ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Самара
Самарский государственный технический университет
2006

УДК 517.53 (075.8)

Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление: задачи и упражнения / Сост. О. Е. Курилова, Г. А. Павлова, Н. Н. Попов. – Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2006. 32 с.

Содержит задачи и упражнения по всем разделам курса «Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление», включаемым в программу технических вузов. Пособие предназначено для студентов факультетов МиАТ и ФТ.

Библиогр.: 8 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

Комплексные числа и действия над ними

Часть А

1. Данные комплексные числа изобразить на комплексной плоскости:

1) $1+i$, 2) $-2+3i$, 3) $-4i$, 4) $-3-2i$, 5) 2.

2. Найти z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если

1) $z_1=1-2i$, $z_2=2+3i$; 2) $z_1=3-4i$, $z_2=5+2i$.

3. Найти действительные числа x и y из уравнений

1) $(-3y+0{,}5xi)-(2x-5yi)=1+4i$; 2) $2x+2yi+3y-3xi=9-7i$;
3) $(x+1{,}5y)+(2x+3y)i=13i$; 4) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$.

4. Представить в тригонометрической в форме следующие комплексные числа:

1) $1+i$; 2) $2i$; 3) -4; 4) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

5. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:

1) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; 2) $\dfrac{2+i}{3-5i}+\dfrac{i}{i-1}$; 3) $\dfrac{2(\cos 107^0+i\sin 107^0)}{5(\cos 47^0+i\sin 47^0)}$;

4) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$; 5) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^4$; 6) $(1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

6. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел:

1) $\dfrac{2}{1-3i}$; 2) $-\cos\dfrac{p}{6}+i\sin\dfrac{p}{6}$;

3) $\cos\dfrac{p}{4}-i\sin\dfrac{p}{4}$; 4) $w=z^2+z$; где $|z|=1$.

7. Найти все значения корня:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt{\cos\dfrac{p}{3}-i\sin\dfrac{p}{3}}$;

3) $\sqrt[4]{-i}$; 4) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.

8. Решить уравнения относительно z:

1) $z^2 = i$; 2) $z^2 - 2z + 2 = 0$;

3) $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$; 4) $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$;

5) $z^4 + i + 1 = 0$; 6) $iz^3 - \sqrt{3} + i = 0$.

9**.** Построить на комплексной плоскости линии, точки которых удовлетворяют уравнениям:

1) $|z| = 3$; 2) $|z + 2 - i| = 1$;

3) $\operatorname{Re} z = 2$; 4) $\operatorname{Im} z = 1$;

5) $|z - 2i| + |z + 2i| = 2$; 6) $\operatorname{Re}\ z = \operatorname{Im}\ (z^2 + z)$.

10. Построить на комплексной плоскости области, заданные условиями

1) $|z - 3 + i| < 2$; 2) $\operatorname{Im} z > -2$;

3) $\frac{p}{6} \le \arg z \le \frac{3p}{4}$; 4) $|z| > 2 + \operatorname{Re} z$;

5) $2|z| > |1 + z^2|$; 6) $\left|\frac{z - 2i}{z + 2i}\right| > \sqrt{2}$.

Часть Б

11. Найти действительные числа x и y из уравнений

1) $(2+3i)x + (2-3i)(x+y) = 7 - 8i$; 2) $(2x - 3yi)(2x + 3yi) + xi = 97 + 2i$.

12**.** Представить в тригонометрической в форме следующие комплексные числа:

1) $3 - i\sqrt{3}$; 2) $-4i$; 3) $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$; 4) $-4 + 3i$.

13. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел**:**

1) $\frac{2-3i}{4+i} - \frac{5-2i}{4-i}$; 2) $\frac{\cos 130^0 + i \sin 130^0}{\cos 40^0 + i \sin 40^0}$;

3) $w = (1+i)^4 + (1-i)^6$; 4) $\frac{(\sqrt{3} - 3i)^6}{(-2+2i)^4}$.

14. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел:

1) $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$; 2) $w=\left(\dfrac{4}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{12}$.

15. Найти все значения корня:

1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt{2+i\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt[5]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$.

16. Решить уравнения относительно z :

1) $z^2+10z+50=0$; 2) $z^2+4iz+12=0$;

3) $(1-3i)z^2=2-i$; 4) $8z^3+27=0$;

5) $z^4+1=0$; 6) $z^4+\sqrt{3}-i=0$.

17. Построить на комплексной плоскости линии, точки которых удовлетворяют уравнениям:

1) $\operatorname{Re} z^2=2$; 2) $|z+2|=|1+2\bar{z}|$.

18. Построить на комплексной плоскости области, заданные условиями:

1) $0<\operatorname{Im} z\le\sqrt{3}$; 2) $1<|z+1-2i|<2$;

3) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}>\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{4}<\operatorname{Re}\dfrac{1}{\bar{z}}+\operatorname{Im}\dfrac{1}{\bar{z}}<\dfrac{1}{2}$.

Элементарные функции комплексной переменной

Часть А

19. Дана функция $w=2z^2-z$. Найти значение функции при:
1) $z=1-i$; 2) $z=1+2i$; 3) $z=i$.

20. Дана функция $f(z)=\dfrac{1}{x-yi}$, где $z=x+yi$. Найти

1) $f(1+i)$; 2) $f(2-3i)$; 3) $f(-1+2i)$.

21. Определить действительную и мнимую части следующих функций:

1) $f(z)=2iz^2-z$; 2) $f(z)=\dfrac{1}{iz}$; 3) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-2}$.

22. Найти значение функции $w = e^{-\frac{z}{2}}$ при следующих значениях z:

1) $\frac{p}{2}i$; 2) $p(1+i)$; 3) $1+2pi$.

23. Найти логарифмы следующих чисел:

1) 2; 2) –3; 3) i; 4) $-1-i$; 5) $-\sqrt{3}+3i$.

24. Найти действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

1) $\cos(3-i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $tg\left(\frac{p}{4} - i\ln 2\right)$.

25. Вычислить:

1) $i^{\frac{1}{i}}$; 2) 1^{-i}; 3) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{i}$; 4) $Arc\sin\frac{1}{2}$; 5) $Arc\cos 2$.

26. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

1) 3^{2+i}; 2) $ip\, e^{ip}$; 3) $sh\frac{ip}{2}$; 4) $ch^2 i\ln 3$.

27. Решить следующие уравнения:

1) $e^{2z} + 5e^{z} - 6 = 0$; 2) $e^{iz} + 1 - \sqrt{3} = 0$; 3) $\sin iz = \frac{ip}{2}$.

Часть Б

28. Дана функция $f(z) = x^2 - y^2 i$, где $z = x + yi$. Найти:

1) $f(1-2i)$; 2) $f(2+3i)$; 3) $f(3-4i)$.

29. Вычислить:

1) $e^{\ln 3 + \frac{ip}{2}}$ 2) $\cos i$; 3) $\cos\left(\frac{p}{2} + \ln 2\right)$; 4) $\mathrm{ch}\frac{ip}{2}$; 5) $tg(2-i)$.

30. Найти:

1) $Ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right)$; 2) 4^{-i}; 3) $(1-i)^{1+i}$; 4) $Arc\sin\left(\sqrt{2} - i\right)$

31. Найти действительные и мнимые части следующих комплексных чисел:

1) $\sin\left(\frac{p}{2} + i\ln 2\right)$; 2) $(-1)^{\sqrt{2}}$; 3) $ctg\, ip$; 4) $(2i)^{i}$.

32. Решить следующие уравнения:

1) $2\cos z - 3 = 0$; 2) $sh\, iz = -2i$; 3) $e^{-2iz} = -\sqrt{3} + i$.

Аналитические функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.

Часть А

33. Найти все точки $z \in C$, в которых дифференцируемы функции:

1) $w = \operatorname{Re} z$; 2) $w = z \operatorname{Re} z$; 3) $w = x^2 + iy^2$;

4) $w = \dfrac{1}{z}$; 5) $w = z^2$; 6) $w = \bar{z} \operatorname{Im} z$.

34. Найти постоянные a, b, c при которых функция *f(z)* будет аналитической:

1) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$;

2) $f(z) = \cos(chy + ashy) + i \sin x(chy + bshy)$.

35. Найти область, в которой функция $f(z) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$ является аналитической.

36. Восстановить аналитическую в окрестности $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2$ и значению $f(0) = 2 + i$.

37. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по известной ее действительной части $u(x, y) = -2xy + 2y$.

38. Восстановить аналитическую в окрестности $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y) = e^x \sin y + 2xy + 5y$ и значению $f(0) = 10$.

39. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по известной ее мнимой части $v(x, y) = x - x^2 + y^2 - 1$ и значению $f(0) = i$.

40. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота θ для заданных отображений $w = f(z)$ в указанных точках:

1) $w = z^2$, $z_0 = \sqrt{2}(1 + i)$; 2) $w = z^2 + z$, $z_0 = -1 + 2i$;

Часть Б

41. Найти все точки $z \in C$, в которых дифференцируемы функции:

1) $w = |z|^2 + 2z$; 2) $w = 2xy - i(x^2 - y^2)$;

3) $w = z^2 \bar{z}$; 4) $w = z\bar{z}^2$.

42. Доказать аналитичность всюду в C и найти производную следующих функций:

1) $w = z^3$; 2) $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$; $(z \neq 0)$.

43. Восстановить аналитическую в окрестности $z_0 = 1$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ и значению $f(1) = 2i - 1$.

44. Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2 + 3x$ и значению $f(0) = 0$.

45. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по заданной мнимой части $v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$.

46. Найти коэффициент растяжения k и угол поворота θ для заданных отображений $w = f(z)$ в указанных точках:

1) $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$; 2) $w = iz^2 - 2z$, $z_0 = -2 + i$.

Интегрирование функций комплексной переменной

Часть A

47. Вычислить интеграл $\int_L (z + 2\bar{z})dz$, где L:

1) отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 - i$;

2) дуга параболы $y = x^2$ с концами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

3) дуга окружности $|z| = 2$; $-\frac{p}{2} \leq \arg z \leq \frac{p}{2}$;

4) окружность $|z - 1| = 2$.

48. Вычислить интеграл $\int_L z \operatorname{Re} z dz$, где L – отрезок прямой от точки

$z_1 = 0$

до точки $z_2 = 1 - 2i$.

49. Вычислить интеграл $\int\limits_L e^{-\bar{z}}dz$, где L:

1) ломаная, соединяющая точки $z_1 = 0;\ z_2 = 2;\ z_3 = 2-i$;

2) отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 2-i$.

50. Вычислить интеграл $\int\limits_{i}^{1+2i} \frac{dz}{(z-2i)^2}$, если путь интегрирования не проходит через точку $z = 2i$.

51. Вычислить интеграл $\int\limits_0^i z e^{-\frac{pz}{2}} dz$.

52. Вычислить интегралы (обход контуров - против часовой стрелки):

1) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}dz$; 2) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}dz$;

3) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z+2}{z^2+2z-3}dz$; 4) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{2z+1-i}{(z-3)(z+1)}dz$,

5) $\oint\limits_L \frac{e^z dz}{z^2-9}$, где L : а) $|z-3| = 2$, б) $|z+3| = 2$, в) $|z| = 1$, г) $|z| = 4$;

6) $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{z^3-3z}{(z-2i)^3}dz$; 7) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\cos z}{\left(z-\frac{p}{3}\right)^2}dz$;

8) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{e^z}{z^2+2iz}dz$; 9) $\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{\sin pz}{(z^2-4)^2}dz$;

10) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{chz}{(z-i)^2(z+1)}dz$. 11) $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z}{(z^2+9)^2}dz$;

Часть Б

53. Вычислить интеграл $\int\limits_L z\,\mathrm{Im}\,z dz$, где L – отрезок прямой от точки $z_1 = -i$ до точки $z_2 = 1+i$.

54. Вычислить интеграл $\int\limits_L f(z)dz$, где $f(z)=(y-1)+x^2 i$, L – отрезок прямой между точками $z_1=1$ $z_2=2-i$.

55. Вычислить интеграл $\int\limits_L z\bar{z}dz$, где L -дуга параболы $y=\sqrt{x}$ с концами в точках $z_1=1$, $z_2=-1+i$.

56. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{pi}(z-i)e^{-2z}dz$.

57. Вычислить интегралы (обход контуров -против часовой стрелки):

1) $\oint\limits_{|z+1|=2}\frac{z^2dz}{z+2-i}$; 2) $\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^3+4z}$;

3) $\oint\limits_{|z-i|=1,5}\frac{z+1}{z^2-iz+2}dz$; 4) $\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{e^z}{z^2(z+2)}dz$;

5) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{zdz}{(z-1)(z+3)^3}$, 6) $\oint\limits_{|z|=2}\frac{chiz\,dz}{z^2+4z+3}$;

7) $\oint\limits_{|z+1|=4}\frac{\cos z}{z^2-p^2}dz$; 8) $\oint\limits_{|z-a|=1}\frac{e^z z}{(z-a)^3}dz$.

Ряды Тейлора и Лорана

Часть А

58. Разложить в ряд в окрестности точки z=0 следующие функции:

1) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$; 2) $f(z)=(1-z+2z^2)\sin\frac{1}{z^2}$.

59. Разложить в ряд функцию $f(z)=\frac{1}{z-2}$ в областях:

1) $|z|<2$, (z=0); 2) 2< $|z|<\infty$ ($z=\infty$).

60. Разложить в ряд по степеням (z-1) функцию $f(z)=\frac{1}{z-2}$ в областях:

1) $|z-1|<1$; 2) $1<|z-1|<\infty$.

61. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2}$ в круге $|z|<1$.

62. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$ в кольце $0<|z|<2$.

63. Разложить в ряд по степеням $z+1$ функцию $f(z)=\frac{z-1}{z(z+2)}$ в области $1<|z+1|<\infty$.

64. Разложить в ряд по степеням z следующие функции:
1) $f(z)=\cos 2z$; 2) $f(z)=\sin(2z-1)$.

65. Разложить в ряд по степеням $z-a$ следующие функции:
1) $f(z)=e^{3z-2}$, $a=1$; 2) $f(z)=\sin(z+i)$, $a=i$;
3) $f(z)=z\cos 2z$; $a=1$;
4) $f(z)=z^5-z^3+2z-3,\ a=2$.

Часть Б

66. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z)=\frac{z}{z^2+i}$, используя готовое разложение.

67. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию $f(z)=\frac{1}{4-z^2}$, используя готовое разложение.

68. Разложить в ряд Лорана в области $0<|z-a|<\infty$ следующие функции:

1) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$, $a=0$; 2) $f(z)=(z+1)\sin\frac{1}{z+1}$, $a=-1$;

3) $f(z)=(z+i)^2\cos\frac{1}{z+i}$, $a=-i$.

69. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$ в области $|z|<1$.

70. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$; в области $2<|z|<\infty$.

71. Разложить в ряд по степеням z–2 функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)^2}$ в области $|z-1|<3$.

Изолированные особые точки аналитической функции комплексной переменной и их вычеты

Часть А

72. Найти нули функции и указать их порядок:

1) $f(z)=\left(z^3-1\right)^2$; 2) $f(z)=\sin 2z$;

3) $f(z)=ctg^2 z$; 4) $f(z)=\left(z^2+4z+4\right)^3$.

73. Найти особые точки, выяснить их тип и вычислить вычеты относительно особых точек следующих функций:

1) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)(z-3)}$; 2) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z(1-z)}$;

3) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2}$; 4) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-\frac{p}{2}}$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{z^3+z}$; 6) $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{(z-pi)^3}$;

7) $f(z)=\dfrac{z^2}{e^z+3}$; 8) $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$;

9) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$; 10) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^5-z^3}$;

11) $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$; 12) $f(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$.

Часть Б

74. Найти особые точки, выяснить их тип и вычислить вычеты относительно особых точек следующих функций:

1) $f(z)=\dfrac{z+4}{z^2+2z-8}$; 2) $f(z)=\dfrac{z-i}{(z+i)(z-2i)}$;

3) $f(z)=\dfrac{2z^2+1}{(z-2)^3}$; 4) $f(z)=\dfrac{2z+5}{z^4-4z^2+4}$;

5) $f(z)=\dfrac{z+2}{\left(z^2-1\right)^2}$; 6) $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{\left(\left(z-\dfrac{p}{4}\right)\left(z-\dfrac{p}{2}\right)\right)^2}$;

7) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(z-p)}$; 8) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$.

Вычисление интегралов с помощью вычетов

Часть А

75. Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1,5}\frac{2z+i}{z(z-i)}dz$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos z\,dz}{z^2-2z-3}$;

3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^2-3}{z(z+2i)^2}dz$; 4) $\displaystyle\oint\limits_{|z+2|=2}\frac{z}{(z+1)^2}dz$;

5) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3}\frac{\sin z}{(z-2i)^3}dz$; 6) $\displaystyle\oint\limits_{|z-1+i|=2}\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}dz$;

76. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{L}\frac{z\,dz}{\cos z}$, где L – прямоугольник с вершинами в точках: $z_1=-i$; $z_2=2-i$; $z_3=2+i$; $z_4=i$.

77. Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{2z+i}{z^3+z^2}dz$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}z^3e^{\frac{1}{z}}dz$;

3) $\oint\limits_{|z-i|=1,5} \dfrac{\sin\dfrac{ipz}{2}}{z(z^2+1)}dz$; 4) $\oint\limits_{|z|=2} e^{-\frac{z+1}{z}pi}dz$;

5) $\oint\limits_{|z|=5} \dfrac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)}$;

78. Вычислить следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+25)^2}$. 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2dx}{(x^2+16)^2}$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2-2x+10}$. 4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$.

Часть Б

79. Вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z+2|=4} \dfrac{(z+1)dz}{z^2+3z-4}$; 2) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^2-2}{(z+i)(z-3)^2}dz$;

3) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \dfrac{z-i}{(z+1)(z-2i)^2}dz$; 4) $\oint\limits_{|z+2|=2} \dfrac{z\,dz}{(z+2)^2(z-3)^3}$;

5) $\oint\limits_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}}dz$; 6) $\oint\limits_{\left|z-\frac{p}{2}\right|=2} \dfrac{\cos z\,dz}{z\left(z-\dfrac{p}{2}\right)^2}$;

7) $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{z+1}{z^2-iz+2(z-i)}dz$.

80. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \dfrac{e^{zi}\,dz}{\sin 2z}$; где L – ромб с вершинами в точках: $z_1=2$; $z_2=i$; $z_3=-2$; $z_4=-i$.

81. Вычислить интеграл $\oint\limits_L z\sin\dfrac{1}{z^2}dz$, где L – прямоугольник с вершинами в точках: $z_1=1+i$; $z_2=-1+i$; $z_3=1-2i$; $z_4=-1-2i$.

82. Вычислить следующие несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+50}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$; 4) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Функция-оригинал. Нахождение изображений по заданному оригиналу

Часть А

83. Какие из данных функций являются оригиналами (первое свойство функции- оригинала считается выполненным):

1) $\ln(t+3)$; 2) $\frac{1}{t^2-4}$; 3) $\cos t^2$; 4) $e^{\sqrt{t^3}}$.

84. Найти изображение функций, используя определение преобразования Лапласа:

1) $f(t)=t+1$; 2) $f(t)=\begin{cases} 2-t, & 0<t\le 2; \\ 0, & t>2. \end{cases}$

85. Пользуясь теоремой смещения, найти изображения функций:

1) $f(t)=e^{3t}ch2t$; 2) $f(t)=e^{-2t}\cos^2 t$;

3) $f(t)=e^{-0,5t}t^2$; 4) $f(t)=sh2t\sin 4t$.

86. Пользуясь теоремой дифференцирования изображения, найти изображения функций:

1) $f(t)=tch3t$; 2) $f(t)=tshwt$;

3) $f(t)=t^2e^{2t}$; 4) $f(t)=t^2\sin 4t$.

87. Пользуясь теоремой интегрирования изображения, найти изображения функций:

1) $f(t)=\frac{e^{-at}\sin t}{t}$; 2) $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t}$;

3) $f(t)=\frac{e^{2t}-e^{4t}}{t}$.

88. Пользуясь теоремой запаздывания, найти изображения функций:

1) $f(t-4)=e^{t-4}$; 2) $f\left(t-\frac{p}{8}\right)=\sin\left(2t-\frac{p}{4}\right)$;

3) $f(t-2{,}5)=ch(2t-5)$; 4) $f\left(t-\dfrac{4}{3}\right)=sh(3t-4)$.

89. Пользуясь теоремой дифференцирования оригинала, найти изображения $f'(t)$, если:

1) $f(t)=\cos 2t+t\sin 2t$; 2) $f(t)=\sin^2 t$;

3) $f(t)=e^{-3t}\cos t$; 4) $f(t)=tsh4t$.

90. Найти изображения дифференциальных выражений:

1) $x''(t)+4x'(t)+2x(t)$, $x(0)=1$, $x'(0)=-2$;

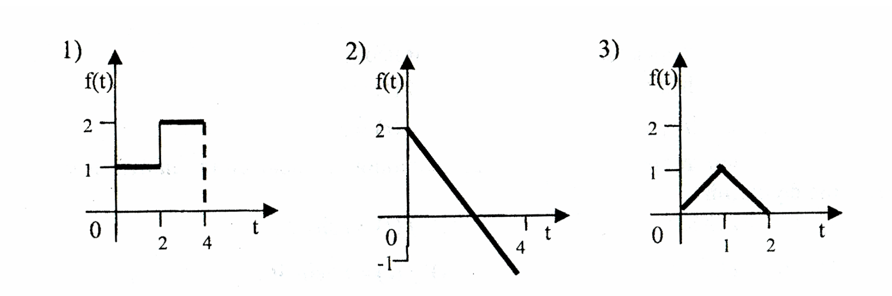
2) $2x'''(t)-3x''(t)+1$, $x(0)=-1$, $x'(0)=1$, $x''(0)=0$.

91. Пользуясь теоремой умножения изображения, найти изображения функций:

1) $f(t)=\int\limits_0^t \cos 2(t-t)\,cht\;dt$; 2) $f(t)=\int\limits_0^t (t-t)^2\sin 3t\;dt$;

3) $f(t)=\int\limits_0^t e^{-2(t-t)}(1-2t)dt$.

92. Найти изображения функций, заданных графически:



Часть Б

93. Найти изображения функций:

1) $f(t)=2e^{-t}\cos 2t-0{,}5\sin 2t$; 2) $f(t)=cht\cos 4t$;

3) $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{4}-\dfrac{t\cos 2t}{2}$; 4) $f(t)=\dfrac{3}{2}t^3e^{-2t}$;

5) $f(t)=e^{-2t}\sin 4t\sin 3t$; 6) $f(t)=te^{2t}\sin 3t$;

7) $f(t)=t^2\left(e^t-sht\right)\cos 3t$; 8) $f(t-2)=0{,}5(t-2)e^{t-2}$;

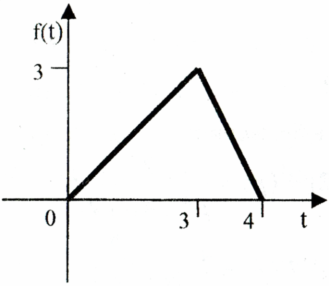
9) $f(t-2)=e^{-2t}\cos 4(t-2)$; 10) $f(t)=\dfrac{sh^2 t}{t}$;

11) $f(t)=\dfrac{1-e^{at}}{te^t}$; 12) $f(t)=\dfrac{\cos bt-\cos at}{t}$;

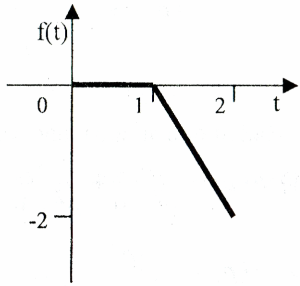
13) $f(t)=\int\limits_0^t (t-t)\cos^2 t\ dt$; 14) $f(t)=\int\limits_0^t sh(t-t)e^{-4t}\ dt$.

94.Найти изображения функций, заданных графически:

1)



2)



Нахождение оригиналов по заданному изображению

Часть А

95. Найти оригиналы для заданных функций:

1) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+4}+\dfrac{2}{p^2+9}$; 2) $F(p)=\dfrac{p-2}{p^2-4p+13}$;

3) $F(p)=\dfrac{1}{p^2-4p+20}$; 4) $F(p)=\dfrac{p-1}{p^2+6p+13}$.

96. Используя теорему запаздывания, найти оригиналы для заданных функций:

1) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p+5}$; 2) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p^2+1}$; 3) $F(p)=\dfrac{e^{-p}p}{p^2+3p+2}$.

97. Используя разложение дробей на простейшие, найти оригиналы для заданных функций:

1) $F(p)=\dfrac{p+1}{p(p+2)}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$;

3) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)}$; 4) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^3+4p^2+4p}$.

98. Найти оригиналы для изображений с помощью теории вычетов:

1) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p^2+2p-3)}$; 2) $F(p)=\dfrac{p^2+2}{(p-1)(p^2+4)}$;

3) $F(p)=\dfrac{p+4}{p^3-4p^2+5p}$; 4) $F(p)=\dfrac{2p-1}{(p-1)^2(p-2)}$;

5) $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)^2(p^2+4)}$; 6) $F(p)=\dfrac{p^3+2p+2}{p^3(p+1)}$.

Часть Б

99. Найти оригиналы для заданных изображений:

1) $F(p)=\dfrac{p}{p^2-9}+\dfrac{3}{p^2-16}$; 2) $F(p)=\dfrac{2}{p^2+4p+7}$;

3) $F(p)=\dfrac{3p-1}{p^2-4p+3}$; 4) $F(p)=\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$;

5) $F(p)=\dfrac{e^{-p}(p+1)}{p^2-2p+5}$; 6) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}p}{p^2+4p+20}$;

7) $F(p)=\dfrac{p-1}{p^4+5p^2+4}$; 8) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{(p+1)(p+3)(p+5)}$;

9) $F(p)=\dfrac{2p-3}{(p^2+4p+3)(p^2+6p+8)}$;

10) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^3+6p^2+9p}$; 11) $F(p)=\dfrac{2p^2-p-1}{p^3+2p^2+2p+1}$;

12) $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)^3(p+1)^2}$.

Приложения операционного исчисления

Часть А

100. Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

1) $x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$;
2) $x'' - x' = 2(1-t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;
3) $x'' + 2x' + x = te^{-t}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$;
4) $x'' - 2x' + 2x = 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;
5) $x'' + x' = t^3 + 6t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;
6) $2x'' + 3x' = 2\sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$;
7) $x'' - 9x = sht$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 3$;
8) $x'' - x' = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;
9) $x''' - x'' = 10e^{2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$;
10) $x''' - 3x'' + 3x' - x = e^{t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 1$.

101. Решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 5$;

2) $\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = 2\sin t; \end{cases}$ $x(0) = -1$, $x'(0) = y(0) = y'(0) = -1$;

3) $\begin{cases} x' - x + y = 1{,}5t^2, \\ y' + 4x + 2y = 4t + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

102. Решить интегральные уравнения типа свертки:

1) $\int\limits_0^t \cos(t-t)x(t)dt = sht$; 2) $\int\limits_0^t e^{-(t-t)}x(t)dt = \sin t$;

3) $t - \int\limits_0^t (t-t)x(t)dt = x(t)$; 4) $\int\limits_0^t sh(t-t)x(t)dt = 1 - \cos t$;

5) $\int\limits_0^t ch(t-t)x(t)dt = cht - \cos t$;

Часть Б

103. Решить дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

1) $x'' + x' - 2x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

2) $x'' + 4x' + 4x = t^3 e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$;

3) $x'' - 2x' = e^t(t^2 + t - 3)$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 2$;

4) $x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t}\sin t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$;

5) $x'' + x' = \sin t - 2e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

6) $x''' - x' = 3(2 - t^2)$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$;

8) $x'' + 2x + x' = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 3, & t \geq 2 \end{cases}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

104. Решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2x' + x = 0; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$;

2) $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$;

3) $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z; \end{cases}$ $x(0) = 1,$ $y(0) = 1,$ $z(0) = 0$.

105. Решить интегральные уравнения типа свертки:

1) $\int\limits_0^t sh(t - t)x(t)dt = 1 - \cos t$;

2) $1 + \int\limits_0^t e^{t-t}x(t)dt = x(t)$;

3) $t^3 + \int\limits_0^t \sin(t - t)x(t)dt = x(t)$;

4) $\int\limits_0^t \cos(t - t)x(t)dt = t\cos t$.