МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

Ряды

Практикум по математическому анализу

Самара
Самарский государственный технический университет
2011

УДК 517.52

Ряды: практикум по математическому анализу / *Г.Ф. Егорова, М.Н. Саушкин, О.С. Афанасьева*; Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2011. ,64 с.

В практикум по математическому анализу включены задания и методические указания к ним по темам «Числовые ряды», «Функциональные ряды» и «Степенные ряды».

Пособие предназначено для студентов специальности «Прикладная математика и информатика».

Библиогр.: 3 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

Рецензент: *к.ф.-м.н. А.А. Заусаев*

Предисловие

Предлагаемый практикум по математическому анализу «Ряды» предназначен для студентов специальности «Прикладная математика и информатика», а также для студентов инженерных специальностей.

Целью опубликования этой работы является углубление знаний и выработка навыков решения задач по темам «Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов», «Признаки сходимости знакопеременных рядов», «Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов», «Степенные ряды» .

Практикум содержит методические указания к решению задач [1, 2] и варианты индивидуальных заданий [3].

Практикум состоит из трех частей. В первой части представлены основные теоретические положения, относящиеся к данным темам, во второй части приведены примеры решения типовых задач с подробными выкладками, а в третьей приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов.

Часть 1.
Теоретическая часть

Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

1.1. Общие понятия и определения

Определение 1.1.1. Пусть a_n — произвольные элементы линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором определена сходимость, $n \in \mathbb{N}$. Рядом элементов a_n называют выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

а элементы a_n — его членами. В частности, если $a_n \in \mathbb{R}$ или $a_n \in \mathbb{C}$, то ряд (1) называют числовым.

Определение 1.1.2. Сумма n первых членов ряда (1) называется частичной суммой и часто обозначается через S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

Определение 1.1.3. Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad S \in \mathcal{L},$$

то ряд (1) сходится в $\mathcal{L}$, а элемент S называют суммой ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или не существует, то ряд (1) называют расходящимся.

Определение 1.1.4. Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \quad a_k \in \mathcal{L}, \tag{2}$$

называется n–ным остатком ряда (1) или остатком после n–го члена.

Определение 1.1.5. Пусть $a_n \in \mathbb{R}$. Если $a_n \geq 0$, то ряд (1) называют положительным; если $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд (1) называют строго положительным.

1.2. Необходимое условие сходимости ряда

Для того чтобы ряд (1), сходился в $\mathcal{L}$, необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \theta, \quad \theta \in \mathcal{L},$$

где θ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{L}$.

1.3. Критерий Коши

Пусть $\mathcal{L}$ есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для того чтобы ряд (1), сходился в $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$ такое, что $\forall n > n_0 \bigwedge \forall p \in \mathbb{N}$ выполнялось бы неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

1.4. Обобщенный гармонический ряд

Определение 1.4.1. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

называется обобщенным гармоническим рядом, а при $p = 1$ — гармоническим. Он сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

1.5. Признаки сравнения числовых рядов

Теорема 1.5.1. Если ряды (1), и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3}$$

положительны и $a_n \le b_n$ $\forall n > n_0$, то из сходимости ряда (3) вытекает сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) вытекает расходимость ряда (3).

Теорема 1.5.2. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ строго положительны и $\forall n > n_0$ выполняются неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то справедливы выводы предыдущей теоремы.

Теорема 1.5.3. Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ строго положительны и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad 0 < c < +\infty,$$

то они сходятся или расходятся одновременно.

Теорема 1.5.4. Если при $n \to \infty$

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

то при $p > 1$ ряд (1), сходится, а при $p \le 1$ расходится.

1.6. Признаки д'Аламбера и Коши

Если ряд (1), строго положителен и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

то при $L < 1$ этот ряд сходится, а при $L > 1$ расходится. При $L = +\infty$ ряд (1), также расходится, а если $L = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым (признак д'Аламбера в предельной форме).

Если ряд (1) положителен и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L,$$

то относительно сходимости ряда (1) делаем те же выводы, что и в признаке д'Аламбера (признак Коши в простейшей предельной форме).

1.7. Признак Раабе

Если ряд (1) строго положителен и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

то при $p>1$ он сходится, а при $p<1$ расходится. При $p=+\infty$ ряд (1) сходится, а если $p=1$, то для выяснения вопроса о его сходимости или расходимости следует применять другие признаки.

1.8. Признак Гаусса

Если ряд (1), строго положителен и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},\quad \lambda,\,\mu=\mathrm{const},$$

где $\varepsilon>0$, $|\theta_n|<c$, то при $\lambda>1$ ряд (1) сходится, а при $\lambda<1$ расходится. Если же $\lambda=1$, то ряд сходится при $\mu>1$ и расходится при $\mu\leq 1$.

1.9. Интегральный признак Коши–Маклорена

Если функция f неотрицательна при $x>0$ и не возрастает, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Признаки сходимости знакопеременных рядов

1.10. Абсолютная и условная сходимость ряда

Определение 1.10.1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, где $a_n \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Определение 1.10.2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся.

Теорема 1.10.3. Из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

Теорема 1.10.4. Если ряд сходится абсолютно к сумме S, то члены ряда можно переставлять в любом порядке и сумма переставленного ряда также будет равна S.

Теорема 1.10.5.(Римана) Если ряд сходится условно, то путем соответствующей перестановки его членов можно получить ряд с наперёд заданным значением суммы (при этом не исключается $\pm\infty$).

1.11. Признак Лейбница

Если $a_n = (-1)^n b_n$, $b_n \geq 0$, и последовательность (b_n), начиная с некоторого номера n_0, монотонно стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Для остатка такого ряда справедлива оценка:

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1}, \quad 0 \leq \theta_n \leq 1, \quad n > n_0.$$

1.12. Признак Абеля

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{4}$$

сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и последовательность (b_n) есть монотонная и ограниченная.

1.13. Признак Дирихле

Ряд (4) сходится, если последовательность (b_n), начиная с некоторого номера n_0, монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена.

1.14. Ассоциативное свойства ряда

Члены сходящегося ряда можно группировать произвольно; при этом сумма ряда не изменяется.

Функциональные последовательности и ряды. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

1.15. Понятие равномерной сходимости последовательностей рядов

Определение 1.15.1. Последовательность функций (f_n), $f_n\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, называется сходящейся поточечно к функции $f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, если при каждом фиксированном $x_0 \in X$ числовая последовательность $(f_n(x_0))$ сходится к числу $f(x_0)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon,\, x_0)$ такое, что $\forall n > N$ справедливо неравенство

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция f называется предельной для последовательности (f_n).

Определение 1.15.2. Последовательность функций (f_n), $f_n\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, называется равномерно сходящейся к функции $f\colon X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \ \wedge \forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $f_n \rightrightarrows f(x)$ на X.

Определение 1.15.3. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots, \qquad (5)$$

где $u_k\colon X_1 \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $X_1 \supset X$, называется сходящимся поточечно на множестве X к своей сумме $S(x)$, $x \in X$, если сходится поточечно последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$, т. е. $\forall x_0 \in X \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$.

Определение 1.15.4. Функциональный ряд (5) называется равномерно сходящимся к своей сумме $S(x)$ на множестве X, если последовательность частичных сумм $(S_n(x))$ этого ряда равномерно сходится на X к $S(x)$.

1.16. Критерий Коши

Для равномерной сходимости ряда (5) на множестве X необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N \wedge \forall p \in \mathbb{N} \wedge \forall x \in X$ выполнялось неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

1.17. Важнейшие достаточные признаки равномерной сходимости рядов

Мажорантный признак Вейерштрасса. Если $\exists a_k \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in X$ справедливы неравенства $|u_k(x)| \leq$

a_k, $k \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд (5) сходится равномерно на X.

Признак Дирихле. Если частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно ограничены на X, т. е. $\exists M > 0$ такое, что $\forall x \in X \wedge \forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leq M|$, а функциональная последовательность $(b_n(x))$ удовлетворяет двум условиям:

а) $\forall x \in X$: $b_{n+1}(x) \leq b_n(x) \forall n > n_0$;

б) $b_n(x) \rightrightarrows 0$ на X при $n \to \infty$, то функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \tag{6}$$

сходится равномерно на X.

Признак Абеля. Ряд (6) сходится равномерно на X, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на X, а функции b_k удовлетворяют двум условиям:

а) $\exists M > 0$ такое, что $\forall x \in X \wedge \forall k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|b_k(x)| \leq M$;

б) $\forall x_0 \in X$ последовательность $(b_k(x_0))$ монотонна при $k > k_0$.

1.18. Непрерывность предельной функции и суммы ряда

Если последовательность непрерывных функций (f_n), f_n: $X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, сходится равномерно на X к функции f: $X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то f непрерывна на X. Если все члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ непрерывны на X и ряд сходится равномерно на X к сумме $S(x)$, то функция S непрерывна на X.

1.19. Почленный предельный переход в рядах и функциональных последовательностях

Если функциональный ряд (5) сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 и если $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = c_k$, $k \in \mathbb{N}$, то числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится, причем

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

Если последовательность функций (f_n), $n \in \mathbb{N}$, равномерно сходится в окрестности точки x_0 и $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = A_n$, то последовательность чисел (A_n), $n \in \mathbb{N}$, также сходится и

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right).$$

1.20. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда

Если последовательность интегрируемых функций (f_n), $f_n \colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на $[a,\, b]$ к функции $f \colon [a,\, b] \to \mathbb{R}$, то $\forall x_0 \in [a,\, b]$:

$$\int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in [a,\, b], \quad n \to \infty.$$

Если ряд (5) члены которого интегрируемы на $[a,\, b]$, сходится равномерно на $[a,\, b]$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} S(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} u_k(t)dt,$$

т. е. ряд (5) можно почленно интегрировать на отрезке $[x_0, x] \subset [a, b]$.

1.21. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда

Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций (f_n), f_n: $[a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к функции f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, а последовательность (f'_n), $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно к функции φ: $[a, b] \to \mathbb{R}$, то функция f также дифференцируема на $[a, b]$ и $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$, т. е. допустим предельный переход под знаком производной.

Если ряд (5) с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на $[a, b]$, а ряд производных

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$$

сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма ряда (5) дифференцируема на $[a, b]$, причем на этом отрезке выполняется равенство

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x),$$

т. е. ряд (5) можно почленно дифференцировать.

Степенные ряды

1.22. Круг и радиус сходимости степенного ряда

Определение 1.22.1. Ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \tag{7}$$

где a_n, z, $a \in \mathbb{C}$, называется степенным рядом; a_n — коэффициенты степенного ряда (они не зависят от z), a — фиксированная точка на комплексной плоскости.

Теорема 1.22.2. Каждый степенной ряд сходится абсолютно внутри некоторого круга $|z-a| \le R$, где радиус круга $R \ge 0$ определяется по формуле Коши–Адамара

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & \text{если} \quad 0 < l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty, \\ 0, & \text{если} \quad l = +\infty, \\ +\infty, & \text{если} \quad l = 0, \end{cases}$$

или по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \tag{8}$$

если этот предел существует хотя бы в несобственном смысле.

Вне круга $|z-a| \le R$ ряд (7) не сходится ни в одной точке $z \in \mathbb{C}$. Вопрос сходимости ряда (7) в точках окружности $|z-a| = R$, $R > 0$, остается открытым и решается отдельно для каждого ряда.

В случае, когда a_n, z, $a \in \mathbb{R}$, внутренность круга сходимости вырождается в интервал $(a-R,\, a+R)$, $R > 0$, на действительной прямой.

При $R = 0$ круг вырождается в точку $z = a$, а при $R = +\infty$ представляет комплексную плоскость (или числовую прямую, если ряд (7) действителен).

1.23. Основные свойства степенных рядов

Сумма степенного ряда внутри круга сходимости представляет собой непрерывную функцию. Если ряд (7) действительный и на конце его интервала сходимости $z = R + a$, $R > 0$, расходится, то сходимость ряда на интервале $[a,\, R+a)$ не может быть равномерной.

Если действительный степенной ряд сходится при $z = R + a$, $R > 0$, то сходимость ряда будет равномерной на отрезке $[a,\ R + a]$.

Сумма действительного степенного ряда внутри интервала сходимости имеет производные любого порядка.

Теорема 1.23.1. (Абеля) Если действительный степенной ряд сходится в точке $z = R + a$, $R > 0$, то его сумма $S(z)$ представляет собой значение непрерывной слева функции в этой точке, т. е.

$$S(R + a) = \lim_{z \to R+a-0} S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Аналогичные утверждения справедливы и для левого конца интервала сходимости.

1.24. Разложение функции в ряд Тейлора

Определение 1.24.1. Пусть $f\colon (a - R_1,\ a + R_2) \to \mathbb{R}$, $R_i > 0$, $i = 1,\ 2$. Говорят, что функция f раскладывается в степенной ряд на интервале $(a - R,\ a + R)$, где $0 < R \leq \min(R_1,\ R_2)$, если $\exists a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_0$, такие, что $\forall x \in (a - R,\ a + R)$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n.$$

Теорема 1.24.2. (Тейлора). Для того чтобы функция f могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(a - R,\ a + R)$, $R > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она была бесконечно дифференцируема и остаточный член в форме Тейлора для этой функции стремился к нулю при $n \to \infty$ на указанном интервале.

Разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \tag{9}$$

Функция f, разлагающаяся в ряд Тейлора, называется аналитической и ее разложения (9) единственно.

Практически важным являются случаи представления остаточного члена разложения (9) в форме Лагранжа

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

и в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$.

1.25. Разложение основных элементарных функций

Полагая в формуле (9) $a = 0$, получаем пять основных разложений:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $|x| < \infty$;

2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|x| < \infty$;

3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $|x| < \infty$;

4) $(1+x)^m = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$, $-1 < x < 1$;

5) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $-1 < x < 1$.

Разложения 1)–3) справедливы для всех комплексных значений x, разложение 4) выполняется при $|x| < 1$, $m \in \mathbb{R}$, а равенство 5) — при $|x| \le 1$, $x \ne -1$.

1.26. Операции над степенными рядами

Ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

всегда имеют общее множество сходимости и внутри этого множества справедливы следующие операции сложения и умножения:

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)(z-a)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$; λ, μ — числа.

Если степенной ряд (5) действителен, то внутри интервала сходимости его можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать; при этом интервал сходимости полученного таким образом ряда совпадает и интервалом сходимости исходного ряда. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n;$$

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + C.$$

Часть 2.
Методические указания к решению задач

1. Найдите сумму следующих рядов:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{14}{49n^2-70n-24}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Решение. a) Квадратный трёхчлен знаменателя имеет корни $12/7$ и $-2/7$, поэтому общий член ряда как правильную дробь можно разложить на сумму простейших дробей:

$$a_n = \frac{14}{49n^2-70n-24} = \frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2}.$$

Найдём частичные суммы ряда:

$$S_n = \left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{23}\right) + \ldots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{7n-12} - \frac{1}{7n+2}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7n+2}.$$

Легко видеть, что

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{3}{10}.$$

b) Представим данный ряд методом неопределённых коэффициентов в виде разности двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$
$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Далее каждый ряд разложим на сумму простейших, в результате получим:

$$S' = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+2)(n+3)} =$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \left(\frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right) \right) = \frac{1}{3};$$

$$S'' = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right) \right) = \frac{1}{2};$$

$$S = S' + S'' = 5/6.$$

Ответ: a) $S = 3/10$; b) $S = 5/6$.

2. Исследуйте сходимость следующих рядов:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n} + 5}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 \operatorname{arctg}^{2n} \frac{\pi}{4n}$; e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Решение. a) Так как

$$0 \le \frac{\cos^2 n}{n(n+1)} \le \frac{1}{n(n+1)},$$

то данный ряд сходится по первому признаку сравнения.

b) Поскольку

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5} = 0,$$

то используя эквивалентность бесконечных малых можем записать, что

$$\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5} = \frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5} + \mathsf{o}\Big(\frac{1}{n^{4/3}}\Big)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ сходится, следовательно исходный ряд сходится.

c) Ряд сходится по признаку д'Аламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1.$$

d) Ряд сходится по радикальному признаку Коши:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^4}\cdot\sqrt[n]{\operatorname{arctg}^{2n}\frac{\pi}{4n}}, \quad \operatorname{arctg}^2\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi^2}{16n^2} + \mathsf{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^4} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{16n^2} = 0.$$

e) Можно оценить общий член ряда:

$$a_n = \frac{n}{(n^2-1)\ln n} \geqslant \frac{1}{n\ln n} = b_n.$$

Ряд из b_n расходится по интегральному признаку, так как

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{B \to +\infty} \ln \ln x \Big|_2^B = +\infty.$$

Ряд из a_n по первому признаку расходится.

f) По признаку Лейбница ряд сходится условно:

$$a_n = 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Ответ: a) сходится; b) сходится; c) сходится; d) сходится; e) расходится; f) сходится условно.

3. Вычислите сумму следующего ряда с точностью до α:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \alpha = 0{,}01.$$

Решение. Погрешность суммы знакочередующегося ряда не превосходит модуля первого из отброшенных членов, поэтому найдём количество членов ряда достаточное для заданной погрешности из соотношения

$$\frac{1}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{101}, \quad n = 10.$$

Отсюда

$$S \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \ldots - \frac{1}{82} = 0{,}63.$$

Ответ: $S \approx 0{,}63$.

4. Докажите справедливость равенства (ответом служит число ρ, получаемое при применении признака д'Аламбера или признака Коши)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{\big((n+2)!\big)^2} = 0.$$

Решение. Необходимым признаком сходимости ряда является стремление к нулю общего члена ряда, поэтому если доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{\big((n+2)!\big)^2}$$

сходится, то тем самым будет доказано и данное соотношение. По признаку д'Аламбера

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{(n+3)^2} = 0.$$

Ответ: $\rho = 0$.

5. Найдите области сходимости следующих функциональных рядов:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-x)^{1/3}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

Решение. а) При всех $x = k \in \mathbb{N}$ числовой ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому его остаток оценивается с помощью неравенства $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$, т. е.

$$|R_n(x)| < \frac{1}{(n+1-x)^{1/3}}.$$

Если $x \leqslant 0$, то $|R_n(x)| < \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. Так как неравенства $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \leqslant \varepsilon$ и $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon^3} - 1$ равносильны, то, взяв $n \geqslant N \in \mathbb{N}$, где $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon^3} - 1$, приходим к неравенству $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Если $x \in (k, k+1)$, то $|R_n(x)| < \frac{1}{\sqrt[3]{n-k}}$. Взяв $n \geqslant N \in \mathbb{N}$, где $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon^3} + k$, также приходим к неравенству $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Итак, данный ряд сходится равномерно при $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

b) Применим радикальный признак Коши, полагая

$$u_n = \frac{1}{n \cdot 3^{n/2}} \operatorname{tg}^n x.$$

Тогда

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt[n]{n}\sqrt{3}}; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt{3}} < 1;$$

$$|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}; \quad -\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

То есть ряд сходится внутри найденных интервалов, причём равномерно. Чтобы исследовать сходимость на концах интервалов, необходимо выяснить сходятся ли соответствующие численные ряды. Левым границам интервалов соответствует условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n/2}}{n3^{n/2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

На правых границах ряд расходится. Таким образом область равномерной сходимости ряда будет иметь вид

$$-\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Применим радикальный признак Коши, полагая

$$u_n = \left(3 + \frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}.$$

Тогда

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \left(3 + \frac{1}{n}\right) 4^{-\frac{n}{x}}; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x > 0 \\ \infty, & x \leqslant 0. \end{array} \right.$$

Итак, данный ряд сходится равномерно при $x > 0$.

d) Применим признак д'Аламбера, полагая

$$u_n = \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

Тогда

$$u_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}}{(2n+3)3^{n+1}}; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x+2|}{3} < 1.$$

То есть, ряд сходится равномерно при $x \in (-5, 1)$.

При $x = -5$, получаем числовой ряд, который сходится условно по признаку Лейбница, при $x = 1$ получается расходящийся числовой ряд.

Итак, данный ряд сходится равномерно при $x \in [-5, 1)$.

Ответ: a) $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; b) $x \in [-\pi/3 + \pi k, \pi/3 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $x \in (0, +\infty)$; d) $x \in [-5, 1)$.

6. Исходя из определения докажите равномерную сходимость ряда на отрезке $[0, 1]$. При каких n абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит 0,1 для любых x из отрезка $[0, 1]$?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-6}}.$$

Решение. При каждом $x \in [0, 1]$ последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = \frac{x^n}{\sqrt[3]{n-6}}$, имеет предел, равный нулю, и монотонно убывает, так как функция

$$\varphi(t) = \frac{x^n}{\sqrt[3]{t^3-6}}$$

убывает для каждого $x \in [0, 1]$, поскольку при

$$t \geqslant 1, \quad \varphi'(t) = -\frac{x^n}{3}(t-6)^{-\frac{4}{3}} < 0.$$

Итак при всех $x \in [0,1]$ ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому его остаток оценивается с помощью неравенства $|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|$, т. е.

$$|R_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+1)^3-6}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3-6}}.$$

Так как неравенства $\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3-6}} \leqslant \varepsilon$ и $n \geqslant \sqrt[3]{\varepsilon^{-3}+6}-1$ равносильны, то, взяв $n \geqslant N \in \mathbb{N}$, где $N \geqslant \sqrt[3]{\varepsilon^{-3}+6}-1$, приходим к неравенству $|R_n(x)| < \varepsilon$. При $\varepsilon = 0{,}1$ имеем $N \geqslant \sqrt[3]{1006}-1 \approx 9{,}02$.
Ответ: $n = 9$.

7. Для данного функционального ряда постройте мажорирующий ряд и докажите равномерную сходимость на заданном отрезке:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}, \quad x \in [2,4].$$

Решение. На отрезке $[2,4]$ заданный ряд мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

По признаку Вейерштрасса заданный ряд сходится равномерно на отрезке $[2,4]$.

Ответ: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

8. Найдите суммы следующих функциональных рядов:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n(n-1)}x^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(2n^2+n-1)x^n$.

Решение. a) Представим исходный ряд в виде суммы двух рядов:

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}.$$

Оба степенных ряда сходятся равномерно в интервале $(-1, 1)$. Первый ряд несложно преобразовать к разложению функции $\ln(1-x)$:

$$x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)} = -x \ln(1-x).$$

Второй ряд сначала продифференцируем:

$$\Big(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\Big)' = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)} = \ln(1+x).$$

Теперь для нахождения суммы исходного ряда проинтегрируем $\ln(1+x)$:

$$\int \ln(1+x)dx = x\ln(1+x) - x - \ln(1+x) + c.$$

Таким образом

$$S(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} - x + \ln(1+x).$$

Здесь $c = 0$, так как $S(0) = 0$.

b) Исходный ряд сходится равномерно в интервале $(-1, 1)$.

Отметим, что сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \qquad (10)$$

Продифференцируем ряд из левой части (10) и получим следующее соотношение:

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n. \tag{11}$$

Теперь продифференцируем ряд из правой части (11):

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n. \tag{12}$$

Из (11) следует, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}, \tag{13}$$

аналогично из (12), вычисляется

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = x\Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}. \tag{14}$$

Таким образом с использованием (10), (13) и (14) получаем

$$S(x) = \frac{2x(x+1)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} - \Big(\frac{1}{1-x}\Big).$$

Ответ: a) $S(x) = x\ln\dfrac{1+x}{1-x} - x + \ln(1+x)$;

b) $S(x) = \dfrac{2x(x+1)}{(1-x)^3} + \dfrac{x}{(1-x)^2} - \Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)$.

19. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x

$$(2-e^x)^2$$

Произведем возведение в квадрат, получим следующее выражение для нашей функции $4 - 4e^x + e^{2x}$, учитывая известное разложение

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

можем сразу записать разложение для заданной функции

$$(2 - e^x)^2 = 4 - 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

20. Вычислить интеграл с точностью до 0,001

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

Воспользуемся разложением функции $\sin x$, данный интеграл будет заменен на интеграл от суммы степенных функций

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \int_0^1 \Big(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!} \Big) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^{11}}{5!11} - \ldots \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \ldots$$

Учитывая, что ряд знакопеременный, можем утверждать (теорема Лейбница), что погрешность его суммы не будет превышать по модулю первого из отброшенных членов. Поэтому для достижения требуемой точности можем ограничиться суммой из 2 членов ряда

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = 0,3095.$$

Часть 3.
Варианты индивидуальных заданий

Вариант 1

1. Найдите сумму следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$.

2. Исследуйте сходимость следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{5^{n-1}+n-1}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n(n-1)!}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. Вычислите сумму следующего ряда с точностью до α:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}, \quad \alpha = 0{,}01.$$

4. Докажите справедливость равенства (ответом служит число ρ, получаемое при применении признака д'Аламбера или признака Коши)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

5. Найдите области сходимости следующих функциональных рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^{-1/5}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n}{n}x^{2n}\sin(x+\pi n)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2\sqrt{x-2}}{\exp(n^2/(x-1)^3)}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

6. Исходя из определения докажите равномерную сходимость ряда на отрезке $[0,1]$. При каких n абсолютная величина остаточного члена ряда не превосходит 0,1 для любых x из отрезка $[0,1]$?

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{7n-11}.$$

7. Для данного функционального ряда постройте мажорирующий ряд и докажите равномерную сходимость на заданном отрезке:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad x \in [0,2].$$

8. Найдите суммы следующих функциональных рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n-1}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4n^2+9n+5)x^{n+1}$.

9. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням x:

$$f(x) = \frac{9}{20-x-x^2}.$$

10. Вычислите интеграл с точностью до 0,001:

$$\int_0^{0,1} \exp(-6x^2)dx.$$

Вариант 2

1.[1] a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{24}{9n^2-12n-5}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+6}{n(n+3)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \sin \dfrac{2+(-1)^n}{n^3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{4^n}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ln^2(2n+1)}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\Big(\dfrac{n}{2n+1}\Big)^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha = 0{,}01$. **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!} = 0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\Big(\dfrac{1-x}{1+x}\Big)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^n}{n} x^{4n} \sin(2x - \pi n)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln^n(x+1/n)}{\sqrt{(x-\mathrm{e})}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{5n-6}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n2^n}$, $x \in [-3/2, 3/2]$.

8. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (3n^2+7n+4)x^n$.

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$. **10.** $\displaystyle\int_0^{0,1} \sin(100x^2)\,dx$.

---

[1] Здесь и далее формулировка заданий совпадает с формулировкой заданий первого варианта.

Вариант 3

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(\pi n/2)}{n(n+1)(n+2)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2+5}{n^2+4}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$; f) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)^3}$, $\alpha = 0{,}001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n!!}{n^n} = 0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} x^{4n} \cos(x+\pi n)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n 5^{-\frac{n}{(x+1)^2}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4n-6}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^n}$, $x \in [-2, 2]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) x^{n+2}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1) x^{n+3}$.

9. $f(x)=\ln(1-x-6x^2)$. **10.** $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 dx$.

Вариант 4

1. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$.

2. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{10^n 2n!}{(2n)!}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^4\Big(\frac{2n}{3n+5}\Big)^n$; e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)\ln n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^n}{(2n-1)!}=0$.

5. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}(x^2-4x+6)^n$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{5}{3}\Big)^n\frac{1}{\sqrt{n}}x^{2n}\cos(x-\pi n)$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\sqrt{x-1}\exp^{-\frac{n}{x}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5x^{2n}}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-5}}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+1}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n$, $x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n^2+4n+3)x^{n+2}$.

9. $f(x) = 2x\cos^2\dfrac{x}{2} - x$.

10. $\displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Вариант 5

1. a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2}{4n^2+8n+3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n-1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n+2)!}{3n+5}\dfrac{1}{2^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 2n^2}{n^4-n^2+1}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2n+1}{n^3(n+1)}$, $\alpha = 0{,}01$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{2n^2!} = 0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}}x^{4n}\sin(3x+\pi n)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \exp^{-(1-x\sqrt{n})^2}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{4n-5}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n!}, \quad x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.

8. a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+5n+3)x^n$.

9. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{x} - 2$.

10. $\int_0^{0,1} \dfrac{1-\exp^{-2x}}{x} dx$.

Вариант 6

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{14}{49n^2-28n-45}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{3n-5}{n(n^2-1)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \frac{1+(-1)^n}{2} n}{n^3+2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+5}{n!} \sin \dfrac{2}{3^n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{2n+2}{3n+1}\Big)^n (n+1)^3$; e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$;

f) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)\ln n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad \alpha = 0{,}0001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+3}{n+1} \dfrac{1}{(27x^2+12x+2)^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{6^n}{n} x^{2n} \sin(5x - \pi n)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n 3^{\frac{n}{(x-1)}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{5n-9}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n5^n}$, $x\in[-1,6]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)\dfrac{1}{x^n}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n^2+5n+3)x^{n+1}$.

9. $f(x)=\dfrac{7}{12+x-x^2}$.

10. $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+\frac{x}{5})}{x}dx$.

Вариант 7

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3}{9n^2+3n-2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(2+\cos\pi n)}{2n^2-1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^3+2}{n^5+\sin 2^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{5}{n}}{n!}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{4n-3}{5n+1}\Big)^{n^3}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$;

f) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$, $\alpha=0{,}1$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n)!!}{5^{n^2}}=0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5^n}{\sqrt[4]{3n}}x^{2n}\cos(x+\pi n)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}5^{-\frac{n^3\sin(x^2+1)}{n}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{3n-4}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$, $x\in[2,4]$.

8. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(3n^2+8n+5)x^{n+2}$.

9. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.

10. $\int_0^{1,5}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$.

Вариант 8

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{7}{49n^2-7n-12}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n^2-4)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\arcsin\frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3-3n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n}{3^n n!}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}, \quad \alpha = 0{,}1.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{n+1} \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n};$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{9^n}{2n} x^{2n} \sin(3x - \pi n);$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(x-1)};$ d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{x^n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-2}}.$

7. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pi - x)\cos^2 nx}{\sqrt[4]{n^7+1}}, \quad x \in [0, \pi].$

8. a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{2n+1} x^{2n+1};$ b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n^2+8n+5)x^n.$

9. $f(x) = \ln(1 + x - 6x^2).$

10. $\int_0^{0{,}2} \exp^{-3x^2} dx.$

Вариант 9

1. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n-2};$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}.$

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1};$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n};$ c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n};$

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{4n};$ e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(2n)};$ f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{n^n} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+3}\Big(\dfrac{1+x}{1-x}\Big)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{3n} \sin\dfrac{x}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 5^{nx} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{7^{nx}(x-1)}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{6n-11}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n9^n}, \quad x \in [-1,3].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n^2+7n+5)x^{n+1}.$

9. $f(x) = (x-1)\sin 5x.$

10. $\int_0^{0,2} \sin(25x^2)dx.$

Вариант 10

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{14}{49n^2-14n-48}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{n+2}{n(n-1)(n-2)}.$

2. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\ln\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2-n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{6^n(n^2-1)}{n!}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{n+2}{3n-1}\Big)^{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln(2n)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos\dfrac{\pi}{6n}.$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}, \quad \alpha=0{,}0001.$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(2n+1)!}=0.$

5. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}3^{2n}x^n\sin\frac{x}{2n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^n(x+2)}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}.$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-7}}.$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}, \quad x\in[-5,-1].$

8. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+2}}{16^n(2n+1)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3n^2+7n+5)x^n.$

9. $\displaystyle f(x)=\frac{\operatorname{ch}3x-1}{x^2}.$

10. $\displaystyle\int_0^{0{,}5}\cos(4x^2)\,dx.$

Вариант 11

1. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6}{36n^2-24n-5}$; b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}.$

2. a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\arccos\frac{(-1)^n n}{n+1}}{n^2+2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^n\frac{n}{5^n}$; e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n!}.$

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!!}, \quad \alpha=0{,}001.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n^n}=0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+1)^{2x+1}};\quad$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^{3n}x^n\sin\dfrac{2x}{n};$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{5}{n}\Big)^n 3^{-\frac{n}{x^2}};\quad$ d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{7n-10}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x-2)^{2n}}{(n+1)^2\ln(n+1)}, \quad x\in[1,3].$

8. a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)};\quad$ b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(2n-1)x^{n+2}.$

9. $f(x)=\dfrac{6}{8+2x-x^2}.$

10. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$

Вариант 12

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{14}{49n^2-84n-13};\quad$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{(n+2)(n+1)n}.$

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\cos^2 n}{n^3+5}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2-\ln n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{2n+3}{n+1}\Big)^{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$; f) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(2n)}.$

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{2}{5}\Big)^n, \quad \alpha = 0{,}01.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(3n)^n}{(2n-1)!} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}3^n x^{3n}\sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln^n(x+e)}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-8}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in[-3,3].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\Big)x^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2-n+1)x^n$.

9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}.$

10. $\int_0^{0,2}\frac{1-e^{-x}}{x}dx.$

Вариант 13

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n\ln n}{n^2-3}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\frac{1}{n-1}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{3n+2}{4n-1}\Big)^n(n-1)^2$; e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n}{7^n}, \quad \alpha = 0{,}0001.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(3n)!}{2^{n^2}} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{x+n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}3^n x^n \operatorname{tg}\dfrac{3x}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{\frac{n^2\sin(x^2+1)}{n}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x+5)^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{3^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-4}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}, \quad x\in[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n^2-n-1)x^n$.

9. $f(x) = \ln(1-x-12x^2)$.

10. $\int_0^{0,4}\dfrac{\ln(1+\frac{x}{2})}{x}dx.$

Вариант 14

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{7}{49n^2+35n-6}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{n+5}{(n^2-1)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2+3}{n^3(2+\sin(\frac{n\pi}{2}))}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}+2}\operatorname{arctg}\dfrac{n+3}{n^2+5}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{(3n!)}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$; e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+2)\ln^2 n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n}{n^2}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n, \quad \alpha = 0{,}1.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^3} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}8^n x^{3n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{4\sqrt{n}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-\frac{n}{\cos x}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2n-3}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n3^n\ln n}, \quad x\in[-2,2].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(3n^2+5n+4)x^{n+1}$.

9. $f(x) = (3+e^{-x})^2$.

10. $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$.

Вариант 15

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{9}{9n^2+3n-20}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{8n-10}{(n-1)(n-2)(n+1)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\dfrac{2+(-1)^n}{6}\pi$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3^n(n+1)!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{n}{3n+1}\Big)^{2n+1}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^5}{(2n)!} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+x)^n}{n^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{3n}\operatorname{tg}\dfrac{2x}{3n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\ln(1+\frac{1}{n})+\ln\ln x)^n}{\sqrt{x-e^{\frac{1}{e}}}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\cdot 9^n(x-1)^{2n}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^n}{8n-12}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}, \quad x\in[-7,-3].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n(2n-1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+7n+4)x^n$.

9. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x} - 1.$

10. $\displaystyle\int_0^{0{,}3} e^{-2x^2}\,dx.$

Вариант 16

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{14}{49n^2-42n-40}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{3n-1}{n(n^2-1)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3+n+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2+n+2}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\cos\frac{\pi}{3\sqrt{n}}\sqrt[3]{3n+\ln n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}, \quad \alpha = 0{,}01.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{3n}}{n!} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{3n} \arcsin\frac{x}{3n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{6n-7}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}, \quad x \in [-3,-1].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n}\right] x^{2n}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n^2-n-2)x^{n+1}$.

9. $f(x) = \frac{7}{12-x-x^2}$.

10. $\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$

Вариант 17

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{8}{16n^2-8n-15}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{n-4}{n(n-1)(n-2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1+\sin\frac{\pi n}{2}}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{n^3}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{n+1}}{n^n}$;

e) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ln(n-1)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\left(\frac{3}{2}\right)^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!n!}$, $\alpha = 0{,}001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)!}{n^n} = 0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 16^n x^{3n} \arcsin\dfrac{x}{\sqrt[3]{n}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln^n(x+\frac{1}{e})}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{5n-8}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right]x^{n-1}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n^2+2n+1)x^n$.

9. $f(x)=x^2\sqrt{4-3x}$.

10. $\displaystyle\int_0^{0{,}2}\cos(25x^2)dx$.

Вариант 18

1. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{7}{49n^2-21n-10}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n+9}{n(n+1)(n+3)}$.

2. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2\frac{\pi n}{3}}{3^n+2}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{n^3}{n^3+1}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n-1}{3n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $\alpha=0{,}001$.

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(2n-1)!}=0$.

5. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+x^n}{1-x^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}32^n x^{5n}\arcsin\frac{x}{\sqrt{n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin^n\frac{x\ln n}{x-n}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{6n-10}$.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^4x^{2n}}{2n+1}$, $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)x^{n+1}}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+2n-1)x^{n+1}$.

9. $f(x)=\ln(1+2x-8x^2)$.

10. $\displaystyle\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$.

Вариант 19

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5}{25n^2+5n-6}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{5n-2}{n(n-1)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2+\cos\frac{n\pi}{2})\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}n^3\operatorname{tg}^5\dfrac{\pi}{n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^n}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n^3}{(\ln n)^n}$;

e) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(n+3)}{\ln(n+4)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n n!}$, $\alpha=0{,}001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n+1)!!}{n^n}=0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n+1}{xn^x}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n x^n\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{n+1}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{e^{n\sin x}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{4n-7}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n}$, $\quad x\in[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}]$.

8. a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$; $\quad$ b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+2n+2)x^{n+2}$.

9. $f(x)=2x\sin^2(\dfrac{x}{2})-x$.

10. $\displaystyle\int_0^{0,4}\frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$.

Вариант 20

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{6}{4n^2-9}$; $\quad$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2+\sin\frac{n\pi}{4})}{n^2}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{n}{3n-1}\Big)^{n^3}$;

e) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\dfrac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!n!}$, $\quad\alpha=0{,}001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(2n)^n}{(2n+1)!}=0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n^{x^2-1}}$; $\quad$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n x^{3n}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2(n+3)}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 5^{-n^2\arctan(\frac{1}{n|x|})}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{5n-7}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x+5)^n}{n^2}$, $x\in[-6,-4]$.

8. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sin^n x}{n(n-1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+4n+3)x^{n+1}$.

9. $f(x)=(x-1)\operatorname{sh}x$.

10. $\displaystyle\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$.

Вариант 21

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{7}{49n^2-35n-6}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin^2 2^n}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\Big)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^3\operatorname{arctg}^n\dfrac{\pi}{3n}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\cos\pi n}{3^n(n+1)}$, $\alpha=0{,}001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(4n)!}{2^{n^2}}=0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n(n^2+1)}(25x^2+1)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 27^n x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2n+3}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 3^{-n^2 \ln(1+\frac{x}{n})}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^{2n}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{7n-13}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$, $x \in [1,3]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2+5n+4)x^{n+2}$.

9. $f(x) = \frac{5}{6+x-x^2}$.

10. $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$.

Вариант 22

1. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{2-n}{n(n+1)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+2}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$;

e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\frac{n}{3}\ln^2(n+7)}$; f) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{((n+1)!)^2} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2};$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{8^n}{n^2}\sin^{3n} x;$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{n}{x-1}\right)}{e^{n\sqrt{x}}};$ d) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}.$

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-21}}.$

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}, \quad x \in [-3, 0].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) x^n;$ b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (2n^2-2n+1)x^n.$

9. $f(x) = x\sqrt[3]{27-2x}.$

10. $\int\limits_0^{0{,}4} e^{-\frac{3x^2}{4}}\, dx.$

Вариант 23

1. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{12}{36n^2+12n-35};$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+6}{n(n+1)(n+2)}.$

2. a) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2\ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}};$ b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}} - 1\right);$

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{(n+2)!4^n};$ d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1}e^{-n};$

e) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi n)}{n^3}, \quad \alpha = 0{,}01.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n^3}{n^3+2} \dfrac{1}{(3x^2+10x+9)^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{\sqrt{x}} \arcsin \dfrac{x}{3^{nx}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{3n-5}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+2)}, \quad x \in [-1, 1].$

8. a) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2-2n-1)x^{n+1}$.

9. $f(x) = \ln(1+x-12x^2)$.

10. $\int_0^{0{,}5} \sin(4x^2)dx$.

Вариант 24

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{7}{49n^2+21n-10}$; b) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{n-2}{n(n-1)(n+1)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\frac{3}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\Big(\dfrac{3n-1}{4n+2}\Big)^{2n}$;

e) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\cos(\frac{2}{\sqrt{n+4}})}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n}{(n+1)^n}$, $\quad \alpha = 0{,}001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}} = 0$.

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+2^n}$; $\quad$ b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{\sqrt{n}} \sin^{2n}(2x)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{2x} \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{x}}{2^{nx}}$; $\quad$ d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^5}{x^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-19}}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$, $\quad x \in [-6, -4]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(2^n + \dfrac{(-1)^n}{n}\Big) x^n$; $\quad$ b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2-2n+2)x^n$.

9. $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x} - \cos 3x$.

10. $\displaystyle\int_0^{0{,}4} \cos\Big(\frac{5x}{2}\Big)^2 dx$.

Вариант 25

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3}{9n^2-3n-2}$; $\quad$ b) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n^2-1)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin \frac{\pi}{2n+1}}{n\Big(3+\sin\frac{\pi n}{4}\Big)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{2n}{4n+3}\Big)^{n^2}$;

e) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \dfrac{1}{(\frac{n}{3}-1)\ln^2(\frac{n}{2})}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+3)!}{n^n} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n}\operatorname{tg}^{2n} x$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} 2^{-\frac{n^2\ln n}{x^2+1}}$; d) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{8n-11}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n^2}}{3^{n^2}}, \quad x \in [-2,-2].$

8. a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n-2)(2n-1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2-2n-2)x^{n+1}$.

9. $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

10. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$.

Вариант 26

1. a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{25n^2-5n-6}$; b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-n}{n(n+1)(n+3)}$.

2. a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cos\frac{2\pi}{3n}}{\sqrt[4]{n^4-1}}$; b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+7n}{5^n+n}$;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$; d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$;

e) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2+5)\ln n}$; f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$.

3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi n)}{n^3+1}$, $\alpha = 0{,}001$.

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(2n+3)!} = 0$.

5. a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n+|x|^{-n}}{2}$; b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^4}\sin^n(3x)$;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{n}{\ln x}}$; d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}$.

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3-11}}$.

7. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sin\frac{\pi}{2^n}\right)(x-2)^n$, $x \in [1,3]$.

8. a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$; b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (4n^2+6n+5)x^n$.

9. $f(x) = \dfrac{5}{6 - x - x^2}$.

10. $\displaystyle\int_0^{0{,}5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$.

Вариант 27

1. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}$; b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3n + 1}{n(n-1)(n+1)}$.

2. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+2}}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1)^2$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n}{(2n^2 + 3)\ln n}$; f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3(n+3)}$, $\alpha = 0{,}01$.

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+3)!!}{n^n} = 0$.

5. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n + e^x)}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n x}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n + 5}{(2n+9)^5 (x+2)^{2n}}$.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{8n^3 - 12}}$.

7. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}, \quad x \in [0,2].$

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1} x}{n(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2+6n+5)x^{n+1}$.

9. $f(x) = \sqrt[4]{16-5x}$.

10. $\displaystyle\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$.

Вариант 28

1. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{14}{49n^2-56n-33}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4-n}{n(n+1)(n+2)}$.

2. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\Big(2+(-1)^n\Big)}{\ln(1+n)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \sin \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$;

c) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n^2} \dfrac{1}{2^n}$;

e) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \dfrac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\Big(1+\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(\pi n)}{(n^3+1)^2}, \quad \alpha = 0{,}001.$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(5n)^n}{(2n+1)!} = 0.$

5. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n n}{(n-e^x)(n^2+1)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(2x)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 5^{-\frac{n\ln n}{x^2}}$; d) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3-3}}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{n4^n}, \quad x\in[-1,0]$.

8. a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(2n+1)x^{n+2}$.

9. $f(x)=\ln(1-x-20x^2)$.

10. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$.

Список используемой литературы

1. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды. Учеб.пособие / Под редакцией Л.Д. Кудрявцева. - М.: Наука, 2003. 504 с.

2. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Том 2. Ряды. М.: УРСС, 1998. 223 с.

3. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты. М.: Высшая школа, 1983. 174 с.

Содержание