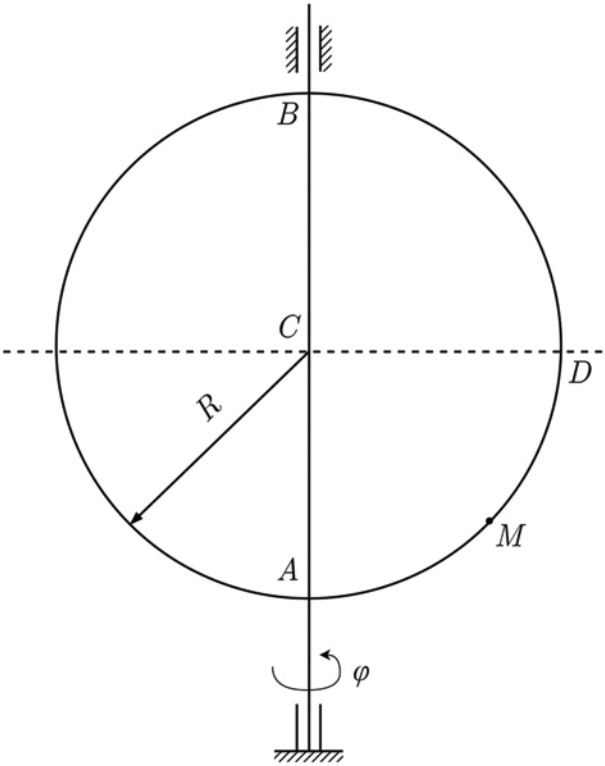


Е. Н. Огородников, А. А. Заусаев

Элементы классической механики

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

Е. Н. ОГОРОДНИКОВ, А. А. ЗАУСАЕВ

ЭЛЕМЕНТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Самара
Самарский государственный технический университет
2023

Печатается по решению ученого совета
Самарского государственного технического университета
(протокол № 5 от 27.12.2022 г.)

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
О-392

Огородников Е. Н.
Элементы классической механики: учебное пособие / *Е. Н. Огородников, А. А. Заусаев.* – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2023. – 56 с.

Учебное пособие посвящено трем основным разделам классической механики: кинематике, статике и динамике.

Оно содержит необходимый теоретический материал по некоторым избранным темам указанных разделов, а именно, по кинематике точки, статике на плоскости и основной задаче динамики. Приведены образцы решения типовых задач по указанным темам.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук *Е. Ю. Арланова*
канд. пед. наук *Я. Г. Стельмах*

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
О-392

© Е. Н. Огородников,
А. А. Заусаев, 2023
© Самарский государственный
технический университет, 2023

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие посвящено трем основным разделам классической механики: кинематике, статике и динамике, которые входят в учебные программы курсов «Классическая механика» и «Математическое моделирование в естествознании» (Часть 1), читаемым студентам направлений подготовки «Химия, физика и механика материалов» и «Прикладная математика и информатика» соответственно.

Оно содержит необходимый теоретический материал по некоторым избранным темам указанных разделов, а именно, по кинематике точки, статике на плоскости и основной задаче динамики.

Пособие имеет практическую направленность. Теоретические вопросы обсуждаются в связи с необходимостью решения конкретных задач по кинематике и динамике материальной точки и условиям равновесия абсолютно твердого тела на плоскости.

В пособии приведены образцы решения типовых задач по указанным темам, что должно облегчить обучаемым выполнение лабораторных работ и индивидуальных домашних заданий.

РАЗДЕЛ 1. КИНЕМАТИКА

Тема: Кинематика точки

Указания и образец выполнения **ИДЗ К1**

Постановка задачи. Точка M движется в плоскости Oxy. Закон движения точки задан зависимостями $x = x(t)$, $y = y(t)$ в сантиметрах (см), где t — время в секундах (с). Зависимость $x(t)$ дана в таблице К1.1, зависимость $y(t)$ дана в таблице К1.2.

Ваш вариант *определяется двумя цифрами. В ИДЗ К1 зависимость* $x = x(t)$ *выбирается из таблицы К1.1 по предпоследней цифре, а зависимость* $y = y(t)$ *— из таблицы К1.2 по последней цифре варианта в соответствии с примечаниями, сделанными в таблице К1.1.*

Например, числу 23 соответствует вариант 23. Это значит, что из второго столбца таблицы К1.1 выбирается условие $x(t) = 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$, *а из второго столбца таблицы К1.2 — условие* $y(t) = 9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 4$.

Варианту 32 соответствуют условия $x(t) = 4 - 2t$ *и* $y(t) = (2 + t)^2$.

Общее задание. Найти уравнение траектории и изобразить ее в подходящем масштабе. Определить скорость и ускорение точки как векторные величины в указанный момент времени и изобразить их на рисунке в подходящем масштабе. Найти касательное и нормальное ускорения графически и вычислить их значения. Определить радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Рисунок не должен быть мелким. Желательно расположить его на всей странице формата А4.

Таблица К1.1

Предпо-следняя цифра шифра	$x = x(t)$	Примечания
0	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	Здесь даны значения $x = f_1(t)$ для шифров, заканчивающихся числами от 00 до 29. Значения $y = f_2(t)$ для этих шифров берутся из столбца 2 таблицы К1.2
1	$2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	
2	$6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$	
3	$4 - 2t$	Здесь даны значения $x = f_1(t)$ для шифров, заканчивающихся числами от 30 до 69. Значения $y = f_2(t)$ для этих шифров берутся из столбца 3 таблицы К1.2
4	$2 - t$	
5	$2t$	
6	$t - 4$	
7	$8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	Здесь даны значения $x = f_1(t)$ для шифров, заканчивающихся числами от 70 до 99. Значения $y = f_2(t)$ для этих шифров берутся из столбца 4 таблицы К1.2
8	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	
9	$4 - 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	

Таблица К1.2

Последняя цифра шифра	$y = y(t)$		
	для шифров, заканчивающихся числами		
	от 00 до 29	от 30 до 69	от 70 до 99
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$
1	$-4-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$14-16\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$	$2t^3$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$2+2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$8-12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2-6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$
9	$3-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки при координатном способе задания ее движения.

Вначале определяем траекторию точки. Для этого исключим из заданных уравнений движения время *t* как параметр при параметрическом задании кривой на плоскости. Определяем положение точки *M* на траектории в указанный момент времени $t = 1$ с (для всех вариантов).

Дифференцируя по *t* зависимости $x(t)$ и $y(t)$, находим проекции векторов скорости и ускорения как функции времени *t*.

Вычисляя значения этих проекций при $t = 1$с, определяем векторы скорости $\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j}$ и ускорения $\overline{w} = w_x\overline{i} + w_y\overline{j}$ и находим их модули $v = |\overline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и $w = |\overline{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$.

Изображаем в подходящем масштабе векторы скорости и ускорения на рисунке как суммы составляющих $\overline{v} = \overline{v}_x + \overline{v}_y$, где $\overline{v}_x = v_x\overline{i}$, $\overline{v}_y = v_y\overline{j}$ и $\overline{w} = \overline{w}_x + \overline{w}_y$, где $\overline{w}_x = w_x\overline{i}$, $\overline{w}_y = w_y\overline{j}$.

Направим касательную ось $M_\tau \uparrow\uparrow \overline{v}$, а ось $M_n \perp M_\tau$ внутрь кривизны траектории. Разложим вектор ускорения $\overline{w}$ на касательную и нормальную составляющие: $\overline{w} = \overline{w}_\tau + \overline{w}_n$. Направление вектора касательного ускорения $\overline{w}_\tau$ уже позволит сделать вывод о том, является ли движение точки ускоренным в данный момент времени, или оно замедленное. Так, например, если $\overline{w}_\tau \uparrow\uparrow \overline{v}$, то движение точки ускоренное.

Далее вычисляем значения касательного и нормального ускорения в указанный момент времени по формулам:

$$w_\tau = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v},$$

где $v = |\overline{v}|$, $w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2}$.

Заметим, что значение w_τ — величина со знаком, который позволит еще раз убедиться в том, каким является движение в указанный момент времени: ускоренным или замедленным.

Радиус кривизны траектории в той ее точке, в которой находится движущаяся точка *M* в момент времени $t = 1$ с, находим по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}.$$

При оформлении своего ИДЗ весь текст, изложенный выше, приводить не нужно! Нужно указать номер своего варианта, выписать исходные данные и общее задание (см. выше).

Пример выполнения ИДЗ К1

Даны уравнения движения точки в плоскости *Oxy*:

$$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 1, \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 1, \qquad \text{(К1.1)}$$

где *x, y* — в см; *t* — в с.

1. Для определения траектории движения точки нужно исключить из уравнений движения (К1.1) время *t*.

Заметим, что из равенств (К1.1) следует, что

$$\frac{x+1}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right), \quad \frac{y-1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right). \qquad \text{(К1.2)}$$

Возводя в квадрат левые и правые части равенств (К1.2) и складывая их, находим уравнение траектории

$$\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с центром в точке $C(-1,1)$ и полуосями $a = 4$ и $b = 2$.

По формулам (К1.1) найдем координаты точки *M* в момент времени $t = 1$ с:

$$x_M = x(t=1) = 4\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1 \text{ см},$$

$$y_M = y(t=1) = 2\sin\frac{\pi}{3} + 1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \approx 2 \cdot 0{,}87 + 1 \approx 2{,}7 \text{ см}.$$

Изобразим траекторию на рисунке К1.1 и укажем положение точки *M* в момент времени $t = 1$ с.

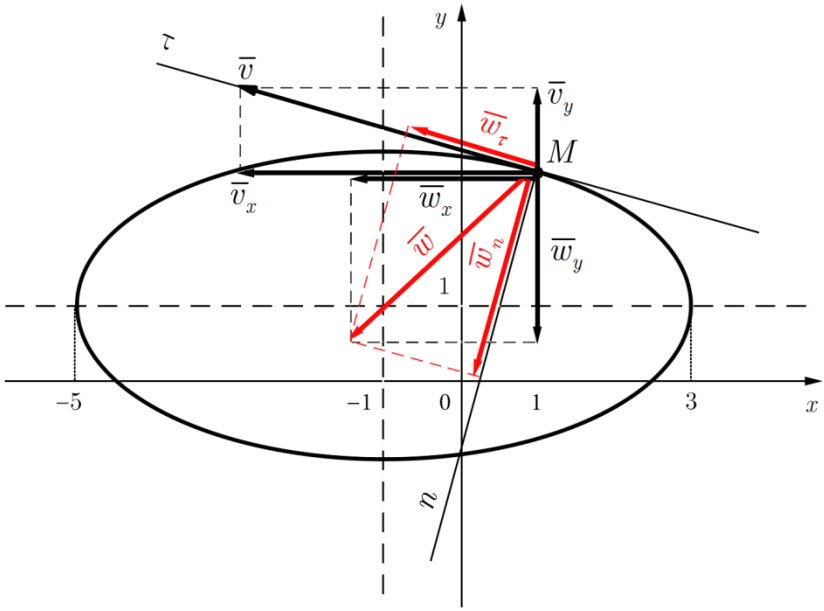


Рис. К1.1

Замечание. *Рисунок удобно сразу изображать на отдельном листе, который прилагается в конце работы. При построении эллипса, помимо координат его вершин* $(-5;1)$, $(3;1)$, $(-1;3)$ *и* $(-1;-1)$ *и координат точки* $M(1;\ 2{,}7)$, *можно дополнительно найти, например, координаты точек пересечения эллипса с осями координат.*

2. Вектор скорости точки *M* найдем по его проекциям на координатные оси. Дифференцируя по *t* зависимости $x(t)$ и $y(t)$ из (К1.1), найдем

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -4 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$
$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \qquad \text{(К1.3)}$$

для любого момента времени.

Обозначим $v_x = v_x(t=1)$, $v_y = v_y(t=1)$, $v = |\overline{v}(t=1)|$.

Найдем численные значения проекций вектора скорости при $t = 1$ с и его модуль:

$$v_x = -\frac{4}{3}\pi \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}\pi = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \approx -3{,}63 \text{ см/с},$$

$$v_y = \frac{2}{3}\pi \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\cdot 1}{3\cdot 2}\pi = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05 \text{ см/с},$$

$$v = |\overline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-3{,}63)^2 + 1{,}05^2} = \sqrt{14{,}28} \approx 3{,}78 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости в указанный момент времени

$$\overline{v} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} = -3{,}6\overline{i} + 1{,}1\overline{j}$$

найдем как сумму составляющих $\overline{v} = \overline{v}_x + \overline{v}_y$, где $\overline{v}_x = v_x\overline{i}$, $\overline{v}_y = v_y\overline{j}$.

Изображаем на рисунке К1.1 составляющие $\overline{v}_x = -3{,}6\overline{i}$ и $\overline{v}_y = 1{,}1\overline{j}$, и находим их геометрическую сумму.

Замечание. *Значения координат* v_x *и* v_y *округляем, векторы* $\overline{v}_x$ *и* $\overline{v}_y$ *отложены в масштабе* $\text{М}(1:1)$. *Убеждаемся, что вектор* $\overline{v}$ *касателен к траектории точки М.*

3. Вектор ускорения точки *М* найдем по его проекциям на оси координат. Дифференцируя по *t* зависимости проекций вектора скорости из (К1.3), находим

$$w_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -4\frac{\pi^2}{9}\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$
$$w_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -2\frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right). \qquad \text{(К1.4)}$$

Обозначим $w_x = w_x(t=1)$, $w_y = w_y(t=1)$, $w = |\overline{w}(t=1)|$. Найдем численные значения проекций вектора ускорения при $t = 1$ с и его модуль:

$$w_x = -\frac{4}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{4}{9\cdot 2}\pi^2 = -\frac{2}{9}\pi^2 \approx -2{,}19 \text{ см/с}^2,$$

$$w_y = -\frac{2}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{9\cdot 2}\pi^2 = -\frac{\sqrt{3}}{9}\pi^2 \approx -1{,}90 \text{ см/с}^2,$$

$$w = |\overline{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(-2{,}19)^2 + (-1{,}90)^2} = \sqrt{8{,}41} \approx 2{,}9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор ускорения в указанный момент времени (значения проекций округляем)

$$\overline{w} = w_x\overline{i} + w_y\overline{j} = -2{,}2\overline{i} - 1{,}9\overline{j}$$

найдем как сумму составляющих $\overline{w} = \overline{w}_x + \overline{w}_y$, где $\overline{w}_x = w_x\overline{i}$, а $\overline{w}_y = w_y\overline{j}$.

Изображаем на рисунке составляющие $\overline{w}_x = -2{,}2\overline{i}$ и $\overline{w}_y = -1{,}9\overline{j}$ в масштабе $\mathrm{M}(1:1)$ и находим их геометрическую сумму.

Замечание. *Хорошо видно, что линия действия вектора ускорения $\overline{w}$ проходит через центр эллипса.*

4. Векторы касательного $\overline{w}_\tau$ и нормального $\overline{w}_n$ ускорений можно показать сразу, не вычисляя их значений, путем разложения вектора полного ускорения $\overline{w}$ на касательную и нормальную составляющие

$$\overline{w} = \overline{w}_\tau + \overline{w}_n.$$

Для этого направим касательную ось $M_\tau \uparrow\uparrow \overline{v}$, а нормальную ось $M_n \perp M_\tau$ направим внутрь кривизны траектории.

Замечание. *Из рисунка хорошо видно, что вектор $\overline{w}_\tau \uparrow\uparrow \overline{v}$ и, следовательно, движение точки М ускоренное.*

5. Алгебраическое значение касательного ускорения в указанный момент времени найдем по формуле $w_\tau = \dfrac{v_x w_x + v_y w_y}{v}$,

где $v = |\overline{v}|$, т.к. $M_\tau \uparrow\uparrow \overline{v}$.

Тогда

$$w_\tau = \frac{-3{,}63\cdot(-2{,}19) + 1{,}05\cdot(-1{,}90)}{3{,}78} = \frac{7{,}95 - 2{,}00}{3{,}78} = \frac{5{,}95}{3{,}78} \approx 1{,}57 \approx 1{,}6 \text{ см/с}^2.$$

Замечаем, что $w_\tau > 0$, что еще раз указывает на то, что движение точки в указанный момент времени является ускоренным.

6. Нормальное ускорение точки *М* численно (по модулю) равно

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{2{,}9^2 - 1{,}57^2} = \sqrt{8{,}41 - 2{,}46} = \sqrt{5{,}95} \approx 2{,}44 \text{ см/с}^2.$$

7. Радиус кривизны траектории в той точке, где в момент времени $t = 1$ с оказалась точка *M*, найдем по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{14{,}28}{2{,}44} \approx 5{,}9 \text{ см}.$$

Ответ. Модули скорости и ускорений точки *M* в момент времени $t = 1$ с соответственно равны: $v = 3{,}8$ см/с, $w = 2{,}9$ см/с^2, $w_\tau = 1{,}6$ см/с^2, $w_n = 2{,}4$ см/с^2. Радиус кривизны $\rho = 5{,}9$ см.

Тема: Сложное движение точки

Указания и образец выполнения **ИДЗ К4**

Постановка задачи. Прямоугольная пластина (рис. К4.В0–К4.В4) или круглая пластина радиуса $R = 60$ см (рис. К4.В5–К4.В9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = \varphi(t)$ (рад.), заданному в таблице К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках.

На рисунках К4.В0, К4.В1, К4.В2, К4.В5, К4.В6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в плоскости рисунка); на рисунках К4.В3, К4.В4, К4.В7, К4.В8, К4.В9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины и пластина вращается в пространстве.

По пластине вдоль прямой BD (рис. К4.В0–К4.В4) или по окружности радиуса R (рис. К4.В5–К4.В9) движется точка M. Закон ее относительного движения задан зависимостью $s = AM = s(t)$ (s — в см, t — в секундах) в таблице К4 *отдельно* для рис. К4.В0–К4.В4 и для рис. К4.В5–К4.В9. В этой же таблице заданы размеры a для рис. К4.В0–К4.В4 и размеры h для рис. К4.В5–К4.В9.

Заметим, что на всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$, где AM — длина отрезка или длина дуги AM.

Если в интересующий нас момент времени $t = t_1$ окажется, что $s_1 = s(t = t_1) < 0$, то это будет означать, что точка M находится по другую сторону от точки A. Будем обозначать положение точки M в момент времени $t = t_1$ буквой M_1.

Общее задание. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Ваш вариант. *Номер рисунка — последняя цифра Вашего варианта, номер условия в таблице К4 — предпоследняя цифра. Например, варианту 23 соответствует рисунок К4.В3 и условие 2 в таблице К4.*

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. К4.В0–К4.В4		Для рис. К4.В5–К4.В9	
		a, см	$s = AM = f_2(t)$	h	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^3 - t^4) - 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^4 - 3t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{3}{4}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

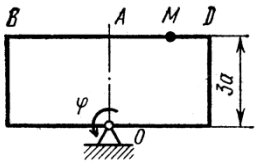


Рис. К4.В0

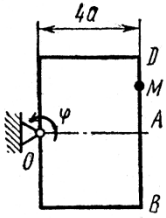


Рис. К4.В1

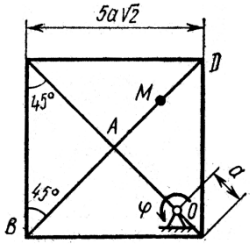


Рис. К4.В2

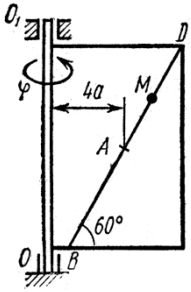


Рис. К4.В3

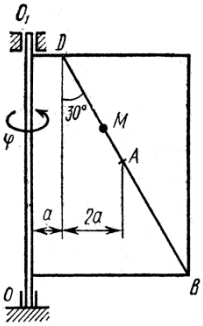


Рис. К4.В4

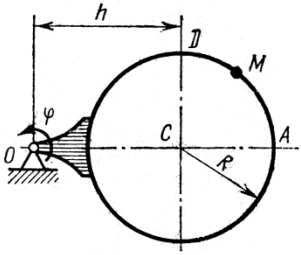


Рис. К4.В5

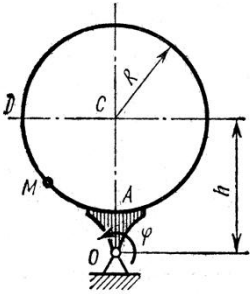


Рис. К4.В6

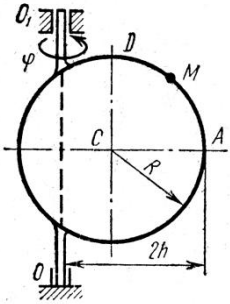


Рис. К4.В7

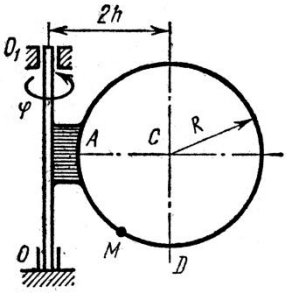


Рис. К4.В8

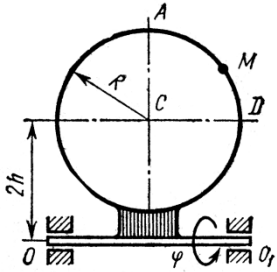


Рис. К4.В9

Указания. Задача К4 посвящена кинематическому анализу сложного движения точки в случае, когда переносное движение является вращательным. В данной задаче движение точки по пластине является относительным, а вращательное движение самой пластины — переносным.

Для определения абсолютной скорости и абсолютного ускорения следует воспользоваться теоремами о сложении скоростей и сложении ускорений. Прежде всего необходимо по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1$ с и изобразить ее *именно в этом положении*, обозначив M_1.

В вариантах с рис. К4.В5–К4.В9 не подставлять численное значение *R* в зависимость $s(t)$ длины дуги AM от времени, пока не будет определено значение $s_1 = s(t = t_1)$ и центральный угол $\angle ACM_1$, соответствующий дуге $AM_1 = s_1$.

Замечание. Варианты заданий К4 содержат два типа задач.

Задачи, в которых пластина вращается в своей плоскости (рис. К4.В0, К4.В1, К4.В2, К4.В5, К4.В6), назовем *плоскими*. В этом случае все составляющие векторов абсолютной скорости $\overline{v}_a$ и абсолютного ускорения $\overline{w}_a$ будут находиться в плоскости рисунка.

Задачи, в которых пластина вращается в пространстве (рис. К4.В3, К4.В4, К4.В7, К4.В8, К4.В9), назовем *пространственными*. В этих вариантах также можно ограничиться плоским рисунком, удачно, наглядно изобразив ту ось местной (локальной), связанной с точкой M_1, системы координат M_1xyz, которая направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Изображая эту ось, следует подписать направление, «на нас» или «от нас» (см. далее рис. К4.2 и К4.3).

Приведем два примера решения задачи.

Пример 1. Круглая пластина радиуса R (рис. К4.1) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi = \varphi(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке К4.1).

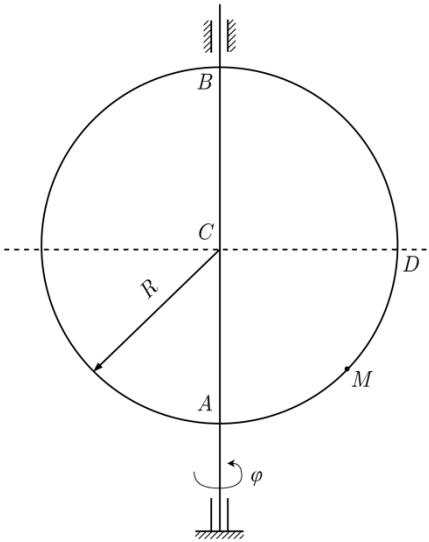


Рис. К4.1

По дуге ADB движется точка M по закону $s = AM = s(t)$. Положительное направление отсчета расстояния s показано на рис. К4.1.

Дано: $R = 60$ см, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$ рад, $s = \dfrac{\pi R}{6}(7t - 2t^2)$ см.

Определить v_a и w_a в момент времени $t = 1$ с, где $v_a = |\overline{v}_a|$, $w_a = |\overline{w}_a|$.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным (дуга *AB* — суть относительная траектория $tr_{отн}$), а вращение пластины — переносным движением.

Тогда абсолютная скорость $\overline{v}_a$ и абсолютное ускорение $\overline{w}_a$ найдутся по формулам

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер},$$

$$\overline{w}_a = \overline{w}_{отн} + \overline{w}_{пер} + \overline{w}_{кор}.$$

Так как относительное движение точки M является вращательным вдоль дуги AB относительной траектории $tr_{отн}$, а переносное — вращательным вокруг оси вращения AB, то

$$\overline{w}_{отн} = \overline{w}^{\tau}_{отн} + \overline{w}^{n}_{отн} \quad \text{и} \quad \overline{w}_{пер} = \overline{w}^{\tau}_{пер} + \overline{w}^{n}_{пер}.$$

Таким образом, абсолютное ускорение найдется как геометрическая сумма пяти векторов:

$$\overline{w}_a = \overline{w}^{\tau}_{отн} + \overline{w}^{n}_{отн} + \overline{w}^{\tau}_{пер} + \overline{w}^{n}_{пер} + \overline{w}_{кор}, \qquad (К4.1)$$

где $\overline{w}_{кор}$ — кориолисово ускорение.

1. *Относительное движение*

Это движение происходит по закону $s(t) = AM = \dfrac{\pi R}{6}(7t - 2t^2)$.

Установим, где будет находиться точка M на дуге ADB относительной траектории $tr_{отн}$.

Вычислим значение $s_1 = s(t = 1) = \dfrac{5}{6}\pi R$ см.

Тогда $\angle ACM_1 = \dfrac{s_1}{R} = \dfrac{5}{6}\pi = 150°$, откуда $\angle BCM_1 = 30°$.

Изобразим на рисунке К4.1 точку M в положении, соответствующем моменту времени $t = 1$ с и обозначим ее M_1.

Заметим, что рис. К4.1 носит предварительный характер (это было дано). Его можно не приводить в отчете, сразу подготавливая окончательный рисунок на отдельном листе (см. далее рис. К4.2 или К4.3).

Найдем функциональные зависимости от времени проекций относительной скорости $v^{\tau}_{отн}$ и проекций $w^{\tau}_{отн}$ и $w^{n}_{отн}$ составляющих $\overline{w}^{\tau}_{отн}$ и $\overline{w}^{n}_{отн}$ относительного ускорения $\overline{w}_{отн}$.

Дифференцируя по времени зависимость $s(t)$, получим

$$v^{\tau}_{отн}(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{6}(7 - 4t),$$

$$w^{\tau}_{отн}(t) = \frac{dv^{\tau}_{отн}}{dt} = -\frac{2}{3}\pi R, \qquad (К4.2)$$

$$w^{n}_{отн}(t) = \frac{(v^{\tau}_{отн})^2}{\rho_{отн}} = \frac{v^2_{отн}}{R},$$

где обозначено $v_{отн} = |\overline{v}_{отн}| = |v^{\tau}_{отн}|$, а радиус кривизны относительной траектории $\rho_{отн} = R$.

Для момента времени $t = 1$ с (алгебраические) значения проекций (К4.2) равны

$$v^{\tau}_{отн} = v^{\tau}_{отн}(t=1) = \frac{3\pi \cdot 60}{6} = 30\pi \text{ см/с},$$

$$w^{\tau}_{отн} = w^{\tau}_{отн}(t=1) = -\frac{2\pi \cdot 60}{3} = -40\pi \text{ см/с}^2, \qquad (К4.3)$$

$$w^{n}_{отн} = \frac{900\pi^2}{60} = 15\pi^2 \text{ см/с}^2.$$

Знаки проекций в (К4.3) показывают, что вектор $\overline{v}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s по касательной к $tr_{отн}$, а вектор $\overline{w}^{\tau}_{отн}$ — в противоположную сторону.

Т.к. $\overline{v}_{отн} \uparrow\downarrow \overline{w}^{\tau}_{отн}$, то можно сделать вывод о том, что относительное движение замедленное. Вектор $\overline{w}^{n}_{отн}$ направлен к центру кривизны $tr_{отн}$, т.е. к центру окружности C, причем $\overline{w}^{n}_{отн} \perp \overline{w}^{\tau}_{отн}$.

Изобразим все эти векторы на рисунке (см. рис. К4.2, К4.3) *разным цветом*.

2. *Переносное движение*

Это вращательное движение происходит по закону $\varphi(t) = 2t^3 - 4t^2$ (рад). Найдем зависимости от времени угловой скорости и углового ускорения переносного движения (вращения пластинки). Дифференцируя по времени, получим

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = 6t^2 - 8t,$$

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = 12t - 8.$$

Вычислим (алгебраические) значения проекций векторов угловой скорости и углового ускорения на ось вращения в момент времени $t = 1$ с.

Найдем

$$\omega = \omega(t=1) = 6 - 8 = -2 \text{ (1/с)},$$

$$\varepsilon = \varepsilon(t=1) = 12 - 8 = 4 \text{ (1/с}^2\text{)}. \qquad (К4.4)$$

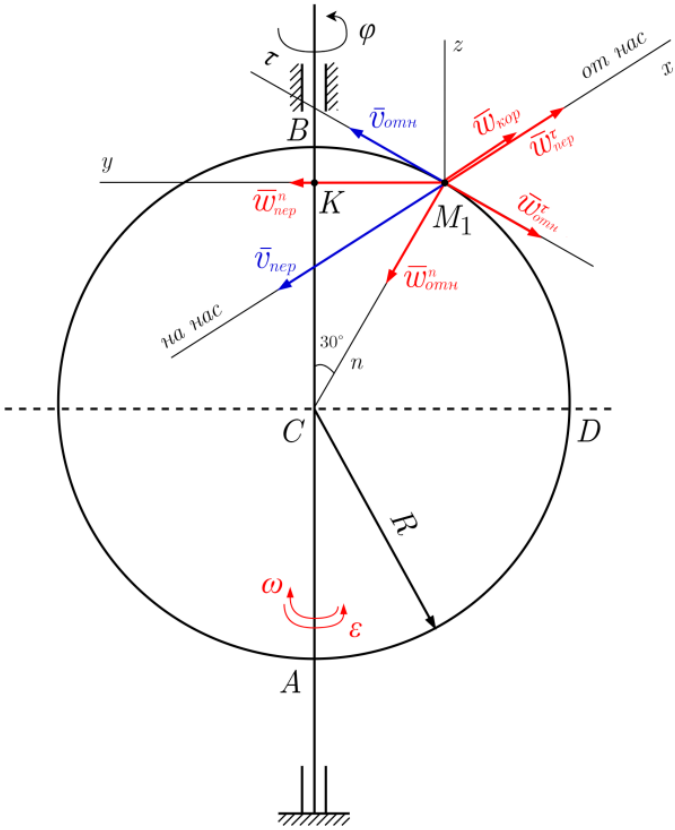


Рис. К4.2

Замечание. *В данной задаче мы обозначили буквой* $\omega = пр_{AB}\overline{\omega}$, *а буквой* $\varepsilon = пр_{AB}\overline{\varepsilon}$.

Сами векторы угловой скорости $\overline{\omega}$ *и углового ускорения* $\overline{\varepsilon}$ *на оси вращения можно не показывать. Знак величины* ω $(\omega < 0)$ *говорит о том, что вращение пластины в момент времени* $t = 1$ с *происходит в сторону, противоположную положительному отсчету угла* φ. *Это отмечено на рис. К4.2 или К4.3 дуговой стрелкой.*

Знак величины ε $(\varepsilon > 0)$ *противоположен знаку величины* ω. *Это говорит о том, что вращение пластинки замедленное и отмечено на рис. К4.2 или К4.3 соответствующей дуговой стрелкой.*

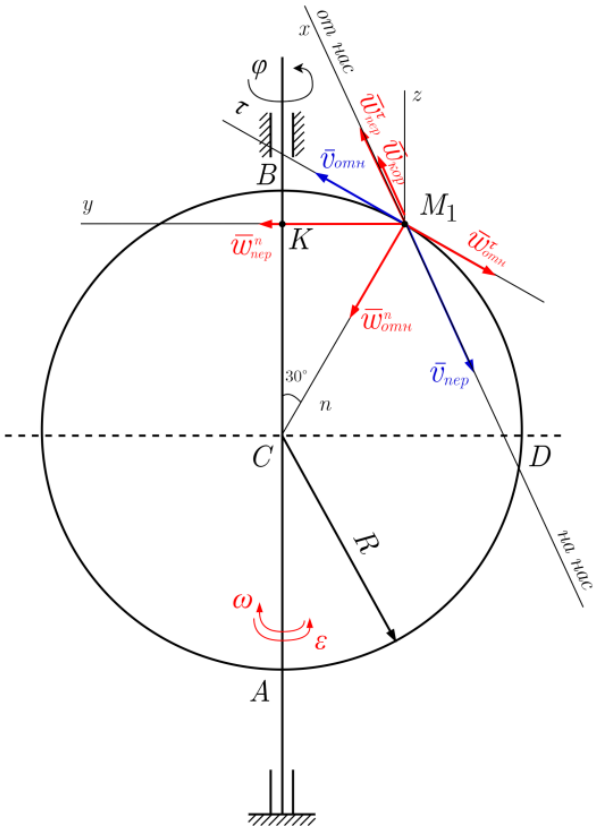


Рис. К4.3

Нам понадобятся модули векторов угловой скорости $\overline{\omega}$ *и углового ускорения* $\overline{\varepsilon}$. *Очевидно, они совпадают с модулями соответствующих значений проекций, и следует писать* $|\overline{\omega}| = |\omega|, |\overline{\varepsilon}| = |\varepsilon|$.

Значения проекций угловой скорости и углового ускорения позволяют сразу показать направления векторов переносной скорости $\overline{v}_{пер}$ и составляющих переносного ускорения $\overline{w}^{\tau}_{пер}$ и $\overline{w}^{n}_{пер}$.

Так как переносное движение вращательное, то в своем переносном движении точка M движется по переносной траектории $tr_{пер}$, которая является окружностью радиуса $R_{пер} = M_1K$, где M_1K — расстояние от точки M_1 до оси вращения AB.

Вектор $\overline{v}_{пер}$ будет направлен по касательной к $tr_{пер}$ так, что $\overline{v}_{пер} \perp M_1K$ («на нас»), а вектор $\overline{w}^{\tau}_{пер}$ — в противоположную сторону, т.е. вектор $\overline{w}^{\tau}_{пер} \perp M_1K$ («от нас»).

Ясно, что направления векторов $\overline{v}_{пер}$ и $\overline{w}^{\tau}_{пер}$ согласованы с направлениями $\omega \circlearrowright$ и $\varepsilon \circlearrowleft$. Вектор $\overline{w}^{n}_{пер} \perp \overline{w}^{\tau}_{пер}$ и направлен к оси вращения вдоль отрезка M_1K (см. рис. К4.2 или К4.3).

Найдем из ΔCM_1K, что $M_1K = R_{пер} = R\sin 30° = 60 \cdot \dfrac{1}{2} = 30$ см.

Тогда в момент времени $t = 1$ с, с учетом значений (К4.4), найдем модуль вектора переносной скорости

$$v_{пер} = \left|\overline{v}_{пер}\right| = |\omega| \cdot R_{пер} = |-2| \cdot 30 = 60 \text{ см/с}$$

и значения проекций касательного $\overline{w}^{\tau}_{пер}$ и нормального $\overline{w}^{n}_{пер}$ переносных ускорений:

$$w^{\tau}_{пер} = \varepsilon R_{пер} = 4 \cdot 30 = 120 \text{ см/с}^2,$$

$$w^{n}_{пер} = \omega^2 R_{пер} = (-2)^2 \cdot 30 = 4 \cdot 30 = 120 \text{ см/с}^2.$$

Заметим, что $w^{\tau}_{пер}$ *— в общем случае величина со знаком и* $\left|\overline{w}^{\tau}_{пер}\right| = \left|w^{\tau}_{пер}\right|$, *в то время как* $\left|\overline{w}^{n}_{пер}\right| = w^{n}_{пер}$, *т.к. значение* $w^{n}_{пер} \geq 0$ *для любого* t.

3. *Кориолисово ускорение*

По определению, вектор кориолисова ускорения находится по формуле

$$\overline{w}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{v}_{отн}).$$

Направление вектора $\overline{w}_{кор}$ находим по правилу Жуковского:

$$\overline{w}_{кор} \perp \overline{v}_{отн}$$

и $\overline{w}_{кор}$ перпендикулярен оси вращения. Правило позволяет не изображать на рисунке вектор угловой скорости.

Так как угол между вектором $\overline{v}_{отн}$ и осью вращения равен 60°, то по модулю

$$w_{кор} = \left|\overline{w}_{кор}\right| = 2|\overline{\omega}|\left|\overline{v}_{отн}\right|\sin 60^\circ = 2|\omega|\left|v^{\tau}_{отн}\right|\sin 60^\circ =$$

$$= 2|-2|\cdot 30\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}\pi \text{ см/с}^2.$$

4. *Определение модуля абсолютной скорости v_a и модуля абсолютного ускорения w_a*

Направим оси местной системы координат M_1xyz как на рисунке К4.2 или на рисунке К4.3. На обоих рисунках ось M_1x перпендикулярна плоскости пластины и направлена «от нас».

Ось $M_1y \perp M_1x$ и лежит в плоскости пластины (в плоскости рисунка). Ось $M_1z \perp M_1x$ и $M_1z \perp M_1y$. Оба рисунка правильные, выбор за вами.

Заметим, направление осей местной системы координат M_1xyz может быть и другим. Например, ось M_1x можно считать направленной «на нас». В этом случае $пр_{M_1x}\overline{w}^{\tau}_{пер}$ и $пр_{M_1y}\overline{w}_{кор}$ будут отрицательными (что не отражается на результате).

Вместо системы координат M_1xyz можно проектировать все векторы геометрической суммы $\overline{w}_a = \overline{w}^{\tau}_{отн} + \overline{w}^{n}_{отн} + \overline{w}^{\tau}_{пер} + \overline{w}^{n}_{пер} + \overline{w}_{кор}$ на оси трехгранника $M_1\tau nb$.

Так как $\overline{v}_a = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер}$, а вектор $\overline{v}_{отн} \perp \overline{v}_{пер}$, то в момент времени $t = 1$ с

$$v_a = \sqrt{v^2_{отн} + v^2_{пер}} = \sqrt{(30\pi)^2 + 60^2} = 30\sqrt{\pi^2 + 4} = 111{,}73 \text{ см/с}.$$

Модуль абсолютного ускорения найдем, проектируя векторное равенство (К4.1) на оси локальной декартовой системы координат M_1xyz (см. рис. К4.2 или К4.3).

Получим

$$w_{a_x} = w^{\tau}_{пер} + w_{кор} = 120 + 60\sqrt{3}\pi = 60(2 + \sqrt{3}\pi) = 446{,}48$$

$$w_{a_y} = w^n_{пер} + w^n_{отн}\sin 30° - \left|w^\tau_{отн}\right|\cos 30° = 120 + 15\pi^2 \cdot \frac{1}{2} - |-40\pi| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 120 + 7{,}5\pi^2 - 20\pi\sqrt{3} = 85{,}19\ ,$$

$$w_{a_z} = -w^n_{отн}\cos 30° - \left|w^\tau_{отн}\right|\sin 30° = -15\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - |-40\pi| \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= -7{,}5\pi^2\sqrt{3} - 20\pi = -191{,}04,$$

Находим

$$w_a = \sqrt{w^2_{a_x} + w^2_{a_y} + w^2_{a_z}} = \sqrt{446{,}48^2 + 85{,}19^2 + (-191{,}04)^2} = 493{,}05 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $v_a = 111{,}73$ см/с, $w_a = 493{,}05$ см/с^2.

Пример 2. Рассмотрим вариант, в котором участвует рисунок К4.В6. Пусть по условию $h = R$. Эта информация содержится в таблице К4.

Рисунок надо *сразу изобразить с учетом того, что* $h = R$. Он будет выглядеть так, как показано ниже.

Из общего текста по постановке задачи берем следующие слова.

Круглая пластина радиуса $R = 60$ см вращается по закону $\varphi(t) = t^2 - t^3$ (рад). Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке К4.4. Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O, *(т.е пластина вращается в своей плоскости или плоскости рисунка)*.

По пластине по окружности радиуса R движется точка M. Закон ее относительного движения $s = s(t) = \frac{\pi}{3}R(t - 3t^2)$ см.

На всех рисунках точка M *показана в положении, при котором* $s = AM > 0$ *(при* $s < 0$ *точка* M *находится по другую сторону от точки* A*)*.

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t = 1$с.

Читаем указания. Следует по условиям задачи определить, где находится точка на пластине в момент времени $t = 1$с, и изобразить ее *именно в этом положении*.

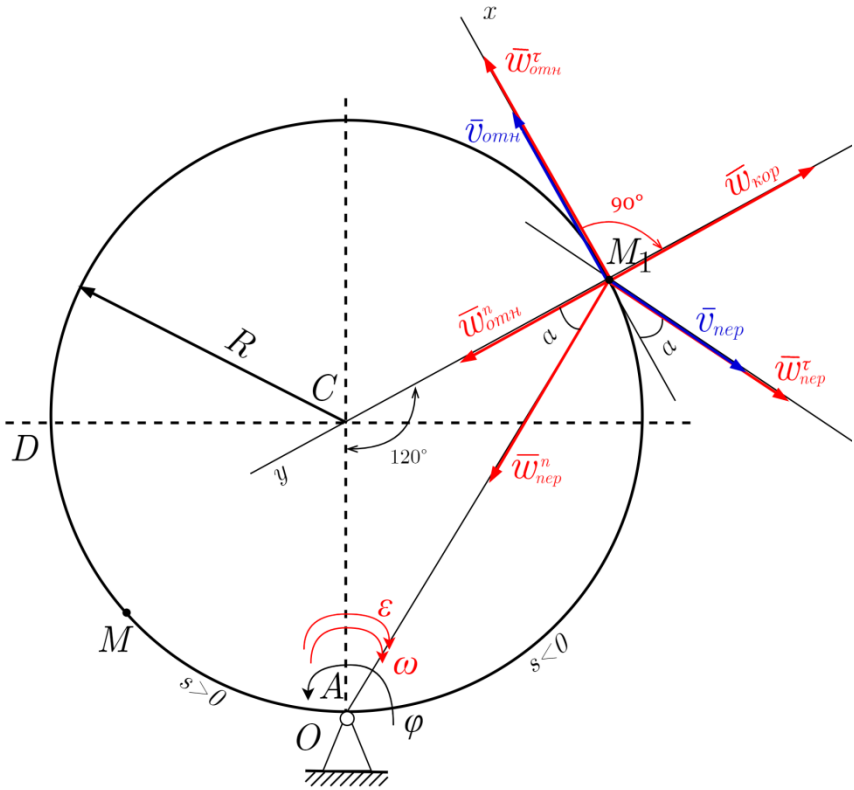


Рис. К4.4

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге AM относительным, а вращение пластинки — переносным движением.

Тогда абсолютная скорость $\overline{v}_a$ найдется по формуле

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер}, \qquad (К4.5)$$

а абсолютное ускорение

$$\overline{w}_a = \overline{w}_{отн} + \overline{w}_{пер} + \overline{w}_{кор},$$

где, в свою очередь,

$$\overline{w}_{отн} = \overline{w}^{\tau}_{отн} + \overline{w}^{n}_{отн},$$

так как относительное движение — криволинейное, и

$$\overline{w}_{пер} = \overline{w}^{\tau}_{пер} + \overline{w}^{n}_{пер},$$

так как переносное движение — вращательное.

Итак, в общем случае

$$\overline{w}_a = \overline{w}^{\tau}_{отн} + \overline{w}^{n}_{отн} + \overline{w}^{\tau}_{пер} + \overline{w}^{n}_{пер} + \overline{w}_{кор}. \qquad (К4.6)$$

Определим кинематические характеристики относительного и переносного движений.

1. *Относительное движение*

Установим, где на дуге AD будет находиться точка M в момент времени $t = 1$ с.

Полагая в уравнении $s = s(t)$: $t = 1$ с, получим

$$s_1 = s(t=1) = \frac{\pi}{3} R(1 - 3 \cdot 1^2) = -\frac{2\pi}{3} R < 0 \text{ см.}$$

Так как $s_1 < 0$, то точка M находится на дуге окружности AM по другую сторону от точки A (см. рис. К4.4). Обозначим ее M_1.

Внутренний центральный угол, соответствующий дуге AM_1, найдем по формуле

$$\angle ACM_1 = \frac{|s_1|}{R} = \frac{2\pi R}{3R} = \frac{2\pi}{3},$$

где $|s_1|$ — длина дуги AM_1 в сантиметрах.

Таким образом, $\angle ACM_1 = 120°$.

Изобразим на рисунке К4.4 точку в положении, определяемом этим углом, и обозначим ее M_1.

Найдем зависимости от времени проекций относительной скорости $v^{\tau}_{отн}$ и проекций $w^{\tau}_{отн}$ и $w^{n}_{отн}$ составляющих $\overline{w}^{\tau}_{отн}$ и $\overline{w}^{n}_{отн}$ относительного ускорения $\overline{w}_{отн}$:

$$v^{\tau}_{отн}(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{3} R(1 - 6t),$$

$$w^{\tau}_{отн}(t) = \frac{dv_{отн}}{dt} = \frac{\pi}{3} R(-6) = -2\pi R,$$

$$w^{n}_{отн}(t) = \frac{v^2_{отн}(t)}{\rho_{отн}},$$

где $\rho_{отн}$ — радиус кривизны относительной траектории $tr_{отн}$. В нашем случае $\rho_{отн} = R$.

Для момента времени $t = 1$с алгебраические значения проекций равны соответственно

$$v^{\tau}_{отн} = v_{отн}(t=1) = \frac{\pi}{3}R(1-6) = -\frac{5}{3}\pi R,$$

$$w^{\tau}_{отн} = w^{\tau}_{отн}(t=1) = -2\pi R,$$

$$w^{n}_{отн} = \frac{v^2_{отн}(t=1)}{\rho_{отн}} = \frac{25}{9}\pi^2\frac{R^2}{R} = \frac{25}{9}\pi^2 R.$$

Результаты можно пока не вычислять приближенно, все вычисления будут в конце решения.

Отрицательные знаки величин $v^{\tau}_{отн}$ и $w^{\tau}_{отн}$ показывают, что векторы $\overline{v}^{\tau}_{отн}$ и $\overline{w}^{\tau}_{отн}$ направлены в сторону отрицательного отсчета длины дуги s по касательной к $tr_{отн}$.

Так как $\overline{v}_{отн} \uparrow\uparrow \overline{w}^{\tau}_{отн}$, то можно сделать вывод о том, что относительное движение ускоренное. Вектор относительного нормального ускорения $\overline{w}^{n}_{отн}$ направлен к центру кривизны $tr_{отн}$, в нашем случае — к центру окружности C, причем $\overline{w}^{n}_{отн} \perp \overline{w}^{\tau}_{отн}$.

Изобразим все эти векторы на рисунке (см. рисунок К4.4) разным цветом.

2. *Переносное движение*

Это вращательное движение по условию происходит по закону $\varphi(t) = t^2 - t^3$ (рад).

Найдем зависимости от времени угловой скорости и углового ускорения переносного движения (вращения пластинки).

Дифференцируя по времени, получим

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = 2t - 3t^2,$$

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = 2 - 6t.$$

Вычислим алгебраические значения проекций векторов угловой скорости и углового ускорения на ось вращения в момент времени $t = 1$ с.

Найдем

$$\omega = \omega(t = 1) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = -1 \text{ (1/с)},$$

$$\varepsilon = \varepsilon(t = 1) = 2 - 6 \cdot 1 = -4 \text{ (1/с}^2\text{)}.$$

Знаки величин ω и ε показывают, что пластинка вращается в сторону, противоположную положительному отсчету угла поворота φ, то есть по часовой стрелке, причем вращение пластинки ускоренное. Это позволяет сразу показать направления векторов $\overline{v}_{пер}$, $\overline{w}^{\tau}_{пер}$, $\overline{w}^{n}_{пер}$.

Так как переносное движение — вращательное, то в своем переносном движении точка M движется по переносной траектории, которая является окружностью радиуса $AM_1 = OM_1$. Векторы $\overline{v}_{пер}$ и $\overline{w}^{\tau}_{пер}$ будут направлены по касательной к $tr_{пер}$, и, следовательно, $\overline{v}_{пер} \perp AM_1$, $\overline{w}^{\tau}_{пер} \perp AM_1$, причем $\overline{v}_{пер} \uparrow\uparrow \overline{w}^{\tau}_{пер}$ и направлены в соответствии с ω и ε (см. рисунок К4.4).

Вектор $\overline{w}^{n}_{пер} \perp \overline{w}^{\tau}_{пер}$ и направлен к оси вращения, то есть, к точке O.

Обозначим модуль вектора переносной скорости $v_{пер}$. Тогда

$$v_{пер} = \left|\overline{v}_{пер}\right| = |\omega| \cdot h.$$

Значения проекций

$$w^{\tau}_{пер} = \varepsilon \cdot h,$$

$$w^{n}_{пер} = \omega^2 \cdot h.$$

Величину радиуса переносной траектории $tr_{пер}$ мы обозначили в этом варианте h. Величину $h = OM_1$ можно найти из ΔOCM_1.

Заметим еще раз, что в нашем примере точки O и A совпадают!

По теореме косинусов имеем

$$(OM_1)^2 = (OC)^2 + (CM_1)^2 - 2 \cdot OC \cdot CM_1 \cos 120^\circ,$$

или

$$h^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2R^2 + R^2 = 3R^2,$$

откуда

$$h = \sqrt{3}R.$$

Итак,

$$v_{пер} = |-1| \cdot \sqrt{3}R = \sqrt{3}R \text{ см/с},$$

$$w_{пер}^{\tau} = (-4) \cdot \sqrt{3}R = -4\sqrt{3}R \text{ см/с}^2,$$

$$w_{пер}^{n} = (-1)^2 \cdot \sqrt{3}R = \sqrt{3}R \text{ см/с}^2.$$

Приближенные вычисления — в самом конце решения!

3. *Кориолисово ускорение*

По определению

$$\overline{w}_{кор} = 2(\overline{\omega} \times \overline{v}_{отн}).$$

Направление вектора $\overline{w}_{кор}$ мы находим по правилу Жуковского: $\overline{w}_{кор} \perp \overline{v}_{отн}$ и вектор $\overline{w}_{кор}$ перпендикулярен оси вращения. Это позволяет не изображать на рисунке вектор угловой скорости.

Так как угол между вектором $\overline{v}_{отн}$ и осью вращения равен 90° (*так будет во всех плоских задачах! Подумайте, — почему!*), то по модулю

$$w_{кор} = \left|\overline{w}_{кор}\right| = 2|\overline{\omega}|\left|\overline{v}_{отн}^{\tau}\right| \sin 90^\circ = 2|\omega|\left|v_{отн}^{\tau}\right| = 2|-1|\left|-\frac{5}{3}\pi R\right| = \frac{10}{3}\pi R \text{ см/с}.$$

4. *Определение модуля абсолютной скорости v_a и модуля абсолютного ускорения w_a*

Так как

$$\overline{v}_a = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер},$$

то $v_a = \left|\overline{v}_a\right|$ можно найти по теореме косинусов, заметив, что $\angle\left(\overline{v}_{отн}, \overline{v}_{пер}\right) = 120^\circ$.

Однако это проще сделать методом проекций.

Выберем любую локальную (связанную с точкой M_1) декартову систему координат. Можно использовать оси естественного трехгранника или, например, направить ось $M_1x \uparrow\uparrow \overline{w}^{\tau}_{отн}$, а ось $M_1y \uparrow\uparrow \overline{w}^{n}_{отн}$.

Удобно так выбрать оси местной (локальной) системы координат, чтобы как можно большее количество векторов лежало на этих осях).

На рисунке отмечен угол α, который очевидно равен 30°.

Проектируя векторное равенство $\overline{v}_a = \overline{v}_{отн} + \overline{v}_{пер}$ на оси системы координат M_1xy, находим

$$v_{a_x} = \left|v^{\tau}_{отн}\right| - v_{пер}\cos 30^\circ = \frac{5}{3}\pi R - \sqrt{3}R\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{3}{2}\right)R =$$

$$= \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{3}{2}\right)\cdot 60 = 224{,}16,$$

$$v_{a_y} = -v_{пер}\sin 30^\circ = -\sqrt{3}R\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}R = -\frac{\sqrt{3}}{2}60 = -51{,}96.$$

Тогда

$$v_a = \sqrt{v^2_{a_x} + v^2_{a_y}} = \sqrt{224{,}16^2 + (-51{,}96)^2} = 230{,}1 \text{ см/с}.$$

Проектируя векторное равенство

$$\overline{w}_a = \overline{w}^{\tau}_{отн} + \overline{w}^{n}_{отн} + \overline{w}^{\tau}_{пер} + \overline{w}^{n}_{пер} + \overline{w}_{кор}$$

на те же оси, находим

$$w_{a_x} = \left|w^{\tau}_{отн}\right| - \left|w^{\tau}_{пер}\right|\cos 30^\circ - w^{n}_{пер}\sin 30^\circ =$$

$$= \left|-2\pi R\right| - \left|-4\sqrt{3}R\right|\cos 30^\circ - \sqrt{3}R\sin 30^\circ = \left(2\pi - 4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\frac{1}{2}\right)R =$$

$$= \left(2\pi - 6 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)60 = -34{,}97 \text{ см/с}^2.$$

$$w_{a_y} = w^n_{отн} + w^n_{пер}\cos 30^\circ - \left|w^\tau_{пер}\right|\sin 30^\circ - w_{кор} =$$

$$= \frac{25}{9}\pi^2 R + \sqrt{3}R\cos 30^\circ - \left|-4\sqrt{3}R\right|\sin 30^\circ - \frac{10}{3}\pi R =$$

$$= \left(\frac{25}{9}\pi^2 + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3}\,\frac{1}{2} - \frac{10}{3}\pi\right)R =$$

$$= \left(\frac{25}{9}\pi^2 + \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{10}{3}\pi\right)60 = 1314{,}46\,.$$

Окончательно

$$w_a = \sqrt{w^2_{a_x} + w^2_{a_y}} = \sqrt{(-34{,}97)^2 + 1314{,}46^2} = 1314{,}93\,\text{см/с}^2.$$

РАЗДЕЛ 2. СТАТИКА

Тема: Равновесие на плоскости

Указания и образец выполнения **ИДЗ С1**.

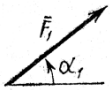
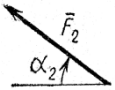
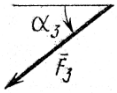
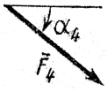
Постановка задачи. Жесткая рама (см. рис. С1.В0–С1.В9, табл. С1) закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена к шарнирной опоре на катках (далее — каток) или прикреплена к невесомому стержню с шарнирами на концах (*каждому писать свое!*).

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок (без трения) и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действует пара сил с моментом $M = 60$ кН·м и две силы, величины которых, направления и точки приложения указаны в таблице С1.

Заметим, что во всех вариантах дан угол между вектором силы и горизонталью, а направление вектора силы мы видим в таблице С1.

Задание. Определить реакции связей в точках A и B. Принять $a = 0{,}5$ м.

Таблица С1

Силы								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°
0	*H*	30	—	—	—	—	*K*	60
1	—	—	*D*	15	*E*	60	—	—
2	*K*	75	—	—	—	—	*E*	30
3	—	—	*K*	60	*H*	30	—	—
4	*D*	30	—	—	—	—	*E*	60
5	—	—	*H*	30	—	—	*D*	75
6	*E*	60	—	—	*K*	15	—	—
7	—	—	*D*	60	—	—	*H*	15
8	*H*	60	—	—	*D*	30	—	—
9	—	—	*E*	75	*K*	30	—	—

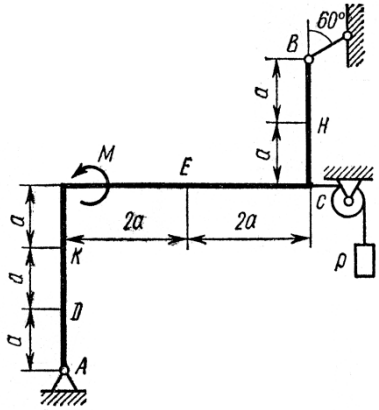


Рис. С1.В0

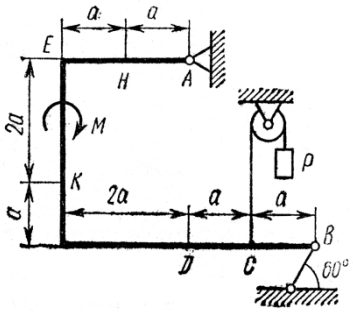


Рис. С1.В1

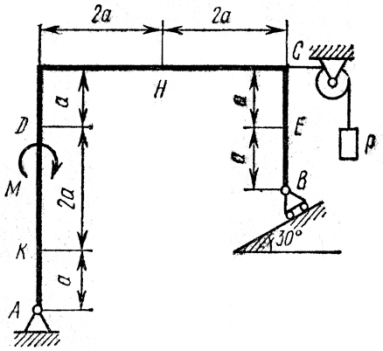


Рис. С1.В2

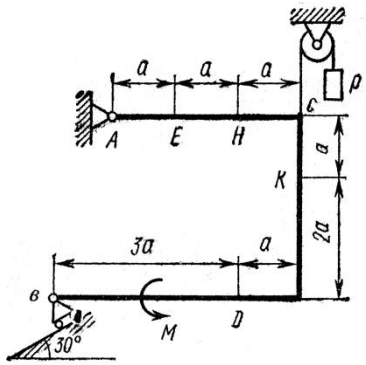


Рис. С1.В3

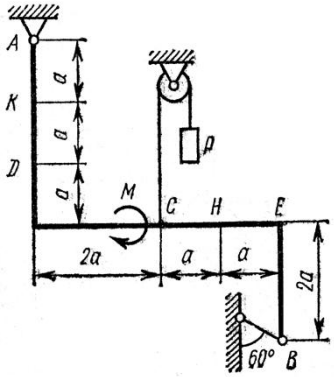


Рис. С1.В4

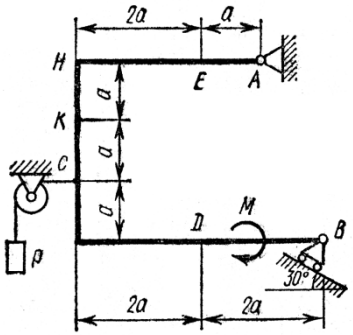


Рис. С1.В5

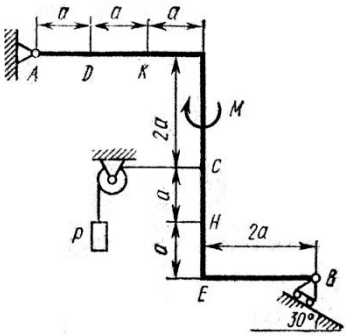


Рис. С1.В6

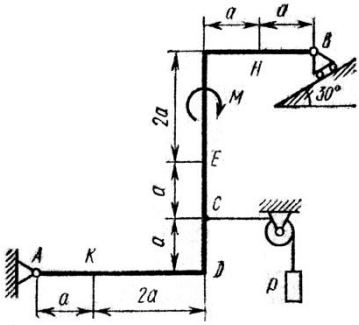


Рис. С1.В7

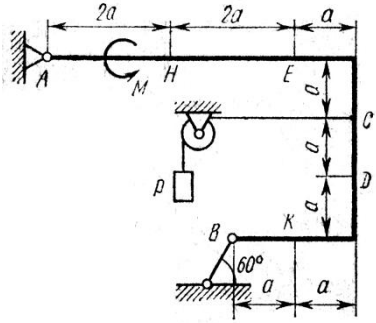


Рис. С1.В8

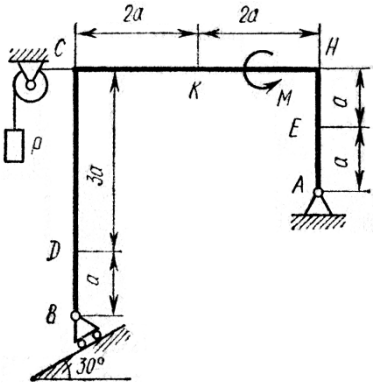


Рис. С1.В9

Ваш вариант. *Номер рисунка — последняя цифра Вашего варианта, номер условия в таблице С1 — предпоследняя цифра. Например, варианту 23 соответствует рисунок С1.3 и условие 2 в таблице С1.*

Общая рекомендация. *Рисунок в задаче должен занимать не менее половины страницы формата А4.*

Указания. Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении нужно учесть, что натяжение обеих ветвей троса (до блока и после него) будет одинаковым, если блок вращается без трения.

Уравнение моментов будет содержать всего одну неизвестную величину, если вычислять моменты относительно точки, в которой пересекаются линии действия двух неизвестных реакций связи, на-

пример, точку A, в которой пересекаются линии двух составляющих $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ полной реакции $\overline{R}_A$ шарнира A.

При вычислении моментов сил, для которых плечо не определяется легко по рисунку, удобно разложить эту силу $\overline{F}_k$ $(k = \overline{1,4})$ на составляющие $\overline{F}_k'$ и $\overline{F}_k''$ и воспользоваться теоремой Вариньона:

$$m_A\left(\overline{F}_k\right) = m_A\left(\overline{F}_k'\right) + m_A\left(\overline{F}_k''\right).$$

Сказанное выше относится не только к активным силам, но и к неизвестной реакции в точке B.

Для образца решения используем рисунок С1.В5. Активные силы показаны на рисунке.

Дано. Из общего для всех задания: $P = 25$ кН, $M = 60$ кН·м, $a = 0{,}5$ м. Пусть в точке K приложена сила $\overline{F}_2$: $F_2 = 20$ кН, $\alpha_2 = 30°$, а в точке D приложена сила $\overline{F}_4$: $F_4 = 40$ кН, $\alpha_4 = 60°$. Определить реакции в точках A и B.

Решение

1. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем оси Axy как показано на рисунке С1.1. Изобразим действующие на раму активные силы $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_4$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\overline{T}$, (мысленно отбрасывая груз вместе с блоком и учитывая, что по модулю $T = P$). Изобразим две составляющие $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ полной реакции шарнира A и реакцию $\overline{R}_B$ катка перпендикулярно опорной плоскости (шарнир и каток мысленно отбрасываем).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия, причем начнем с уравнения моментов, взяв в качестве центра моментов точку A, так как именно в ней сходятся две неизвестные силы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, и они, естественно, в это уравнение не войдут.

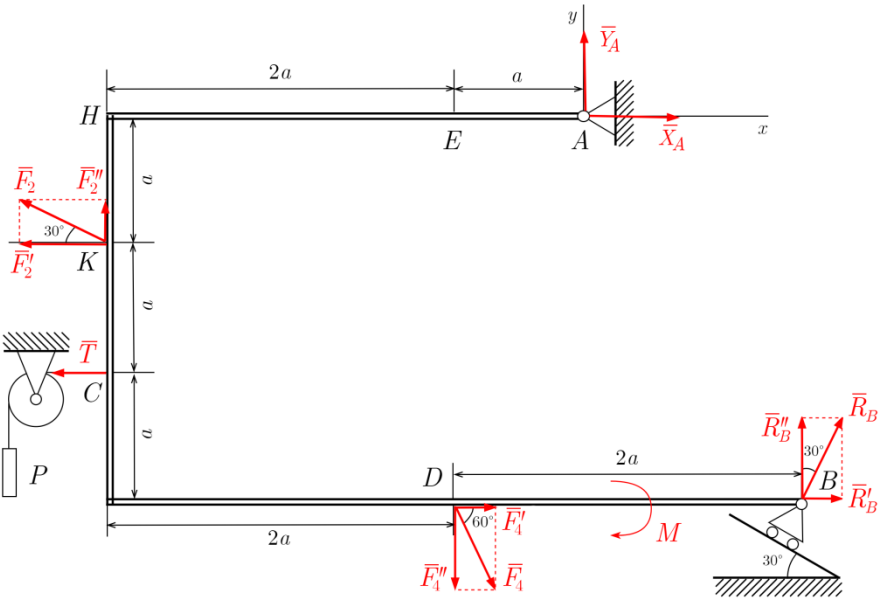


Рис. С1.1

Для облегчения нахождения моментов сил $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_4$, разложим их на составляющие

$$\overline{F}_2 = \overline{F}_2' + \overline{F}_2'',$$

где модули $F_2' = F_2 \cos 30°$, $F_2'' = F_2 \sin 30°$;

$$\overline{F}_4 = \overline{F}_4' + \overline{F}_4'',$$

где модули $F_4' = F_4 \cos 60°$, $F_4'' = F_4 \sin 60°$.

На рисунке С1.1 углы α_2 и α_4 сразу указаны в градусах.

Замечаем, что $m_A(\overline{R}_B)$ непосредственно сразу записать трудно, поэтому реакцию $\overline{R}_B$ также разложим на составляющие:

$$\overline{R}_B = \overline{R}_B' + \overline{R}_B'',$$

модули составляющих $R_B' = R_B \sin 30°$, $R_B'' = R_B \cos 30°$.

Тогда по теореме Вариньона

$$m_A(\overline{R}_B) = m_A(\overline{R}'_B) + m_A(\overline{R}''_B).$$

Моменты относительно точки A для составляющих легко находятся. Именно,

$$m_A(\overline{R}'_B) = R'_B \cdot 3a,$$

$$m_A(\overline{R}''_B) = R''_B \cdot a.$$

Заметьте! Плечи сил $\overline{R}'_B$ и $\overline{R}''_B$ хорошо видны на рисунке С1.1, а знак момента определяется по правилу ↺+, ↻– .

Абсолютно так же теорема Вариньона позволяет легко записать моменты сил $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_4$:

$$m_A\left(\overline{F}_2\right) = m_A\left(\overline{F}'_2\right) + m_A\left(\overline{F}''_2\right)$$

и

$$m_A\left(\overline{F}_4\right) = m_A\left(\overline{F}'_4\right) + m_A\left(\overline{F}''_4\right).$$

Уравнение моментов

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0$$

в предварительной записи приводит к равенству

$$-F'_2 \cdot a - F''_2 \cdot 3a - T \cdot 2a + F'_4 \cdot 3a + F''_4 \cdot a - M + R'_B \cdot 3a + R''_B \cdot a = 0.$$

Выразим из этого равенства

$$3R'_B + R''_B = F'_2 + F''_2 \cdot 3 + T \cdot 2 - F'_4 \cdot 3 - F''_4 + \frac{M}{a}.$$

Тогда

$$3R_B \sin 30^\circ + R_B \cos 30^\circ =$$

$$= F_2 \cos 30^\circ + F_2 \sin 30^\circ \cdot 3 + T \cdot 2 - F_4 \cos 60^0 \cdot 3 - F_4 \sin 60^0 + \frac{M}{a},$$

откуда

$$(3 \sin 30^\circ + \cos 30^\circ) R_B =$$

$$= F_2(\cos 30^\circ + 3 \sin 30^\circ) + 2T - F_4(\sin 60^\circ + 3 \cos 60^\circ) + \frac{M}{a}.$$

Вычислим коэффициенты приближенно

$$3\sin 30^\circ + \cos 30^\circ = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}5 + 0{,}87 \approx 2{,}37,$$

$$\sin 60^\circ + 3\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \approx 0{,}87 + 1{,}5 \approx 2{,}37.$$

Тогда

$$2{,}37 R_B = 2{,}37 F_2 - 2{,}37 F_4 + 2T + 2M = 2{,}37(F_2 - F_4) + 2(T + M),$$

где мы учли, что $a = 0{,}5$.

Найдем

$$R_B = F_2 - F_4 + \frac{2}{2{,}37}(T + M) = 20 - 40 + \frac{2}{2{,}37}(25 + 60) =$$

$$= -20 + 85 \cdot 0{,}844 = 51{,}74 \text{ кН}.$$

Теперь запишем в предварительной записи два уравнения проекций всех сил на оси системы координат Axy:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad x_A - F_2' - T + F_4' + R_B' = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad y_A + F_2'' - F_4'' + R_B'' = 0.$$

Заметим, что эти два уравнения можно сразу записать в явном виде так:

$$x_A - F_2 \cos 30^\circ - T + F_4 \cos 60^\circ + R_B \sin 30^\circ = 0,$$

$$y_A + F_2 \sin 30^\circ - F_4 \sin 60^\circ + R_B \cos 30^\circ = 0.$$

Зная, что $R_B = 51{,}7$ кН, легко находим

$$x_A = F_2 \cos 30^\circ + T - F_4 \cos 60^\circ - R_B \sin 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 25 - 40 \cdot \frac{1}{2} -$$

$$- 51{,}74 \cdot \frac{1}{2} = 17{,}3 + 25 - 20 - 25{,}87 = -3{,}57 \approx -3{,}6 \text{ кН}.$$

$$y_A = F_4 \sin 60^\circ - F_2 \sin 30^\circ - R_B \cos 30^\circ = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2} - 51{,}74 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 20 \cdot 1{,}73 - 10 - 51{,}74 \cdot 0{,}87 = 34{,}6 - 10 - 45{,}01 \approx -20{,}4 \text{ кН}.$$

Ответ: $x_A = -3{,}6$ кН, $y_A = -20{,}4$ кН, $R_B = 51{,}7$ кН.

Отрицательные знаки у проекций x_A, y_A указывают, что составляющие $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ имеют направления, противоположные указанным на рисунке С1.1, *но на рисунке ничего менять не нужно!*

Рекомендуется сделать проверку, записав, например, уравнение моментов относительно любой точки, в которое *обязательно* войдут ранее неизвестные x_A, y_A и R_B.

Запишем для проверки, например, уравнение моментов относительно точки D. В него не войдет известная сила $\overline{F}_4$, зато войдут моменты сил $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ и $\overline{R}_B$.

Воспользуемся рисунком С1.1.

$$\sum m_D = 0,$$

$$-M + R''_B \cdot 2a + T \cdot a + F'_2 \cdot 2a - F''_2 \cdot 2a - X_A \cdot 3a + Y_A \cdot a = 0.$$

Внимание! Знаки моментов составляющих $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ взяты по рисунку в соответствии с выбранными (нами!) направлениями. Мы обнаружили, что проекции составляющих $x_A = -3{,}6$ кН и $y_A = -20{,}4$ кН отрицательны, следовательно, векторы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направлены в противоположные стороны. Это значит, что в уравнение проверки надо подставить значения проекций x_A и y_A, а не их модули!

Учтем, что $2a = 1$ м.

Имеем равенство

$$-M + R_B \cos 30° + T \cdot 0{,}5 + F_2 \cos 30° - F_2 \sin 30° - x_A \cdot 1{,}5 + y_A \cdot 0{,}5 = 0,$$

Подставим в это равенство все значения

$$-60 + 51{,}7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 25 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2} - (-3{,}6) \cdot 1{,}5 + (-20{,}4) \cdot 0{,}5 =$$

$$= -60 + 51{,}7 \cdot 0{,}87 + 12{,}5 + 17{,}3 - 10 + 5{,}4 - 10{,}2 = 80{,}2 - 80{,}2 \equiv 0,$$

Проверка говорит о правильности проделанных вычислений.

Упражнение 1. Сделать проверку, записав уравнение моментов относительно точки K, т.е.

$$\sum m_K(\overline{F}_K) = 0.$$

Упражнение 2. Записать условия равновесия рассмотренной рамы, если на участке HE действует равномерно распределенная нагрузка (см. рисунок С1.2) с интенсивностью q .

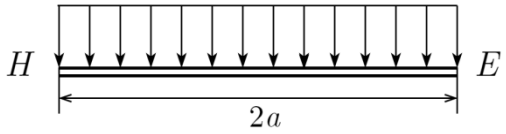


Рис. С1.2

Выполнить необходимые расчеты для определения реакции связей, если $q = 2$ кН/м.

Указание. Заменить равномерно распределенную нагрузку силой $\overline{Q}$, приложенной в середине участка HE и учесть, что численно $Q = q \cdot 2a$ кН.

РАЗДЕЛ 3. ДИНАМИКА

Тема: Основная задача динамика точки

Указания и образец выполнения **ИДЗ Д1**

Постановка задачи. Груз D массой m с начальной скоростью v_0 в точке A начинает движение в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости (рис. Д1.В0–Д1.В9). На всех участках движения груза D следует учесть наличие силы сухого трения, модуль которой $F_{тр} = f \cdot N$, где N — нормальная реакция трубы, f — коэффициент трения груза о трубу.

Для всех вариантов угол $\alpha = 30^\circ$.

На участке AB на груз, кроме силы тяжести и силы трения, действует постоянная (по модулю и направлению) сила $\overline{Q}$, направленная вдоль трубы от A к B и сила сопротивления среды $\overline{R}_{сопр}$, модуль которой R определенным образом зависит от модуля скорости груза $R = f(v)$, а направление в любой момент времени противоположно направлению фактического движения, т.е. скорости груза D, что можно записать следующим образом: $\overline{R}_{сопр} = -f(v)\dfrac{\overline{v}}{v}$, где $v = |\overline{v}|$.

В точке B груз, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC трубы. На этом участке действие силы сопротивления среды $\overline{R}_{сопр}$ прекращается, но, кроме силы тяжести и силы трения, на груз начинает действовать переменная сила $\overline{F}$, проекция которой на ось Bx задана в таблице (см. табл. Д1).

Все исходные данные: масса груза D (кг), начальная скорость v_0 (м/с); силы Q, $R = f(v)$, F_x (Н), коэффициент μ, длина участка AB или время t_1 движения груза D на участке AB приведены в таблице Д1.

Таблица Д1

Номер условия	0	1	2	3	4
F_x	$k\sin(\omega t)$	kt^2	$-k\cos(2\omega t)$	$k\sin(2\omega t)$	$-k\cos(\omega t)$
Номер условия	5	6	7	8	9
F_x	$k\cos(2\omega t)$	kt	$-k\sin(\omega t)$	$k\cos(\omega t)$	$-k\sin(2\omega t)$

Рисунок	m, кг	v_0, м/с	Q, Н	R, Н	μ	l, м	t_1, с	k	f
Д1.В0	5	20	3	μv	0,5	—	10	10	0,2
Д1.В1	3	20	10	μv^2	0,4	5	—	12	0,3
Д1.В2	4	30	10	μv	0,8	—	2,5	16	0,4
Д1.В3	6	20	30	μv^2	0,5	3	—	12	0,2
Д1.В4	2	10	4	μv	0,4	—	5	8	0,5
Д1.В5	8	30	40	μv^2	0,2	10	—	24	0,1
Д1.В6	6	30	30	μv	0,8	—	2	4	0,2
Д1.В7	9	40	40	μv^2	0,3	7,5	—	18	0,1
Д1.В8	6	15	30	μv	0,3	—	10	18	0,1
Д1.В9	3	10	10	μv^2	0,6	2,5	—	12	0,2

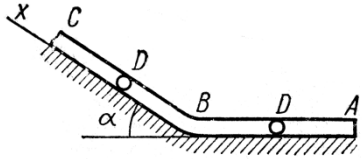


Рис. Д1.В0

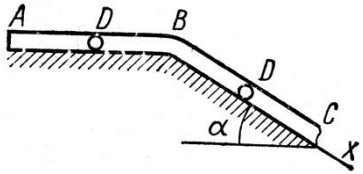


Рис. Д1.В1

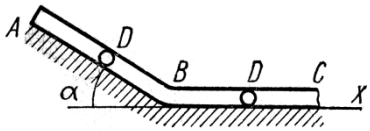


Рис. Д1.В2

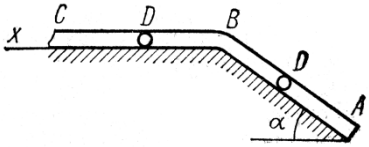


Рис. Д1.В3

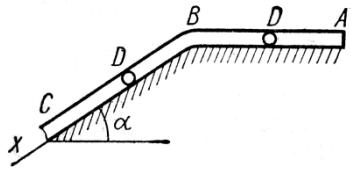


Рис. Д1.В4

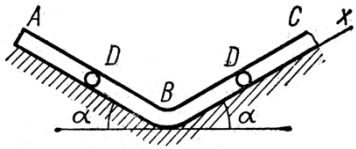


Рис. Д1.В5

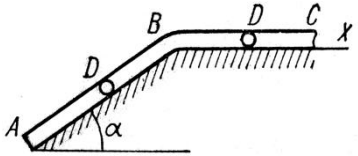


Рис. Д1.В6

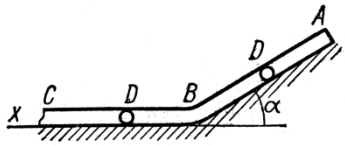


Рис. Д1.В7

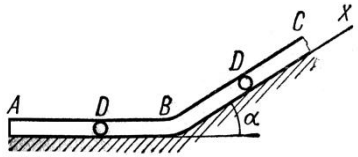


Рис. Д1.В8

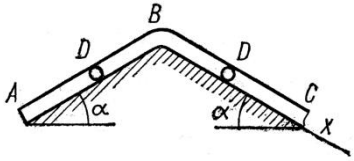


Рис. Д1.В9

Общее задание. Считая груз D материальной точкой и зная по условию задачи расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = x(t)$, где $x = BD$.

Ваш вариант. *Номер рисунка — последняя цифра Вашего варианта, номер условия в таблице Д1 — предпоследняя цифра. Например, варианту 23 соответствует рисунок Д1.3 и условие 2 в таблице Д1.*

Указания. Задача Д1 связана с решением основной задачи динамики и сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения материальной точки. Ясно, что для нахождения искомого закона движения груза на участке BC нужно знать его скорость в точке B. Она будет начальной для описания движения на этом участке. Это значит, что предварительно необходимо изучить движение груза на участке AB и найти его скорость в точке B, которая будет

конечной для движения на этом участке. Таким образом, решение разбивается на две части.

Вначале нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке AB по времени t, если задано время движения груза на участке AB, или по координате x, если задана длина этого участка.

Переход от интегрирования по времени к интегрированию по координате осуществляется благодаря равенству

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Процедуру интегрирования методом разделения переменных можно осуществить по стандартной схеме решения задачи с начальными данными (задачи Коши), описанной во многих учебных пособиях и методических руководствах.

Вначале, путем вычисления неопределенных интегралов, находится общее решение дифференциального уравнения первого порядка относительно проекции скорости $v_x(t)$ на ось Ax. Подчиняя это общее решение начальному условию $v(t=0)=v_0$, указанному в таблице Д1, удается исключить из общего решения произвольную постоянную интегрирования и, тем самым, найти частное решение дифференциального уравнения движения груза на участке AB в виде зависимости скорости v от времени t или от координаты x.

Подставляя в найденную зависимость $v_x(t)$ или $v_x(x)$, заданное условиями задачи t_1 — время достижения грузом D точки B или длину участка $AB = l$, найдем скорость груза v_B в точке B.

Важное замечание. Возвращаясь к тексту постановки задачи нетрудно заметить, что нахождение закона изменения скорости груза на участке AB и тем более определение закона движения на этом участке *не требовалось*. Поэтому предложенный выше способ определения конечной скорости кажется неоправданно затянутым. Будет проще воспользоваться определенными интегралами в дифференциальном уравнении после разделения переменных (см. пример решения задачи ниже).

Вторая часть решения задачи не представляет трудностей и сводится к решению задачи Коши с начальными условиями $x(t=0)=0$, $\dot{x}(t=0)=v_x(t=0)=v_B$, где $x(t)=Bx$ — перемещение груза на указанном участке трубы в любой момент времени, отсчет которого вновь начинается с нуля.

Пример выполнения ИДЗ Д1

Дано: $m=5$ кг, $v_0=15$ м/с, $Q=14$ Н, $R=\mu v^2$ Н, $\mu=0{,}16$, $l=10$ м, $F_x=-10t$ Н, $f=0{,}2\sqrt{3}$, $\alpha=30^\circ$.

Найти закон движения груза на участке BC.

Решение

1. Рассмотрим движение груза D на участке AB, считая его материальной точкой.

Для участка AB введем декартову систему координат Axy с началом в точке A, направив ось Ax в сторону предполагаемого движения (от точки A к точке B).

Изобразим груз в произвольном положении при $x>0$, считая, что проекция его скорости на ось Ax $v_x>0$.

Покажем действующие на груз силы: вес $\overline{G}=m\overline{g}$, активную силу $\overline{Q}$, нормальную реакцию $\overline{N}$ (вектор $\overline{N}\perp Ax$), силу трения $\overline{F}_{тр}$ и силу сопротивления $\overline{R}_{сопр}$, учтя, что векторы $\overline{F}_{тр},\overline{R}_{сопр}\uparrow\downarrow\overline{v}$.

Запишем основной закон динамики точки в векторной форме:

$$m\overline{w}=\sum\overline{F}_k \quad \text{или} \quad m\overline{w}=\overline{Q}+\overline{G}+\overline{R}_{сопр}+\overline{F}_{тр}+\overline{N}. \qquad (Д1.1)$$

В проекциях на оси системы координат Axy имеем два уравнения

$$\begin{cases} mw_x=Q-G\sin\alpha-R-F_{тр}, \\ mw_y=N-G\cos\alpha. \end{cases} \qquad (Д1.2)$$

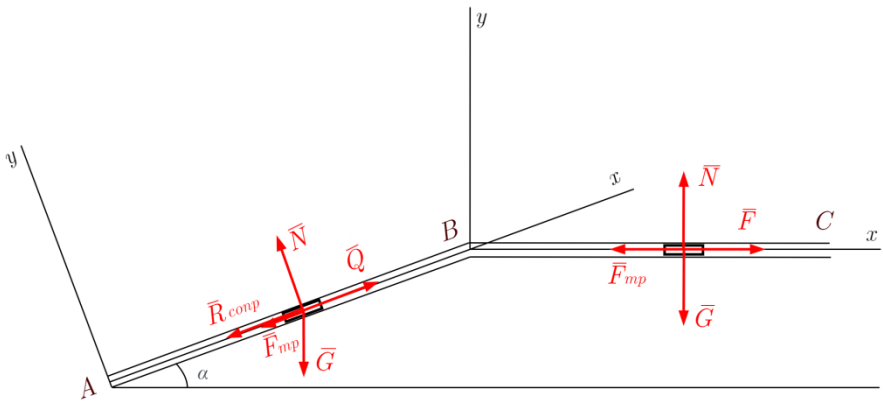


Рис. Д1.1

Т.к. движение груза D вдоль оси Ay отсутствует ($w_y = 0, v_y = 0$ $\forall t$), то из второго уравнения системы (Д1.2) сразу находим величину нормальной реакции $N = mg\cos\alpha$.

Поскольку модуль R силы сопротивления $\overline{R}_{сопр}$ зависит от скорости груза, а $F_{тр} = f \cdot N$ $(\forall t)$, первое уравнение системы можно записать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции скорости $v_x(t)$:

$$m\frac{dv_x}{dt} = Q - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \mu v^2. \qquad (Д1.3)$$

Так как здесь модуль $|\overline{v}| = v$ совпадает с проекцией скорости v_x на ось Ax, будем обозначать буквой v проекцию скорости v_x.

Уравнение (Д1.3) будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}\left(v^2 + \frac{mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Q}{\mu}\right). \qquad (Д1.4)$$

Обозначим $a^2 = \dfrac{mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Q}{\mu}$ и вычислим значение этой положительной при заданных условиях константы, принимая $g \approx 10$ м/с^2.

$$a^2 = \frac{5 \cdot 10(\sin 30^\circ + 0{,}2\sqrt{3}\cos 30^\circ) - 14}{0{,}16} = \frac{50\left(\frac{1}{2} + 0{,}2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 14}{0{,}16} =$$

$$= \frac{50 \cdot 0{,}8 - 14}{0{,}16} = 162{,}5.$$

Покажем, что размерность a^2 совпадает с размерностью v^2 (м/с^2). Для этого установим размерность коэффициента μ в зависимости $R = \mu v^2$, что требовалось сделать по условию задачи.

Так как

$$R[H] = \mu[\ ]v^2\left[\frac{м^2}{c^2}\right], \text{ то } \frac{R}{v^2}\left[\frac{H \cdot c^2}{м^2}\right] = \mu\left[\frac{H \cdot c^2}{м^2}\right].$$

Тогда

$$\frac{mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Q}{\mu}\left[\frac{H \cdot м^2}{H \cdot c^2}\right] = a^2\left[\frac{м^2}{c^2}\right].$$

Замечание. Может оказаться, что величина

$$Q > mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Тогда следует принять $a^2 = \dfrac{Q - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\mu}$.

Запишем исходное дифференциальное уравнение движение груза на участке AB в виде

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}\left(v^2 + a^2\right). \qquad (Д1.5)$$

Уравнение (Д1.5) можно проинтегрировать по t, если по условиям задачи задано время движения груза на участке AB. В нашем случае задана длина участка AB и следует перейти к интегрированию по координате по формуле $\dfrac{dv}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$. Законность такой замены и ее связь с правилами дифференцирования сложной функции смотрите в лекционном курсе.

Вместо дифференциального уравнения (Д1.5) имеем уравнение

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{m}\left(v^2 + a^2\right). \qquad (Д1.6)$$

Разделим переменные в уравнении (Д1.6) и проинтегрируем левую и правую части в соответствующих пределах

$$\int_{v_0}^{v_B} \frac{vdv}{v^2+a^2} = -\frac{\mu}{m}\int_0^l dx. \qquad (Д1.7)$$

Заметим, что так как нам не нужен закон изменения скорости груза на участке AB, то мы воспользовались определенными интегралами с конечными пределами интегрирования. Здесь $v_B = v(x=l)$.

Вычислим интеграл

$$\int_{v_0}^{v_B} \frac{vdv}{v^2+a^2} = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v_B} \frac{dv^2}{v^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(v^2+a^2\right)\Big|_{v_0}^{v_B} = \frac{1}{2}\ln\frac{{v_B}^2+a^2}{{v_0}^2+a^2}.$$

Равенство (Д1.7) дает

$$\ln\frac{{v_B}^2+a^2}{{v_0}^2+a^2} = -\frac{2\mu}{m}l \quad \text{или} \quad \frac{{v_B}^2+a^2}{{v_0}^2+a^2} = e^{-\frac{2\mu}{m}l}. \qquad (Д1.8)$$

Вычислим значения

$$\frac{2\mu}{m}l = \frac{2\cdot 0{,}16}{5}\cdot 10 = 0{,}64, \quad e^{-0{,}64} \approx 0{,}5273.$$

Из второго равенства (Д1.8) находим

$${v_B}^2 = \left({v_0}^2+a^2\right)\cdot e^{-\frac{2\mu}{m}l} - a^2 = 387{,}5\cdot 0{,}5273 - 162{,}5 = 41{,}829,$$

откуда $v_B = \sqrt{41{,}829} \approx 6{,}47$ м/с.

2. Рассмотрим движение груза на участке BC. Конечная для участка AB скорость груза $v_B = 6{,}47$ м/с будет начальной при изучении движения груза на участке BC.

Для участка BC введем новую декартову систему координат Bxy.

Изобразим груз в произвольном положении с координатой $x > 0$, считая, что проекция скорости груза $v_x > 0$ в указанном положении.

Изобразим действующие на груз силы: вес $\overline{G} = m\overline{g}$, нормальную реакцию $\overline{N}$ (вектор $\overline{N} \perp Bx$), силу трения $\overline{F}_{тр}$ ($\overline{F}_{тр} \uparrow\downarrow \overline{v}$) и активную силу $\overline{F}$ так, что $пр_x\overline{F} > 0$.

Истинное направление вектора силы $\overline{F}$ фактически задано условиями задачи, так как по условию дана непосредственно проекция силы $\overline{F}$ на ось Bx.

Основной закон динамики точки для участка BC

$$m\overline{w} = \sum \overline{F}_k \quad \text{или} \quad m\overline{w} = \overline{F} + \overline{G} + \overline{F}_{тр} + \overline{N} \qquad (Д1.9)$$

в проекциях на оси системы координат Bxy приводим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} mw_x = F_x - F_{тр}, \\ mw_y = N - G. \end{cases} \qquad (Д1.10)$$

Так же, как и на участке движения AB, проекции $w_y = v_y = 0$ для любого момента времени.

Тогда из второго уравнения системы (Д1.10) находим $N = G = mg$, а первое уравнение записывается в виде

$$m\frac{dv}{dt} = -10t - fmg,$$

где $v = v_x$.

С учетом данных задачи получим простейшее дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dt} = -2t - 2\sqrt{3}. \qquad (Д1.11)$$

Умножая на dt левую и правую части равенства (Д1.11) и интегрируя с переменными верхними пределами в интегралах, получим

$$\int_{v_B}^{v(t)} dv = -2\int_0^t t\,dt - 2\sqrt{3}\int_0^t dt,$$

откуда

$$v(t) = v_B - t^2 - 2\sqrt{3}t = -t^2 - 2\sqrt{3}t + 6{,}47. \qquad (Д1.12)$$

Так как $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$, то для координаты $x(t)$ имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = -t^2 - 2\sqrt{3}t + 6{,}47. \qquad (Д1.13)$$

Умножая на dt левую и правую части равенства (Д1.13) и интегрируя по времени

$$\int_0^{x(t)} dx = -\int_0^t t^2 dt - 2\sqrt{3}\int_0^t t dt + 6{,}47\int_0^t dt, \qquad (Д1.14)$$

найдем $x(t) = -\dfrac{1}{3}t^3 - \sqrt{3}t^2 + 6{,}47t$.

Важное замечание. Найденная в формуле (Д1.14) зависимость $x(t)$ не является точным и окончательным ответом на вопрос, поставленный в задаче. Это связано с особенностями решения задач динамики при наличии сил сухого трения (см. соответствующий пункт и примеры в лекционном курсе).

Известно, что если в какой-то момент времени скорость точки становится равной нулю, то в задаче требуется произвести дополнительные исследования.

Можно предположить, что под действием заданных активных сил точка начнет движение с нулевой начальной скоростью в противоположную сторону. При этом (и это важно!) направление силы трения следует изменить на противоположное.

Может, однако, оказаться, что и это движение не реализуется. Это означает, что материальная точка может оставаться в состоянии покоя $\forall t:\ t > t^*$, где t^* — время остановки, даже при наличии переменных, зависящих от времени, активных сил до тех пор, пока эти силы не выведут ее из такого состояния.

В нашем примере легко найти момент остановки движения груза, приравняв зависимость $v(t)$ по формуле (Д1.12) к нулю и найдя положительный корень уравнения $-t^2 - 2\sqrt{3}t + 6{,}47 = 0$.

Решив данное уравнение, получим, что $t_1 \approx 1{,}35$ с — единственный положительный корень ($t_2 \approx -4{,}81 < 0$).

Таким образом, зависимость скорости груза D от времени на участке BC по формуле (Д1.12) справедлива лишь $\forall t:\ t \in [0,\ 1{,}35]$, а искомый закон движения груза на этом участке действительно определяется по формуле (Д1.14), но только для $t \in [0,\ 1{,}35]$.

Ответ. Закон движения груза на участке BC:

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 - \sqrt{3}t^2 + 6{,}47t \text{ м}, \quad t \in [0,\ 1{,}35].$$

Рекомендация. При решении своего варианта ИДЗ Д1 на участке BC ограничиться выяснением того, что скорость груза $v(t)$ остается положительной $\forall t \in R$ (в большинстве вариантов) или остается таковой по крайней мере $\forall t:\ t \in \left[0,\ t^*\right]$, где $t^* > 0$. Величину t^* можно не находить.

Рассмотрим вариант постановки задачи при условии, что на участке AB на груз D действует сила сопротивления среды $\overline{R}_{сопр}$, модуль которой $R = \mu v$, и задано время t_1 движения груза от точки A до точки B.

Дано: $t_1 = 2$ с. Все остальные числовые данные остаются теми же, как в предыдущем варианте.

При такой постановке задачи незначительные изменения возникнут только в первой половине решения. Основной закон динамики точки (Д1.1) и его запись в проекциях на оси системы координат Axy (Д1.2) сохраняются для любых (!) зависимостей $R = f(v)$.

Дифференциальное уравнение относительно функции скорости (Д1.3) теперь имеет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = Q - mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \mu v,$$

или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}\left(v + \frac{mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Q}{\mu}\right), \qquad (Д1.15)$$

где $v = v_x(t)$.

Величину $\dfrac{mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) - Q}{\mu}$ можно обозначить просто буквой a. У нас $a = 162{,}5$. Величина a может оказаться отрицательной, если $Q > mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.

Нетрудно убедиться, что размерность коэффициента μ будет $\left[\frac{H \cdot c}{м}\right]$ и тогда $a\left[\frac{м}{c}\right]$.

Исходное дифференциальное уравнение движения груза на участке AB (Д1.15) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m}(v + a), \qquad (Д1.16)$$

Его следует интегрировать по t, так как по условию задачи задано время движения t_1 груза на участке AB и переходить от дифференцирования по t к дифференцированию по координате x, как в предыдущем варианте, не нужно (!).

Разделяя переменные в уравнении (Д1.16) и интегрируя по t в промежутке от 0 до t_1, получим

$$\int_{v_0}^{v_B} \frac{dv}{v + a} = -\frac{\mu}{m}\int_0^{t_1} dt,$$

откуда

$$\ln|v + a|\Big|_{v_0}^{v_B} = -\frac{\mu}{m} t\Big|_0^{t_1},$$

$$\ln\left|\frac{v_B + a}{v_0 + a}\right| = -\frac{\mu}{m} t_1. \qquad (Д1.17)$$

Вычислим значение

$$\frac{\mu}{m} t_1 = \frac{0{,}16 \cdot 2}{5} = 0{,}064, \quad e^{-0{,}064} \approx 0{,}938.$$

Тогда из (Д1.17) находим, что

$$v_B = (v_0 + a) \cdot e^{-\frac{\mu}{m} t_1} - a = 177{,}5 \cdot 0{,}938 - 162{,}5 \approx 4.$$

Итак, скорость $v_B = 4$ м/с будет начальной для изучения движения груза на участке BC.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии, посвященном трем основным разделам классической механики, приведен необходимый теоретический материал и методика решения типовых задач по таким темам указанных во введении разделов как кинематика точки, кинематика сложного движения точки, статика на плоскости и основная задача динамики материальной точки. Теоретические вопросы обсуждаются в связи с необходимостью решения конкретных задач.

В пособии приведены варианты индивидуальных домашних заданий по указанным выше темам и образцы оформления решения типовых задач по этим темам, что должно помочь обучающимся в самостоятельной работе и при выполнении лабораторных или практических работ.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. В 2-х частях. — М., Лань, 2021.
2. *Мещерский И. В.* Задачи по теоретической механике / под ред.: Пальмова В. А., Меркина Д. Р. — М., Лань, 2006. — 448 с.
3. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики — М., Ленанд. 2018. — 416 с.
4. *Яблонский А. А., Никифорова В. М.* Курс теоретической механики. Статика. Кинематика. Динамика — М., Лань, 2004. — 764 с.
5. *Яблонский А. А.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике — М., Интеграл-Пресс, 2008. — 382 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Раздел 1. Кинематика 4
Кинематика точки 4
Сложное движение точки 13
Раздел 2. Статика 32
Равновесие на плоскости 32
Раздел 3. Динамика 41
Основная задача динамика точки 41
Заключение 53
Список рекомендованной литературы 54

Учебное издание

ОГОРОДНИКОВ Евгений Николаевич
ЗАУСАЕВ Артем Анатольевич

Элементы классической механики

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 01.04.2023
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная
Усл. п. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,18.
Тираж 50 экз. Рег. № 33/23

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8