Е. В. Башкинова, О. Е. Курилова, Н. Н. Попов

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Самара
Самарский государственный технический университет
2007

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Студент должен выполнять контрольные работы по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного шифра (номер студенческого билета).

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами (пастой) любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4-5см для замечаний рецензента. Работы, выполненные в компьютерном варианте, не принимаются.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны название дисциплины, номер контрольной работы, фамилия студента, его инициалы, учебный шифр, факультет, курс и номер группы. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по заданному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не засчитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номер задачи.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными из соответствующего варианта.

6. Решения задач и объяснения к ним должны излагаться подробно, аккуратно, без сокращения слов; чертежи можно делать от руки.

7. Если работа не зачтена, то студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и в короткий срок сдать повторно на проверку. Работу над ошибками нужно выполнять в этой же тетради в конце работы. Вносить исправления в сам текст проверенной работы запрещается.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Определители второго порядка

Основная формула для вычисления определителя второго порядка имеет вид (определитель записывается в прямых скобках и обозначается Δ)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т.е. произведение элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, расположенных на вспомогательной диагонали.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot(-3) = -6 + 3 = -3.$$

Пример 2. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x-6 & -1 \\ 5 & x \end{vmatrix} = 0$.

Решение. Раскроем определитель по формуле

$$\begin{vmatrix} x-6 & -1 \\ 5 & x \end{vmatrix} = (x-6)x - (-1)\cdot 5 = (x-6)x + 5 = x^2 - 6x + 5.$$

По условию данный определитель равен нулю. Запишем уравнение и решим его:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \left(ax^2 + bx + c = 0\right).$$

Вычислим дискриминант

$$D = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 36 - 20 = 16 = 4^2$$

и найдем корни уравнения

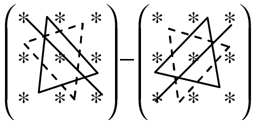
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2\cdot a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4^2}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

или

$$x_1 = \frac{6+4}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{6-4}{2} = 1.$$

1.2. Определители третьего порядка

А. Определитель третьего порядка можно вычислить по методу треугольников.

Схема данного метода имеет вид:  .

Согласно этой схемы определитель третьего порядка определяется формулой

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\right).$$

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Используем метод треугольников:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 6 + 1\cdot(-2)\cdot 0 + (-1)\cdot 3\cdot 5 - \big((-1)\cdot 4\cdot 0 +$$

$$+1\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot(-2)\cdot 5\big) = 48 + 0 - 15 - (0 + 18 - 20) = 33 - (-2) = 35.$$

Б. Метод разложения по элементам строки или столбца.

Предварительно введем понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя. Минором некоторого элемента называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Алгебраическим дополнением некоторого элемента называется его минор, умноженный на $(-1)^k$, где k – сумма номеров строки и столбца, содержащих данный элемент. Алгебраическое дополнение некоторого элемента a_{ij} обозначается как A_{ij}.

Метод разложения по элементам строки или столбца формулируется так. Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки или столбца на их алгебраические дополнения. Например, разложение определителя по элементам первой строки имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

или в развернутой форме:

$$\Delta = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Данный метод можно применить для любой строки или столбца (выбор зависит обычно от количества нулей в строке или столбце).

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Используем метод разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (5 \cdot 6 - 6 \cdot 1) + (-3) \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 6 - 6 \cdot 7) + (-1) \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 5 \cdot 7) =$$

$$= 2 \cdot 24 + 3 \cdot (-24) - 1(-32) = 48 - 72 + 32 = 8.$$

Пример 5. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Во второй строке есть ноль, поэтому выполним разложение по элементам второй строки a_{21}, a_{22}, a_{23}:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} + 0 + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3(-3 \cdot 6 - (-1) \cdot 1) - 2(2 \cdot 1 - (-3) \cdot 1) =$$

$$= -3(-17) - 2 \cdot 5 = 51 - 10 = 41.$$

2. МАТРИЦЫ

Матрицы одинаковой размерности можно складывать и вычитать, при этом соответствующие элементы матрицы складываются или вычитаются.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 4 & -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 7 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Правило умножения матриц гласит, что умножать можно только те матрицы, у которых размерность имеет вид $l \times m$ и $m \times n$ (т.е. количество столбцов в первой матрице должно совпадать с количеством строк во второй). Приведем формулу для умножения матриц размерности 2×2 и 2×3:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

Берется первая строка матрицы *A*, ее элементы умножаются на соответствующие элементы, расположенные в первом столбце матрицы *B*, и результат складывается. Номера строки и столбца задают расположение нового элемента матрицы *C*. Следовательно, элемент c_{11} определяется формулой:

$$c_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}.$$

Далее, продолжая находится в первой строке матрицы *A*, меняем столбец в матрице *B*, получим элемент c_{12} :

$$c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}.$$

Для получения элемента c_{13} в матрице *B* берется третий столбец:

$$c_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23}.$$

Теперь переходим ко второй строке матрицы *A* и снова осуществляем умножение на все столбцы матрицы *B*, получим элементы второй строки матрицы C :

$$c_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21},$$

$$c_{22}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22},$$

$$c_{23}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{pmatrix}=a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23}.$$

Таким образом, получили

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что произведение матриц некоммутативно, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Пример 2. Найти произведение *AB*, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & -7 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 6 & -7 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot\underline{8}+3\cdot\underline{6}+4\cdot\underline{12} & 2\cdot\underline{\underline{1}}+3\cdot\left(\underline{\underline{\underline{-7}}}\right)+4\cdot\underline{\underline{10}} \\ 0\cdot\underline{8}-1\cdot\underline{6}-5\cdot\underline{12} & 0\cdot\underline{\underline{1}}-1\cdot\left(\underline{\underline{\underline{-7}}}\right)-5\cdot\underline{\underline{10}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16+18+48 & 2-21+40 \\ -6-60 & 7-50 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 82 & 21 \\ -66 & -43 \end{pmatrix}.$$

В первой строке найдена сумма произведений элементов первой строки матрицы *A* на первый и затем на второй столбцы матрицы *B*. Во второй строке соответственно сумма произведений второй строки матрицы *A* опять на первый и второй столбцы матрицы *B*. При подробной записи видно (подчеркнуто), что числа повторяются.

Пример 3. Найти произведение *BA*, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & 7 & 11\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & 7 & 11\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot 2+6\cdot 3+9\cdot 4 & 5\cdot 0+6\cdot 1+9\cdot 7 & 5\cdot(-1)+6\cdot(-5)+9\cdot 11\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10+18+36 & 6+63 & -5-30+99\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64 & 69 & 64\end{pmatrix}.$$

Так как матрица *B* состоит из одной строки, то и результатом умножения стала матрица из одной строки.

Пример 4. Даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Найдите те из произведений *AB*, *BA*, *AC*, *CA*, *BC*, *CB*, которые имеют смысл.

Решение. Запишем размерность данных матриц $A_{2\times 3}$, $B_{2\times 2}$, $C_{3\times 4}$ и рассмотрим произведения.

1. $A\cdot B=A_{2\times\underline{\underline{3}}}\,B_{\underline{\underline{2}}\times 2}$. Данное произведение не имеет смысла, так как нельзя умножить строку из трех элементов на столбец из двух элементов.

2. $B\cdot A=B_{2\times\underline{\underline{2}}}A_{\underline{\underline{2}}\times 3}$. Данное произведение можно вычислить:

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-2 & 0+0 & 0-2\\ 1+2 & -1+0 & 3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

3. $A\cdot C=A_{2\times\underline{\underline{3}}}C_{\underline{\underline{3}}\times 4}$. Данное произведение можно вычислить:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0-(-1)+3 & 1-2+6 & 2-0+3 & 0\\ 0+0+2 & 2+0+4 & 4+0+2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 5 & 0\\ 2 & 6 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

4. $C \cdot A = C_{3\times\underline{\underline{4}}} A_{\underline{\underline{2}}\times 3}$. Данное произведение не имеет смысла, так как нельзя умножить строку из четырех элементов на столбец из двух элементов.

5. $B \cdot C = B_{2\times\underline{\underline{2}}} C_{\underline{\underline{3}}\times 4}$. Данное произведение не имеет смысла.

6. $C \cdot B = C_{3\times\underline{\underline{4}}} B_{\underline{\underline{2}}\times 2}$. Данное произведение не имеет смысла.

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1}$$

Система называется совместной, если она имеет решение. Для того чтобы система имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы главный определитель системы $\Delta \neq 0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$A \cdot X = B,$$

где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных системы; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

3.1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Решим систему (1) методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу коэффициентов:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Суть метода Гаусса: получить нули ниже главной диагонали, получить единицы на главной диагонали с помощью элементарных преобразований.

Элементарные преобразования метода Гаусса:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на ненулевой множитель;

3) сложение элементов строки с соответствующими элементами другой строки, умноженными на ненулевой множитель.

Пример 1. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + x - x = 2, \\ -2x + x + x = 3, \\ x + x + x = 6. \end{cases}.$$

Решение. Найдем главный определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+2+1+1-1+2=6\neq 0\Rightarrow$$

следовательно, система имеет единственное решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Получим нули вместо элементов $a_{21}=-2$, $a_{31}=1$. Для этого прибавим к элементам второй строки соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-2); из элементов третьей строки вычтем соответствующие элементы первой строки:

$$\left(A|B\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Умножим элементы второй строки на $1/3$, третьей строки на $1/2$:

$$\left(A|B\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Выпишем решение системы, начиная с третьей строки:

$x_3 = 2,$

$x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{7}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3,$

$x_1 + x_2 - x_3 = 2, \; x_1 = 2 - x_2 + x_3 = 2 - 3 + 2 = 1.$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

3.2. Решение систем линейных уравнений средствами матричного исчисления

Введем понятие обратной матрицы. Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы *A*, если выполняются условия:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Обратную матрицу A^{-1} можно найти, если матрица *A* квадратная и её определитель $\Delta \neq 0$.

Приведем способ нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений:

1) найти определитель Δ матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

2) выписать транспонированную матрицу, заменив строки матрицы *A* столбцами:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix};$$

3) составить союзную матрицу:

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, у которой A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$;

3) записать обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\Delta}$, разделив каждый элемент матрицы A^* на Δ.

Пример 2. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 4 - 2 - 0 - 0 = 3.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Выпишем теперь транспонированную матрицу:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и найдем алгебраические дополнения для ее элементов:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4,\quad A_{23} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Тогда союзная матрица $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ и обратная матрица -

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь систему линейных уравнений в матричном виде:

$$A \cdot X = B.$$

Умножим левую и правую части на A^{-1} слева: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, тогда $X = A^{-1} \cdot B$, т.к. $A^{-1} \cdot A = E$.

Значит, для решения системы линейных уравнений средствами матричного исчисления требуется найти обратную матрицу для матрицы коэффициентов системы и умножить A^{-1} на столбец B свободных членов.

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -1 \end{cases}$ с помощью обратной матрицы.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 30 + 30 - 36 - 24 - 25 = -1.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Имеем

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения матрицы A^T:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}4&5\\5&6\end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&5\\3&6\end{vmatrix}=3,\; A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix}=3,\; A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}=-2,\; A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=1,\; A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0.$$

Поэтому

$$A^*=\begin{pmatrix}-1&3&-2\\3&-3&1\\-2&1&0\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0-2\\-3+0+1\\2-0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases}x_1=-1,\\x_2=-2,\\x_3=2.\end{cases}$

4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Векторы обозначаются или одной маленькой буквой $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$ или двумя точками $\overrightarrow{AB}$ (A – начало, B – конец вектора). Точки обозначаются всегда большими буквами.

1. Если известны координаты точек $A\left(x_1;y_1;z_1\right)$ (начало вектора) и $B\left(x_2;y_2;z_2\right)$ (конец вектора), то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ определяются формулой

$$\overrightarrow{AB}=\left(x_2;y_2;z_2\right)-\left(x_1;y_1;z_1\right)=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right).$$

Пусть заданы вектора $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$ и $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$, тогда

2. $\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z\right)$ (сумма векторов);

3. $k\vec{a}=\left(ka_x;ka_y;ka_z\right)$ (произведение вектора на число k);

4. $\vec{a}-\vec{b}=\left(a_x-b_x;a_y-b_y;a_z-b_z\right)$ (разность векторов);

5. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(a_x\right)^2 + \left(a_y\right)^2 + \left(a_z\right)^2}$ (длина или модуль вектора);

6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$ (скалярное произведение векторов в координатах);

7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$ (скалярное произведение векторов, если заданы модули и угол между векторами);

8. $\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}} \cdot \sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2} + b_z^{\,2}}}$ (угол между векторами);

9. $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$ (проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$);

10. Условие ортогональности векторов $\vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$ и $\vec{b}\left(b_x; b_y; b_z\right)$ имеет вид: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$.

11. Условием коллинеарности векторов $\vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$ и $\vec{b}\left(b_x; b_y; b_z\right)$ является пропорциональность их координат, т.е. $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

12. Векторное произведение векторов (позволяет найти вектор $\vec{d} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$, расположенный перпендикулярно к плоскости с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$) (рис.1) определяется по формуле:

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right) = \vec{d}.$$

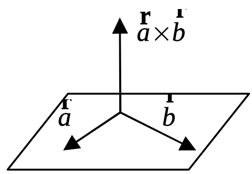


Рис. 1.

13. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}$, находится как модуль векторного произведения:

$$S_{\square} = \left|\vec{d}\right| = \left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right| = \sqrt{d_x^{\,2} + d_y^{\,2} + d_z^{\,2}} \ .$$

14. Площадь параллелограмма (треугольника), построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, если известен угол между ними, определяется формулой

$$\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = S_{\square} = 2S_{\triangle}.$$

15. Смешанное произведение векторов $\vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x; b_y; b_z\right)$ и $\vec{c} = \left(c_x; c_y; c_z\right)$ есть число, равное

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \Delta \ .$$

16. Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a}\left(a_x; a_y; a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x; b_y; b_z\right)$ и $\vec{c} = \left(c_x; c_y; c_z\right)$, равен

$$V_{парал.} = \left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right| = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left|\Delta\right| .$$

Значение определителя берется по модулю. Отсюда можно найти объем тетраэдра или объем треугольной призмы

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}V_{парал.} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|, \qquad V_{призмы} = \frac{1}{2}V_{парал.} = \frac{1}{2}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right| .$$

17. Условие компланарности векторов (несколько векторов называются компланарными, если они лежат в одной плоскости).

Если $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \Delta = 0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарные векторы.

Пример 1. Найти $\left|2\vec{a} - \vec{b}\right|$, если $\vec{a}(3;-4;1)$ и $\vec{b}\left(-1;0;5\right)$.

Решение. Введем обозначение и найдем вектор по формулам 3) и 4):

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(3;-4;1) - (-1;0;5) = (6;-8;2) - (-1;0;5) =$$

$$= (6-(-1);-8-0;\ 2-5) = (7;-8;\ -3).$$

Модуль вектора вычисляем по формуле 5):

$$\left|2\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(7)^2 + (-8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+64+9} = \sqrt{122}\ .$$

Пример 2. Найти проекцию вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ на направление вектора $\vec{c}$, если $\vec{a}(3;2;0)$, $\vec{b}(-1;1;3)$, $\vec{c}(3;-2;1)$.

Решение. Введем обозначение и найдем

$$\vec{d} = (\vec{a}+\vec{b}) = (3;2;0) + (-1;1;3) = (3-1;2+1;0+3) = (2;3;3)\ .$$

По формуле 9) имеем

$$np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = np_{\vec{c}}\vec{d} = |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{d} \wedge \vec{c}).$$

Используя формулу 8) для косинуса между векторами

$$\cos(\vec{d} \wedge \vec{c}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}||\vec{c}|},$$

имеем

$$np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{d}|\frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}||\vec{c}|} = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot(-2) + 3\cdot 1}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6-6+3}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Пример 3. Найти $2\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2$, если $\vec{a}(2;1;-1)$, $\vec{b}(0;4;-3)$.

Решение. Скалярные произведения найдем по формуле 6):

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = (2;1;-1)(2;1;-1) = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 - 1\cdot(-1) = 6\ ,$$

$$\vec{b}^2 = \vec{b}\vec{b} = (0;4;-3)(0;4;-3) = 0 + 4\cdot 4 - 3(-3) = 25\ ,$$

$$\vec{a}\vec{b} = (2;1;-1)(0;4;-3) = 2\cdot 0 + 1\cdot 4 - 1\cdot(-3) = 7\ ,$$

$$2\vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 2\cdot 6 - 7 + 4\cdot 25 = 12 - 7 + 100 = 105\ .$$

Пример 4. Вычислить площадь треугольника *ABC*, если известны координаты вершин $A(1;-1;0)$, $B(0;0;2)$, $C(-1;2;1)$.

Решение. Найдем два вектора, исходящие из одной точки, например, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле 1):

$$\overrightarrow{AB} = (0;0;2) - (1;-1;0) = (0-1;0-(-1);2-0) = (-1;1;2)\ ,$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1;2;1)-(1;-1;0) = (-1-1;2-(-1);1-0) = (-2;3;1).$$

По формуле 12) найдем векторное произведение векторов

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(1-6) - \vec{j}\,(-1+4) + \vec{k}\,(-3+2) = \vec{i}\,(-5) - 3\vec{j} + \vec{k}\,(-1) = (-5;\ -3;\ -1).$$

По формуле 13) найдем модуль векторного произведения, который равен площади параллелограмма:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-5)^2+(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35} = S_{▱}.$$

Отсюда площадь треугольника $S_\Delta = \dfrac{S_{▱}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{35}$.

Пример 5. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(-3;1;0)$, $\vec{b}(1;2;0)$, $\vec{c}(4;0;1)$.

Решение. По формуле 16) составим определитель из координат векторов и вычислим его:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot 2\cdot 1+0+0-(0+0+1\cdot 1\cdot 1) = -6-1 = -7.$$

Модуль данной величины определяет объем параллелепипеда, тогда объем пирамиды будет равен: $V = \dfrac{1}{6}|\Delta| = \dfrac{1}{6}\cdot 7 = \dfrac{7}{6}$.

Пример 6. Найти значение t, при котором векторы $\vec{a}(-4;2;t)$, $\vec{b}(-1;1;2)$ ортогональны.

Решение. Используя условие 10) ортогональности векторов $\vec{a}\vec{b} = 0$, получим $(-4;2;t)(-1;1;2) = -4(-1)+2\cdot 1+t\cdot 2 = 4+2+2t = 0.$

Решая уравнение $6+2t=0$, находим $t = -\dfrac{6}{2} = -3$.

5. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0$$

с произвольными коэффициентами *A*, *B* и *C* такими, что *A* и *B* не равны нулю одновременно, называется общим уравнением прямой.

2. Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то разрешив его относительно *y*, получим уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

где k задает тангенс угла наклона прямой с положительным направлением оси OX, b – отрезок, отсекаемый прямой на оси OY, считая от начала координат.

3. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k, имеет вид $y - y_1 = k(x - x_1)$.

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

а угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

5. Если известен угловой коэффициент двух прямых k_1 и k_2, то острый угол между этими прямыми определяется по формуле

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

6. Признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов $k_1 = k_2$.

7. Признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(2; -4)$, параллельно биссектрисе угла в первой четверти.

Решение. Уравнение биссектрисы угла в первой четверти имеет вид $y = x$, откуда видно, что $k = 1$. Используя условие параллельности прямых 6) и уравнение прямой 3) при $k = 1$, $x_1 = 2$, $y_1 = -4$, получим

$$y-2=1\cdot(x+4)\Rightarrow y=x+4+2\Rightarrow y=x+6.$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;4)$ перпендикулярно прямой $2x+5y-10=0$.

Решение. Приведем уравнение прямой к виду $y=k_1x+b$ и определим k_1:

$$2x+5y-10=0 \Rightarrow 5y=10-2x \Rightarrow y=2-\frac{2}{5}x\Rightarrow k_1=-\frac{2}{5}.$$

Из условия перпендикулярности 7) определим коэффициент искомой прямой $k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow -\frac{2}{5}k_2=-1\Rightarrow k_2=\frac{5}{2}$. Подставим координаты точки A и k_2 в уравнение 3), получим

$$y-4=\frac{5}{2}(x+2)\Rightarrow y=\frac{5}{2}x+5+4\Rightarrow y=\frac{5}{2}x+9$$

или $2y=5x+18$. Искомая прямая задается уравнением

$$5x-2y+18=0.$$

Пример 3. Даны вершины параллелограмма $A(1;3)$, $B(6;12)$ и $D(2;-4)$. Найти уравнение прямой BC (рис. 2).

Решение. Прямая BC параллельна прямой AD. Угловой коэффициент этой прямой согласно 4) равен:

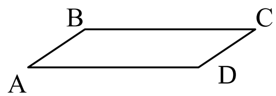


Рис. 2.

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-4-3}{2-1}=-7.$$

Используя формулу 3) при $k=-7$, $x_1=6$, $y_1=12$, получим

$$y-12=-7(x-6) \text{ или } y-12+7x-42=0\Rightarrow 7x+y-54=0.$$

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(-2;0)$ и $B(4;-6)$.

Решение. Подставив координаты точек в формулу 4), получим:

$$\frac{x-(-2)}{4-(-2)}=\frac{y-0}{-6-0}\Rightarrow\frac{x+2}{6}=\frac{y}{-6}\Rightarrow x+2=-y.$$

Искомое уравнение имеет вид $x+y+2=0$.

6. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$, перпендикулярно вектору $\vec{N}\left(A;B;C\right)$, имеет вид

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0\,.$$

2. Если в уравнении 1) раскрыть скобки, то получим общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Из любого уравнения плоскости можно определить вектор, перпендикулярный к ней, который называется нормалью и имеет координаты $\vec{N}\left(A;B;C\right)$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$ и $M_3\left(x_3;y_3;z_3\right)$, определяется формулой

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

4. Две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ будут располагаться параллельно, если их нормальные векторы $\vec{N}_1\left(A_1;B_1;C_1\right)$ и $\vec{N}_2\left(A_2;B_2;C_2\right)$ будут коллинеарны, откуда $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

5. Две плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ будут располагаться перпендикулярно, если их векторы $\bar{N}_1\left(A_1;B_1;C_1\right)$ и $\bar{N}_2\left(A_2;B_2;C_2\right)$ будут перпендикулярны, откуда $\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2=0,\Rightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

6. Двухгранный угол между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ищется как угол между векторами $\bar{N}_1\left(A_1;B_1;C_1\right)$ и $\bar{N}_2\left(A_2;B_2;C_2\right)$: $\cos\varphi=\dfrac{\bar{N}_1\cdot\bar{N}_2}{\left|\bar{N}_1\right|\cdot\left|\bar{N}_2\right|}$.

7. Расстояние от точки $\left(x_1;y_1;z_1\right)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ определяется формулой

$$d=\frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Пример 1. Проверить, будут ли плоскости $3x-2y+z+17=0$ и $4x+6y-23=0$ ортогональны.

Решение. Выпишем векторы нормали для данных плоскостей $\vec{N}_1(3;-2;1)$ и $\vec{N}_2(4;6;0)$, проверим условие 5) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. Имеем $3\cdot4+(-2)\cdot6+1\cdot0=12-12=0$.

Условие ортогональности выполняется, следовательно, плоскости ортогональны.

Пример 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку *M* (3; -5; 2) перпендикулярно вектору $\vec{b}(4;-2;-5)$.

Решение. Воспользуемся формулой 1) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. В качестве вектора нормали используется вектор $\vec{N}(A;B;C)=\vec{b}(4;-2;-5)$. Подставив в уравнение 1) координаты нормали N и точки $(x_0;y_0;z_0)$=*A*(3; -5; 2) , получим $4(x-3)-2(y+5)-5(z-2)=0$ или $4x-12-2y-10-5z+10=0$. Следовательно, искомое уравнение плоскости имеет вид: $4x-5y-2z-12=0$.

Пример 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-4;3)$ параллельно плоскости $3x-5y+2z-5=0$.

Решение. Используем условие параллельности плоскостей 4) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. Считая эти соотношения равными 1, получим $A_1=A_2$, $B_1=B_2$, $C_1=C_2$. Следовательно, $\vec{N}_1=\vec{N}_2=(3,-5,2)$. Уравнения искомой плоскости согласно 1) имеет вид

$3(x-2)-5(y+4)+2(z-3)=0$,

или

$3x-6-5y-20+2z-6=0, \Rightarrow 3x-5y+2z-32=0$.

Пример 4. Найти расстояние от точки $M(-1;2;-3)$ до плоскости $5x-2y+4z-3=0$.

Решение. Используя формулу 7), получим

$$d=\frac{|5\cdot(-1)-2\cdot2+4\cdot(-3)|}{\sqrt{5^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{|5-4-12|}{\sqrt{25+4+16}}=\frac{21}{\sqrt{45}}=\frac{21}{3\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(1;-2;1)$, $M_2(-1;2;0)$, $M_3(0;-3;2)$.

Решение. Воспользуемся формулой 3):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -1-1 & 2+2 & 0-1 \\ 0-1 & -3+2 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, имеем:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y+2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(x-1)(4-1)-(y+2)(-2-1)+(z-1)(2+4) = 3(x-1)+3(y+2)+6(z-1) = 0.$$

Раскрывая скобки и сокращая на 3, получим $x+y+2z-1=0$.

7. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

1. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(x_0;y_0;z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{S}(m;n;p)$ (который называется направляющим вектором) имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

2. От канонических уравнений прямой, вводя параметр t, нетрудно перейти к параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

3. Направляющий вектор может лежать на прямой, поэтому уравнение прямой, проходящей через две точки $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4. Угол между двумя прямыми $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ определяются по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

5. Условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

6. Условие параллельности двух прямых: $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

7. Угол между прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

8. Условие ортогональности прямой и плоскости имеет вид

$$\vec{N}\parallel\vec{S}\Rightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

9. Условие параллельности прямой и плоскости имеют вид

$$\vec{N}\perp\vec{S}\Rightarrow\vec{N}\cdot\vec{S}=0\quad\Rightarrow\quad Am+Bn+Cp=0.$$

Пример 1. Записать параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $A(4;6;-3)$ и $B(3;-1;0)$.

Решение. Найдем направляющий вектор

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=(3;-1;0)-(4;6;-3)=(3-4;-1-6;0-(-3))=(-1;-7;3).$$

Подставим вектор и любую из двух точек в уравнение прямой 2)

$$\begin{cases}x=x_0-1\cdot t,\\ y=y_0-7\cdot t,\\ z=z_0+3\cdot t.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4-t,\\ y=6-7\cdot t,\\ z=-3+3\cdot t.\end{cases}$$

Пример 2. Записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;1;2)$ параллельно прямой $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+2}{5}$.

Решение. Так как прямые параллельны, то у них может быть один и тот же направляющий вектор $\vec{S}(m;n;p)=(2;-3;5)$. Согласно 1) $\frac{x-x_0}{2}=\frac{y-y_0}{-3}=\frac{z-z_0}{5}$. Подставив координаты точки *M*, получим

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-2}{5}.$$

Пример 3. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(8;0;-2)$, расположенной перпендикулярно прямой

$$\frac{x+6}{4}=\frac{y-9}{7}=\frac{z}{-2}.$$

Решение. Взаимное расположение прямой и плоскости позволяет установить, что направляющий вектор $\overline{S}(4;7;-2)$ перпендикулярен к плоскости и, значит, может быть принят за нормаль $\vec{N}=\vec{S}(4;7;-2)$ (рис.3).

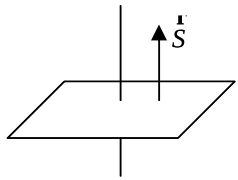


Рис. 3.

По формуле $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, имеем: $4(x-x_0)+7(y-y_0)-2(z-z_0)=0$. Подставив координаты точки *M*, получим $4(x-8)+7(y-0)-2(z+2)=0$ или $4x-32+7y-2z-4=0$. Искомое уравнение плоскости имеет вид: $4x+7y-2z-36=0$.

Пример 4. Найти точку пересечения прямой $\begin{cases} x=1-4t \\ y=-2-t \\ z=-3 \end{cases}$ и плоскости $2x-y-2z-17=0$.

Решение. Подставив уравнение прямой в уравнение плоскости $2(1-4t)-(-2-t)-2(-3)-17=0$, получим $2-8t+2+t+6-17=0$. Найдем параметр *t*, при котором прямая и плоскость пересекаются $-7t-7=0 \Rightarrow t=-1$. Подставляя найденное значение t в уравнение прямой, находим координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x=1-4(-1), \\ y=-2-(-1), \\ z=-3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5, \\ y=-1, \\ z=-3. \end{cases}$$

Пример 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4;\ 4;\ 5)$, $A_2(0;\ 10;\ 4)$, $A_3(5;\ 6;\ 1)$, $A_4(4;\ 9;\ 7)$. Найти:

1) длину ребра A_1A_2;

2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

4) площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

6) уравнение прямой A_1A_2;

7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. 1) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2} = \{$из координат точки $A_2(0;\ 10;\ 4)$ вычтем координаты точки $A_1(4;\ 4;\ 5)$ }=(0-4; 10-4; 4-5)=(-4; 6; -1). Вычислим длину ребра по формуле (4.5) $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-4)^2+6^2+(-1)^2} = \sqrt{16+36+1} = \sqrt{53}$.

2) Обозначим угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 через a. По формуле (4.8) найдем $\cos a = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$. Аналогично пункту 1) найдем вектор $\overrightarrow{A_1A_4} = (4-4; 9-4; 7-5) = (0;5;2)$ и его длину $\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{0+25+4} = \sqrt{29}$. Вычислим скалярные произведения векторов:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = (x_1;y_1;z_1)\cdot(x_2;y_2;z_2) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = (-4;6;-1)\cdot(0;5;2) = 0+30-2 = 28.$$

В итоге получим $\cos a = \dfrac{28}{\sqrt{53}\sqrt{29}} = \dfrac{28}{\sqrt{1537}} \approx 0,714 \Rightarrow$

a=arccos(0,714)=44°42′.

3) Обозначим угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ через b. Воспользуемся формулой (7.7) угла между прямой и плоскостью

$\sin b = \frac{\vec{N}\cdot\overline{A_1A_4}}{|\vec{N}|\cdot|\overline{A_1A_4}|}$. Найдем вектор нормали $\overline{N}$, как векторное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$, лежащих в плоскости $A_1A_2A_3$. Вектор $\overline{A_1A_2}$ найден в пункте 1). Найдем вектор $A_1A_3 = (5-4;\quad 6-4;\quad 1-5) = (1;\quad 2;\quad -4)$. Согласно формуле (4.12) получим

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -22\vec{i} - 17\vec{j} - 14\vec{k}.$$

Вычислим модуль вектора $\vec{N}$:

$$|\vec{N}| = \sqrt{(-22)^2 + (-17)^2 + (-14)^2} = \sqrt{484 + 289 + 196} = \sqrt{969}.$$

Вектор $\overline{A_1A_4}$ и его модуль найден в пункте 2):

$\vec{N}\cdot\overline{A_1A_4} = -22\cdot 0 - 17\cdot 5 - 14\cdot 2 = -113$. Подставляем в 7):

$$\sin b = \frac{\vec{N}\cdot\overline{A_1A_4}}{|\vec{N}|\cdot|\overline{A_1A_4}|} = \frac{-113}{\sqrt{969}\sqrt{29}} = \frac{-113}{\sqrt{28101}} \approx -0,674 \Rightarrow$$

b=arcsin(-0,674)= $-42^\circ\, 38'$.

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$ найдем по формуле (4.13) $S = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right]\right|$. Так как $\left|\left[\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right]\right| = |\vec{N}|$, имеем $S = \frac{\sqrt{969}}{2} \approx 15,56$.

5) Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ находим по формуле (4.16):

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Все векторы были найдены ранее. Имеем:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \left|\frac{1}{6}\left[(-16+0-5)-(0+80+12)\right]\right| = \left|\frac{-113}{6}\right| = \frac{113}{6}.$$

6) Уравнения прямой A_1A_2 в канонической форме имеет вид (7.1): $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, где $(m;n;p)=\overrightarrow{A_1A_2}=(-4;6;1)$. Искомые уравнения прямой имеют вид $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-4}{6}=\frac{z-5}{-1}$ или в параметрической форме

$$\begin{cases} x=4-4t, \\ y=4+6t, \\ z=5-t. \end{cases}$$

7) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем в виде (6.1): $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. Нормальный вектор $(A;B;C)=\vec{N}$ для грани $A_1A_2A_3$ был найден в пункте 3): $\vec{N}=(-22;-17;-14)$. За точку $(x_1;y_1;z_1)$ можно взять любую точку плоскости, например $A_1(4;\ \ 4;\ \ 5)$. Получим $-22(x-4)-17(y-4)-14(z-5)=0$. Искомое уравнение плоскости имеет вид $-22x-17y-14z+226=0$.

8) Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, запишем, используя уравнения прямой (7.1) $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$. Направляющий вектор $S(m;n;p)$ искомой прямой (высоты) совпадает с вектором нормали к плоскости $A_1A_2A_3$: $\vec{N}=(-22;-17;-14)=(m;n;p)$. Высота проходит через точку $A_4(4;\ \ 9;\ \ 7)=(x_1;y_1;z_1)$. Получили канонические уравнения прямой $\frac{x-4}{-22}=\frac{y-9}{-17}=\frac{z-7}{-14}$. Эти уравнения в параметрической форме имеют вид $\begin{cases} x=4-22t, \\ y=9-17t, \\ z=7-14t. \end{cases}$

8. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

При вычислении пределов, прежде всего, нужно попробовать подставить в выражение функции значение аргумента, к которому он стремится. Если в результате подстановки получается число, то оно является значением предела. Если при подстановке получается число, не равное нулю, деленное на ноль, то значение предела – бесконечность $\left[\frac{A}{0}=\infty\right]$. Если получается число, деленное на бесконечность, то значение предела – ноль $\left[\frac{A}{\infty}=0\right]$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-2}{2x^2+x-3}$.

Решение. Подставляя вместо x число 2, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-2}{2x^2+x-3}=\frac{2^2+3\cdot 2-2}{2\cdot 2^2+2-3}=\frac{4+6-2}{8+2-3}=\frac{8}{7}.$$

При вычислении пределов функции часто возникают неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty-\infty]$, $\left[1^{\infty}\right]$. Рассмотрим способы раскрытия таких неопределенностей:

1. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ для многочленов раскрывается при помощи вынесения за скобку старшей степени числителя и старшей степени знаменателя и учета, что $\left[\frac{\text{const}}{\infty}\to 0\right]$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x-3}{4x+x^3}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x-3}{4x+x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{2x}{x^3}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{4x}{x^3}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}=$$

$$=\left[\frac{\text{const}}{\infty}\to 0\right]=\frac{2}{1}=2.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-17}{x^5+9x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-17}{x^5+9x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(8-\dfrac{17}{x^3}\right)}{x^5\left(1+\dfrac{9x}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(8-\dfrac{17}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{9x}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}=\left[\frac{8}{\infty}\right]=0.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x}{7x+5}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{7x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{2x}{x^2}\right)}{x\left(7+\dfrac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{7}=\left[\frac{\infty}{7}\right]=\infty.$$

2. Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ раскрывается при помощи элементарных преобразований или первого замечательного предела, который имеет вид $\lim\limits_{a\to0}\dfrac{\sin a}{a}=1$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{2x^2-3x-20}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель дроби при $x\to4$ стремятся к нулю. Получается неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители. Знаменатель дроби разлагается на множители по формуле $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2-3x-20=0$. Решим это уравнение:

$$D=b^2-4ac=\left(-3\right)^2-4\cdot2\cdot\left(-20\right)=169=\left(13\right)^2,$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2\cdot a}=\frac{3\pm13}{4}\Rightarrow x_1=\frac{16}{4}=4\;\; x_2=\frac{-10}{4}=\frac{-5}{2}.$$

Следовательно, разложение знаменателя имеет вид

$$2x^2-3x-20=2(x-4)\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

Для числителя используем формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. В итоге получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{2x^2-3x-20}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-4)\left(x+\frac{5}{2}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)}{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}=\frac{4+4}{2\left(4+\frac{5}{2}\right)}=\frac{8}{13}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}$.

Решение. Подставляя вместо x число 3, получим $\frac{9-9}{\sqrt{9}-3}=\frac{0}{0}$, т.е. имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

В случае, когда предел содержит выражение с корнем, для его решения необходимо умножить и разделить дробь на сопряженный множитель(для выражения $a+b$ сопряженным является $a-b$). Имеем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x+6-9)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{1}=$$

$$=(3+3)\left(\sqrt{3+6}+3\right)=6\cdot 6=36.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tgx}$.

Решение. При раскрытии пределов, содержащих тригонометрические функции, применяются тригонометрические формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tgx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ tgx=\sin x/\cos x\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos x)^2}{1}=2.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$.

Решение. Для раскрытия данной неопределенности используется первый замечательный предел $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin a}{a}=1$. Умножим и разделим дробь на 2. В итоге получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 2}{(\sin 2x)\cdot 2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(\sin 2x)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\cdot 1=1.$$

3. Неопределенность вида $[\infty-\infty]$ при помощи элементарных преобразований приводится к неопределенности вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{18}{x^2-9}\right)$.

Решение. Приведем к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{x-3}-\frac{18}{x^2-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 3}\left(\frac{3}{x-3}-\frac{18}{(x-3)(x+3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3(x+3)-18}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3}{(x+3)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

4. Неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$ раскрывается при помощи второго замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad e=2,71828\ldots$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{x^2+1}$.

Решение. Предел основания $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{x^2-1}=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=1,$ следовательно, имеем неопределенность $\left[1^\infty\right]$. Её можно свести к второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+4}{x^2-1}\right)^{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)^{x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{4}}\right]^{\frac{4}{x^2-1}\cdot\left(x^2+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2-1}\cdot\left(x^2+1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=e^4.$$

9. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Комплексным числом называется выражение вида $z=x+iy$, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, определяемая равенством $i^2=-1$. Причем x называется действительной частью, а y – мнимой частью комплексного числа. При этом используются обозначения: $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$. Комплексное число $\bar z=x-iy$ называется сопряженным по отношению к числу z.

Действие над комплексными числами определяются следующими правилами.

Сложение. Если $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, то

$$z_1+z_2=\left(x_1+x_2\right)+i\left(y_1+y_2\right).$$

Умножение.

$$z_1\cdot z_2=\left(x_1+iy_1\right)\left(x_2+iy_2\right)=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\left(x_2y_1+x_1y_2\right).$$

Таким образом, комплексные числа умножаются как двучлены, причем i^2 заменяется на -1.

Деление. Для нахождения частного двух комплексных чисел следует делимое и делитель умножить на число, сопряженное с делителем: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar z_2}{z_2\bar z_2}=\dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$.

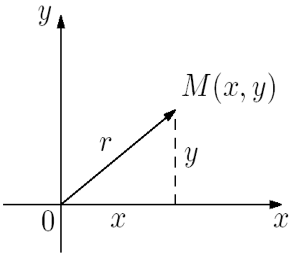


Рис. 4.

Пример 1

$$(1-2i)(2+i) = 2-4i+i-2i^2 =$$
$$= 2-3i+2 = 4-3i\ .$$

Пример 2

$$\frac{1-3i}{2+i} = \frac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-6i-i-3}{4+1} =$$
$$= \frac{-1-7i}{5} = -\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i\ .$$

Геометрически комплексное число $z = x+iy$ изображается точкой *M* плоскости с координатами x и y или соответствующим радиус-вектором (рис. 4).

Модулем комплексного числа z называется длина радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$: $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Аргументом комплексного числа z называется угол между положительным направлением действительной оси *OX* и вектором $\overrightarrow{OM}$. Он определяется формулой:

$$j = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad x > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Значение $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ выбирается из промежутка $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Каждое комплексное число можно представить в алгебраической

$$z = x+iy$$

и в тригонометрической

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

формах.

Пример 3. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = -2\sqrt{3}+2i$.

Решение. Находим модуль $r = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = 4$

и аргумент

$$j = \operatorname{arctg}\frac{2}{-2\sqrt{3}} + \pi = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

комплексного числа.
Следовательно, тригонометрическая форма имеет вид

$$z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то возведение комплексного числа в целую степень определяется формулой

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{j + 2pk}{n} + i\sin\frac{j + 2pk}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Пример 4. Дано комплексное число $z = \dfrac{8}{-1 + i\sqrt{3}}$.Требуется:
1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $w^3 + z = 0$.

Решение. 1. Произведем действие деления, для этого умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$z = \frac{8}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{8\left(-1 - i\sqrt{3}\right)}{\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\left(-1 - i\sqrt{3}\right)} = \frac{8\left(-1 - i\sqrt{3}\right)}{1 + 3} = -2 - 2\sqrt{3}i.$$

Таким образом, алгебраическая форма комплексного числа z имеет вид: $z = -2 - 2\sqrt{3}i$.

Для записи z в тригонометрической форме найдем модуль и аргумент комплексного числа:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4,$$

$$j = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}}{-2} - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Следовательно, тригонометрическая форма комплексного числа z имеет вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

2. Найдем все корни уравнения $w^3 + z = 0$. Перепишем уравнение в виде $w^3 = -z = 2 + i2\sqrt{3}$. Представим число $-z = 2 + i2\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4,$$

$$j = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{2} - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \qquad -z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Далее, используя формулу извлечения корня n-й степени из комплексного числа, получим

$$w = \sqrt[3]{-z} = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi/3 + 2\pi k}{3}\right), \; k = 0, 1, 2 .$$

Выпишем все значения корня третьей степени.

При $k = 0$ получим

$$w_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{p}{9} + i\sin\frac{p}{9}\right),$$

при $k = 1$ -

$$w_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$

при $k = 2$ -

$$w_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

Следует заметить, что точки, соответствующие найденным значениям корня, лежат в вершинах равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[3]{4}$ с центром в начале координат.

10. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой ее окрестности и имеет в этой точке конечный предел, причем этот предел равен значению функции в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

Можно доказать, что основные элементарные функции непрерывны во всех точках области их определения.

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва функции.

Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $y = f(x)$, если пределы функции $y = f(x)$ справа и слева в этой точке конечны, равны между собой, а функция в этой точке не определена.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода со скачком функции $y = f(x)$, если пределы функции $y = f(x)$ справа и слева в этой точке конечны и не равны между собой.

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции $y = f(x)$, если один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Пример 1. Задана функция $y = f(x) = 2^{\frac{1}{3+x}}$ и два значения аргумента $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точках разрыва слева и справа; 3) сделать ее схематический график.

Решение. В точке $x_2 = 1$ функция определена, существует конечный предел в этой точке, равный значению функции в точке $x_2 = 1$, так как $\lim\limits_{x \to 1} 2^{\frac{1}{3+x}} = 2^{\frac{1}{4}} = f(1)$. Следовательно, в точке $x_2 = 1$ функция непрерывна. Точка $x_1 = -3$ является точкой разрыва, так как функция в этой точке не определена. Если $x \to -3-0$, то $\dfrac{1}{3+x} \to -\infty$ и

$\lim\limits_{x\to -3-0} 2^{\frac{1}{3+x}} = 2^{-\infty} = 0$. Если же $x \to -3+0$, то $\frac{1}{3+x} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to -3-0} 2^{\frac{1}{3+x}} = 2^{\infty} = \infty$.

Таким образом, при $x = -3$ функция имеет разрыв II рода.

Сделаем схематический график функции (рис.5).

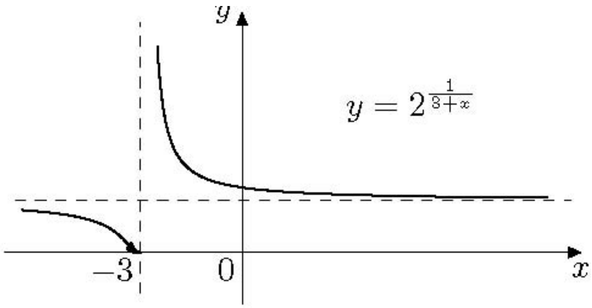


Рис. 5

Пример 2. Задана функция

$$y = \begin{cases} x^2, x \le 1; \\ 2x-1, 1 < x \le 2; \\ 4-x, x > 2. \end{cases}$$

Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

Решение. Так как функция составлена из трех элементарных функций, которые непрерывны на каждом из своих интервалов, то точками разрыва могут быть лишь точки $x = 1$ и $x = 2$. Вычислим односторонние пределы в этих точках. В точке $x = 1$ имеем

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1, \qquad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (2x-1) = 1.$$

Получили, что в точке $x = 1$ функция определена и пределы функции слева и справа равны между собой и равны значению функции в этой точке. Следовательно, в точке $x = 1$ функция непрерывна. Точка $x = 2$ является точкой разрыва I рода со скачком, потому что в этой точке односторонние пределы конечны и не равны между собой:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (2x-1) = 3, \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} (4-x) = 2.$$

Сделаем схематичный график функции (рис.6):

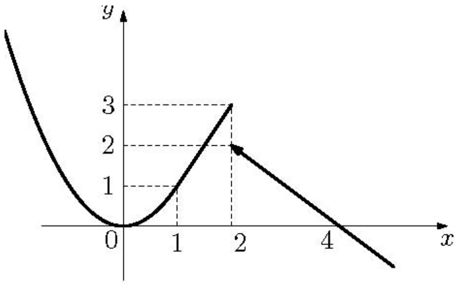


Рис. 6

11. ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ ТЕСТ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Для самостоятельного решения предлагается вариант тренировочного экзаменационного теста за 1 семестр.

1	Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 2x-1 & -3 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 0.$	**А.** -2; 3 **Б.** 1; 1,5 **В.**–1;1,5 **Г.** –2; 1 **Д.** –3; 1,5
2	Найти произведение BA, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.	**А.** $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ **Б.** $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **В.** $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **Г.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ **Д.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
3	Даны векторы $\vec{a}=\{2, 3, -2\}$, $\vec{b}=\{1, -4, 1\}$. Найти $\lvert\vec{a}-2\vec{b}\rvert$.	**А.** 5 **Б.** 24 **В.** $\sqrt{29}$ **Г.** $\sqrt{137}$ **Д.** $\sqrt{24}$
4	Уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,3)$ перпендикулярно прямой $3x+2y-1=0$, имеет вид…	**А.** $3x-2y+3=0$ **Б.** $2x-3y+7=0$ **В.** $3x+2y+5=0$ **Г.** $2x+3y+7=0$ **Д.** $3x-4y-2=0$

5	Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4,-1,2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{3}$, имеет вид…	**А.** $4x-y+2z-3=0$ **Б.** $3x+2y-z+1=0$ **В.** $4x-y+2z+13=0$ **Г.** $2x-y-3z-3=0$ **Д.** $2x-y-3z+3=0$
6	Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=\{2;-1;-3\}$; $\vec{b}=\{3;1;-2\}$ и $\vec{c}=\{0;2;-1\}$, равен …	**А.** $\frac{5}{2}$ **Б.** 2 **В.** 1 **Г.** $\frac{7}{6}$ **Д.** $\frac{4}{3}$
7	Найти острый угол между двумя плоскостями $2x-y-3z+2=0$ и $x+4y-z-12=0$.	**А.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{7}}$ **Б.** 30^0 **В.** $\arccos\frac{1}{3\sqrt{7}}$ **Г.** $\arccos\frac{1}{6\sqrt{7}}$ **Д.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^3+3x^4}{3+2x^2-4x^5}=\ldots$	**А.** $\frac{1}{3}$ **Б.** ∞ **В.** $\frac{3}{4}$ **Г.** 0 **Д.** $-\frac{3}{4}$
9	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{1-\sqrt{3+x}}{x^2+2x}=\ldots$	**А.** $\frac{1}{2}$ **Б.** $-\frac{1}{4}$ **В.** $\frac{1}{4}$ **Г.** 0 **Д.** $\frac{3}{5}$
10	Найти модуль комплексного числа: $\frac{3+2i}{2+i}$.	**А.** $\frac{\sqrt{26}}{5}$ **Б.** $\frac{9}{4}$ **В.** $\frac{\sqrt{13}}{9}$ **Г.** $\frac{\sqrt{65}}{5}$ **Д.** $\frac{5}{2}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2003.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, Ч.1. М.: Высшая школа, 19963. Демидович Б.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики. М.: Астрель, 2003.

4. Гурский Е.И., и др. Руководство к решению задач по высшей математике, Ч.1 Минск: Высшая школа, 1989.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление, Ч.1. М.: Интеграл-Пресс, 1998.

6. Турецкий В.Я. Математика и информатика. М.: Наука, 2002.