 1.$$

Ответ: $y(x) = \mathrm{Exp}(1/2, 1/2; 1; x) + \mathrm{Exp}(1/2, 3/2; 1; x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{x}; 1/2) + \sqrt{x}\mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{x}; 3/2)$.

170. Найти решение дифференциального уравнения

$$D_{0x}^{1/2} y - \sqrt{a} y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

с однородным начальным условием типа Коши $\lim\limits_{x\to 0+} I_{0x}^{1/2} y = 0$.

Ответ: $y(x) = \sqrt{\pi}\mathrm{E}_{1/2}(\sqrt{ax}; 1) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{ax}(1 + \mathrm{erf}(\sqrt{ax}))$.

171. Показать, что для дифференциального уравнения из задачи 170 корректна начальная задача с классическим условием Коши $y(0) = \sqrt{\pi}$ в классе функций $AC[0, l]$ $(l > 0)$.

Указание. Воспользоваться решением задачи 170.

172. Найти решение задачи Коши:

$$\dot{x} - \lambda D_{0t}^{1-\alpha} x = f(t), \quad \alpha \in (0, 1), \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$
$$x(0) = x_0.$$

Ответ: $x(t) = x_0\mathrm{E}_\alpha(\lambda t^\alpha) + \mathrm{E}_{0t;\lambda}^{1,\alpha} f$.

173. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(x) \in L(0, b)$. Найти решение задачи Коши с начальным условием $y(0) = y_0$ для линейного дифференциального уравнения типа Барретта с производной Капуто ${}^C D_{0x}^\alpha y - \lambda y = f(x)$.

Ответ: $y(x) = y_0 \mathrm{Exp}(\alpha, 1; \lambda; x) + E^{\alpha,\alpha}_{0x;\lambda} f$.

174*. Пусть $\alpha \in (0,1)$, функция $f(x) = kx^{-\alpha} + \varphi(x)$, $k = \mathrm{const}$, $\varphi(x) \in C[0,l]$ $(l > 0)$. Показать, что задача Коши с начальным условием $y(0) = k\Gamma(1-\alpha)$ для дифференциального уравнения Барретта имеет единственое решение в классе функций $y(x) \in AC[0,l]$. Найти это решение. Сравнить ответ с ответом к задаче 173.

Указание. Показать, что задача Коши с классическим начальным условием для уравнения Барретта с правой частью указанного в условии задачи вида эквивалентна задаче Коши для уравнения типа Барретта с производной Капуто. См. ответ к задаче 173.

175*. Пусть $\alpha \in (0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\varphi(x) \in C[0,1]$. Исследовать корректность задачи с конечным условием $y(1) = y_1$ в зависимости от параметра μ для нагруженного дифференциального уравнения

$$D^{\alpha}_{0x} y - \lambda y = \mu x^{-\alpha} y(0) + \varphi(x).$$

176*. Пусть $\alpha, \beta \in (0,1)$. Указать возможные постановки задачи типа Коши для дифференциального уравнения $D^{\alpha}_{0x} y - \lambda D^{\beta}_{0x} y = f(x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $f(x) \in L(0,l)$ $(l > 0)$, в зависимости от отношения порядка между параметрами α и β и выписать соответствующие решения.

Ответ: при $\alpha > \beta$: $\lim\limits_{x\to 0+} I^{1-\alpha}_{0x} y = y_0$, $y(x) = y_0 \mathrm{Exp}(\alpha-\beta, \alpha; \lambda; x) + E^{\alpha,\alpha-\beta}_{0x;\lambda} f$; при $\alpha = \beta$ $(\lambda \neq 1)$: $\lim\limits_{x\to 0+} I^{1-\alpha}_{0x} y = y_0$, $y(x) = \dfrac{y_0}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + I^{\alpha}_{0x} f$; при $\alpha < \beta$: $\lim\limits_{x\to 0+} I^{1-\beta}_{0x} y = y_0$, $y(x) = y_0 \mathrm{Exp}(\beta - \alpha, \beta; \mu; x) - \mu E^{\beta,\beta-\alpha}_{0x;\mu} f$, где $\mu = 1/\lambda$.

177. Найти решение задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка $y' - \lambda y = f(x)$ ($\lambda = \mathrm{const}$ с условием $y(0) = y_0$ путем редукции к интегральному уравнению Вольтерры второго рода с последующим его решением. Показать, что решение можно найти как предельный случай при

$\alpha \to 1-0$ и $\beta \to 0+$ в решении дифференциального уравнения из задачи 176.

Ответ: $y(x) = y_0 \mathrm{Exp}(1,1;\lambda;x) + \int\limits_0^x \mathrm{Exp}(1,1;\lambda;x-t)f(t)dt =$ $= y_0 \mathrm{e}^{\lambda x} + \int\limits_0^x \mathrm{e}^{\lambda(x-t)} f(t)dt.$

В нижеследующих задачах рассмотрены простейшие дифференциальные уравнения порядка $\alpha \in (0,1)$ с постоянными коэффициентами, являющиеся математическимим моделями наследственно-упругого деформируемого двердого тела (вязко-упругой среды с памятью) в одномерном случае. Они позволяют найти закон изменения деформации как функцию времени t в зависимости от закона изменения напряжения (действующей силы), в частности, изучить явление ползучести. В этих задачах $\varepsilon = \varepsilon(t)$ — деформация (искомая функция); $\sigma = \sigma(t)$ — напряжение (известная функция); E, ν — некоторые константы модели (структурные константы); $D_{0t}^{\alpha} f$ — левосторонняя дробная производная по времени функции $f(t)$ порядка α, $D_{0t}^{\alpha} f = \dfrac{d}{dt} I_{0t}^{1-\alpha} f$, $\alpha \in (0,1)$, где $I_{0t}^{\alpha} f = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \dfrac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ — левосторонний дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$.

178. Определяющее соотношение дробного аналога реологической модели Фойхта записывается в виде дифференциального уравнения

$$\eta D_{0t}^{\alpha} \varepsilon + E\varepsilon = \sigma(t).$$

Найти решение этого дифференциального уравнения с начальным условием $\varepsilon(0) = 0$ для любой зависимости $\sigma(t) \in L(0,T)$ $(T > 0)$. Найти закон изменения деформации, если $\sigma(t) = \sigma_0 =$ $= \mathrm{const}$ $(t > 0)$. Показать, что как и в классическом случае (при $\alpha = 1$) существует предел $\lim\limits_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{E}$.

Ответ: $\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\eta} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}\sigma(t)$, где $\lambda = -\dfrac{E}{\eta}$; при $\sigma(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$ $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{E}(1 - \mathrm{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t))$.

Указание. Для изучения асимптотического поведения решений воспользоваться известным фактом:

$$\mathrm{E}_\alpha(z;\mu) = -\frac{1}{z\Gamma(\mu-\alpha)} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad \alpha_0 \leqslant |\arg x| \leqslant \pi.$$

179. Дифференциальное уравнение

$$ED_{0t}^{\alpha}\varepsilon + \eta D_{0t}^{1-\alpha}\varepsilon = \sigma(t)$$

может рассматриваться как дробный аналог реологической модели Фойхта, совпадая с классическим определяющим соотношением при $\alpha = 0$. Пусть $\alpha \in (0, 1/2)$. Найти решение этого дифференциального уравнения с начальным условием $\varepsilon(0) = 0$ для любой зависимости $\sigma(t) \in L(0,T)$ $(T > 0)$. Найти закон изменения деформации, если $\sigma(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$ $(t > 0)$.

Ответ: $\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\eta} E_{0t;\lambda}^{1-\alpha,1-2\alpha}\sigma(t)$, где $\lambda = -\dfrac{E}{\eta}$; при $\sigma(t) = \sigma_0 = \mathrm{const}$ $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{E}\left[\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \mathrm{Exp}(1-2\alpha, 1+\alpha; \lambda; t)\right]$.

180. Пусть $\sigma(t) = \sigma_0[H(t) - H(t-t_1)]$ — закон изменения напряжения $(t_1 > 0)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда. Определяющее соотношение модели Скотт Блэра—Герасимова записывается в виде

$$D_{0t}^{\alpha}\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma(t), \quad \alpha \in (0,1).$$

Найти решение этого простейшего дифференциального уравнения для указанной зависимости $\sigma(t)$ с начальным условием $\lim\limits_{t\to 0+}\varepsilon(t) = \varepsilon(0+) = 0$.

Ответ: $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{E\Gamma(\alpha+1)}[t^\alpha H(t) - (t-t_1)^\alpha H(t-t_1)]$.

181. Найти решение дифференциального уравнения из задачи 178 с начальным условием $\varepsilon(0+) = 0$ для закона $\sigma(t)$ из задачи 180.

Ответ: $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{E}[H(t)(1 - \operatorname{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t)) - H(t - t_1)(1 - \operatorname{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t - t_1))]$.

182. Найти решение дифференциального уравнения из задачи 179 с начальным условием $\varepsilon(0+) = 0$ для закона $\sigma(t)$ из задачи 180.

Ответ: $\varepsilon(t) = \dfrac{\sigma_0}{E}\Bigg[H(t)\bigg(\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \operatorname{Exp}(1 - 2\alpha, 1 + \alpha; \lambda; t)\bigg) - H(t - t_1)\bigg(\dfrac{(t-t_1)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \operatorname{Exp}(1 - 2\alpha, 1 + \alpha; \lambda; t - t_1)\bigg)\Bigg]$.

183*. Найти реакцию дробного аналога тела Фойхта (определяющее соотношение — в задаче 178) на периодическую нагрузку $\sigma(t) = A \sin \omega t$.

Ответ: $\varepsilon(t) = \dfrac{A}{\eta} \operatorname{Im} \operatorname{Exp}(\alpha, 1, \alpha + 1; \lambda, i\omega; t) = \dfrac{A}{E}[\sin \omega t - \operatorname{Im} \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha, i\omega t; 1)] = \dfrac{A}{E}[\sin \omega t - \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda t^\alpha)^k \mathrm{S}_1(\omega t; k\alpha + 1)]$, где $\lambda = -\dfrac{E}{\eta}$, $\mathrm{S}_1(z; \mu)$ — дробный аналог функции $\sin z$ (4.17).

184. В условиях задачи 183 показать, что при $\alpha \to 1$ найденное решение (см. ответ к задаче 183) переходит в классическое решение $\varepsilon(t) = A[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}]$, где $\lambda = -\dfrac{E}{\eta}$, $\cos \varphi = \dfrac{E}{E^2 + \omega^2 \eta^2}$, $\sin \varphi = \dfrac{\omega \eta}{E^2 + \omega^2 \eta^2}$.

185. Найти решение диффферегнциального уравнения из задачи 179 с начальным условием $\varepsilon(0) = 0$ и $\sigma(t) = A \sin \omega t$. Показать, что при $\alpha \to 1$ оно переходит в классическое решение (см. задачу 184).

Ответ: $\varepsilon(t) = \dfrac{A}{E}\Big[\mathrm{Exps}(1, 1+\alpha; i\omega; t) -$
$-\mathrm{Exps}\Big(1-2\alpha, 1, 1+\alpha; -\dfrac{E}{\eta}, i\omega; t\Big)\Big].$

В ниже следующих задачах рассмотрены проблемы, связанные с постановкой корректных начальных задач и нахождением решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следующего вида: $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k y^{(k\alpha)} = f(x)$, где $y^{(k\alpha)}$ — левоторонняя дробная производная в смысле Римана—Лиувилля или Капуто искомой функции $y(x)$, $\alpha \in (0, 1/n]$; $f(x)$ — заданная функция; $a_k \in \mathbb{C}$.

В примерах № 186–190 для линейных дифференциальных уравнений вида $y^{2\alpha} + py^{(\alpha)} + qy = f(x)$, $\alpha \in (0, 1/2)$, где $p, q = \mathrm{const}$, $f(x)$ — известная функция

1) поставить и обосновать корректность задачи типа Коши, если $y^{(\alpha)}(x) = D^{\alpha}_{0x}y$; какими могут быть весовые начальные условия для этого случая;
2) обосновать корректность задачи Коши с классическими начальными условиями, если $y^{(\alpha)}(x) = {}^{C}D^{\alpha}_{0x}y$;
3) найти решение поставленной задачи в явном виде; исследовать структуру решения при $\alpha \to 1/2 - 0$.

186. $y^{2\alpha} + 3y^{(\alpha)} + 2y = \sqrt{x}$.

187. $4y^{2\alpha} + 4y^{(\alpha)} + y = 1$.

188. $y^{2\alpha} + 2y^{(\alpha)} + 5y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

189. $y^{2\alpha} + 4y = 2x$.

Указание. Для сравнения найти решение этого дифференциального уравнения как уравнения Барретта, минуя идею факторизации.

190. $2y^{2\alpha} + 5y^{(\alpha)} = x^{\alpha}$.

В примерах № 191–195 рассмотреть дифференциальные цравнения из примеров № 186–190 для $\alpha \in (1/2, 1)$. Рассмотреть вопросы, поставленные в пунктах 1) и 2) указаний к решению соответствующих примеров. В третьем пункте следует найти решение поставленной начальной задачи и показать, что при $\alpha \to 1-0$ найденное решение переходит в решение задачи Коши для классического линейного дифференциального уравнения второго порядка.

191. Смотри дифференциальное уравнение из № 186.

192. Смотри дифференциальное уравнение из № 187.

193. Смотри дифференциальное уравнение из № 188.

194. Смотри дифференциальное уравнение из № 189 и указания к этому примеру.

195. Смотри дифференциальное уравнение из № 190.

196*. Найти решение задачи типа Коши и исследовать его асимптотику:

$$D_{0x}^{1+\alpha} y - \lambda y(x) = 0, \quad \alpha \in (0,1),$$

$$D_{0x}^{\alpha} y(0+) = y_1,$$

$$D_{0x}^{\alpha-1} y(0+) = I_{0x}^{1-\alpha} y(0+) = y_2.$$

Ответ: $y(x) = y_1 x^{\alpha} \mathrm{E}_{1+\alpha}(\lambda x^{1+\alpha}; 1+\alpha) + y_2 x^{\alpha-1} \mathrm{E}_{1+\alpha}\left(\lambda x^{1+\alpha}; \alpha\right)$.

197*. Найти решение задачи Коши в терминах функций $\sin_\alpha(t)$ и $\cos_\alpha(t)$. Высказать соображения по поводу осциллируемости этого решения:

$$\ddot{x} + D_{0t}^{1/2} x = f(t),$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Ответ: $x(t) = x_0 \cos_{3/2}(t) + \dot{x}_0 \sin_{3/2}(t) + \int\limits_0^t \sin_{3/2}(t-\tau) f(\tau) d\tau$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. **Нахушев А. М.** Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. **Килбас А. А.** Интегральные уравнения: курс лекций. — Минск: БГУ, 2005. — 143 с.
3. **Краснов М. Л., Кисилев А. И., Макаренко Г. И.** Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие. Изд. 4-е, испр. — М.: КомКнига, 2007. — 192 с.
4. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
5. **Podlubny I.** Fractional Differential Equations. — San Diego: Academic Press, 1999. — 340 p.
6. **Miller K. S., Ross B.** An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — New York: Wiley, 1993. — 366 p.
7. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
8. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. — М.: Наука, 1973. — 296 с.
9. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967. — 299 с.

Оглавление

Применение аппарата дробного исчисления в решении интегральных и дифференциальных уравнений
Учебное издание

ОГОРОДНИКОВ Евгений Николаевич,
АРЛАНОВА Екатерина Юрьевна

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 25.01.2019
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл. п. л. 5,5. Уч.–изд. л. 5,42
Тираж 50 экз. Рег. № 16/19

Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Самарский государственный технический университет”
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244,
Корпус № 8