МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

Операционное исчисление и его приложения

Практикум по математическому анализу

Самара
Самарский государственный технический университет
2013

УДК 517.4

Операционное исчисление и его приложения: практикум по математическому анализу / *О.С. Афанасьева, Е.В. Небогина*; Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2013, 63 с.

В практикум по математическому анализу включены задания и методические указания к ним по темам «Функция-оригинал. Нахождение изображений по заданному оригиналу», «Отыскание оригинала по изображению» и «Приложения операционного исчисления».

Пособие предназначено для студентов специальности «Прикладная математика и информатика», а также инженерных специальностей машиностроительного, физико-технологического факультетов и факультета пищевых производств.

Библиогр.: 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

Рецензент: *к.ф.-м.н. Н.Н. Попов*

Предисловие

Операционное исчисление — один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев с помощью весьма простых средств решать сложные математические задачи: нахождение интегралов, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, уравнений в частных производных и т.п.

В основе методов операционного исчисления лежит идея интегральных преобразований (преобразование Лапласа), позволяющих свести обыкновенные дифференциальные и интегральные уравнения к алгебраическим (операторным) уравнениям, а дифференциальные уравнения в частных производных — к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Предлагаемый практикум по математическому анализу «Операционное исчисление и его приложения» предназначен для студентов специальности «Прикладная математика и информатика» при изучении курса «Операционное исчисление», а также инженерных специальностей машиностроительного, физико-технологического факультетов и факультета пищевых производств при освоении дисциплины «Математика». Его цель — помочь студентам самостоятельно или с помощью преподавателя овладеть методами решения задач по теме «Операционное исчисление».

Все разделы начинаются с краткого введения, в котором без доказательства приводятся необходимые для решения сведения: теоремы и формулы. В каждой части представлено большое количество типовых задач как с решениями, так и для самостоятельной работы. Все примеры снабжены ответами.

Часть 1.
Функция-оригинал.
Нахождение изображений по заданному оригиналу

Пусть функция $f(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ при $t > 0$, где $M > 0$ и S_0 — некоторые действительные постоянные;

3) на любом конечном отрезке $[a, b]$ положительной полуоси Ot функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т. е. а) ограничена, б) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода, в) имеет конечное число экстремумов.

Такие функции называются *изображаемыми по Лапласу*, или *оригиналами*.

Пусть $p = \alpha + i\beta$ — комплексный параметр, причем $\mathrm{Re}\,\mathrm{p} = \alpha > \mathrm{S}_0$. При сформулированных условиях интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$ сходится и является функцией от p:

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(p). \tag{1.1}$$

Этот интеграл называется интегралом Лапласа, а определяемая им функция комплексного аргумента p называется преобразованием Лапласа от функции $f(t)$ или просто изображением $f(t)$. Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, обозначают следующими символами:

$$f(t) \doteqdot F(p).$$

Приведем основные свойства изображений.

Теорема 1.1.(подобия) *Если* $f(t) \doteqdot F(p)$, *то*

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

где $\alpha > 0$, $\operatorname{Re} p > \max\{S_0, \alpha S_0\}$.

Теорема 1.2.(свойство линейности) *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *а* $g(t) \risingdotseq G(p)$, *то* $Af(t) + Bg(t) \risingdotseq AF(p) + BG(p)$, *где* A, B — *постоянные числа.*

Теорема 1.3.(смещение изображения) $e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0)$, *где* $\operatorname{Re}(p - p_0) > S_0$.

Теорема 1.4.(дифференцирование изображения)

$$t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p).$$

Теорема 1.5.(дифференцирование оригинала) *Справедлива формула* ($\operatorname{Re} p > S_0$)

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

при условии, что $f(t)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(t)$ *непрерывны,* $f^{(n)}(t)$ *кусочно-непрерывна на* $[0, \infty)$, *а показатель роста функции* f *вместе с ее производными до порядка* n *включительно равен* S_0. *В частности, при* $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ *имеет место* $f^{(n)(t)} \risingdotseq p^n F(p)$.

Теорема 1.6.(интегрирование оригинала) $\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$.

Теорема 1.7.(интегрирование изображения) *Пусть заданная на* $(0, \infty)$ *кусочно-непрерывная функция* $f(t)$ *удовлетворяет условию* $|f(t)| \le M e^{S_0 t}$ $(a > S_0)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$, $p = \alpha + i\beta$, $\alpha > S_0$ *и* $\int\limits_0^1 \dfrac{f(t)}{t} dt$ *сходится. Тогда, если* $\int\limits_p^\infty F(q) dq$ *сходится, то* $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_0^\infty F(q) dq$.

Теорема 1.8.(запаздывание оригинала) *Пусть* $f(t) = 0$ *при* $t < 0$, *тогда* $f(t - t_0) \risingdotseq e^{-pt_0} F(p)$, *где* t_0 — *некоторая точка* $(t_0 \ge 0)$.

Выражение $\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ называется *сверткой функции* $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и обозначается символом $f_1 * f_2$.

Теорема 1.9. *Преобразование Лапласа от свертки равно произведению преобразований Лапласа от функций* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteqdot F_1(p) \cdot F_2(p),$$

где $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$.

Для удобства пользования приведем таблицу изображений элементарных функций.

В таблице $\eta(t)$ есть единичная функция Хевисайда, которая определяется следующим образом:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим примеры с решениями.

№	Оригинал	Изображение	№	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$	12	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
2	$\sin\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$	13	$t\sin\alpha t$	$\frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$
3	$\cos\alpha t$	$\frac{p}{p^2+\alpha^2}$	14	$t\cos\alpha t$	$\frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
4	$\cos\alpha(t-t_0)$	$e^{-pt_0}\frac{p}{p^2+\alpha^2}$	15	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots$ $-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	16	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}F(p)$
6	$\operatorname{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^\infty F(q)dq$
7	$\operatorname{ch}\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	18	$f(t-t_0)$	$e^{-pt_0}F(p)$
8	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	19	$\eta(t-h)$	$e^{-ph}\frac{1}{p}$
9	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	20	$f_1 * f_2$	$F_1(p)\cdot F_2(p)$
10	$t^n,\, n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	21	$f(t)g(0)+$ $+\int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau$	$pF(p)G(p)$
11	$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(p)}{dp^n}$	22	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{k+1}\frac{t^k}{k!}\ (t>0)$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{p_k}$

Пример 1.1. Найти изображение функций, используя определение преобразования Лапласа:

1) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & 1 < t \le 3, \\ 0, & t > 3; \end{cases}$

2) $f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1, \\ 4-2t, & 1 < t \le 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$

Решение.

1. Используя формулу (1.1), получим

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^1 te^{-pt}dt + \int\limits_1^3 e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}te^{-pt}\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{1}{p}\int\limits_0^1 e^{-pt}dt - \frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_1^3 = -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1 - \frac{1}{p}e^{-3p} + \frac{1}{p}e^{-p} =$$

$$= -\frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}e^{-p} = \frac{1}{p^2} - e^{-p}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right).$$

2. Воспользуемся определением преобразования Лапласа (1.1):

$$F(p) = \int\limits_0^1 2te^{-pt}dt + \int\limits_1^2 (4-2t)e^{-pt}dt =$$

$$= 2\left(-\frac{1}{p}te^{-pt} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\right)\Big|_0^1 + (4-2t)\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Big|_1^2 +$$

$$+\int\limits_1^2 \frac{1}{p}e^{-pt}(-2)dt = 2\left(-\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{p}2e^{-p} + \frac{2}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^2 = -\frac{2}{p}e^{-p} - \frac{2}{p^2}e^{-p} + \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p}e^{-p} +$$

$$+\frac{2}{p^2}e^{-2p}-\frac{2}{p^2}e^{-p}=\frac{2}{p^2}-\frac{4}{p^2}e^{-p}+\frac{2}{p^2}e^{-2p}=$$
$$=\frac{2}{p^2}\left(1-2e^{-p}+e^{-2ep}\right).$$

При вычислении интегралов использовался метод интегрирования по частям.

Ответ: 1) $F(p)=\dfrac{1}{p^2}-e^{-p}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)$;

2) $F(p)=\dfrac{2}{p^2}\left(1-2e^{-p}+e^{-2p}\right)$.

Пользуясь свойствами преобразования Лапласа и таблицей изображений основных элементарных функций, найти изображения для заданных оригиналов.

Пример 1.2. $f(t)=\cos^3 t$.

Решение. Преобразуем функцию $f(t)$:

$$\cos^3 t=\cos t\cdot\cos^2 t=\cos t\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}(\cos t+\cos t\cdot\cos 2t)=$$
$$=\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}(\cos t+\cos 3t)=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t.$$

Используя таблицу изображений, получим

$$F(p)=\frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9}.$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{3}{4}\dfrac{p}{p^2+1}+\dfrac{1}{4}\dfrac{p}{p^2+9}$.

Пример 1.3. $f(t)=4t^2-2t+3$.

Решение. Используя преобразование Лапласа, примененное к степенной функции, получим:

$$F(p)=4\frac{2!}{p^3}-2\frac{1!}{p^2}+3\frac{1}{p}=\frac{8}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p}.$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{8}{p^3}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{3}{p}$.

Пример 1.4. $f(t) = e^t \cos^2 t$.

Решение. Преобразуем функцию-оригинал:

$$e^t \cos^2 t = e^t \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^t \cos 2t.$$

Воспользуемся таблицей изображений и теоремой смещения:

$$\frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^t \cos 2t \doteqdot \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4}.$$

Ответ: $F(p) = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{p-1}{(p-1)^2 + 4} \right)$.

Пример 1.5. $f(t) = e^{-4t} \sin 3t \cos 2t$.

Решение. Преобразуем функцию-оригинал, используя тригонометрические формулы:

$$e^{-4t} \sin 3t \cos 2t = e^{-4t} \frac{1}{2} (\sin 5t + \sin t) = \frac{1}{2} e^{-4t} \sin 5t + \frac{1}{2} e^{-4t} \sin t.$$

Воспользуемся теоремой смещения:

$$\frac{1}{2} e^{-4t} \sin 5t + \frac{1}{2} e^{-4t} \sin t \doteqdot \frac{1}{2} \frac{5}{(p+4)^2 + 25} + \frac{1}{2} \frac{1}{(p+4)^2 + 1}.$$

Ответ: $F(p) = \dfrac{1}{2} \dfrac{5}{(p+4)^2 + 25} + \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{(p+4)^2 + 1}$.

Пример 1.6. $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} + \sin 2t \cos 3t$.

Решение. Представим функцию-оригинал в виде суммы двух оригиналов $f_1 = \dfrac{\sin 2t}{t}$ и $f_2(t) = \sin 2t \cos 3t$. Определим изображения для каждого оригинала в отдельности. Воспользуемся теоремой интегрирования изображения, чтобы найти изображение для оригинала $f_1(t)$:

$$\frac{\sin 2t}{t} \doteqdot \int_p^\infty \frac{2}{q^2 + 4} dq = 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{q}{2}.$$

Преобразуем функцию $f_2(t)$ с помощью тригонометрических формул:

$$\sin 2t \cos 3t = -\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin 5t.$$

Изображение будет иметь вид $F_2(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{5}{p^2+25}$.

Применяя свойство линейности изображения, получим:

$$\frac{\sin 2t}{t} + \sin 2t \cos 3t \doteqdot \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{5}{p^2+5}.$$

Ответ: $F(p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{2}\frac{5}{p^2+5}$.

Пример 1.7. $f(t) = \frac{\sin^2 2t}{t} + 2^{-t}$.

Решение. Представим оригинал в следующем виде $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где $f_1(t) = \frac{\sin^2 2t}{t}$, $f_2(t) = 2^{-t}$. Найдем изображение для $f_1(t)$, используя теорему об интегрировании изображения, предварительно преобразовав функцию-оригинал:

$$f_1(t) = \frac{\sin^2 2t}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t\right);$$

$$F_1(p) = \int\limits_p^\infty \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2}\frac{q}{q^2+16}\right) dq = \frac{1}{2}\int\limits_p^\infty \frac{dq}{q} - \frac{1}{2}\int\limits_p^\infty \frac{q\,dq}{q^2+16} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|q|\Big|_p^\infty - \frac{1}{4}\ln|q^2+16|\Big|_p^\infty = \lim_{q\to\infty}\frac{1}{4}\ln q^2 - \frac{1}{4}\ln p^2 -$$

$$- \lim_{q\to\infty}\frac{1}{4}\ln|q^2+16| + \frac{1}{4}\ln|p^2+16| = \frac{1}{4}\lim_{q\to\infty}\ln\frac{q^2}{q^2+16} +$$

$$+ \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+16}{p^2} = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+16}{p^2}.$$

Для нахождения изображения $f_2(t)$ воспользуемся определением преобразования Лапласа:

$$F_2(p) = \int\limits_0^\infty 2^{-t} e^{-pt} dt = \int\limits_0^\infty e^{-t\ln 2} e^{-pt} dt = \int\limits_0^\infty e^{-(p+\ln 2)t} dt =$$
$$= -\frac{1}{p+\ln 2} e^{-(p+\ln 2)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p+\ln 2}.$$

Окончательно, $F(p) = F_1(p) + F_2(p)$. То есть

$$F(p) = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+16}{p^2} + \frac{1}{p+\ln 2}.$$

Ответ: $F(p) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+16}{p^2} + \dfrac{1}{p+\ln 2}.$

Пример 1.8. $f(t) = te^{-2t}\cos 3t + \operatorname{sh}(t-3)\eta(t-3)$.

Решение. Представим оригинал $f(t)$ в виде суммы оригиналов: $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где

$$f_1(t) = te^{-2t}\cos 3t, \quad f_2(t) = \operatorname{sh}(t-3)\eta(t-3).$$

Найдем изображение для $f_1(t)$, используя теоремы смещения и дифференцирования изображения. Итак,

$$\cos 3t \risingdotseq \frac{p}{p^2+9}; \quad e^{-2t}\cos 3t \risingdotseq \frac{p+2}{(p+2)^2+9};$$

$$te^{-2t}\cos 3t \risingdotseq (-1)^1\left(\frac{p+2}{(p+2)^2+9}\right)' =$$
$$= -\frac{(p+2)^2+9-(p+2)2(p+2)}{((p+2)^2+9)^2} =$$
$$= -\frac{9-(p+2)^2}{((p+2)^2+9)^2} = \frac{(p+2)^2-9}{((p+2)^2+9)^2}.$$

Окончательно, $f_1(t) \risingdotseq \dfrac{(p+2)^2-9}{((p+2)^2+9)^2}.$

Найдем изображение для $f_2(t)$, используя теорему запаздывания

$$f_2(t) = \operatorname{sh}(t-3)\eta(t-3) \risingdotseq e^{-3p}\frac{1}{p^2-1}.$$

Тогда

$$te^{-2t}\cos 3t + \operatorname{sh}(t-3)\eta(t-3) \risingdotseq \frac{(p+2)^2-9}{((p+2)^2+9)^2} + e^{-3p}\frac{1}{p^2-1}.$$

Ответ: $F(p) = \dfrac{(p+2)^2-9}{((p+2)^2+9)^2} + e^{-3p}\dfrac{1}{p^2-1}.$

Пример 1.9. $f(t) = t^2e^{t-3}$.

Решение. Найдем изображение, используя теорему запаздывания и дифференцирования изображения. По теореме запаздывания оригинал e^{t-3} имеет изображение $e^{-3p}\dfrac{1}{p-1}$. Далее по теореме дифференцирования изображения найдем изображение для исходного оригинала

$$t^2e^{t-3} \risingdotseq (-1)^2\left(\frac{e^{-3p}}{p-1}\right)'' = \left(\frac{-3e^{-3p}(p-1)-e^{-3p}}{(p-1)^2}\right)' =$$
$$= \left(\frac{-3e^{-3p}p+3e^{-3p}-e^{-3p}}{(p-1)^2}\right)' = \left(\frac{2e^{-3p}-3pe^{-3p}}{(p-1)^2}\right)' =$$
$$= \frac{(-6e^{-3p}-3e^{-3p}+9pe^{-3p})(p-1)^2-2(p-1)(2e^{-3p}-3pe^{-3p})}{(p-1)^4} =$$

$$= \frac{(9pe^{-3p}-9e^{-3p})(p-1)-4e^{-3p}+6pe^{-3p}}{(p-1)^3} =$$
$$= \frac{9p^2e^{-3p}-9pe^{-3p}-9pe^{-3p}+9e^{-3p}-4e^{-3p}+6pe^{-3p}}{(p-1)^3} =$$
$$= \frac{9p^2e^{-3p}-12pe^{-3p}+5e^{-3p}}{(p-1)^3} = e^{-3p}\frac{9p^2-12p+5}{(p-1)^3}.$$

Ответ: $F(p) = e^{-3p}\dfrac{9p^2-12p+5}{(p-1)^3}$.

Пример 1.10. Пользуясь теоремой дифференцирования оригинала, найти изображение $f(t)$, если:

а) $f(t) = \sin 3t + t\cos 2t$; б) $f(t) = e^{-4t}\operatorname{sh} t$.

Решение: $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.

а) Найдем изображение для оригинала $f(t)$ с помощью таблицы изображений и теоремы о дифференцировании изображения

$$\sin 3t \risingdotseq \frac{3}{p^2+9},$$
$$t\cos 2t \risingdotseq -\left(\frac{p}{p^2+4}\right)' = -\frac{p^2+4-2p^2}{(p^2+4)^2} = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}.$$

Тогда $F(p) = \dfrac{3}{p^2+9} + \dfrac{p^2-4}{(p^2+4)^2}$.

Найдем значение оригинала при $t=0$, получим

$$f(0) = \sin 3\cdot 0 + 0\cdot\cos 2\cdot 0 = 0.$$

Окончательно, $f'(t) \risingdotseq \dfrac{3p}{p^2+9} + \dfrac{p(p^2-4)}{(p^2+4)^2}$.

б) Найдем изображение для оригинала $f(t)$, используя таблицу изображений и теорему смещения:

$$e^{-4t}\operatorname{sh} t \risingdotseq \frac{1}{(p^2+4)-1}, \quad f(0) = 0.$$

Тогда $f'(t) \risingdotseq \dfrac{p}{(p+4)^2-1}$.

Ответ: а) $f'(t) \risingdotseq \dfrac{3p}{p^2+9} + \dfrac{p(p^2-4)}{(p^2+4)^2}$, б) $f'(t) \risingdotseq \dfrac{p}{(p+4)^2-1}$.

Пример 1.11. Найти изображение дифференциального выражения $x''' - 6x'' - 11x' - 6x$, если $x(0)=0$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$ и $x(t) \risingdotseq X(p)$.

Решение. Воспользуемся теоремой дифференцирования оригинала. Пусть

$$x(t) \doteqdot X(p);$$
$$x'(t) \doteqdot pX'(p) - x(0) = pX(p);$$
$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1;$$
$$x'''(t) \doteqdot p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p) - p.$$

Отсюда находим

$$x''' - 6x'' - 11x' - 6x \doteqdot p^3X(p) - p - 6p^2X(p) + 6 - 11pX(p) -$$
$$- 6X(p) = X(p)(p^3 - 6p^2 - 11p - 6) - p + 6.$$

Ответ: $X(p)(p^3 - 6p^2 - 11p - 6) - p + 6$.

Пример 1.12. Найти изображение дифференциального выражения $4x''' - 8x'' - x' - 3x$, если $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$.

Решение. Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$. Тогда

$$x'(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$
$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 1;$$
$$x'''(t) \doteqdot p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p) - p^2 - p - 1.$$

Отсюда находим,

$$4x''' - 8x'' - x' - 3x \doteqdot 4p^3X(p) - 4p^2 - 4p - 4 -$$
$$- 8p^2X(p) + 8p + 8 - pX(p) + 1 - 3X(p) =$$
$$= X(p)(4p^3 - 8p^2 - p - 3) - 4p^2 + 4p + 5.$$

Ответ: $X(p)(4p^3 - 8p^2 - p - 3) - 4p^2 + 4p + 5$.

Пример 1.13. Пользуясь теоремой умножения изображений, найти изображения функций: а) $f(t) = \int\limits_0^t \sin 2(t-\tau) \operatorname{sh} \tau d\tau$; б) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^3 \cos 3\tau d\tau$; в) $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau) e^{-5\tau} d\tau$.

Решение. Свертка функции $f(t) = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$. По теореме свертывания (умножения изображений)

$$\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \risingdotseq F_1(p)F_2(p)$$

получим:

а) $\int\limits_0^t \sin 2(t-\tau)\operatorname{sh}\tau d\tau = f(t)$.

Здесь $f_1(t) = \sin 2t$, $f_2(t) = \operatorname{sh} t$. Используя таблицу изображений, имеем $\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$, $\operatorname{sh} t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2-1}$. Тогда

$$\int\limits_0^t \sin 2(t-\tau)\operatorname{sh}\tau d\tau \risingdotseq \frac{2}{(p^2+4)(p^2-1)}.$$

б) $f(t) = \int\limits_0^t (t-\tau)^3 \cos 3\tau d\tau$.

В данном случае $f_1(t) = t^3$, а $f_2(t) = \cos 3t$. Изображения для этих функций будут иметь вид: $t^3 \risingdotseq \dfrac{3!}{p^4}$, $\cos 3t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+9}$. Тогда по теореме умножения получим

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^3 \cos 3\tau d\tau \risingdotseq \frac{3!}{p^4}\cdot\frac{p}{p^2+9} = \frac{6}{p^3(p^2+9)}.$$

в) $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)e^{-5\tau}d\tau$.

В данном примере $f_1(t) = \operatorname{ch} t$, $f_2(t) = e^{-5t}$. Изображения будут записаны в виде $\operatorname{ch} t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-1}$, $e^{-5t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+5}$. Тогда изображение свертки представим выражением

$$\int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)e^{-5\tau}d\tau \risingdotseq \frac{p}{p^2-1}\cdot\frac{1}{p+5}.$$

Ответ: а) $\dfrac{2}{(p^2+4)(p^2-1)}$; б) $\dfrac{6}{p^3(p^2+9)}$; в) $\dfrac{p}{(p^2-1)(p+5)}$.

Пример 1.14. Найти изображение $y''(t)+y'(t)+3y(t)+$ $+\int\limits_0^t y(\tau)d\tau$, если $y'(0)=0$, $y(0)=1$ и $Y(p)\doteqdot y(t)$.

Решение. По теоремам дифференцирования и интегрирования оригинала $\left(\int\limits_0^t y(\tau)d(\tau)\doteqdot\dfrac{Y(p)}{p}\right)$ имеем

$$y''(t)\doteqdot p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p;$$
$$y'(t)\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)-1.$$

Отсюда находим

$$y''(t)+y'(t)+3y(t)+\int\limits_0^t y(\tau)d\tau\doteqdot p^2Y(p)-p+pY(p)-1+$$
$$+3Y(p)+\frac{Y(p)}{p}=Y(p)\frac{p^3+p^2+3p+1}{p}-p-1.$$

Ответ: $Y(p)=\dfrac{p^3+p^2+3p+1}{p}-p-1$.

Пример 1.15. Найти изображение функции-оригинала, заданной графически (см. рисунок).

Решение. Составим аналитическое выражение для функций-оригиналов, заданных на отрезках. Рассмотрим отрезок $[0,1]$. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $A(0,1)$ и $B(1,2)$. Воспользуемся формулой канонического уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{t-t_0}{t_1-t_0}=\frac{f(t)-f(t_0)}{f(t_1)-f(t_0)}. \qquad (1.2)$$

Подставляя координаты точек A и B в соотношении (1.2), получим

$$\frac{t-0}{1-0}=\frac{f(t)-1}{2-1}.$$

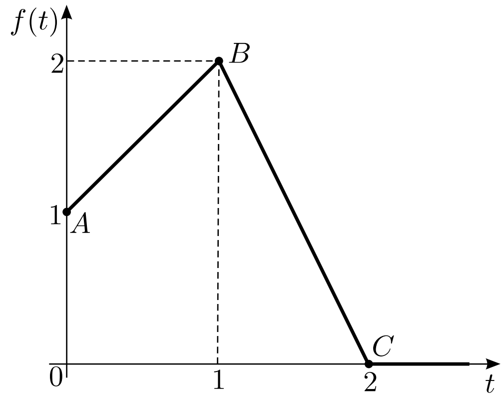

Рис. 1:

Выразим из последнего уравнения $f(t)$: $f(t) - 1 = t$, т.е. $f(t) = t + 1$. Составим уравнение прямой, проходящей через точки $B(1, 2)$ и $C(2, 0)$. Выполняя аналогичные действия, получим

$$\frac{t-1}{2-1} = \frac{f(t)-2}{0-2}; \quad \frac{t-1}{1} = \frac{f(t)-2}{-2}; \quad f(t) - 2 = 2 - 2t.$$

Окончательно, $f(t) = 4 - 2t$.

На отрезке $[2; +\infty)$ функция-оригинал равна нулю. Итак,

$$f(t) = \begin{cases} t+1, \quad t \in [0, 1); \\ 4 - 2t, \quad t \in [1, 2]; \\ 0, \quad t > 2. \end{cases}$$

Используя формулу (1.1), найдем изображение для оригинала $f(t)$:

$$F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int\limits_0^1(t+1)e^{-pt}dt+\int\limits_1^2(4-2t)e^{-pt}dt=$$
$$=\int\limits_0^1 te^{-pt}dt+\int\limits_0^1 e^{-pt}dt+4\int\limits_1^2 e^{-pt}dt-2\int\limits_1^2 te^{-pt}dt=$$
$$=\left(-\frac{1}{p}te^{-pt}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^1-\frac{1}{p}e^{-pt}\Bigg|_0^1-\frac{4}{p}e^{-pt}\Bigg|_1^2-$$
$$-2\left(-\frac{1}{p}te^{-pt}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right)\Bigg|_1^2=-\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p^2}e^{-p}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}-$$
$$-\frac{4}{p}e^{-2p}+\frac{4}{p}e^{-p}+\frac{4}{p}e^{-2p}-\frac{2}{p}e^{-p}+\frac{2}{p^2}e^{-2p}-\frac{2}{p^2}e^{-p}=$$
$$=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+e^{-p}\left(-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{4}{p}-\frac{2}{p}-\frac{2}{p^2}\right)+$$
$$+e^{-2p}\left(\frac{2}{p^2}\right)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}-e^{-p}\frac{3}{p^2}+e^{-2p}\frac{2}{p^2}.$$

Ответ: $F(p)=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p}-e^{-p}\dfrac{3}{p^2}+e^{-2p}\dfrac{2}{p^2}.$

Пример 1.16. Найти изображение дифференциального выражения $x^{(5)}(t)+4x^{(4)}(t)-3x''(t)+5x'(t)-2$, если $x(0)=1$, $x'(0)=2$, $x''(0)=3$, $x'''(0)=4$, $x^{(4)}(0)=5$, $x(t)\risingdotseq X(p)$.

Решение. Воспользуемся теоремой дифференцирования оригинала. Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, тогда

$$x'(t)\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-1;$$
$$x''(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-p-2;$$
$$x^{(4)}(t)\risingdotseq p^4X(p)-p^3x(0)-p^2x'(0)-px''(0)-x'''(0)=$$

$$= p^4X(p) - p^3 - 2p^2 - 3p - 4;$$

$$x^{(5)}(t) \risingdotseq p^5X(p) - p^4x(0) - p^3x'(0) - p^2x''(0) - px'''(0) -$$

$$- x^{(4)}(0) = p^5X(p) - p^4 - 2p^3 - 3p^2 - 4p - 5;$$

$$2 \risingdotseq \frac{2}{p}.$$

Отсюда находим

$$x^{(5)}(t) + 4x^{(4)}(t) - 3x''(t) + 5x'(t) - 2 \risingdotseq p^5X(p) - p^4 - 2p^3 -$$

$$- 3p^2 - 4p - 5 + 4(p^4X(p) - p^3 - 2p^2 - 3p - 4) -$$

$$- 3(p^2X(p) - p - 2) + 5(pX(p) - 1) - \frac{2}{p} =$$

$$= X(p)(p^5 + 4p^4 - 3p^2 + 5p) - p^4 - 2p^3 - 3p^2 - 4p - 5 - 4p^3 -$$

$$- 8p^2 - 12p - 16 + 3p + 6 - 5 - \frac{2}{p} = X(p)(p^5 + 4p^4 - 3p^2 + 5p) -$$

$$- p^4 - 6p^3 - 11p^2 - 13p - 20 - \frac{2}{p}.$$

Ответ: $x^{(5)}(t) + 4x^{(4)}(t) - 3x''(t) + 5x'(t) - 2 \risingdotseq X(p)(p^5 + 4p^4 - 3p^2 + 5p) - p^4 - 6p^3 - 11p^2 - 13p - 20 - \dfrac{2}{p}$.

Пример 1.17. Найти изображение $y''(t) + 3\cos 2t + \int\limits_0^t \sin\tau d\tau + t^3e^t$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ и $Y(p) \risingdotseq y(t)$.

Решение. Используя теорему дифференцирования оригинала, найдем изображение $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p - 1$. По теореме интегрирования оригинала получим, что $\int\limits_0^t \sin\tau d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

По теореме дифференцирования изображения имеем:

$$t^3e^t \risingdotseq (-1)^3\left(\frac{1}{p+1}\right)''' = \left(-\frac{2}{(p+1)^3}\right)' = \frac{6}{(p+1)^4}.$$

По таблице изображений получим $3\cos 2t \risingdotseq \dfrac{3p}{p^2+4}$.

Окончательно,

$$y''(t)+3\cos 2t+\int\limits_0^t \sin\tau d\tau + t^3e^t \risingdotseq p^2Y(p)-2p-1+$$
$$+\frac{3p}{p^2+4}+\frac{6}{(p+1)^4}+\frac{1}{p(p^2+1)}.$$

Ответ: $F(p)=p^2Y(p)-2p-1+\dfrac{3p}{p^2+4}+\dfrac{6}{(p+1)^4}+\dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти изображения следующих функций.

1. $f(t)=\operatorname{sh}3t\sin t$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(p-3)^2+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(p+3)^2+1}$.

2. $f(t)=\sin^2 t$.

Ответ: $\dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{p^2+4}$.

3. $f(t)=\dfrac{1}{3}t^3+4\cos t$.

Ответ: $\dfrac{2}{p^4}+\dfrac{4p}{p^2+1}$.

4. $f(t)=\dfrac{1}{3}\sin 3t-5$.

Ответ: $\dfrac{1}{p^2+9}-\dfrac{5}{p}$.

5. $f(t)=4-5e^{2t}$.

Ответ: $\dfrac{4}{p}-\dfrac{5}{p-2}$.

6. $f(t)=3t^3e^{-t}+2t^2-1$.

Ответ: $\dfrac{18}{(p+1)^4}+\dfrac{4}{p^3}-\dfrac{1}{p}$.

7. $f(t) = 2\sin 2t + 3\operatorname{sh} 2t$.

Ответ: $\dfrac{10p^2+8}{p^4-16}$.

8. $f(t) = t^2 e^t + 2te^{-t} + 4\operatorname{ch} 2t$.

Ответ: $\dfrac{2}{(p-1)^3} + \dfrac{2}{(p+1)^2} + \dfrac{4p}{p^2-4}$.

9. $f(t) = \cos 2t \sin 3t$.

Ответ: $\dfrac{5}{2(p^2+25)} + \dfrac{1}{2(p^2+1)}$.

10. $f(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} + e^{2t}\operatorname{ch} t$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{p}{2} + \dfrac{p-2}{(p-2)^2-1}$.

11. $f(t) = \dfrac{\sin t \cdot \sin 3t}{t} + 2\operatorname{sh} 4t - t^2$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+16}{p^2+4} + \dfrac{8}{p^2-16} - \dfrac{2}{p^3}$.

12. $f(t) = \dfrac{1-e^{2t}}{te^t} - e^t\cos^2 t$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+1}{p-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{p-1}{(p-1)^2+4}$.

13. $f(t) = e^{3t}\operatorname{ch} t - t\cos 3t$.

Ответ: $\dfrac{p-3}{(p-3)^2-9} - \dfrac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$.

14. $f(t) = t\cos(t+3)\eta(t+3) - (2t-5)\eta(2t-5)$.

Ответ: $e^{3p}\dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2} - e^{-5/2}\dfrac{4}{p^2}$.

15. $f(t) = (t+4)\eta(t+4) - \sin^2 4t$.

Ответ: $\dfrac{e^{4p}}{p^2} - \dfrac{1}{2p} + \dfrac{p}{2(p^2+64)}$.

16. $f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \le t \le 2; \\ 5-2t, & 2 < t \le 3; \\ 6-2t, & t > 3. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{5}{p} - \dfrac{1}{p}e^{-2p} - \dfrac{2}{p^2}e^{-2p}$.

17. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1; \\ 3, & t > 1. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{1}{p^2} + e^{-p}\left(\dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p^2}\right)$.

18. $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t \le 1; \\ -t^2 + 4t - 3, & 1 < t \le 3; \\ t - 3, & t > 3. \end{cases}$

Ответ: $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} + e^{-p}\left(\dfrac{3}{p^2} - \dfrac{2}{p^3}\right) + e^{-3p}\left(\dfrac{3}{p^2} + \dfrac{2}{p^3}\right)$.

19. $x^{(5)}(t) + 2x^{(3)}(t) + x'(t)$, если $x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(4)}(0) = 0$, $x(t) \risingdotseq X(p)$.

Ответ: $X(p)(p^5 + 2p^3 + p)$.

20. $y(t) - 2y'(t)$, если $y(0) = 0$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Ответ: $Y(p)(1 - 2p)$.

21. $y'''(t) - y''(t) + 2y'(t) - 2y(t)$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Ответ: $(p^3 - p^2 + 2p - 2)Y(p) - p - 1$.

22. $f(t) = y'(t) - \int\limits_0^t y(\tau)d\tau$, если $y(0) = 0$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$.

Ответ: $Y(p)\dfrac{p^2 - 1}{p}$.

23. $f(t) = \int\limits_0^t (t - \tau)\sin^2 \tau d\tau$.

Ответ: $\dfrac{2}{p^3(p^2 + 4)}$.

24. $f(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch}(t - \tau)e^{-2\tau}d\tau$.

Ответ: $\dfrac{p}{(p + 2)(p^2 - 1)}$.

Часть 2.
Отыскание оригинала по изображению

При отыскании оригинала по изображению в простейших случаях используют таблицу изображений основных элементарных функций и теоремы разложения. Приведем их без доказательства.

Теорема 2.1.(первая теорема разложения). *Пусть $F(p)$ — аналитическая функция на расширенной комплексной плоскости и точка $p = \infty$ правильная и $F(\infty) = 0$, т. е. ее ряд Лорана имеет вид*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k}{p^k}.$$

Тогда оригинал этого изображения дается формулой

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \dfrac{t^n}{n!}, & t > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Теорема 2.2.(вторая теорема разложения). *Пусть $F(p)$ — дробно-рациональная функция с полюсами $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Тогда*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{p_k} \left[F(p)e^{pt}\right]. \tag{2.4}$$

Если p_k — простые полюсы и $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$, где $A(p)$, $B(p)$ — многочлены без общих корней, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{2.5}$$

Теорема 2.3.(формула Меллина). *Если $F(p)$ — аналитическая функция в $\operatorname{Re} p > S_0$, $F(p) \to 0$ равномерно относительно $\arg p$, при $|p| \to \infty$, $\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < M$, то $F(p)$ является* *изображением функции*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p)dp \quad (x > S_0). \qquad (2.6)$$

Рассмотрим примеры с решениями.

Пример 2.18. Найти оригинал $f(t)$, если $F(p) = \sin \dfrac{1}{p}$.

Решение. Воспользуемся формулой разложения $\sin x$ в ряд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Тогда

$$\sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3!p^3} + \frac{1}{5!p^5} - \frac{1}{7!p^7} + \ldots.$$

Так как $F(p)$ удовлетворяет условию теоремы 2.1, имеем

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!}\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!}\frac{t^4}{4!} - \ldots.$$

Ответ: $f(t) = 1 - \dfrac{1}{3!}\dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{1}{5!}\dfrac{t^4}{4!} - \ldots$.

Пример 2.19. Найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Решение. Воспользуемся теоремой 2.2. Здесь

$$A(p) = 1, \quad B(p) = (p-1)(p^2+1).$$

Точки $p = 1$, $p = \pm i$ являются простыми полюсами функции $F(p)$. По формуле (2.5) имеем $B'(p) = 3p^2 - 2p + 1$.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = \frac{e^t}{2} - \frac{e^{it}}{2(1+i)} + \frac{e^{-it}}{2(i-1)} =$$

$$= \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it}(1-i) + e^{-it}(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right) =$$
$$= \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it} - ie^{it} + e^{-it} + ie^{-it}}{2}\right) =$$
$$= \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - i\frac{e^{it} - e^{-it}}{2}\right) = \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) =$$
$$= \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t).$$

Ответ: $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t)$.

Найти оригиналы по данным изображениям:

Пример 2.20. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$.

Решение. Воспользуемся теоремой 2.2. Точки

$$p_1 = 1, \quad p_{2,3} = \pm 2$$

являются простыми полюсами. По формуле (2.5) имеем

$$A(p) = 1, \quad B(p) = (p-1)(p^2-4) = p^3 - p^2 - 4p + 4,$$
$$B'(p) = 3p^2 - 2p - 4.$$

Далее, получим

$$\frac{A(p_1)}{B'(p_1)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}; \quad \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} = \frac{1}{3\cdot 4 - 2\cdot 2 - 4} = \frac{1}{4};$$
$$\frac{A(p_3)}{B'(p_3)} = \frac{1}{3(-2)^2 - 2(-2) - 4} = \frac{1}{12}.$$

Отсюда по формуле (2.5) находим

$$f(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}.$$

Ответ: $f(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-2t}$.

Пример 2.21. $F(p) = \dfrac{p+3}{p(p^2-4p+3)}$.

Решение. Поскольку в данном случае все корни знаменателя действительные и простые, воспользуемся формулой (2.5). Имеем

$$\begin{aligned}
&A(p) = p+3, \quad B(p) = p(p^2-4p+3) = p^3-4p^2+3p;\\
&B'(p) = 3p^2-8p+3.
\end{aligned}$$

Находим корни $B(p)$: $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 3$. Далее получим

$$\begin{aligned}
&\frac{A(p_1)}{B'(p_1)} = \frac{3}{3} = 1; \quad \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} = \frac{4}{3-8+3} = \frac{4}{-2} = -2;\\
&\frac{A(p_3)}{B'(p_3)} = \frac{6}{27-24+3} = \frac{6}{6} = 1.
\end{aligned}$$

Отсюда по формуле (2.5) находим

$$f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}.$$

Ответ: $f(t) = 1 - 2e^t + e^{3t}$.

Пример 2.22. $F(p) = \dfrac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$.

Решение. Используем элементарные приемы для разложения функции на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p(p^4-5p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-2} + \frac{E}{p+2}.$$

Для определения коэффициентов имеем тождество

$$\begin{aligned}
1 \equiv\ &A(p^4-5p^2+4) + Bp(p+1)(p^2-4) + Cp(p-1)(p^2-4)+\\
&+ Dp(p^2-1)(p+2) + Ep(p^2-1)(p-2).
\end{aligned}$$

Полагая $p = 0$, находим $1 = 4A$, $A = \dfrac{1}{4}$.

Полагая $p = 1$, имеем $1 = -6B$, $B = -\dfrac{1}{6}$.

При $p=-1$ получим $1=-6C$, $C=-\dfrac{1}{6}$.

При $p=2$ имеем $1=24D$, $D=\dfrac{1}{24}$.

При $p=-2$ находим $1=24E$, $E=\dfrac{1}{24}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{p(p^4-5p^2+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{p+2}.$$

Используя таблицу изображений, находим оригинал

$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{24}e^{2t}+\frac{1}{24}e^{-2t}.$$

Так как $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$, окончательно получим оригинал

$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\operatorname{ch}t+\frac{1}{12}\operatorname{ch}2t.$$

Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}t+\dfrac{1}{12}\operatorname{ch}2t$.

Пример 2.23. $F(p=\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$.

Решение. Воспользуемся второй теоремой разложения. Особыми точками $F(p)$ являются полюсы $p_1=0$ (II порядка) и $p_2=1$ (простой полюс). Вычислим вычеты в особых точках:

$$\operatorname*{res}_{p_1}F(p)e^{pt}=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left(p^2\cdot\frac{4-p-p^2}{p^2(p-1)}e^{pt}\right)=$$
$$=\lim_{p\to 0}\left(\frac{(p-1)(-1-2p)-(4-p-p^2)}{(p-1)^2}e^{pt}+\frac{4-p-p^2}{p-1}te^{pt}\right)=$$
$$=\frac{1-4}{1}+(-4)t=-3-4t;$$
$$\operatorname*{res}_{p_2}F(p)e^{pt}=\lim_{p\to 1}(p-1)\cdot\frac{4-p-p^2}{p^2(p-1)}e^{pt}=2e^{t}.$$

Следовательно, $f(t) = -3 - 4t + 2e^t$.

Ответ: $f(t) = -3 - 4t + 2e^t$.

Пример 2.24. $F(p) = \dfrac{1}{p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p}$.

Решение. Определим особые точки $F(p)$. Приравняем к нулю знаменатель функции изображения: $p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p = 0$; $p(p^3 - 6p^2 + 11p - 6) = 0$; $p_1 = 0$ или $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = 0$. Найдем один из корней кубического уравнения методом подбора. Равенство выполняется при $p_2 = 1$. Разделив кубический многочлен на $(p-1)$, получим $(p^2 - 5p + 6)$. Решая обычное квадратное уравнение, найдем оставшиеся два корня $p_3 = 2$ и $p_4 = 3$.

Итак, $p^4 - 6p^3 + 11p - 6p = p(p-1)(p-2)(p-3)$. Найденные решения последнего уравнения $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$ и $p_4 = 3$ являются полюсами I порядка.

Воспользуемся второй теоремой разложения

$$
\begin{aligned}
f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{p_k} \left(F(p)e^{pt}\right) &= \lim_{p\to 0}\left(p \cdot \frac{e^{pt}}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\right) + \\
&+ \lim_{p\to 1}\left((p-1) \cdot \frac{e^{pt}}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\right) + \\
&+ \lim_{p\to 2}\left((p-2) \cdot \frac{e^{pt}}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\right) + \\
&+ \lim_{p\to 3}\left((p-3) \cdot \frac{e^{pt}}{p(p-1)(p-2)(p-3)}\right) = \\
&= -\frac{1}{6} + \frac{e^t}{2} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{3t}}{6}.
\end{aligned}
$$

Окончательно, $f(t) = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{1}{2}e^{2t} + \dfrac{1}{6}e^{3t}$.

Ответ: $f(t) = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{1}{2}e^{2t} + \dfrac{1}{6}e^{3t}$.

Пример 2.25. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$

Решение. Для отыскания оригинала разложим функцию изображения на простейшие дроби и воспользуемся таблицей изображений элементарных функций:

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Тогда $f(t) = t - \sin t$.

Ответ: $f(t) = t - \sin t$.

Пример 2.26. $F(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

Решение. Воспользуемся формулой разложения $\ln(1+x)$ в ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Тогда $\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{1}{3p^3} - \dfrac{1}{4p^4} + \ldots$. Так как $F(p)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, имеем

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{24}t^3 + \ldots.$$

Ответ: $f(t) = 1 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{6}t^2 - \dfrac{1}{24}t^3 + \ldots$.

Пример 2.27. $F(p) = \dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

Решение. Для функции изображения $F(p)$ особая точка $p = -1$ является полюсом третьего порядка ($p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = (p+1)^3$). Воспользуемся второй теоремой разложения:

$$f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{p_k}\left(F(p)e^{pt}\right) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to-1}\frac{d^2}{dp^2}\left((p+1)^3\frac{p^2+2p-1}{(p+1)^3}e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\left((2p+2)e^{pt} + (p^2+2p-1)te^{pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to-1}\left(2e^{pt} + (2p+2)te^{pt} + (2p+2)te^{pt} + (p^2+2p-1)t^2e^{pt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2e^{-t} + (-3)t^2e^{-t}) = e^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t}.$$

Ответ: $f(t) = e^{-t} - \dfrac{3}{2}t^2e^{-t}$.

Пример 2.28. $F(p) = \dfrac{3-2p^3}{p^4}$.

Решение. Представим изображение $F(p)$ в виде разности простейших дробей: $F(p) = \dfrac{3-2p^3}{p^4} = \dfrac{3}{p^4} - \dfrac{2}{p}$. Используя теорему 2.1 и таблицу изображений перейдем к оригиналу:

$$f(t) = \frac{1}{2}t^3 - 2.$$

Ответ: $f(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - 2$.

Пример 2.29. $F(p) = \dfrac{4-p}{(p-2)^3}$.

Решение. Чтобы воспользоваться таблицей изображений элементарных функций, преобразуем изображение $F(p)$:

$$F(p) = \frac{4-p}{(p-2)^3} = -\frac{p-2-2}{(p-2)^3} = -\frac{1}{(p-2)^2} + \frac{2}{(p-2)^3}.$$

Используя теорему 2.1, получим $f(t) = -te^{2t} + t^2e^{2t}$.
Ответ: $f(t) = e^{2t}(t^2 - t)$.

Пример 2.30. $F(p) = \dfrac{2p+7}{(p+1)(p^2-3p)}$.

Решение. Особые точки $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, $p_3 = 3$ являются простыми полюсами функции $F(p)$. Воспользуемся теоремой 2.2 и найдем оригинал:

$$f(t) = \sum_k \operatorname*{res}_{p_k}\left(F(p)e^{pt}\right) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{2p+7}{p(p+1)(p-3)}e^{pt}\right) +$$
$$+ \lim_{p\to -1}\left((p+1)\frac{2p+7}{p(p+1)(p-3)}e^{pt}\right) +$$
$$+ \lim_{p\to 3}\left((p-3)\frac{2p+7}{p(p+1)(p-3)}e^{pt}\right) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{13}{12}e^{3t}.$$

Ответ: $f(t) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{13}{12}e^{3t}$.

Пример 2.31. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции $F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$.

Решение. Запишем $F(p)$ в виде $\frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2-1}$. В силу того что $\frac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t$, $\frac{1}{p^2-1} \doteqdot \operatorname{sh} t$, по теореме свертывания имеем

$$\frac{p}{p^4-1} \doteqdot \int\limits_0^t \cos(t-\tau) \operatorname{sh} \tau d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t (\cos t \cos \tau \operatorname{sh} \tau + \sin t \sin \tau \operatorname{sh} \tau) d\tau = \cos t \int\limits_0^t \cos \tau \operatorname{sh} \tau d\tau +$$

$$+ \sin t \int\limits_0^t \sin \tau \operatorname{sh} \tau d\tau = \cos t \int\limits_0^t \cos \tau \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} d\tau +$$

$$+ \sin t \int\limits_0^t \sin \tau \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} d\tau = \cos t \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^t e^\tau \cos \tau d\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int\limits_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau \right) + \sin t \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^t \sin \tau e^\tau d\tau - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \sin \tau e^{-\tau} d\tau \right).$$

Обозначим $I = \cos t \left(\frac{1}{2} \int_0^t e^\tau \cos \tau d\tau - -\frac{1}{2} \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau \right) + \sin t \left(\frac{1}{2} \int_0^t \sin \tau e^\tau d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \sin \tau e^{-\tau} d\tau \right)$. Выпишем отдельно внутренние интегралы и решим их рекуррентным методом.

1. $$\int\limits_0^t e^{\tau}\cos\tau d\tau=\begin{bmatrix} u=\cos\tau \\ du=-\sin\tau d\tau \\ e^{\tau}d\tau=dv \\ v=e^{\tau}\end{bmatrix}=e^{\tau}\cos\tau\Big|_0^t+\int\limits_0^t e^{\tau}\sin\tau d\tau=$$

$$=e^t\cos t-1+\begin{bmatrix} u=\sin\tau \\ du=\cos\tau d\tau \\ dv=e^{\tau}d\tau \\ v=e^{\tau}\end{bmatrix}+e^{\tau}\sin\tau\Big|_0^t-\int\limits_0^t e^{\tau}\cos\tau d\tau\Rightarrow$$

$$2\int\limits_0^t \cos\tau d\tau=e^t\cos t-1+e^t\sin t.$$

Тогда $\int\limits_0^t e^{\tau}\cos\tau d\tau=\frac{1}{2}(e^t\cos t+e^t\sin t-1)$.

2. $$\int\limits_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau=\begin{bmatrix} u=\cos\tau \\ du=-\sin\tau d\tau \\ e^{-\tau}d\tau=dv \\ v=-e^{\tau}\end{bmatrix}=-e^{-\tau}\cos\tau\Big|_0^t-$$

$$-\int\limits_0^t e^{-\tau}\sin\tau d\tau=-e^{-t}\cos t+1-\begin{bmatrix} u=\sin\tau \\ du=\cos\tau d\tau \\ dv=e^{-\tau}d\tau \\ v=-e^{-\tau}\end{bmatrix}-$$

$$-\left(-e^{-\tau}\sin\tau\Big|_0^t+\int\limits_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau\right)=-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t+1-$$

$$-\int\limits_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau.$$

Окончательно, $\int\limits_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau=\frac{1}{2}(1-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t)$.

3. $\int\limits_0^t e^{\tau}\sin\tau d\tau = \begin{bmatrix} u=\sin\tau \\ du=\cos\tau d\tau \\ e^{\tau}d\tau=dv \\ v=e^{\tau} \end{bmatrix} = e^{\tau}\sin\tau\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{\tau}\cos\tau d\tau =$

$= e^t\sin t - \left(e^{\tau}\cos\tau\Big|_0^t + \int\limits_0^t e^{\tau}\sin\tau d\tau \right) \Rightarrow$

$$\int\limits_0^t e^{\tau}\sin\tau d\tau = \frac{1}{2}\left(e^t\sin t - e^t\cos t + 1\right).$$

4. $\int\limits_0^t e^{-\tau}\sin\tau d\tau = \begin{bmatrix} u=\sin\tau \\ du=\cos\tau d\tau \\ e^{-\tau}d\tau=dv \\ v=-e^{-\tau} \end{bmatrix} = -e^{-\tau}\sin\tau\Big|_0^t +$

$+ \int\limits_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau = -e^{-t}\sin t + \left(-e^{-\tau}\cos\tau\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^{-\tau}\sin\tau d\tau \right) =$

$= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1 - \int\limits_0^t e^{-\tau}\sin\tau d\tau \Rightarrow$

$$\int\limits_0^t e^{-\tau}\sin\tau d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t).$$

Подставим найденные интегралы и окончательно получим

$I = \cos t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^t\cos t + e^t\sin t - 1) - \cos t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1 - e^{-t}\cos t +$

$+ e^{-t}\sin t) + \sin t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^t\sin t - e^t\cos t + 1) -$

$- \sin t\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1 - e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t) = \frac{1}{4}e^t\cos^2 t +$

$$+\frac{1}{4}e^t\cos t\sin t-\frac{1}{4}\cos t+\frac{1}{4}e^{-t}\cos^2 t-\frac{1}{4}e^{-t}\cos t\sin t+$$
$$+\frac{1}{4}e^t\sin^2 t-\frac{1}{4}e^t\cos t\sin t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\sin^2 te^{-t}+$$
$$+\frac{1}{4}e^{-t}\sin t\cos t=\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\cos t=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t-\cos t).$$

Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t-\cos t)$.

Пример 2.32. Найти оригинал функции

$$F(p)=\frac{p+2}{p^2(p^2-2p+5)}.$$

Решение. Разложим функцию изображения на простейшие дроби:

$$\frac{p+2}{p^2(p^2-2p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cp+D}{p^2-2p+5}.$$

Для определения неизвестных A, B, C, D воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Домножим обе части равенства на знаменатель $p^2(p^2-2p+5)$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$p+2=Ap(p^2-2p+5)+B(p^2-2p+5)+(Cp+D)p^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
p^3:&\quad A+C=0;\\
p^2:&\quad -2A+B+D=0;\\
p^1:&\quad 5A-2B=1;\\
p^0:&\quad 5B=2.
\end{aligned}$$

Система для нахождения неизвестных коэффициентов имеет вид:

$$\begin{cases} A + C = 0; \\ -2A + B + D = 0; \\ 5A - 2B = 1; \\ 5B = 2. \end{cases}$$

Откуда, $B = 2/5$, $A = 7/35$, $C = -7/35$, $D = 0$. С учетом найденных коэффициентов функция-изображение запишется следующим образом:

$$F(p) = \frac{7}{35}\frac{1}{p} + \frac{2}{5}\frac{1}{p^2} - \frac{7}{35}\frac{p}{p^2 - 2p + 5}.$$

Используя таблицу изображений, найдем оригинал для каждого слагаемого

$$\begin{aligned} &\frac{7}{35}\frac{1}{p} \risingdotseq \frac{7}{35}; \quad \frac{2}{5}\frac{1}{p^2} \risingdotseq \frac{2}{5}t; \\ &\frac{p}{p^2 - 2p + 5} = \frac{p}{(p-1)^2 + 4} = \frac{p - 1 + 1}{(p-1)^2 + 4} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \\ &+ \frac{1}{(p-1)^2 + 4} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2 + 4} \risingdotseq \\ &\risingdotseq e^t \cos 2t + \frac{1}{2} e^t \sin 2t. \end{aligned}$$

Окончательно получим следующее выражение для оригинала:

$$f(t) = \frac{7}{35} + \frac{2}{5}t - \frac{7}{35}e^t \left(\cos 2t + \frac{1}{2}e^t \sin 2t\right).$$

Ответ: $f(t) = \frac{7}{35} + \frac{2}{5}t - \frac{7}{35}e^t \left(\cos 2t + \frac{1}{2}e^t \sin 2t\right).$

Пример 2.33. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции $F(p) = \dfrac{p}{(p^2 + 9)(p - 3)}$.

Решение. Запишем $F(p)$ в виде $\dfrac{p}{p^2+9}\cdot\dfrac{1}{p-3}$. В силу того, что $\dfrac{p}{p^2+9}\doteqdot\cos 3t$, $\dfrac{1}{p-3}\doteqdot e^{3t}$, по теореме свертывания имеем

$$\frac{p}{(p^2+9)(p-3)}\doteqdot\int\limits_0^t e^{3(t-\tau)}\cos 3\tau d\tau=\frac{1}{3}e^{3t}\int\limits_0^t e^{-3\tau}\cos 3\tau d(3\tau).$$

Воспользуемся результатом предыдущего примера

$$\int\limits_0^t e^{-\tau}\cos\tau d\tau=\frac{1}{2}(-e^{-t}\cos t+e^{-t}\sin t+1).$$

$$\frac{1}{3}e^{3t}\int\limits_0^t e^{-3\tau}\cos 3\tau d(3\tau)=\frac{1}{3}e^{3t}\frac{1}{2}\left(1-e^{-3t}\cos 3t+e^{-3t}\sin 3t\right)=$$
$$=\frac{1}{6}e^{3t}-\frac{1}{6}\cos 3t+\frac{1}{6}\sin 3t.$$

Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{6}e^{3t}-\dfrac{1}{6}\cos 3t+\dfrac{1}{6}\sin 3t$.

Пример 2.34. Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+4)}$.

Решение. Запишем изображение в виде $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p^2}\cdot\dfrac{2}{p^2+4}$. Так как $\dfrac{1}{p^2}\doteqdot t$, $\dfrac{2}{p^2+4}\doteqdot\sin 2t$, то по теореме свертывания получим

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}\frac{2}{p^2+4}\doteqdot\frac{1}{2}\int\limits_0^t(t-\tau)\sin 2\tau d\tau=\frac{1}{2}\int\limits_0^t t\sin 2\tau d\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\tau\sin 2\tau d\tau=$$

$$= \left[\int\limits_0^t \tau \sin 2\tau d\tau = \begin{bmatrix} u = \tau; & \sin 2\tau d\tau = dV; \\ du = d\tau; & V = -\frac{1}{2}\cos 2\tau \end{bmatrix} = \right.$$

$$= -\frac{1}{2}\tau \cos 2\tau \Big|_0^t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \cos 2\tau d\tau = -\frac{1}{2} t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2\tau\Big|_0^t =$$

$$\left. = -\frac{1}{2} t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t \right] = \frac{1}{2} t \cdot \frac{1}{2}(-\cos 2\tau)\Big|_0^t -$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) =$$

$$= \frac{1}{4} t\cos 2t + \frac{1}{4} t + \frac{1}{4} t\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t =$$

$$= \frac{t}{4} - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

Ответ: $f(t) = \dfrac{t}{4} - \dfrac{1}{8}\sin 2t.$

Задачи для самостоятельного решения

Найти оригинал для заданного изображения.

1. $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p + 5}.$

Ответ: $e^{-2t}\sin t.$

2. $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 4p + 3}.$

Ответ: $e^{-2t}\operatorname{sh} t.$

3. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2 + 1)^2}.$

Ответ: $\dfrac{1}{8}\sin t - \dfrac{1}{2}\cos t.$

4. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}t\sin t$.

5. $F(p) = \dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

Ответ: $1 - e^{-t} - t^2e^{-t}$.

6. $F(p) = \dfrac{1}{7-p+p^2}$.

Ответ: $e^{\frac{1}{2}t}\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$.

7. $F(p) = \dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}t^2 + 2e^{-t}\sin t$.

8. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

Ответ: $-\dfrac{3}{5}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{2t} + \dfrac{1}{10}\cos 2t - \dfrac{4}{5}\sin 2t$.

9. $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)}$.

Ответ: $1 - \cos t$.

10. $F(p) = \dfrac{1}{p^3(p-1)}$.

Ответ: $\dfrac{-t^2-2t-2}{2}$.

11. $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+1)^2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\cos 2t + \cos t - \dfrac{1}{2}$.

12. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{6}e^{-t}+e^{-2t}-\dfrac{3}{2}e^{-3t}+\dfrac{2}{3}e^{-4t}$.

13. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$.

Ответ: $\dfrac{3}{8}e^{t}-\dfrac{7}{12}te^{t}+\dfrac{1}{4}t^2e^{t}-\dfrac{1}{24}e^{-t}-e^{\frac{t}{2}}\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}te^{\frac{t}{2}}$.

14. $F(p)=\dfrac{1}{p^4+2p^3+2p^2+2p+1}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}e^{-t}+\dfrac{1}{2}te^{-t}-\dfrac{1}{2}\cos t$.

15. $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3}e^{-t}+\dfrac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{t}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$.

16. $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

Ответ: $\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{5}e^{-2t}\cos t+\dfrac{4}{5}e^{-2t}\sin t$.

17. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{9}e^{t}+\dfrac{1}{3}te^{t}+\dfrac{1}{9}e^{-2t}$.

18. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

Ответ: $e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

19. $F(p)=\dfrac{6p^3+4p+1}{p^4+p^2}$.

Ответ: $2\cos t - \sin t + 4 + t$.

20. $F(p) = \dfrac{5p^3 + 3p^2 + 12p - 12}{p^4 - 16}$.

Ответ: $4\operatorname{ch} 2t + \cos 2t + \dfrac{3}{2}\sin 2t$.

21. $F(p) = \dfrac{5p^3 + 5p^2 - 11p + 3}{p^3(p+3)}$.

Ответ: $3 - 4t + \dfrac{1}{2}t^2 + 2e^{-3t}$.

22. $F(p) = \dfrac{p}{(2p-1)(p-3)}$.

Ответ: $\dfrac{3}{5}e^{3t} - \dfrac{1}{5}e^{\frac{t}{2}}$.

Часть 3.
Приложения операционного исчисления

Если дано линейное дифференциальное уравнение n–го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(t),$$

правая часть которого $f(t)$ является оригиналом, то и решение этого уравнения, удовлетворяющее произвольным начальным условиям вида $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$ (т. е. решение задачи Коши, поставленной для этого уравнения, с начальными условиями при $t = 0$), служит оригиналом. Обозначая изображение этого решения через $Y(p)$, находим изображение левой части исходного дифференциального уравнения и приравнивая его изображению $f(t)$, приходим к так называемому изображающему уравнению, которое всегда является линейным алгебраическим уравнением относительно $Y(p)$. Определив из этого уравнения $Y(p)$, находим оригинал $y(t)$.

Тот же метод перехода к изображающему уравнению позволяет легко найти решение интегральных уравнений вида:

$$\int\limits_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t), \quad y(t) + \int\limits_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau,$$

в которых функции $K(t)$ и $f(t)$ являются оригиналами, поскольку входящий в эти уравнения интеграл является сверткой функций $y(t)$ и $K(t)$.

Рассмотрим примеры с решениями.

Пример 3.35. Решить уравнение $x''+4x=2$, $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Перейдем к изображающему уравнению, используя формулы дифференцирования оригинала и таблицу изображений элементарных функций:

$$x''(t) \doteqdot p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p),$$
$$x(t) \doteqdot X(p),$$
$$2 \doteqdot \frac{2}{p}.$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, получим: $p^2X(p) + 4X(p) = \frac{2}{p}$. Выразим из уравнения изображение $X(p)$. Тогда $X(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}$. Разложим на простейшие дроби:

$$\frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+c}{p^2+4}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, вычислим неизвестные A, B, C. Домножим обе части равенства на знаменатель:

$$\frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{A(p^2+4)}{p(p^2+4)} + \frac{p(Bp+c)}{p(p^2+4)};$$
$$2 = A(p^2+4) + (Bp+C)p;$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$\begin{aligned} p^2: &\quad A + B = 0; \\ p^1: &\quad C = 0; \\ p^0: &\quad 4A = 2. \end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, имеем $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 0$. Окончательно изображение примет вид:

$$X(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}.$$

Используя таблицу изображений, получим выражения для искомой функции-оригинала $x(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2t$.

Ответ: $x(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2t$.

Пример 3.36. Решить уравнение $x' + x = e^t$, $x(0) = 0$.

Решение. Пусть $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p)$, $x(t) \risingdotseq X(p)$ и $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$. Перейдем к изображающему уравнению:

$$pX(p) + X(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Выражая $X(p)$, получим:

$$X(p) = \frac{1}{(p-1)(p+1)} \quad \text{или} \quad X(p) = \frac{1}{p^2-1}.$$

Тогда искомая функция $x(t)$ имеет вид: $x(t) = \operatorname{sh} t$.

Ответ: $x(t) = \operatorname{sh} t$.

Пример 3.37. Решить уравнение $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда с учетом начальных условий изображения производных имеют вид:

$$\begin{aligned}
&x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) + 1;\\
&x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + p;\\
&e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}.
\end{aligned}$$

Подставляя в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$p^2X(p) + p + pX(p) + 1 - 2X(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Выразим изображение $X(p)$:

$$X(p)(p^2+p-2)=\frac{1}{p-1}-p-1;$$
$$X(p)=\frac{1-p^2+1}{(p-1)(p^2+p-2)};$$
$$X(p)=\frac{2-p^2}{(p-1)(p^2+p-2)};$$
$$X(p)=\frac{2-p^2}{(p-1)^2(p+2)}.$$

Найдем оригинал с помощью вычетов

$$x(t)=\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left(\frac{2-p^2}{p+2}e^{pt}\right)+\lim_{p\to -2}\left(\frac{2-p^2}{(p-1)^2}e^{pt}\right)=$$
$$=\lim_{p\to 1}\left(\frac{-2p(p+2)-2+p^2}{(p+2)^2}e^{pt}+\frac{2-p^2}{p+2}te^{pt}\right)-\frac{2}{9}e^{-2t}=$$
$$=\frac{1}{3}te^t-\frac{7}{9}e^t-\frac{2}{9}e^{-2t}.$$

Ответ: $x(t)=\frac{1}{3}te^t-\frac{7}{9}e^t-\frac{2}{9}e^{-2t}$.

Пример 3.38. Решить уравнение

$$x''+4x=\cos 3t,\quad x(0)=x'(0)=2.$$

Решение. Пусть $x(t)\doteqdot X(p)$, тогда

$$x''(t)\doteqdot p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-2p-2,$$
$$\cos 3t\doteqdot\frac{p}{p^2+9}.$$

С учетом найденных изображений получим следующее изображающее уравнение:

$$p^2X(p)-2p-2+4X(p)=\frac{p}{p^2+9}.$$

Выразим $X(p)$:

$$X(p)(p^2+4) = \frac{p}{p^2+9} + 2p + 2,$$
$$X(p)(p^2+4) = \frac{p + 2p^3 + 18p + 2p^2 + 18}{p^2+9}.$$

Окончательно, $X(p) = \dfrac{2p^3 + 2p^2 + 19p + 18}{(p^2+9)(p^2+4)}$. Разложим на простейшие дроби:

$$\frac{2p^3 + 2p^2 + 19p + 18}{(p^2+9)(p^2+4)} = \frac{Ap+B}{p^2+9} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим систему для определения неизвестных A, B, C, D:

$$A + C = 2, \quad B + D = 2, \quad 4A + 9C = 19, \quad 4B + 9D = 18.$$

Откуда, $A = -\dfrac{1}{5}$, $B = 0$, $C = \dfrac{11}{5}$, $D = 2$. С учетом вычисленных коэффициентов изображение примет вид:

$$X(p) = -\frac{1}{5}\frac{p}{p^2+9} + \frac{11}{5}\frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}.$$

Используя таблицу изображений, получим

$$x(t) = -\frac{1}{5}\cos 3t + \frac{11}{5}\cos 2t + \sin 2t.$$

Ответ: $x(t) = -\dfrac{1}{5}\cos 3t + \dfrac{11}{5}\cos 2t + \sin 2t$.

Пример 3.39. Решить уравнение

$$x'' + 4x = t^2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение. Запишем изображающее уравнение для данного дифференциального уравнения: $p^2X(p) + 4X(p) = \dfrac{2}{p^3}$. Откуда

$X(p) = \dfrac{2}{p^3(p^2+4)}$. Раскладывая на простейшие дроби, получим $X(p) = -\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{p^3} + \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{p}{p^2+4}$. Переходя к оригиналам, решение дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$x(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}\cos 2t.$$

Ответ: $x(t) = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{8}\cos 2t.$

Рассмотрим решение систем дифференциальных уравнений.

Пример 3.40. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y; \\ \dot{y} = 4x - 3y, \end{cases}$$

если $x(0) = 0 = y(0) = 1$.

Решение. Перейдя к изображениям, имеем

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 3X(p) + 4Y(p); \\ pY(p) - 1 = 4X(p) - 3Y(p). \end{cases}$$

Решим систему относительно $X(p)$ и $Y(p)$. Для этого выразим из второго уравнения $Y(p)$:

$$\begin{aligned} &pY(p) + 3Y(p) = 4X(p) + 1; \\ &Y(p)(p+3) = 4X(p) + 1; \\ &Y(p) = \frac{4X(p)+1}{p+3}. \end{aligned}$$

Подставим в первое уравнение:

$$
\begin{aligned}
&pX(p) - 1 = 3X(p) + \frac{16X(p) + 4}{p+3};\\
&pX(p)(p+3) - (p+3) = 3X(p)(p+3) + 16X(p) + 4;\\
&p^2X(p) + 3pX(p) - p - 3 = 3pX(p) + 9X(p) + 16X(p) + 4;\\
&p^2X(p) - 25X(p) = 7 + p;\\
&X(p) = \frac{7+p}{p^2-25}.
\end{aligned}
$$

Возвращаясь к $Y(p)$, получим

$$
Y(p) = \frac{4\frac{7+p}{p^2-25} + 1}{p+3} = \frac{28 + 4p + p^2 - 25}{(p^2-25)(p+3)} = \frac{p^2 + 4p + 3}{(p^2-25)(p+3)} =
$$

$$
= \frac{(p+3)(p+1)}{(p^2-25)(p+3)} = \frac{p+1}{p^2-25}.
$$

Итак,

$$
\begin{cases}
X(p) = \dfrac{7+p}{p^2-25},\\
Y(p) = \dfrac{p+1}{p^2-25}.
\end{cases}
$$

Перейдем от изображений к оригиналам:

$$
\begin{aligned}
&\frac{p+7}{p^2-25} = \frac{p}{p^2-25} + \frac{7}{5}\frac{5}{p^2-25} \risingdotseq \operatorname{ch} 5t + \frac{7}{5}\operatorname{sh} 5t;\\
&\frac{p+1}{p^2-25} = \frac{p}{p^2-25} + \frac{1}{5}\frac{5}{p^2-25} \risingdotseq \operatorname{ch} 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sh} 5t.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $x(t) = \operatorname{ch} 5t + \frac{7}{5}\operatorname{sh} 5t$, $y(t) = \operatorname{ch} 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sh} 5t$.

Ответ: $x(t) = \operatorname{ch} 5t + \frac{7}{5}\operatorname{sh} 5t$, $y(t) = \operatorname{ch} 5t + \frac{1}{5}\operatorname{sh} 5t$.

Пример 3.41. Решить систему

$$
\begin{cases}
\dot{x} + y = 0;\\
\dot{y} - 2x - 2y = 0,
\end{cases}
$$

если $x(0) = y(0) = 1$.

Решение. Перейдя к изображениям, получим:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = 0; \\ pY(p) - 1 - 2X(p) - 2Y(p) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} pX(p) + Y(p) = 1; \\ -2X(p) + Y(p)(p-2) = 1. \end{cases}$$

Найдем изображения для $X(p)$ и $Y(p)$. Умножим первое уравнение на 2, второе на p и сложим:

$$2Y(p) + Y(p)(p-2)p = 2 + p.$$

Тогда,

$$Y(p) = \frac{2+p}{p^2 - 2p + 2} \quad \text{или} \quad Y(p) = \frac{p+2}{(p-1)^2 + 1}.$$

Найдем оригинал для данного изображения, предварительно преобразовав $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{p+2}{(p-1)^2+1} = \frac{p-1+3}{(p-1)^2+1} = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + 3\frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Используя теорему смещения, получим:

$$y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t.$$

Найдем изображение для $X(p)$. Умножим первое уравнение на $p-2$ и вычтем второе уравнение системы, получим $p(p-2)X(p) + 2X(p) = p - 2 - 1$. Тогда,

$$X(p) = \frac{p-3}{p^2 - 2p + 2} \quad \text{или} \quad X(p) = \frac{p-3}{(p-1)^2 + 1}.$$

Перейдем к оригиналу

$$\frac{p-3}{(p-1)^2+1} = \frac{p-1-2}{(p-1)^2+1} = \frac{p-1}{(p-1)^2+1} - \frac{2}{(p-1)^2+1} \risingdotseq$$
$$\risingdotseq e^t \cos t - 2e^t \sin t.$$

Таким образом, $x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t$.

Окончательно, решение системы имеет вид:

$$x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t, \quad y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t.$$

Ответ: $x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t$.

Пример 3.42. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = x + z, \end{cases}$$

если $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 3$.

Решение. С учетом начальных условий перейдем к изображающим уравнениям:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = Y(p) - Z(p), \\ pY(p) - 2 = X(p) + Y(p), \\ pZ(p) - 3 = X(p) + Z(p). \end{cases}$$

Перепишем систему следующим образом

$$\begin{cases} pX(p) - Y(p) + Z(p) = 1, \\ -X(p) + Y(p)(p-1) = 2, \\ -X(p) + Z(p)(p-1) = 3. \end{cases}$$

Разрешая систему относительно изображений $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$, получаем

$$X(p) = \frac{p-2}{p(p-1)}, \; Y(p) = \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2}, \; Z(p) = \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2}.$$

Для нахождения оригиналов воспользуемся методом разложения на простейшие дроби. Тогда,

$$X(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1}, \quad Y(p) = -\frac{2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2},$$
$$Z(p) = -\frac{2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Решение исходной системы будем иметь вид:

$$\begin{cases} x(t) = 2 - e^t, \\ y(t) = -2 + 4e^t - te^t, \\ z(t) = -2 + 5e^t - te^t. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = 2 - e^t, \\ y(t) = -2 + 4e^t - te^t, \\ z(t) = -2 + 5e^t - te^t. \end{cases}$$

Рассмотрим решение интегральных уравнений.

Пример 3.43. Решить интегральное уравнение $y = \int\limits_0^t y dt + 1$.

Решение. Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$, $\int\limits_0^t y dt \doteqdot \dfrac{Y(p)}{p}$, $1 \doteqdot \dfrac{1}{p}$. Построим изображающее уравнение

$$Y(p) = \frac{Y(p)}{p} + \frac{1}{p}, \quad Y(p)(p-1) = 1, \quad Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, $y(t) = e^t$.

Ответ: $y(t) = e^t$.

Пример 3.44. Решить интегральное уравнение

$$\int\limits_0^t y(\tau)(t-\tau)^2 d\tau = \frac{1}{3} t^3.$$

Решение. Составим изображающее уравнение. Левая часть уравнения является сверткой функций $y(t)$ и t^2. Переходя к изображениям, получаем

$$Y(p) \cdot \frac{2}{p^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{p^4}.$$

Следовательно, $Y(p) = \dfrac{1}{p}$ и $y(t) = 1$.

Ответ: $y(t) = 1$.

Пример 3.45. Решить интегральное уравнение

$$\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = t + t^2.$$

Решение. Левая часть уравнения является сверткой функций $y(t)$ и $\cos t$. Переходя к изображениям, получаем

$$Y(p)\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3}, \quad Y(p)\cdot\frac{p}{p^2+1} = \frac{p+2}{p^3},$$
$$Y(p) = \frac{(p+2)(p^2+1)}{p^4}, \quad Y(p) = \frac{p^3+2p^2+p+2}{p^4}.$$

В изображении разделим почленно числитель на знаменатель. Тогда $Y(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{1}{p^3} + \dfrac{2}{p^4}$. Переходя к оригиналам, получим

$$y(t) = 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3.$$

Ответ: $y(t) = 1 + 2t + \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{3}t^3$.

Пример 3.46. Решить интегральное уравнение

$$\int\limits_0^t y(\tau)e^{2(t-\tau)}d\tau = t^2e^t.$$

Решение. В левой части уравнения записана свертка функций $y(t)$ и e^{2t}. Перейдем к изображающему уравнению

$$Y(p)\frac{1}{p-2} = \frac{2}{(p-1)^3}, \quad Y(p) = \frac{2(p-2)}{(p-1)^3}.$$

Используя вычеты, определим оригинал $y(t)$:

$$y(t) = \operatorname*{res}_{p=1}\left(\frac{2(p-2)}{(p-1)^3}e^{pt}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\lim_{p\to1}\frac{d^2}{dp^2}\left((p-2)e^{pt}\right) =$$
$$= \lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left(e^{pt}+te^{pt}(p-2)\right) = \lim_{p\to1}\left(te^{pt}+t^2e^{pt}(p-2)+te^{pt}\right) =$$
$$= te^t + t^2e^t(-1) + te^t = 2te^t - t^2e^t = e^tt(2-t).$$

Ответ: $y(t) = e^tt(2-t)$.

Пример 3.47. Решить уравнение $x'' - 3x' + 5x = e^t$, если $x(0) = x'(0) = 1$.

Решение. Перейдем к изображающему уравнению

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - p - 1;$$
$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$
$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1};$$
$$p^2X(p) - p - 1 - 3pX(p) + 3 + 5X(p) = \frac{1}{p-1};$$
$$X(p)(p^2-3p+5) = \frac{1}{p-1} + p - 2;$$
$$X(p)(p^2-3p+5) = \frac{1+(p-2)(p-1)}{p-1};$$
$$X(p) = \frac{1+p^2-3p+2}{(p-1)(p^2-3p+5)}.$$

Окончательно изображение имеет вид

$$X(p) = \frac{p^2-3p+3}{(p-1)(p^2-3p+5)}.$$

Разложим на простейшие дроби

$$\frac{p^2-3p+3}{(p-1)(p^2-3p+5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2-3p+5}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, вычислим неизвестные A, B, C

$$A(p^2-3p+5)+(Bp+C)(p-1)=p^2-3p+3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получим систему

$$\begin{cases} A+B=1; \\ -3A-B+C=-3; \\ 5A-C=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1-A; \\ C=5A-3; \\ -3A-1+A+5A-3=-3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=1-A; \\ C=5A-3; \\ 3A=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/3; \\ B=2/3; \\ C=-4/3. \end{cases}$$

С учетом найденных коэффициентов изображение имеет вид:

$$X(p)=\frac{1}{3}\frac{1}{p-1}+\frac{2}{3}\frac{p}{p^2-3p+5}-\frac{4}{3}\frac{1}{p^2-3p+5}.$$

Используя таблицу изображений, получим:

$$\frac{1}{p-1} \doteqdot e^t;$$

$$\frac{p}{p^2-3p+5}=\frac{p}{p^2-2p\cdot\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{4}+5}=\frac{p}{\left(p-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}}=$$

$$= \frac{p - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}}}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} \risingdotseq$$

$$= e^{3/2t} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t + \frac{3\sqrt{11}}{11} e^{3/2t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t;$$

$$\frac{1}{p^2 - 3p + 5} = \frac{1}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{11}}}{\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{11}}{11} e^{3/2t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t.$$

Окончательно, искомая функция-оригинал имеет вид:

$$x(t) = \frac{1}{3} \cdot p^t + \frac{2}{3} \left(e^{3/2t} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t + \frac{3\sqrt{11}}{11} e^{3/2t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t \right) -$$

$$- \frac{4}{3} \cdot \frac{2\sqrt{11}}{11} e^{3/2t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t$$

или

$$x(t) = \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} e^{3/2t} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t - \frac{2\sqrt{11}}{33} e^{3/2t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t.$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{3} e^t + \frac{2}{3} e^{3/2t} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} t - \frac{2\sqrt{11}}{33} e^{3/2t} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} t.$

Пример 3.48. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y; \\ \dot{y} = x + 2y - 1, \end{cases}$$

если $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$,

$\dot{x}(t) \doteqdot pX(p) - x(0) = pX(p)$, $\dot{y}(t) \doteqdot pY(p) - y(0) = pY(p)$.

Подставим изображения в исходную систему:

$$\begin{cases} pX(p) = 3X(p) - Y(p); \\ pY(p) = X(p) + 2Y(p) - \dfrac{1}{p}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} Y(p) = (3-p)X(p); \\ p(3-p)X(p) = X(p) + 2(3-p)X(p) - \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы и найдем выражение для изображения $X(p)$:

$$X(p)(3p - p^2 - 1 - 6 + 2p) = -\frac{1}{p},$$

$$X(p) = -\frac{1}{p(-p^2 + 5p - 7)}$$

или

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 - 5p + 7)}.$$

Тогда $Y(p) = \dfrac{3-p}{p(p^2 - 5p + 7)}$.

Найдем оригинал для каждого изображения.

$X(p) = \dfrac{1}{p(p^2 - 5p + 7)}$ разложим на простейшие дроби

$$\frac{1}{p(p^2 - 5p + 7)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 - 5p + 7}.$$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} & A(p^2 - 5p + 7) + Bp^2 + Cp = 1; \\ & p^2: \quad A + B = 0; \\ & p^1: \quad -5A + C = 0; \\ & p^0: \quad 7A = 1. \end{aligned}$$

Решая систему, определим неизвестные: $A = 1/7$, $B = -1/7$, $C = 5/7$.

Возвращаясь к исходному изображению, получим

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2-5p+7)} = \frac{1}{7}\frac{1}{p} - \frac{1}{7}\frac{p}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} +$$

$$+\frac{5}{7}\frac{1}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}\frac{1}{p} - \frac{1}{7}\frac{p-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} +$$

$$+\frac{5}{7}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}\frac{1}{p} - \frac{1}{7}\frac{p-\frac{5}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} -$$

$$-\frac{5}{14}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{5}{7}\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{7}\frac{p-\frac{5}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{5\sqrt{3}}{3\cdot 7}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{7}\frac{1}{p} - \frac{1}{7}\frac{p-\frac{5}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{5\sqrt{3}}{21}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{7} - \frac{1}{7}e^{5/2t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\sqrt{3}}{21}e^{5/2t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Найдем оригинал для изображения

$$Y(p) = -\frac{p-3}{p(p^2-5p+7)}:$$

$$\frac{3-p}{p(p^2-5p+7)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2-5p+7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(p^2-5p+7) + Bp^2 + Cp = 3-p;$$
$$p^2: \quad A+B=0, \quad A=3/7;$$
$$p^1: \quad 5A+C=-1, \quad B=-3/7;$$
$$p^0: \quad 7A=3, \quad C=15/7-7/7=8/7;$$

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{7}\frac{p}{p^2-5p+7} + \frac{8}{7}\frac{1}{p^2-5p+7} = \frac{3}{7}\frac{1}{p} - \frac{3}{7}\frac{p-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} -$$

$$-\frac{15}{14}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{8}{7}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{p} - \frac{3}{7}\frac{p-\frac{5}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{21}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \risingdotseq \frac{3}{7} - \frac{3}{7}e^{5/2t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{21}e^{5/2t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}e^{5/2t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\sqrt{3}}{2}t\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,$
$y(t) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}e^{5/2t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{21}e^{5/2t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

Пример 3.49. Решить интегральное уравнение

$$\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)y(\tau)d\tau = \sin t - y(t).$$

Решение. Левая часть уравнения представляет собой свертку функций $\operatorname{sh} t$ и $y(t)$. Перейдем к изображающему уравнению

$$Y(p) \cdot \frac{1}{p^2-1} = -Y(p) + \frac{1}{p^2+1};$$

$$Y(p)\left(\frac{1}{p^2-1}+1\right) = \frac{1}{p^2+1};$$

$$Y(p)\frac{1+p^2-1}{p^2-1} = \frac{1}{p^2+1};$$

$$Y(p) = \frac{p^2-1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2(p^2+1)};$$

$$Y(p) = \frac{2}{p^2+1} - \frac{1}{p^2} \Rightarrow y(t) = 2\sin t - t.$$

Ответ: $y(t) = 2\sin t - t$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить дифференциальные уравнения.

1. $y'' + 2y' + 5y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Ответ: $\dfrac{\sin x}{5} - \dfrac{\cos x}{10} + e^{-x}\left[\dfrac{\cos 2x}{10} + \dfrac{9}{20}\sin 2x\right]$.

2. $x' - 2x = 0$, $x(0) = 1$.

Ответ: e^{2t}.

3. $x'' + x' = t\cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Ответ: $-1 + \cos t + \dfrac{1}{2}t\sin t - \dfrac{1}{2}t\cos t + \dfrac{1}{2}\sin t$.

4. $x''' + x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}e^{2t} + \dfrac{2}{5}\cos t - \dfrac{1}{5}\sin t$.

5. $x^{(4)} - 16x = t^2$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.

Ответ: $-\dfrac{1}{16}t^2 + \dfrac{1}{112}e^{2t} + \dfrac{3}{448}e^{-2t} - \dfrac{1}{64}\cos 2t - \dfrac{1}{448}\sin 2t$.

6. $y'' - 9y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.
Ответ: $y(t) = 0$.

7. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.
Ответ: $-\dfrac{5}{2}e^{+}4e^{2t} - \dfrac{3}{2}e^{3t}$.

8. $x'' + 4x' + 4x = t^3e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.
Ответ: $e^{-2t}\left(\dfrac{t^5}{20} + 4t + 1\right)$.

9. $x''' - x' = 3(2 - t^2)$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$.
Ответ: $e^t + t^3$.

10. $x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t}\sin t$, $x(0) = x'(0) = 1$.
Ответ: $e^{-t}(\cos t + 3\sin t - t\cos t)$.

Решить систему дифференциальных уравнений.

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x + y + 1, \end{cases}$ если $x(0) = 0$, $y(0) = 5$.

Ответ: $x = -\dfrac{2}{3} - 2e^{-t} + \dfrac{8}{3}e^{3t}$, $y = \dfrac{1}{3} + 2e^{-t} + \dfrac{8}{3}e^{3t}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x, \end{cases}$ если $x(0) = 2$, $y(0) = 2$.
Ответ: $x = 2\operatorname{ch} 2t + 2\operatorname{sh} 2t$, $y = 2\operatorname{ch} 2t + 2\operatorname{sh} 2t$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y, \\ \dot{y} = 4x + 5y, \end{cases}$ если $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Ответ: $x = e^{5t}\cos 4t - e^{5t}\sin 4t$, $y = e^{5t}\cos 4t + \dfrac{3}{2}e^{5t}\sin 4t$.

14. $\begin{cases} \dot{x} + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ \dot{y} - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases}$ если $x(0) = 1$, $y(0) = 3$.
Ответ: $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$.

15. $\begin{cases} 2\dot{x} + \dot{y} - 3x = 0, \\ \ddot{x} + \dot{y} - 2y = e^{2t}, \end{cases}$ если $x(0) = -1, x'(0) = 1, y(0) = 0$.

Ответ: $x = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} - \frac{3}{4}e^{\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{23}}{2} + \frac{11\sqrt{23}}{4}e^{\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$,

$y = -\frac{1}{8}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{5}{8}e^{\frac{t}{2}} \cos\frac{\sqrt{23}}{2}t - \frac{83\sqrt{23}}{184}e^{\frac{t}{2}} \sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$.

Решить интегральные уравнения.

16. $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = 1 - \cos t$.

Ответ: $y(t) = 1$.

17. $\int\limits_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau = \sin t$.

Ответ: $y(t) = \cos t - \sin t$.

18. $\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = \sin t$.

Ответ: $y(t) = 1$.

19. $\int\limits_0^t y(\tau)e^{t-\tau}d\tau = t$.

Ответ: $y(t) = 1 - t$.

20. $t - \int\limits_0^t y(\tau)(t-\tau)d\tau = y(t)$.

Ответ: $y(t) = \sin t$.

21. $t^3 + \int\limits_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)d\tau = x(t)$.

Ответ: $x(t) = \frac{t^5}{20} + t^3$.

22. $\int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)y(\tau)d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t$.

Ответ: $y(t) = 2\sin t$.

Заключение

По результатам решения задач, предложенных в практикуме, студенты должны освоить темы: функция-оригинал, нахождение изображений по заданному оригиналу, отыскание оригинала по изображению, приложения операционного исчисления.

Все темы принадлежат к задачам классического операционного исчисления. Для студентов инженерных специальностей и студентов специальности «Прикладная математика и информатика» задачи практикума являются базовыми.

Список используемой литературы

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб.пособие: в 2-х т. М.: Интеграл-Пресс, 2002. Т. 2. 544 с.

2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Операционное исчисление: теория устойчивости. Задачи и примеры с подроб. решениями. Учеб.пособие. М.: УРСС, 2003. 175 с.

3. Шелковников Ф. А., Такайшвили К. Г. Сборник упражнений по операционному исчислению: учеб.пособие. М.: Старс, 2006. 184 с.

4. Мышкис А. Д. Математика для технических вузов: спец. курсы. Учеб. пособие. М.; СПб.; Краснодар: Лань, 2009. 632 с.

5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Учеб. пособие. В 2-х ч. 6-е изд. М.: Оникс, Мир и Образование, 2006.

Содержание

Операционное исчисление и его приложения:
практикум по математическому анализу

Составители *АФАНАСЬЕВА Ольга Сергеевна*
НЕБОГИНА Елена Васильевна

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка О. С. Афанасьева

Оригинал-макет подготовлен с помощью
издательской системы LaTeX 2ε

Подп. в печать 13.02.2013.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,55. Уч. изд. л. 3,4.
Тираж 50 экз. Рег. № 32/13. Заказ .

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8.