В.А. Кузнецов, Н.Н. Попов

Теория вероятностей и математическая статистика

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Самара 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи, предложенные в этом сборнике, предназначаются для проведения практических занятий по теории вероятностей со студентами направления 0102 «Прикладная математика», однако они могут быть использованы и для студентов других направлений и специальностей в качестве дополнительного материала.

В пособии использована сквозная нумерация задач. Ко всем задачам приведены ответы. К некоторым наиболее трудным задачам даны указания по решению. Звездочкой отмечены задачи повышенной сложности.

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Часть А

1. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11.

2. Сколько можно образовать различных четырехзначных чисел, пользуясь цифрами 0, 1, 2,…, 9, не повторяя ни одну из этих цифр.

3. Сколькими способами можно распределить 8 билетов среди 4 юношей и 4 девушек так, чтобы рядом не сидели 2 юноши и 2 девушки (все места в одном ряду).

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

5. Из полного комплекта домино выбирают наудачу две кости. Найти вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой, если первая кость не дупель.

6. Найти вероятность того, что случайно взятое двузначное число делится на 7.

7. В некоторых сельских местностях России существовало когда-то следующее гадание. Девушка зажимает в руке шесть травинок так, чтобы концы травинок торчали сверху и снизу; подруга связывает эти травинки попарно между собой сверху и снизу в отдельности. Если при этом все шесть травинок оказались связанными в одно кольцо, то это должно было означать, что девушка в текущем году выйдет замуж. Найти вероятность того, что травинки при связывании наудачу образуют кольцо.

8. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что все они одной масти.

9. В партии готовой продукции, состоящей из 20 деталей, 3 бракован-

ных. Определить вероятность того, что при случайном выборе 4 изделий, одно из них окажется бракованным.

10. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются шесть карт. Найти вероятность того, что среди них окажется в точности два туза.

11. Каждая из букв А, А, Б, Б, Б, О написаны на одной из шести карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке. Найти вероятность того, что при этом образуется слово БАОБАБ.

12. Числа натурального ряда 1, 2, 3, , n расставлены случайно. Найти вероятность того, что числа 1 и 2 расположены рядом и притом в порядке возрастания.

13. На шахматную доску из 64 клеток ставятся наудачу две ладьи белого и черного цвета. С какой вероятностью они не будут бить друг друга.

14. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку.

15. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

16. В шкафу находится 10 пар ботинок различных сортов. Из них случайно выбирается 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинок отсутствуют парные.

17. Предположим, что три молекулярные цепочки некоторого полимера реагируют с кислородом. Каждая цепочка может прореагировать с 0, 1, 2 молекулами кислорода. Построить пространство элементарных событий Ω.

18. Пусть на плоскость наудачу бросается точка, и пусть события A и B состоят в том, что эта точка попадает соответственно в круг A, в круг B. Какой смысл имеют события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A + B$, $\overline{A+B}$, AB, $\overline{AB}$?

19. Мишень состоит из 10 кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_i (i = 1, 2, …, 10), причем $r_i < r_{i+1}$. Пусть событие A_i – попадание в круг радиуса r_i. Что означают события $B = A_1 + \ldots + A_6$, $C = A_1 + \ldots + A_{10}$, $D = \overline{A}_1 A_2$?

20. Из последовательности чисел 1, 2, …, n наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что одно из них меньше k, а другое больше k, где $1 < k < n$ – произвольное целое число?

21*. Имеется r шаров, которые случайным образом разбрасываются по n ящикам. В одном и том же ящике могут находиться несколько шаров и даже все шары. Найти вероятность того, что в первый ящик попадут ровно r_1 шаров, во второй – r_2 шаров и так далее., в n-й – r_n шаров; $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$.

22. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает пять деталей. Найти вероятность того, что среди них четыре окрашены.

Часть Б

23. На один ряд, в котором 8 стульев, рассаживаются 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами они могут сесть, чтобы не все девушки оказались сидящими рядом.

24. В партии из N изделий M бракованных. Из партии выбирается наугад n изделий. Определить вероятность того, что из этих изделий m окажутся бракованными.

25. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Участник лотереи покупает k билетов. Определить вероятность того, что, хотя бы один билет, окажется выигрышным.

26. Среди 20 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 5 билетов. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 3 девушки.

27. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность появления слова ДВА?

28. Из десяти карточек с буквами С, Т, А, Т, И, С, Т, И, К, А выбирается наугад пять карточек. Найти вероятность того, что из отобранных карточек можно составить слово ТАКСИ.

29. Найти вероятность P_N того, что случайно взятое натуральное число из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ делится на фиксированное натуральное число k. Найти предел P_N при $N \to \infty$.

30. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один шар и записывают его номер. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: $1, 2, \ldots, n$.

31. Из колоды в 36 карт вынимают наудачу 6 карт. Найти вероятность того, что среди них туз и король одной масти.

32. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается сразу несколько карт. Сколько карт нужно вынуть для того, чтобы с вероятностью большей, чем 0,5 утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти.

33. Монета подбрасывается три раза подряд. Под исходом опыта будем понимать последовательность (X_1, X_2, X_3), где каждый из X_i обозначает выпадение «герба» (Г) или «цифры» (Ц).

а) Построить пространство элементарных событий Ω.

б) Описать событие, состоящее в том, что выпало не менее двух «гербов».

34. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в следующем: а) произошло только событие A; б) произошли A и B, но не произошло C; в) все три события произошли; г) произошло, по крайней мере, одно из этих событий; д) произошли по крайней

мере, два из этих событий; е) произошло одно и только одно из этих событий; ж) произошли два и только два из этих событий; з) ни одно событие не произошло; и) произошло не больше двух событий.

35. Доказать, что события A, $\overline{A}\,B$, $\overline{A+B}$ образуют полную группу.

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть А

36. Доказать, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

37. Доказать, что если события A_1, A_2, , A_n, независимы, то также независимы события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.

38. Бросили монету и игральную кость. Определить, зависимы или независимы события: A = {выпал «герб»}, B = {выпало четное число очков}.

39. Доказать, что $P(A/B) \geq 1 - \dfrac{P(\overline{A})}{P(B)}$.

40. Вывести теоремы сложения и умножения вероятностей для трех событий.

41. В партии из 300 деталей 200 деталей I сорта, 60 деталей II сорта, остальные – III сорта. Какова вероятность того, что три наугад отобранные детали будут одного сорта.

42. Известно, что первый станок простаивает 5% рабочего времени, второй – 10%, а третий – 15%. Какова вероятность того, что в случайно выбранный момент окажется работающим только один станок?

43. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

44. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью p. После первого выхода из строя прибор ремонтируется; после второго – признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя в точности при k-том испытании.

45. Монету бросают до тех пор, пока не появятся подряд два «герба» или две «цифры». Найти вероятность события A = {понадобится не более трех бросаний}.

46. Бросается монета до первого появления «герба». Описать пространство элементарных событий. Найти вероятность того, что потребуется четное число бросков.

47. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,08; 0,15; 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

48. В одном ящике 5 белых и 10 красных шаров, в другом – 10 белых и 5 красных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут один белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

49. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

50. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность попадания в волка (хотя бы один раз)? Как изменится результат, если охотники сделают по два выстрела?

51. Для одной торпеды вероятность потопить корабль равна 0,5. Какова вероятность того, что 4 торпеды потопят корабль, если для потопления корабля достаточно одного попадания торпеды в цель.

52. Бросаются одновременно 2 игральные кости. Найти вероятность того, что выпали 2 пятерки, если известно, что выпавшая сумма делится на пять.

53. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?

54. Элементы a_1, a_2, …, a_n случайным образом переставляются (все $n!$ перестановок равновероятны). Какова вероятность P_n того, что хотя бы один элемент окажется на месте? Найти $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Часть Б

55. Пусть события A и B_1 независимы и независимы также события A и B_2, при этом $B_1B_2 = \varnothing$. Доказать, что события A и $B_1 + B_2$ независимы.

56. Брошены последовательно три монеты. Определить, зависимы или независимы следующие события: A = {выпал «герб» на первой монете}, B = {выпадение хотя бы одной «цифры»}.

57. Доказать, что если A и B – независимые события с положительными вероятностями, то они совместны.

58. Бросили игральную кость. Какова вероятность того, что выпало простое число очков, если известно, что число выпавших очков нечетно.

59. Вероятность того, что в течение одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,05. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за три смены?

60. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

61. Встречаются две равносильные волейбольные команды. Какова вероятность получения очередного очка для подающей команды?

62. Студент пришел на зачет, зная из 30 вопросов только 24. Какова вероятность сдать зачет, если после отказа отвечать на вопрос преподаватель задает еще один вопрос?

63. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

64. Из множества чисел $\{1, 2, \ , N\}$ наудачу выбирается три числа. Найти условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

65. Завод изготавливает определенного типа изделия; каждое изделие имеет дефект с вероятностью p. Изделие осматривается контролером; он обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью p_1, а если дефект не обнаружен, пропускает изделие в готовую продукцию. Кроме того, контролер может по ошибке забраковать изделие, не имеющее дефекта; вероятность этого равна α. Найти вероятность того, что изделие забраковано.

66. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью, не меньшей а) 0,5; б) 0,9, хотя бы один раз выпала шестерка?

67. Общество из n человек садится за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Часть А

68. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (от 12 до 13 часов).

69. В квадрат с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) наудачу брошена точка M. Пусть ξ, η – ее координаты. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + \xi x + \eta = 0$ – действительные.

70. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, случайно бросается монета радиуса r. Найти вероятность того, что упавшая монета не заденет границу ни одного из этих треугольников.

71. Случайная точка A имеет равномерное распределение в прямоуголь-

нике со сторонами 1 и 2. Найти вероятность того, что расстояние от точки A до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x.

72. К автобусной остановке в течение каждых 10 минут подходит один автобус маршрута A и один автобус маршрута $Б$. Оба автобуса прибывают на остановку в случайные моменты времени на каждом десятиминутном интервале. Стоянка автобуса маршрута A составляет 1мин, а автобуса маршрута $Б$ – 1,5 мин. Какова вероятность встречи автобусов на этой остановке.

73. Задача Бюффона. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длиной $2l$ ($l < a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

74. Какой толщины должна быть монета, чтобы вероятность падения на ребро была 1/3?

75. Внутри квадрата с вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) наудачу выбирается точка $M(x,y)$. Найти вероятность события $A = \{(x,y): x^2 + y^2 < a^2, a > 0\}$.

76. Внутри квадрата с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) наудачу выбирается точка $M(x,y)$. Найти вероятность события $C = \{(x,y): \max(x,y) < a, a > 0\}$.

Часть Б

77. Случайная точка (ξ, η) равномерно распределена в единичном квадрате с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1). Найти вероятность того, что число действительных корней уравнения $x^3/3 - \xi^2 x + \eta = 0$ равно: а) одному, в) трем.

78. Какова вероятность того, что из трех взятых наудачу отрезков длины не более l можно построить треугольник?

79. Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R, в который бросается наудачу точка. Определить вероятность того, что эта точка попадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.

80. В шаре радиуса $R = 10$ имеется шаровая полость радиуса $r = 5$ с центром в центре шара. С какой вероятностью траектория частицы, попавшей в шар, пройдет через внутреннюю полость?

81. Внутри квадрата с вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) наудачу выбирается точка $M(x,y)$. Найти вероятность события $B = \{(x,y): x\,y < a, a > 0\}$.

82. Два корабля должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих кораблей независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из кораблей придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого корабля один час,

а второго – два часа.

83. Внутри квадрата с вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) наудачу выбирается точка $M(x,y)$. Найти вероятность события $D = \{(x,y): \min(x,y) < a, 0 \le a \le 1\}$.

84*. Слой воздуха толщины H содержит пылинки радиуса r в количестве λ штук в одной кубической единице. Найти вероятность того, что луч света, перпендикулярный слою, не пересечет ни одной пылинки.

85*. Однородный прямой круговой конус с высотой h и радиусом основания r случайно бросается на горизонтальную плоскость. Найти вероятность того, что конус упадет на основание.

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Часть А

86. В цехе работают 20 станков. Из них 10 марки A, 6 марки B, и 4 марки C. Вероятность того, что качество деталей окажется отличным, для этих станков соответственно равна 0,9; 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

87. В лотерее 25 билетов, из них 5 выигрышных, 20 простых. Некто вынул один билет, содержание которого осталось неизвестным. Какова вероятность того, что второй вынутый билет окажется выигрышным?

88. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и два черных; во второй 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

89. Найти вероятность того, что при случайной расстановке двух слонов на шахматной доске они будут угрожать друг другу.

90. Из чисел 1, 2, ..., 100 одно за другим выбирают наугад два числа. Какова вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет не меньше 20?

91. В автобусе едут n пассажиров. На следующей остановке каждый из них выходит с вероятностью p; кроме того, в автобус с вероятностью p_0 не входит ни один новый пассажир; с вероятностью $1 - p_0$ входит один новый пассажир. Найти вероятность того, что когда автобус снова тронется в путь после следующей остановки, в нем будет по-прежнему n пассажиров.

92. 5% мужчин и 0,25% женщин являются дальтониками. Наудачу выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность того, что это лицо – мужчина.

93. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%

всех изделий, вторая – 35%, третья – 40% . В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?

94. На вход радиолокационного устройства с вероятностью p поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью $(1 - p)$ – только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью p_1; если только помеха – с вероятностью p_2. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе имеется полезный сигнал.

95. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятность попадания в мишень первым, вторым и третьим соответственно равны 0,6; 0,5 и 0,4.

Часть Б

96. Во время испытаний было установлено, что вероятность безотказного срабатывания реле при отсутствии помех равна 0,99, при перегреве – 0,95, при вибрации – 0,9, при вибрации и перегреве –0,8. Найти вероятность отказа этого реле при работе в передвижной лаборатории (вероятность перегрева 0,1, вероятность вибрации 0,3), предполагая перегрев и вибрацию независимыми событиями.

97. В каждом из 15 билетов имеется по два вопроса. Экзаменующийся знает ответы на 25 вопросов. С какой вероятностью он сдаст экзамен, если для этого достаточно ответить на два вопроса билета или же один вопрос билета и один дополнительный вопрос из другого билета.

98. Имеется две партии однородных изделий; первая партия состоит из 150 изделий, среди которых 8 дефектных; вторая партия – из 75 изделий, среди которых 3 дефектных. Из первой партии берется случайным образом 50 изделий, а из второй 30 изделий; эти 80 изделий смешиваются и образуется новая партия. Из новой смешанной партии берется наугад одно изделие. Найти вероятность того, что изделие будет дефектным.

99. Сообщение состоит из «точек» и «тире». Помехи искажают 2/5 «точек» и 1/3 «тире» (при искажении каждый сигнал переходит в противоположный). В сообщении «точки» и «тире» встречаются в отношении 5:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принята а) «точка», б) «тире».

100. В пирамиде установлены 5 винтовок, из которых 3 снабжены опти-

ческим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

101. Имеется n урн, в каждой из которых a белых шаров и b черных. Из первой урны во вторую перекладывается один шар; затем из второй в третью один шар и т.д. Затем из последней урны извлекается один шар. Найти вероятность того, что он белый.

102. Три охотника выстрелили по одному кабану, который после этого оказался убит одной пулей. Определить вероятность того, что кабан убит каждым из охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

103. Вероятности того, что нужная сборщику деталь содержится в 1-ом, 2-ом, 3-ем, 4-ом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится не менее, чем в двух ящиках.

СХЕМА ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ. ТЕОРЕМЫ МУАВРА – ЛАПЛАСА

Часть А

104. 30% изделий данного предприятия – высшего сорта. Какова вероятность того, что из 6 изделий, изготовленных на этом предприятии, 4 высшего сорта?

105. Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность того, что среди пяти случайно выбранных волокон смеси менее двух окрашенных?

106. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было равно 20?

107. Вероятность получения удачного результата в химическом опыте равна 2/3. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 7.

108. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна 1/365.

109. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет не более 17?

110. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность, что при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз? б) ровно 85 раз?

111. Станок выдает за смену 1000 изделий, из которых 2% дефектных. Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено не менее 970 доброкачественных изделий.

112. При условии предыдущей задачи определить, на сколько доброкачественных изделий должен быть рассчитан бункер, чтобы вероятность его переполнения за смену не превысила 0,01.

113. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что частота появления успеха отклонится по абсолютной величине от его вероятности не более чем на 0,04.

114. Игральную кость бросают 80 раз. Найти приближенно границы, в которых число m выпадений шестерки будет заключено с вероятностью 0,9973.

115. Вероятность опоздания пассажира на поезд равна 0,005 . Найти вероятность того, что из 1000 пассажиров опоздают не более двух.

116. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

Часть Б

117. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.

118. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней, 3 дня окажутся дождливыми?

119. Цех получает заказ на 1053 изделий. Руководство цеха, зная, что вероятность изготовления доброкачественного изделия 0,7, планирует заранее изготовление 1500 изделий. Найти вероятность выполнения задания.

120. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух пуль и более, если число выстрелов равно 5000.

121. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа каждого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут а) ровно три элемента, б) хотя бы один элемент.

122. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

123. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить веро-

ятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

124. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных «гербом» вверх, будет от 45 до 55?

125. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.

126. Сколько нужно произвести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать отклонение частоты выпадения «герба» от теоретической вероятности 0,5 по абсолютной величине, меньшую, чем 0,01?

127. Вероятность появления успеха в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число ε, что с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения частоты появления успеха от его вероятности 0,8 не превысит ε.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Часть А

128. Случайная величина X задана следующим распределением:

x_i	– 3	– 2	0	2
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти $P(X < -1)$; $P(1 < X < 3)$; $M[X]$; $D[X]$; значение функции распределения в точке $x = -2$; моду.

129. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 1 шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения, функцию распределения величины X и ее основные числовые характеристики.

Примечание. Под основными числовыми характеристиками случайной величины здесь и в дальнейшем имеются в виду мода, медиана, математическое ожидание, дисперсия, асимметрия, эксцесс.

130. Распределение дискретной случайной величины X определяется формулой $P(X = k) = C/k(k + 1)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Найти: а) постоянную C; б) $P(X \le 3)$; в) $M[X]$.

131. Монету подбрасывают 9 раз. Найти математическое ожидание числа появления герба.

132. Случайная величина X представляет собой число появлений некото-

рого события в 50 опытах с одинаковой вероятностью 0,4. Найти дисперсию случайной величины X.

133. Стрелок начинает стрелять по движущейся цели до первого попадания, имея четыре патрона. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, а при каждом последующем уменьшается вдвое. Составить закон распределения числа сделанных выстрелов.

134. Случайная величина X имеет биномиальное распределение

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

Найти $\mathrm{M}[X]$, $\mathrm{D}[X]$, коэффициент асимметрии.

135. Какие из данных функций могут являться функцией распределения некоторой случайной величины X:

а) $F(x) = \begin{cases} -1/x & \text{при} \quad x \le -1, \\ x+1 & \text{при} \quad -1 < x \le 0. \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 1 - 9/x^2 & \text{при} \quad x > 3, \\ 0 & \text{при} \quad x \le 3; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0{,}01 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$.

136. Какие из данных функций могут являться плотностью распределения некоторой случайной величины X:

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;4), \\ x/8 & \text{при} \quad x \in [0;4); \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \notin [0;2), \\ 1 - x/2 & \text{при} \quad x \in [0;2); \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2x^2), & \text{при} \quad x < -1, \\ 0{,}25x + 0{,}75 & \text{при} \quad -1 \le x < 1, \\ 0 & \text{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

137. Случайная величина X задана плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-2}{2} & \text{при} \quad x \in [1,2], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [1,2]. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти основные числовые характеристики случайной величины X.

138. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) вероятности попадания величины X в интервалы (1; 2,5) и (2.5; 3,5), в) основные числовые характеристики.

139. Нормальное распределение. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}s}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Найти основные числовые характеристики случайной величины X.

140. Показательное распределение. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0.\end{cases}$ Найти функцию распределения и основные числовые характеристики случайной величины X.

141. Логарифмически нормальное распределение. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}\beta}\exp\left(-\dfrac{(\ln x-\alpha)^2}{2\beta^2}\right), & x>0,\end{cases}\qquad \alpha\in R,\ \beta>0.$$

Найти M[X], D[X].

142. Усеченное нормальное распределение. Плотность вероятности случайной величины X равна

$$f(x)=\begin{cases}A\exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Найти постоянную A, M[X].

143. Некоторая случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x-x^3}{4} & \text{при } x\in(0,2),\\ 0 & \text{при } x\notin(0,2).\end{cases}$$

Найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

144. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}1-c/x^3 & \text{при } x\ge 2,\\ 0 & \text{при } x<2.\end{cases}$$

Найти константу c, M[X], D[X].

145. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$ = $2\cos 2x$ в интервале (0, π/4); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду и медиану X.

146. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}} & \text{при } x\in(-c,c),\\ 0 & \text{при } x\notin(-c,c).\end{cases}$$

Найти M[X], медиану.

147. Ведется стрельба вдоль прямой из орудия. Дальность полета снаряда распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратичным отклонением 50 м. Найти, сколько процентов снарядов дадут перелет от 40 до 60 м.

148. Детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределяются согласно нормальному закону. Средний диаметр детали 5 см, дисперсия 0,64 см^2. Найти вероятность того, что отклонение диаметра детали от его математического ожидания не превзойдет 0,9 см.

149. Продолжительность горения электроламп в некоторой партии оказалась нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 1200 ч и средним квадратичным отклонением 50 ч. Найти с вероятностью 0,95 границы продолжительности горения наугад взятой электролампы.

150. Диаметр шариков для подшипников распределен по нормальному закону с m_x = 10 мм и σ_x = 0,4 мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие с d_1 = 10,7 мм и все, проходящие через круглое отверстие d_2 = 9,3 мм. Найти процент шариков, которые будут браковаться.

151. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $m_x = 10$ и средним квадратичным отклонением $\sigma_x = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания

Часть Б

152. Дан ряд распределения случайной величины X

X_i	– 2	–1	0	1	2
P_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: а) построить многоугольник распределения; б) построить график функции распределения $F(x)$; в) найти $P(|X| \le 1)$, г) основные числовые характеристики.

153. Случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M[X] = 2{,}6$ и дисперсию $D[X] = 0{,}8$.

154. Распределение дискретной случайной величины задается формулой

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \qquad k = 1,2,3,.......$$

Найти $M[X]$.

155. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

156. Дискретная случайная величина X имеет распределение Пуассона

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Найти $M[X]$, $D[X]$, коэффициент асимметрии.

157. Случайная величина X задана следующим распределением:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{при } x \in \left(-\pi/2; \pi/2\right), \\ 0 & \text{при } x \notin \left(-\pi/2; \pi/2\right). \end{cases}$$

Найти: а) неизвестный параметр a; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(0; \pi/4\right)$; в) математическое ожидание и дисперсию.

158. Функция распределения случайной величины X задана формулой (распределение Коши) $F(x) = A + B \operatorname{arctg} x$, $x \in R$. Найти: а) постоянные A и B; б) плотность вероятности $f(x)$; в) вероятности попадания величины X в отрезок [-1;1].

159. Плотность вероятности случайной величины X равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ 1/(b-a), & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Найти функцию распределения и основные числовые характеристики случайной величины X.

160. Плотность вероятности случайной величины X равна

$$f(x) = A x^2 \exp(-\lambda x),\ \lambda > 0,\ x \ge 0.$$

Найти: а) постоянную A; б) функцию распределения $F(x)$; в) вероятность попадания величины X в интервал $(0; 1/\lambda)$.

161. Распределение Рэлея. Функция распределения случайной величины X равна

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x\ge 0.\end{cases}$$

Найти плотность вероятности и основные числовые характеристики случайной величины X.

162. Найти среднюю скорость молекул газа и дисперсию скорости, подчиненную закону Максвелла

$$f(v)=\begin{cases}0, & v<0,\\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}}v^2\exp(-h^2v^2), & v\ge 0.\end{cases}$$

163. Случайная величина X – ошибка измерения – распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что X примет значение из отрезка $[-3\sigma, 3\sigma]$, где σ – среднее квадратичное отклонение величины X (предполагается, что систематические погрешности отсутствуют).

164. Детали, изготавливаемые автоматом, по размеру диаметра распре-

деляются по нормальному закону. Известно, что математическое ожидание равно 20 см, а дисперсия – $4\,\text{см}^2$. В каких границах с вероятностью 0,9216 можно гарантировать размер диаметра детали.

165. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=20мм и математическим ожиданием $m=0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часть А

166. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения $(x_i;p_i) = \{(\pi/4;0.2),\ (\pi/2;0.7),\ (3\pi/4;0.1)\}$. Построить ряд распределения случайной величины $Y = \sin X$.

167. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \sqrt{X}$.

168. Случайная величина X имеет распределение Коши с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти закон распределения случайных величин $Y = 1/X$, $Z = X^2/(1 + X^2)$.

169. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [0,1].Найти закон распределения случайной величины $Y = -\ln(1 - X)$.

170. Случайная величина X распределена по закону Релея с плотностью

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ при } x > 0.$$

Найти закон распределения случайной величины $Y = \exp(-X^2)$.

171. Случайная величина X распределена по биномиальному закону. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \exp(aX)$.

172. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2)$. Найти закон распределения величины $Y = 1/X$.

173. Случайная величина X имеет показательное распределение с плот-

ностью $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$. Найти закон распределения величины $Y = \exp(-X)$.

174. Случайная величина X распределена равномерно на интервале (–1;2). Найти закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

175. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = |1 - X|$.

176. Имеется случайная величина X с плотностью распределения $f(x)$. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \min\{X; 1\}$.

177. Имеется случайная величина X с плотностью распределения $f(x)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \min\{X; X^2\}$.

Часть Б

178. Определить математическое ожидание длины хорды, соединяющей заданную точку окружности радиуса R с другой точкой, все положения которой на окружности равновозможны.

179. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения $(x_i;p_i) = \{(1;0.4), (3;0.1), (5;0.5)\}$. Построить ряд распределения случайной величины $Y = 3X$.

180. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $(0, \sigma^2)$. Найти закон распределения величины $Y = X^2$.

181. Случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти закон распределения случайной величины:а) $Y = \sin X$, б) $Y = \cos X$, в) $Y = |\sin X|$.

182. Имеется непрерывная случайная величина X с плотностью распределения $f(x)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \operatorname{sign} X$.

183. Натуральный логарифм некоторой случайной величины X распределен по нормальному закону с параметрами (a, σ^2). Найти плотность вероятности случайной величины X.

184. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно на интервале (0;1), чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону $g(y) = \lambda \exp(-\lambda y)$, (при $y > 0$)?

185. Радиус круга R – случайная величина, распределенная по закону Релея

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\pi\sigma^2}\right) \text{ при } r > 0.$$

Найти закон распределения площади круга S.

186. Случайная величина X распределена равномерно в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=\operatorname{tg}X$.

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Часть А

187. Дана плотность вероятности системы случайных величин (X,Y)

$$f(x,y)=0{,}5\sin(x+y) \qquad \left(0\le x\le \pi/2,\ 0\le \pi/2\right).$$

Определить: а) функцию распределения системы; б) математические ожидания X и Y; в) корреляционный момент.

188. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=Ce^{-x^2-2xy-4y^2}\ .$$

Найти : а) постоянный множитель С; б) плотности распределения составляющих; в) условные плотности распределения составляющих.

189. Дана функция распределения системы случайных величин (X,Y)

$$F(x,y)=1-e^{-x^2}-e^{-2y}+e^{-x^2-2y} \qquad (x>0,\ y>0).$$

Найти: а) функции распределения составляющих, б) плотности распределения и математические ожидания составляющих.

190. Совместная плотность распределения системы двух случайных величин (X,Y) имеет вид

$$f(x,y)=Ce^{-4x-2y} \qquad (x>0,\ y>0).$$

Найти: а) постоянную C; б) совместную функцию распределения; в) плотности распределения составляющих; г) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область, ограниченную прямыми $y=x$, $x+y=2$ и $x=0$.

191. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=4xye^{-x^2-y^2} \quad (x>0,\ y>0).$$

Найти: а) математические ожидания; б) дисперсии составляющих X и Y.

192. Найти закон распределения суммы двух независимых случайных

величин X_1 и X_2, распределенных по закону Пуассона с параметрами a_1 и a_2.

193. Составить композицию двух законов равномерной плотности, заданных на одном и том же участке (0,1).

194. Случайные величины X_1 и X_2 имеют стандартное нормальное распределение. Найти распределение случайной величины $Y=\sqrt{X_1^2+X_2^2}$.

195. Случайная величина X_1 распределена равномерно на отрезке $[1,2]$, а случайная величина X_2 имеет показательное распределение с параметром $\lambda=2$. Предполагая, что случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми, найти плотность распределения случайной величины $Y=X_1+X_2$.

Часть Б

196. Система двух случайных величин (X,Y) имеет совместную плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{1}{4}\sin x\cdot\sin y \qquad (0\le x\le p\,, 0\le y\le p\,).$$

Найти: а) математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y; б) корреляционный момент.

197. Система двух случайных величин (X,Y) имеет совместную плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}.$$

Найти: а) коэффициент a; б) установить, являются ли величины X и Y независимыми; в) плотности вероятности составляющих; г) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в пределы квадрата R, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям координат и имеют длину b=2.

198. Задана плотность совместного распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$f(x,y)=3^{-x-y}\ln^2 3 \qquad (x>0,\, y>0).$$

Найти: а) совместную функцию распределения; б) плотности вероятности составляющих; в) вероятность попадания случайной точки (X,Y) в треугольник с вершинами $A(2,1)$,$B(2,2)$ и $C(5,1)$.

199. Дана плотность вероятности системы случайных величин (X,Y)

$$f(x,y)=ke^{-4x^2-6xy-9y^2}.$$

Определить : а) постоянную k; б)корреляционный момент между X и Y; в) условные законы распределения $f(y/x)$ и $f(x/y)$.

200. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X_1 / X_2$.

201. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют показательное распределение с параметром λ. Найти плотность распределения случайной величины $Y = X_1 / X_2$.

202. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = X_1 X_2$, если X_1 и X_2 - независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_2(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}} \ (x>0).$$

Ответы

1. 12. **2.** 4536. **3.** 1152. **4.** а) 0,008; б) 0,096; в) 0,384.

5. $\frac{4}{9}$. **6.** $\frac{13}{90}$. **7.** $\frac{8}{15}$. **8.** 0,047. **9.** $\frac{8}{19}$. **10.** 0,11.

11. $\frac{1}{60}$. **12.** $\frac{1}{n}$. **13.** $\frac{7}{9}$. **14.** $\frac{1}{n!}$. **15.** $\frac{1}{720}$. **16.** 0,418.

20. $\frac{2(k-1)(n-k)}{C_n^2}$. **21.** $\frac{1}{n^r} C_r^{r_1} C_{r-r_1}^{r_2} \ldots C_{r-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1}}^{r_n}$. **22.** 0,045

23. 36000. **24.** $\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$. **25.** $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. **26.** 0,238. **27.** $\frac{1}{60}$.

28. $\frac{2}{21}$. **29.** $P_N = \frac{\left[N/K\right]}{N}$; $\lim\limits_{N\to\infty} P_N = \frac{1}{K}$. **30.** $\frac{1}{n!}$. **31.** 0,095. **32.** 3.

41. 0,3. **42.** 0,02525. **43.** 0,6. **44.** $(k-1)p^2(1-p)^{k-2}$. **45.** $\frac{3}{4}$.

46. $\frac{1}{3}$. **47.** 0,374. **48.** $\frac{7}{9}$. **49.** 0,8. **50.** 0,94; 0,9964.

51. 0,9375. **52.** $\frac{1}{7}$. **53.** 0,505. **54.** $P_n = 1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$;

$\lim p_n = \frac{1}{e}$. Воспользоваться формулой сложения вероятностей для n совместных событий. **56.** Зависимы. **58.** $\frac{2}{3}$. **59.** 0,9655. **60.** 0,5.

61. $\frac{2}{3}$. **62.** 0,9655. **63.** $\frac{3}{5}$. **64.** $\frac{1}{3}$. **65.** $pp_1+(1-p)a$.

66. а) 4; б) 13. **67.** $\frac{2}{N-1}$. **68.** $\frac{7}{16}$.

69. $\frac{1}{12}$. **70.** 0, если $r \ge \frac{\sqrt{3}}{6}a$; $\frac{\left(a-\sqrt{12}r\right)^2}{a^2}$, если $r < \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

71. $x(3-2x)$, если $0 < x < \frac{1}{2}$; 1, если $x \ge \frac{1}{2}$. **72.** $\frac{2}{3}$.

73. $\frac{2l}{p\,a}$. **74.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$. **75.** $\frac{p\,a^2}{4}$, если $0 < a \le 1$; $\sqrt{a^2-1}+a^2\left(\frac{p}{4}-\arccos\frac{1}{a}\right)$, если $1 < a \le \sqrt{2}$; 1, если $a > \sqrt{2}$.

76. a^2, если $0 < a \le 1$; 1, если $a > 1$. **77.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{1}{6}$. **78.** $\frac{1}{2}$.

79. $\frac{2r^2}{R^2}$. **80.** $\frac{1}{8}$. **81.** $a(1-\ln a)$, если $0 < a \le 1$; 1, если $a > 1$.

82. $a(2-a)$. **83.** 0,121. **84.** $\exp(-p\,r^2 H\,l)$. Провести перпендикулярно, слою воздуха полосу шириной $2r$ и вычислить сначала вероятность того, что центр одной пылинки попадет в эту полосу.

85. $\frac{1}{2} - \frac{h}{2\sqrt{16r^2 + h^2}}$. Вероятность того, что конус упадет на основание, пропорциональна телесному углу, под которым это основание видно из центра тяжести. Центр тяжести конуса расположен на его высоте на расстоянии $\frac{h}{4}$ от основания. **86.** 83%. **87.** 0,2. **88.** 0,52. **89.** 0,14.

90. $\frac{18}{55}$. **91.** $(1-p)^{n-1}\left(p_0 + np - pp_0 - npp_0\right)$. **92.** 0,95.

93. а) 0,0345; б) 0,362; 0,406; 0,232. **94.** $\frac{pp_1}{pp_1 + (1-p)\,p_2}$. **95.** $\frac{10}{19}$. **96.** 0,041.

97. 0,94. **98.** $\frac{7}{120}$. **99.** а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{2}$. **100.** 0,85. **101.** $\frac{a}{a+b}$.

102. 0,103; 0,277; 0,620. **103.** 0,9572. **104.** 0,0595. **105.** $\frac{3}{16}$.

106. 24 или 25. **107.** 5. **108.** 0,2385. **109.** а) 0,0532;
б) 0,0219. **110.** 0,965. **111.** 0,9953. **112.** 991.
113. 0,9876. **114.** $4 \le m \le 23$. **115.** 0,128. **116.** 0,0916.
117. а) 2 и 3; б) 0,25. **118.** 0,2787. **119.** 0,4325. **120.** 0,9596.
121. а) 0,18; б) 0,865. **122.** 0,1563. **123.** 0, 051. **124.** 0,6826.
125. 0,9737. **126.** n>7656. **127.** 0,05. **128.** $P(X < -1) = 0{,}4$;
$P(1 < X < 3) = 0{,}6$; $M[X] =$ -0,5; $D[X] = 2{,}65$; $F(-2) = 0{,}1$; $Mo = 0$.

129.

X	0	1
P	$5/6$	$1/6$

$M[X] = 1/6$; $D[X] = 5/36$; $M_0 = 0$.

130. *а*) 1; *б*) $\frac{3}{4}$; *в*) не существует. **131.** 4,5. **132.** 12.

133.

x	1	2	3	4
p	0,8	0,08	0,024	0,096

134. $M[X]=np$; $D[X]=npq$.

135. а) нет; б) да; в) нет. **136.** а) нет; б) нет; в) да.

137. $F(x)=\left\{0, \text{ при } x\le 1;\ 0{,}5\left(x^2-x\right), \text{ при } 1<x\le 2;\ 1, \text{ при } x>2\right\}$;

$M[X]=\dfrac{19}{12}$; $D[X]=\dfrac{11}{144}$.

138. $f(x)=\left\{2(x-2), \text{ при } x\in(2{,}3);\ 0, \text{при } x\notin(2{,}3)\right\}$; P(1<X<2,5) =0,25; P(2,5<X<3,5)=0,25; $M[X]$=8/3; $D[X]$=1/18.

139. $M[X]=a$; $D[X]=\sigma^2$; $Sk=0$; $Ex=0$; $M_e=M_0=a$.

140. $F(t)=\left\{0, \text{ при } t<0;\ 1-e^{-lt}, \text{при } t\ge 0\right\}$; $M[X]=\dfrac{1}{\lambda}$; $D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}$; $Sk=2$.

141. $M[X]=\exp\left(\alpha+\dfrac{\beta^2}{2}\right)$; $D[X]=\exp\left(2\alpha+\beta^2\right)\left(\exp\left(\beta^2\right)-1\right)$.

142. $A=\dfrac{1}{s\sqrt{2p}\left(\Phi\left(\dfrac{b-m}{s}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-m}{s}\right)\right)}$, где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$;

$M[X]=m+Bs$, где $B=s\sqrt{2p}\,A\left(\exp\left(-\dfrac{(a-m)^2}{2s^2}\right)-\exp\left(-\dfrac{(b-m)^2}{2s^2}\right)\right)$.

143. $F(x)=\left\{0, \text{ при } x<0;\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{16}, \text{при } 0\le x\le 2;\ 1, \text{ при } x>2\right\}$; $M[X]=\dfrac{16}{15}$;

$D[X]=\dfrac{44}{225}$. **144.** c=8; $M[X]=3$; $D[X]=3$. **145.** M_0 не имеет; $M_e=\pi/12$.

146. $M[X]=0$; $M_0=0$; $D[X]=\dfrac{c}{2}$. **147.** 10 %. **148.** 0,772. **149.**1102<x<1298.

150. 8%. **151.** –5<x<25. **152.** в) 0,9; г) $M[X]=0{,}2$; $D[X]=1{,}36$; $M_0=1$.

153.

x_i	1	3
p_i	0,2	0,8

154. $1/p$.

155.

x_i	0	1	2	3
p_i	$1/27$	$2/9$	$4/9$	$8/27$

156. $M[X]=\lambda$; $D[X]=\lambda$.

157. $a=0,5;\ P\left(0<x<\frac{p}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}; M[X]=0; D[X]=\frac{p^2}{4}-2$.

158. а) $A=\frac{1}{2};\ B=\frac{1}{\pi}$; б) $f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$; в) $\frac{1}{2}$.

159. $F(x)=\left\{0, \text{при } x<a;\ \frac{x-a}{b-a}, \text{при } a<x<b;\ 1, \text{при } x>b\right\};\ M[X]=\frac{a+b}{2}$;

$D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$; Sk=0; Ex=-1,2.

160. а) $\frac{2}{k^3}$; б) $1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}$; в) $1-2{,}5e^{-1}\approx 0{,}086$.

161. $f(x)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}$ (x>0); $M[X]=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $D[X]=\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$.

162. $M[V]=\frac{2}{h\sqrt{\pi}}$; $D[V]=\frac{1}{h^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)$.

163. 0,9973. **164.** 16,48<x<23,42. **165.** 0,41.

166.

y_i	$\sqrt{2}/2$	1
p_i	0,3	0,7

167. $2\lambda y e^{-\lambda y^2}$ (y>0). **168.** $g(y)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$; $g(z)=\frac{1}{\pi\sqrt{z(1-z)}}$ (0<z<1).

169. e^{-y} (y>0). **170.** $\frac{1}{2\sigma^2}y^{\frac{1-2\sigma^2}{2\sigma^2}}$ (0<y<1).

171. $M[Y]=\left(q+pe^a\right)^n$; $D[Y]=\left(q+pe^{2n}\right)^n-\left(q+pe^a\right)^{2n}$.

172. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2y^2}\right)$. **173.** $\frac{\lambda}{y}e^{\lambda\ln y}$ (0<y<1).

174. $\frac{1}{3\sqrt{y}}$ (0<y<4). **175.** $f(1-y)+f(1+y)$ (y>0).

176. $g(x)=f(x)F(1)+1-F(1)$; $M[Y]=\int_{-\infty}^{1}xf(x)\,dx+1-F(1)$;

$D[Y] = \int_{-\infty}^{1} x^2 f(x)\,dx + F^2(1) - F(1)$.

177. $\dfrac{f\left(\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}}$ при $y \in (0,\ 1)$; $f(y)$ при $y \notin (0,\ 1)$. **178.** $\dfrac{4R}{\pi}$.

179.

y_i	3	9	15
p_i	0,4	0,1	0,5

180. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma} \exp\left(-\dfrac{y}{2\sigma^2}\right)$ $(y>0)$.

181. а) $\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y \in (-1{,}1)$; б) $\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y \in (0{,}1)$;

в) $\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ при $y \in (0{,}1)$.

182.

y_i	-1	0	1
p_i	$F(0)$	0	1-$F(0)$

183. $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma} \exp\left(-\dfrac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right)$ $(x>0)$. **184.** $Y = \dfrac{\ln(1-X)}{\lambda}$ $(0<X<1)$.

185. $\dfrac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\dfrac{s}{2\pi\sigma^2}\right)$ $(s>0)$. **186.** $\dfrac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$.

187. а) $F(x, y) = 0{,}5(\sin x + \sin y - \sin(x+y))$ $\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$;

б) $M[X] = M[Y] = \dfrac{\pi}{4}$; в) $K_{XY} = \dfrac{\pi}{2} - 1 - \dfrac{\pi^2}{16}$.

188. а) $C = \dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$; б) $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}} e^{-0{,}75x^2}$; $f_2(y) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} e^{-3y^2}$;

в) $f(x/y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+y)^2}$; $f(y/x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-0{,}25(x+4y)^2}$.

189. а) $F_1(x) = 1 - e^{-x^2}$ $(x>0)$; $F_2(y) = 1 - e^{-2y}$ $(y>0)$; б) $f_1(x) = 2xe^{-x^2}$ $(x>0)$; $f_2(y) = 2e^{-2y}$ $(y>0)$.

190. а) С=8; б) $F(x, y)=\left(1-e^{-4x}\right)\left(1-e^{-2y}\right)\ (x>0, y>0)$; в) $f_1(x)=4e^{-4x}$ $(x>0)$; $f_2(y)=2e^{-2y}\ (y>0)$; г) $P=\frac{2}{3}\left(1-3e^{-4}+2e^{-6}\right)$.

191. а) $M[X]=M[Y]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; б) $D[X]=D[Y]=1-\frac{\pi}{4}$.

192. $\frac{(a_1+a_2)^m}{m!}e^{-(a_1+a_2)}\qquad (m=0,1,2,\ldots)$.

193. $\mathrm{g}(\mathrm{y})=\{0,\text{при } \mathrm{y}<0; \mathrm{y}, \text{ при } 0\le \mathrm{y}<1;\ \ 2-\mathrm{y}, \text{ при } 1\le \mathrm{y}<2; 0, \text{при } \mathrm{y}>2\}$.

194. $ye^{-y^2/2}$ (y>0).

195. $g(y)=\{0, \text{при } y<1; 1-e^{-2(y-1)}, при\, 1\le y<2;\ e^{-2(y-2)}-e^{-2(y-1)g}, при\ y\ge 2\ \}$.

196. а) $M[X]=M[Y]=\frac{\pi}{2}$; $D[X]=D[Y]=\pi^2-4$; б) $K_{xy}=0$.

197. а) $a=\frac{1}{\pi^2}$; б) случайные величины X,Y независимы; в) $f_1(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$; $f_2(y)=\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$; г) $P\{(X,Y)\in R\}=\frac{1}{4}$.

198. а) $\left(1-3^{-x}\right)\left(1-3^{-y}\right)$; б) $f_1(x)=3^{-x}\ln 3$; $f_2(y)=3^{-y}\ln 3$; в) 0,019.

199. а) $k=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$; б) $K_{xy}=-\frac{1}{18}$; в) $f(x/y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(2x+1{,}5y)^2}$; $f(y/x)=\frac{3}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+3y)^2}$.

200. $\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)}$. **201.** $f(y)=ye^{-y}$. **202.** $f(y)=0{,}5e^{-|y|}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агапов Г.И.* Задачник по теории вероятностей. М.: Высш. шк., 1986.

2. *Бочаров П.П., Печенкин А.В.* Теория вероятностей. Математическая статистика. М.: Гардарика, 1998.

3. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь, 1983.

4. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 1999.

5. *Емельянов Г.В., Скитович В.П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.

6. *Зубов А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989.

7. *Печенкин А.В., Тескин Г.М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во МГТУ, 2001.

8. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 2002.

9. Сборник задач по математике для втузов /Под ред. А.В. Ефимова. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1990.

10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А.Свешникова. М.: Наука, 1970.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Элементы комбинаторики. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Классическое определение вероятности 3
Условная вероятность. Независимость событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей 6
Геометрическая вероятность 8
Формула полной вероятности. Формула Байеса 10
Схема испытаний Бернулли. Теоремы Муавра – Лапласа 12
Случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики 14
Законы распределения функций от случайных величин 20
Системы случайных величин 22
Ответы 25
Библиографический список 31