ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

**Кафедра прикладной математики и информатики**

# Сборник задач и упражнений по теории функций комплексной переменной

**Самара 2008**

Составители  Г.А.Павлова, Н.Н. Попов

УДК 517.53 (075.8)

**Сборник задач и упражнений по теории функций комплексной переменной:** Учебное пособие. Самар. гос. техн. ун-т. *Г.А. Павлова, Н.Н. Попов*. Самара, 2008. 39 с.

Содержит задачи и упражнения по всем разделам курса «Теория функций комплексной переменной». Сборник задач рассчитан на студентов специальности «Прикладная математика и информатика».

Библиогр.:9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

## Предисловие

Предлагаемый «Сборник задач и упражнений по теории функций комплексной переменной» предназначен для проведения практических занятий со студентами, обучающихся по специальности 010501 «Прикладная математика и информатика». Однако, они могут быть использованы и для студентов других направлений и специальностей в качестве дополнительного материала.

Сборник содержит задачи по основным темам теории функций комплексной переменной: «Комплексные числа», «Аналитические функции», «Элементарные ФКП и конформные отображения», «Интегрирование ФКП», «Ряды Тейлора и Лорана», «Теория вычетов».

В пособии использована сквозная нумерация задач. По каждой теме предлагаются задачи для разбора и решения их в аудитории (часть А), а также задачи для самостоятельного решения (часть Б). Задачи расположены по мере возрастания их сложности. Ко всем задачам приведены ответы.

Авторы частично использовали материалы «Сборник задач и упражнений по теории функций комплексного переменного» Волковысского Л.И., Лунца Г. А., Арамановича И. Г., а также задачи, предлагавшиеся студентам специальности «Прикладная математика и информатика» в контрольных работах по ТФКП.

## Комплексные числа и действия над ними

### *Часть А*

1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если

   1) $z_1 = 1 - 2i,\ z_2 = 2 + 3i;$ 2) $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = 5 + 2i.$

2. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

   1) $1 + i;$ 2) $2i;$ 3) $-4;$ 4) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2};$ 5) $\dfrac{\sqrt{3} - i}{2}.$

3. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:

   1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3;$ 2) $(1+i)^8\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-6};$

   3) $(1 + \cos j + i \sin j)^n;$ 4) $\left(\dfrac{1 - i\,\mathrm{tg}\,a}{1 + i\,\mathrm{tg}\,a}\right)^n, a \in \left(-\dfrac{p}{2}; \dfrac{p}{2}\right).$

4. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел:

   1) $\dfrac{2}{1 - 3i};$ 2) $\dfrac{1-i}{3-i} - \dfrac{2+3i}{2+i};$

   3) $-\cos\dfrac{p}{6} + i\sin\dfrac{p}{6};$ 4) $\cos\dfrac{p}{4} - i\sin\dfrac{p}{4};$

   5) $w = \dfrac{1 + \cos a + i\sin a}{1 + \cos a - i\sin a},\ a \in \left(-\dfrac{p}{2}; \dfrac{p}{2}\right);$ 6) $w = z^2 + z;$ где $|z| = 1.$

5. Найти все значения корня:

   1) $\sqrt{\cos\dfrac{p}{3} - i\sin\dfrac{p}{3}};$ 2) $\sqrt[5]{-4 + 3i};$

   3) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i};$ 4) $\sqrt[3]{-1 + i\sqrt{3}}.$

6. Решить уравнения относительно $z$:

   1) $z^2 = i;$ 2) $z^4 + i + 1 = 0;$

   3) $z|z| + 2z + i = 0;$ 4) $z^2 + z|z| + |z|^2 = 0;$

5) $\bar{z} = z^{n-1}$, $n \in N$;

6) $z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$;

7) $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$.

7. Доказать, что множество точек $z \in C$, удовлетворяющих условию $a|z|^2 + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$, где $a > 0$; $c \in R^1$ и $ac < |b|^2$, является уравнением окружности. Найти центр и радиус этой окружности.

8. Найти на комплексной плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям:

1) $r_1 < |z - z_0| < r_2$, $0 \le r_1 < r_2$;

2) $j_1 < \arg z < j_2$;

3) $\operatorname{Re} z^{-1} = c$, где $c = \mathrm{const}$;

4) $|z| > 2 + \operatorname{Re} z$;

5) $2|z| > |1 + z^2|$;

6) $\left|\dfrac{z-2i}{z+2i}\right| > 2$.

### *Часть Б*

9. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:

1) $w = (1+i)^n + (1-i)^n$;

2) $w = \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n$;

3) $w = \dfrac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{96} - i(1+i)^{98}}$;

4) $w = (1 - \cos j + i \sin j)^n$.

10. Найти модуль и главное значение аргумента следующих комплексных чисел:

1) $w = (1 + i\sqrt{3})^3$;

2) $w = \left(\dfrac{4}{-1 + i\sqrt{3}}\right)^{12}$.

11. Найти все значения корня:

1) $\sqrt[3]{i}$;

2) $\sqrt{z^2 - 1}$, где $z = 1 + i$;

3) $\sqrt[8]{1+i}$;

4) $\sqrt[7]{-1}$.

12. Решить уравнения относительно $z$:

1) $z^4 + \sqrt{3} - i = 0$;

2) $|z| = z + 2i + 1$;

3) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$;

4) $z^4 + 1 = 0$;

5) $iz^3 - \sqrt{3} + i = 0$;

6) $z^8 - 2\sqrt{3}z^4 + 4 = 0$.

13. Доказать, что

$$\sqrt{a+bi}=\pm\frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}+i\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{2}}.$$

14. Доказать равенства и дать геометрическую интерпретацию:

1) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos(\arg z_1-\arg z_2)$;

2) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$;

3) $|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

15. Найти на комплексной плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям:

1) $0<\operatorname{Im} z\le\sqrt{3}$;

2) $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im}\left(z^2+z\right)$;

3) $\operatorname{Im} z^{-1}=c$;

4) $|z-z_1|+|z-z_2|=a$, где $a>|z_1-z_2|$;

5) $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=a$, где $a<|z_1-z_2|$;

6) $\frac{1}{4}<\operatorname{Re}\frac{1}{\bar{z}}+\operatorname{Im}\frac{1}{\bar{z}}<\frac{1}{2}$.

## Аналитические функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана

### *Часть А*

16. Найти все точки $z\in C$, в которых дифференцируемы функции:

1) $w=\operatorname{Re} z$;

2) $w=z\operatorname{Re} z$;

3) $w=x^2+iy^2$;

4) $w=\frac{1}{z}$;

5) $w=z^2$;

6) $w=\bar{z}\operatorname{Im} z$.

17. Найти постоянные $a,b,c$ при которых функция *f(z)* будет аналитической:

1) $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$;

2) $f(z)=(\operatorname{ch} y+a\operatorname{sh} y)\cos x+i(\operatorname{ch} y+b\operatorname{sh} y)\sin x$.

18. Восстановить аналитическую в окрестности $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)=x^3-3xy^2+2$ и значению $f(0)=2+i$.

19. Восстановить аналитическую в окрестности $z_0 = 2$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ и значению $f(2) = 0$.

20. Пусть функция $f(z) = u + iv$ и функции $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в области $D \subset C$. Доказать, что

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z};\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right);\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$dz = dx + idy;\ d\bar{z} = dx - idy.$$

## *Часть Б*

21. Найти все точки $z \in C$, в которых дифференцируемы функции:

1) $w = |z|$;  2) $w = 2xy - i(x^2 - y^2)$;

3) $w = z^2\bar{z}$;  4) $w = z\,\bar{z}^2$.

22. Доказать аналитичность всюду в $C$ и найти производную следующих функций:

1) $w = z^3$;  2) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ $(z \neq 0)$.

23. Восстановить аналитическую в окрестности $z_0 = i$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$ и значению $f(1) = 2i - 1$.

24. Восстановить аналитическую в окрестности $z_0 = 1$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, где $x > 0$, и значению $f(1) = 0$.

25. Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$ по заданной мнимой части $v = 3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2 + y^2)}$.

## Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексной переменной. Конформные отображения, связанные с линейной функцией

### *Часть А*

26. Найти коэффициент растяжения $k$ и угол поворота $q$ для заданных отображений $w = f(z)$ в указанных точках:

1) $w = z^2$, $z_0 = \sqrt{2}(1+i)$; 2) $w = z^2$, $z_0 = -3+4i$;

3) $w = z^3$, $z_0 = 1+i$; 4) $w = z^3$, $z_0 = -1$.

27. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией:

1) $w = z^2$; 2) $w = z^2 + 2z$; 3) $w = \dfrac{1}{z}$.

28. Найти целое линейное преобразование с неподвижной точкой $1+2i$, переводящее точку $i$ в точку $-i$.

29. Найти целую линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами 0, 1, $i$ на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$.

30. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:
   1) верхнюю полуплоскость на себя;
   2) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

31. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:
   1) полосу $0 < x < 1$ на себя;
   2) полосу, ограниченную прямыми $y = x$ и $y = x - 1$, на себя.

32. Найти целую линейную функцию $w(z)$, отображающую полосу, заключенную между данными прямыми, на полосу $0 < u < 1$ при указанной нормировке:
   1) $x = a$, $x = a + h$, $w(a) = 0$;
   2) $y = kx$, $y = kx + b$, $w(0) = 0$.

### *Часть Б*

33. Для указанных преобразований найти конечную неподвижную точку $z_0$ (если она существует), угол поворота вокруг нее $q$ и коэффициент

растяжения $k$. Привести эти преобразования к каноническому виду $w - z_0 = l\,(z - z_0)$:

1) $w = 2z + 1 - 3i$;
2) $w = iz + 4$;
3) $w = z + 1 - 2i$;
4) $w - w_1 = a(z - z_1)$, $a \neq 0$;
5) $w = az + b$, $a \neq 0$.

34. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего:
 1) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;
 2) правую полуплоскость на себя;
 3) полосу $-2 < y < 1$ на себя.

35. Найти целую линейную функцию $w(z)$, отображающую полосу, заключенную между данными прямыми, на полосу $0 < u < 1$ при указанной нормировке:
 1) $x = a$, $x = a + h$, $w\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = 0,5 + i$, $\operatorname{Im} w\left(a + \dfrac{h}{2} + i\right) < 1$;
 2) $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$, $w(ib_1) = 0$, $b_2 > b_1$.

36. Найти целую линейную функцию $w(z)$, отображающую круг $|z| < 1$ на круг $|w - w_0| < r$ так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу, и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $a$ .

## Дробно-линейное преобразование

### *Часть А*

37. Для функции $w = \dfrac{1}{z}$ найти образы следующих линий:
 1) семейства окружностей $x^2 + y^2 = ax$;
 2) пучка прямых $y = kx$;
 3) параболы $y = x^2$.

38. Выяснить, во что преобразуется угол $0 < j < \dfrac{p}{4}$ при отображении функцией $w = \dfrac{z}{z-1}$.

39. Отобразить на вертикальную полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$ полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ с выкинутым кругом $\left| z - \frac{d}{2} \right| \leq \frac{d}{2}$ .

40. Найти дробно-линейные преобразования, переводящие точки $-1$, $i$, $1+i$ соответственно в точки:

1) 0, $2i$, $1-i$ ;  2) $i$, $\infty$, 1.

41. Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего верхнюю полуплоскость на себя.

42. Найти отображение верхней полуплоскости на себя в указанной нормировке:

1) $w(0)=1$, $w(1)=2$, $w(2)=\infty$ ;  2) $w(0)=1$, $w(i)=2i$ .

43. Найти точки, симметричные с точкой $2+i$ относительно окружностей:

1) $|z|=1$;  2) $|z-i|=3$.

44. Найти симметричный образ относительно единичной окружности следующих линий:

1) $|z| = \frac{1}{2}$;  2) $|z-1|=1$;

3) $y=2$;  4) $|z-z_0|=|z_0|$; $z_0 = x_0 + iy_0$;

5) $|z-z_0| = \sqrt{|z_0|^2 - 1}$; $|z_0|>1$.

45. Отобразить верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы $w(i)=0$; $\arg w'(i) = -\frac{p}{2}$ .

46. Отобразить единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ на единичный круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы $w(0{,}5)=0$; $\arg w'(0{,}5)=0$ .

47. Отобразить круг $\{z : |z| < 2\}$ на правую полуплоскость $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$ так, чтобы $w(0)=1$; $\arg w'(0) = \frac{p}{2}$ .

## *Часть Б*

48. Для функции $w=\dfrac{1}{z}$ найти образы следующих линий:

1) $x^2+y^2=by$; 2) $y=x+b$.

49. Выяснить, во что функция $w=\dfrac{1}{z-z_0}+h$, где $z_0=x_0+iy_0$, $h=h_1+ih_2$, переводит:

1) прямоугольную сетку $x=c$; $y=c$;

2) полярную сетку $|z-z_0|=R$; $\arg(z-z_0)=a$.

50. Выяснить, во что преобразуется область $1<|z|<2$ при отображении функцией $w=\dfrac{z}{z-1}$.

51. Отобразить на вертикальную полосу $0<\operatorname{Re}w<1$ двуугольник, заключенный между окружностями

$$\left|z-\frac{d_1}{2}\right|=\frac{d_1}{2},\ \left|z-\frac{d_2}{2}\right|=\frac{d_2}{2},\ d_1<d_2 .$$

52. Найти дробно-линейные преобразования, переводящие точки $-1$, $\infty$, $I$ соответственно в точки:

1) $i$, 1, $1+i$; 2) $\infty$, $i$, 1; 3) 0, $\infty$, 1.

53. Найти дробно-линейное преобразование, такое, чтобы точки 1 и $i$ были неподвижны, а точка 0 переходила в точку $-1$.

54. Найти общий вид дробно-линейного преобразования, переводящего:

1) верхнюю полуплоскость на нижнюю полуплоскость;

2) верхнюю полуплоскость на правую полуплоскость.

55. Найти функцию $w(z)$, отображающую круг $|z|<R$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re}w>0$ так, чтобы $w(R)=0$, $w(-R)=\infty$, $w(0)=1$. Каков при этом образ верхнего полукруга?

56. Отобразить верхнюю полуплоскость $\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ на единичный круг $\{w:|w|<1\}$ так, чтобы $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$.

57. Отобразить верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг $\{w : |w - w_0| < R\}$ так, чтобы $w(i) = w_0$, $w'(i) > 0$.

58. Отобразить единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ на единичный круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы $w(0{,}5i) = 0$, $\arg w'(0{,}5i) = \frac{p}{2}$.

59. Отобразить круг $|z - 4i| < 2$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w < \operatorname{Im} w$ так, чтобы центр круга перешел в точку $-4$, а точка окружности $2i$ в начало координат.

## Функция Жуковского

### *Часть А*

60. Найти области, на которые функция Жуковского отображает:

1) круг $|z| < R < 1$;
2) область $|z| > R > 1$;
3) круг $|z| < 1$;
4) область $|z| > 1$;
5) верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$;
6) нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$;
7) верхнюю половину круга $|z| < 1$; $\operatorname{Im} z > 0$;
8) нижнюю половину круга $|z| < 1$; $\operatorname{Im} z < 0$;
9) область $|z| > 1$; $\operatorname{Im} z > 0$;
10) верхнюю половину кольца $1 < |z| < R$; $\operatorname{Im} z > 0$;
11) верхнюю половину кольца $R < |z| < 1$; $\operatorname{Im} z > 0$;
12) область $\frac{1}{R} < |z| < R$; $\operatorname{Im} z > 0$; $\operatorname{Re} z > 0$;
13) угол $\frac{p}{2} - a < \arg z < \frac{p}{2} + a$ $\left(0 < a < \frac{p}{2}\right)$.

61. Пользуясь функцией Жуковского отобразить внешность отрезка $[-c; c]$ $(c > 0)$ на внешность единичного круга $|w| > 1$ при условии $w(\infty) = \infty$; $\arg w'(\infty) = a$ .

62. Найти область, на которую функция Жуковского отображает единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[a,1]$ $(-1 < a < 1)$. Рассмотреть случаи $a > 0$ и $a < 0$.

63. Отобразить круг $\{z : |z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0,5;1]$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

### *Часть Б*

64. Найти преобразование полярной сетки с помощью функции $w = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

65. Отобразить внешность единичного круга $\{z : |z| > 1\}$ с разрезами по отрезку $[-a;-1]$ и лучу $[1;\infty]$, где $a > 1$, на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

66. Отобразить верхнюю половину круга $\{z : |z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[ai; i]$, где $0 < a < 1$, на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

67. Отобразить плоскость с разрезом по отрезку $[-1;1]$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

68. Отобразить плоскость с разрезом по отрезку $[-i; i]$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

69. Отобразить плоскость с разрезом по отрезку $[z_1, z_2]$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

## Показательная, логарифмическая, тригонометрические и гиперболические функции

### *Часть А*

70. Выяснить, во что преобразуются при отображении функцией $w = e^z$:
    1) прямые $y = kx + b$;

2) полоса $a < y < b$ $(0 \le a < b \le 2p)$;

3) прямоугольник $a < x < b$, $g < y < d$; $d - g \le 2p$, $a, b, g, d \in R^1$.

71. Выяснить, во что преобразуются при отображении функцией $w = \ln z$:

1) логарифмические спирали $r = Ae^{kj}$ $(A > 0)$;

2) угол $0 < \arg z < a \le 2p$;

3) кольцо $r_1 < |z| < r_2$ с разрезом по отрезку $[r_1, r_2]$.

72. Выяснить, во что преобразуется при отображении функцией $w = \operatorname{ch} z$ полуполоса $\{z : \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < p\}$.

73. Выяснить, во что преобразуется при отображении функцией $w = \cos z$ полуполоса $\left\{z : |\operatorname{Re} z| < \frac{p}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$.

74. Отобразить с помощью функции $w = \sin z$ полуполосу $\left\{z : |\operatorname{Re} z| < \frac{p}{2}; \operatorname{Im} z > 0\right\}$.

75. Отобразить с помощью функции $w = \operatorname{tg} z$:

1) полуполосу $0 < x < p$, $y > 0$;

2) полосу $0 < x < p$.

## *Часть Б*

76. Отобразить с помощью функции $w = e^z$:

1) полосу между прямыми $y = x$; $y = x + 2p$;

2) полуполосу $x > 0; 0 < y < a \le 2p$.

77. Отобразить с помощью функции $w = \ln z$ сектор

$$|z| < 1; \quad 0 < \arg z < a \le 2p .$$

78. Отобразить с помощью функции $w = \cos z$:

1) полосу $0 < x < p$;

2) полуполосу $|x| < \frac{p}{2}$, $y > 0$.

79. Отобразить с помощью функции $w = \arcsin z$ верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

80. Выяснить, во что преобразуется при отображении функцией $w = \operatorname{ch} z$ полоса $0 < y < p$.

81. Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость $C$ с разрезами по лучам $(-\infty, -R]$ и $[R, +\infty)$.

## Смешанные задачи на конформные отображения

### *Часть A*

82. Выяснить, во что преобразуется при отображении функцией $w = \dfrac{2z+i}{z-2i}$ полоса $\{z : |\operatorname{Im}\ z| < 2\}$.

83. Отобразить верхнюю полуплоскость $\{z : \operatorname{Im}\ z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[0, ih], h > 0$, на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

84. Отобразить плоскость C с разрезами по $(-\infty; -a], [a, \infty), a > 0$ на полосу $\{w : 0 < \operatorname{Im} \mathrm{w} < h\}$.

85. Отобразить полосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2h\}$ с разрезом по $(-\infty + ih, a + ih]$ на полосу $\{w :\ 0 < \operatorname{Im} w < 2h\}$.

86. Отобразить круг $\{z : |z| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[(1-h)e^{ia}, e^{ia}]$ $0 < h < 1,\ 0 < a < 2p$, на единичный круг $\{w : |w| < 1\}$.

87. Отобразить область $\left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{p}{2},\ |z - i| > 1\right\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

88. Отобразить $\left\{z : |\operatorname{Re} z| < \dfrac{p}{2}\right\}$на единичный круг $\{w : |w| < 1\}$.

## *Часть Б*

89. Отобразить на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

1) плоскость C с разрезами по $(-\infty; a]$, $[b, \infty)$, $-\infty < a < b < \infty$;

2) полуплоскость $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по дуге $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le a$, $0 < a < p$;

3) полосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < p\}$ с разрезом по отрезку $[0; ia], 0 < a < p$;

4) полосу $\{z : |\operatorname{Im} z| < p$ с разрезом по $[a, \infty], a \in R$;

5) полуполосу $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < p;\ \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{ip}{2}, a + \frac{ip}{2}\right]$, $a > 0$;

6) плоскость C с разрезом по отрезку $[a, b], -\infty < a < b < \infty$.

## Интегрирование функций комплексной переменной

## *Часть А*

90. Вычислить интеграл $\int\limits_L (z + 2\bar{z})dz$, где $L$:

1) отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 - i$;

2) дуга окружности $|z| = 2; -\frac{p}{2} \le \arg z \le \frac{p}{2}$;

3) окружность $|z - 1| = 2$.

91. Вычислить интеграл $\int\limits_L z^3 dz$, где $L$ – дуга параболы $x = y^2$ с концами в точках $z_1 = 0,\ z_2 = 1 + i$.

92. Вычислить интеграл $\int\limits_L e^{-\bar{z}} dz$, где $L$:

1) ломаная, соединяющая точки $z_1 = 0;\ z_2 = 2;\ z_3 = 2 - i$;

2) отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 - i$.

93. Вычислить интеграл $\int\limits_L \bar{z}|z| dz$, где $L$ – левая половина окружности $|z| = 1$ с обходом против часовой стрелки.

94. Вычислить интегралы (обход контуров – против часовой стрелки):

1) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}dz;$ 2) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}dz;$

3) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2+2z-3}dz$ 4) $\oint\limits_{L} \frac{\operatorname{sh}\frac{p}{4}z}{z^2+1}dz$ где L: $x^2+y^2+2y=0$

5) $\oint\limits_{L} \frac{e^z dz}{z^2-9}$, где L: а) $|z-3|=2$, б) $|z+3|=2$, в) $|z|=1$, г) $|z|=4$;

6) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\cos z}{\left(z-\frac{p}{3}\right)^3}dz$; 7) $\oint\limits_{|z+2i|=3} \frac{e^z}{z^2+2iz}dz$;

8) $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z}{\left(z^2+9\right)^2}dz$; 9) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z-i)^2(z+1)}dz$.

## ***Часть Б***

95. Вычислить интегралы (обход контуров – против часовой стрелки):

1) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^3+4z}$; 2) $\oint\limits_{|z-i|=1,5} \frac{z+1}{z^2-iz+2}dz$;

3) $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3(z-1)}dz$; 4) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz\, dz}{z^2+4z+3}$;

5) $\oint\limits_{L} \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, где $L$: а) $|z-1|=1$, б) $|z+1|=1$, в) $|z|=R$, $R\neq 1$;

6) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-p^2}dz$; 7) $\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$, где $a>1$;

8) $\oint\limits_{|z-a|=1} \frac{e^z z}{(z-a)^3}dz;$ 9) $\oint\limits_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}.$

## Числовые и степенные ряды

### *Часть А*

96. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\ in}{2^n}$;  2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$;  4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(e-i)^n}{n^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2+i)^n n}{2^n}$;  6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+i)^n}$.

97. Найти области сходимости степенных и функциональных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$;  2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{(z-2i)^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n z^n$;  4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(z-1)^n}{2^n\sqrt{3n-2}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}z^n$;  6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$.

### *Часть Б*

98. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\ in}{3^n}$;  2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right)^n$;  4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{n^2}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n}+in}$;  6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$.

99. Найти области сходимости степенных и функциональных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n^2}$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z-2)^n}{(n+1)(n+2)}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ln n}{(z-1)^n}$.

## Ряды Тейлора и Лорана

### *Часть А*

100. Разложить в ряд в окрестности точки $z=0$ следующие функции:

1) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$;

2) $f(z)=\left(1-z+2z^2\right)\sin\frac{1}{z^2}$.

101. Разложить в ряд функцию $f(z)=\frac{1}{z-2}$ в областях:

1) $|z|<2$, $(z=0)$;

2) $2<|z|<\infty$ $(z=\infty)$.

102. Разложить в ряд по степеням $(z-1)$ функцию $f(z)=\frac{1}{z-2}$ в областях:

1) $|z-1|<1$;

2) $1<|z-1|<\infty$.

103. Разложить в ряд по степеням $z$ функцию $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}$ в круге $|z|<1$.

104. Разложить в ряд по степеням $z$ функцию $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$ в кольце $0<|z|<2$.

105. Разложить в ряд функцию $f(z)=\frac{1}{(z-1)^2\left(z^2+1\right)}$ в окрестности точки $z=i$. Указать область сходимости ряда.

106. Разложить в ряд по степеням $z$ следующие функции:

1) $f(z)=\cos 2z$;

2) $f(z)=\sin(2z-1)$.

107. Разложить в ряд по степеням $z-a$ следующие функции:

1) $f(z)=e^{3z-2}$, $a=1$; 2) $f(z)=\sin(z+i)$, $a=i$;

3) $f(z)=z\cos 2z$, $a=1$;

4) $f(z)=z^5-z^3+2z-3$, $a=2$.

108. Разложить в ряд Лорана в области $0<|z-a|<\infty$ следующие функции:

1) $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$, $a=0$;

2) $f(z)=(z+1)\sin\dfrac{1}{z+1}$, $a=-1$;

3) $f(z)=(z+i)^2\cos\dfrac{1}{z+i}$, $a=-i$.

109. Разложить в ряды Тейлора или Лорана в окрестности точки $z=a$ следующие функции. Указать области сходимости полученных рядов:

1) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)}$, $a=0$, $a=-2$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3}$, $a=0$, $a=-1$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)^2}$, $a=-1$, $a=2$;

4) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}$, $a=1$, $a=2$.

## Изолированные особые точки аналитической функции комплексной переменной и их вычеты

### *Часть А*

110. Найти нули функции и указать их порядок:

1) $f(z)=(z^3-1)^2$; 2) $f(z)=\sin 2z$;

3) $f(z)=\text{ctg}^2\, z$; 4) $f(z)=(z^2+4z+4)^3$.

111. Найти особые точки, выяснить их тип и вычислить вычеты относительно особых точек следующих функций:

1) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2}$; 2) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-p/2}$;

3) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$; 4) $f(z)=\dfrac{1}{z^3+z}$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{z^3\left(z^2+4\right)^2}$; 6) $f(z)=\dfrac{z^2}{e^z+3}$;

7) $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$; 8) $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$;

9) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-1}$; 10) $f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}$;

11) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-\sin a}$; 12) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{p}{z}}{z^2+z-2}$.

### *Часть Б*

112. Найти особые точки, выяснить их тип и вычислить вычеты относительно особых точек следующих функций:

1) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-\frac{1}{2}}$; 2) $f(z)=\dfrac{2z+5}{z^4-8z^2+16}$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)^3}$; 4) $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{\left(z-\frac{p}{4}\right)\left(z-\frac{p}{8}\right)^2}$;

5) $f(z)=\dfrac{1}{2\sin 2z}$; 6) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(z-p)}$;

7) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z^2}$; 8) $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$;

9) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$; 10) $f(z)=\dfrac{z^3}{z+1}e^{\frac{1}{z}}$.

## Вычисление интегралов с помощью вычетов

### *Часть А*

113. Вычислить следующие интегралы:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1{,}5}\frac{2z+i}{z(z-i)}dz$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{\cos z\,dz}{z^2-2z-3}$;

3) $\oint\limits_{|z+2|=2} \dfrac{z^3+1}{(z+1)^2}dz;$ 4) $\oint\limits_{|z-1+i|=2} \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}dz;$

5) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\sin z}{(z-2i)^3}dz;$ 6) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{z^5+4z^3};$

7) $\oint\limits_{|z+2|=2} \dfrac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)};$ 8) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^2\,dz}{\sin^3 z\cos z};$

9) $\oint\limits_{|z+2|=1{,}5} \dfrac{dz}{(z+2)^2(z-3)^3};$ 10) $\oint\limits_{|z=1|} \dfrac{z^2-3}{z(z+2i)^2}dz.$

114. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \dfrac{\operatorname{tg} z\,dz}{z^2+1}$, где $L$ – ромб с вершинами в точках: $z_1=3$, $z_2=2i$, $z_3=-3$, $z_4=-2i$.

115. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \dfrac{z\,dz}{z^4+1}$, где $L$ – эллипс: $\dfrac{(x-1)^2}{1}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

116. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \dfrac{z\,dz}{\cos z}$, где $L$ – прямоугольник с вершинами в точках: $z_1=-i$, $z_2=2-i$, $z_3=2+i$, $z_4=i$.

117. Вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}}dz;$ 2) $\oint\limits_{\left|z-\frac{p}{2}i\right|=2} \dfrac{z^2+1}{\operatorname{sh} 2z}dz;$

3) $\oint\limits_{|z|=1} \sin^2\dfrac{1}{z}dz;$ 4) $\dfrac{1}{2pi}\oint\limits_{|z|=r} z^n e^{\frac{2}{z}}dz$, $n\in N$, $r>0;$

5) $\oint\limits_{|z|=2} e^{-\frac{z+1}{z}pi}dz;$ 6) $\oint\limits_{|z|=5} \dfrac{z\,dz}{\sin z(1-\cos z)};$

7) $\oint\limits_{|z|=3} (1+z+z^2)\left(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}}+e^{\frac{1}{z-2}}\right)dz;$

8) $\oint\limits_{|z|=r} \dfrac{dz}{(z-a)^n (z-b)}$; $|a| < r < b,\ n \in N.$

118. Вычислив интеграл $\dfrac{1}{2pi} \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{(z-a)\left(z-a^{-1}\right)}$, доказать, что при $0 < a < 1$

$$\int\limits_0^{2p} \frac{dq}{1+a^2-2a\cos q} = \frac{2p}{1-a^2}.$$

## *Часть Б*

119. Вычислить следующие интегралы:

1) $\oint\limits_{|z+2|=4} \dfrac{z+1}{z^2+3z-4} dz$;

2) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^2-2}{(z+i)(z-3)^2} dz$;

3) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \dfrac{z-i}{(z+1)(z-2i)^2} dz$;

4) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{ze^{-z}}{\left(z+\dfrac{pi}{2}\right)^2} dz$;

5) $\oint\limits_{|z+1|=1{,}5} \dfrac{\operatorname{ch} 2z\, dz}{z^2(z+2)(z-1)}$;

6) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z\, dz}{\operatorname{ch} z}$;

7) $\oint\limits_{|z|=2} e^{\frac{z}{1-z}} dz$;

8) $\oint\limits_{\left|z-\frac{p}{2}\right|=1} \operatorname{ctg} 3z\, dz$;

9) $\oint\limits_{\left|z-\frac{p}{2}\right|=2} \dfrac{\cos z\, dz}{z\left(z-\dfrac{p}{2}\right)^3}$;

10) $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{z+1}{z^2-iz+2(z-i)} dz.$

120. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \dfrac{dz}{\left(z^2+4\right)^3}$, где $L$ – эллипс $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{(y-1)^2}{16} = 1$.

121. Вычислить интеграл $\oint\limits_L \dfrac{e^{zi}\, dz}{\sin 2z}$; где $L$ – ромб с вершинами в точках: $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -i$.

122. Вычислить интеграл $\oint\limits_L z\sin\frac{1}{z^2}dz$, где $L$ – прямоугольник с вершинами в точках: $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = 1-2i$, $z_4 = -1-2i$.

## Приложение теории вычетов

### *Часть А*

123. Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

1) $\int\limits_0^{2p}\frac{dj}{a+b\cos j}$, $a > b > 0$;

2) $\int\limits_0^{2p}\frac{dj}{1+a^2-2a\cos j}$, $a \neq \pm 1$;

3) $\int\limits_0^{p}\frac{dj}{1+\sin^2 j}$;

4) $\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{e^{tz}dz}{z^2+1}$, $t > 0$.

124. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n\in N$;

2) $\int\limits_0^{2p} e^{\cos j}\cos(nj - \sin j)dj$, $n\in Z$.

125. Вычислить интегралы с использованием леммы Жордано:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x dx}{x^2-2x+10}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x dx}{x^2-2x+10}$;

4) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$;

5) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 x dx}{x^2}$;

6) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^3 x dx}{x^3}$;

7) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^n+1}$, $n\in N$, $n\geq 2$.

### *Часть Б*

126. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{2p}\frac{dj}{a+\cos j}$, $a > 1$;

2) $\int\limits_0^{2p}\frac{dj}{(a+b\cos j)^2}$, $a > b > 0$;

3) $\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{tz}dz}{(z^2-1)^2}$, $t>0$;

4) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

127. Вычислить интегралы с использованием леммы Жордано:

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos xdx}{(x^2+2x+10)^2}$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin xdx}{x^2-5x+8}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$;

4) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

5) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\sin x}{x}dx$.

# Ответы

**1.** 1) $3+i;\ \ -1-5i;\ \ 8-i;\ \ -\frac{4}{13}-\frac{7}{13}i.$ 2) $8-2i;\ \ -2-6i;\ \ 23-14i;\ \ \frac{7}{29}-\frac{26}{29}i$.

**2.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{p}{4}+i\sin\frac{p}{4}\right);$ 2) $2\left(\cos\frac{p}{2}+i\sin\frac{p}{2}\right);$ 3) $4(\cos p+i\sin p)$;

4) $2\left(\cos\frac{3p}{4}+i\sin\frac{3p}{4}\right);$ 5) $\cos\left(-\frac{p}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{p}{6}\right).$

**3.** 1) $\operatorname{Re} z=0,\ \operatorname{Im} z=1;$ 2) $\operatorname{Re} z=\frac{1}{4},\ \operatorname{Im} z=0;$

3) $\operatorname{Re} z=2^n\cos^n\frac{j}{2}\cos\frac{nj}{2},\ \operatorname{Im} z=2^n\cos^n\frac{j}{2}\sin\frac{nj}{2};$

4) $\operatorname{Re} z=\cos 2na,\ \operatorname{Im} z=-\sin 2na.$

**4.** 1) $|z|=\sqrt{\frac{2}{5}},\ \arg z=\operatorname{arctg}3;$ 2) $|z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{3p}{4};$

3) $|z|=1,\ \arg z=\frac{5p}{6};$ 4) $|z|=1,\ \arg z=-\frac{p}{4};$

5) $|w|=1,\ \arg w=a;$ 6) $|w|=2\cos\frac{j}{2},\ \arg w=\frac{3j}{2},$ где $j=\arg z.$

**5.** 1) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$

2) $z_{k+1}=\sqrt[5]{5}\left(\cos\frac{p-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2pk}{5}+i\sin\frac{p-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2pk}{5}\right),\ k=0,1,2,3,4;$

3) $z_{k+1}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{p}{24}+\frac{p}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{p}{24}+\frac{p}{2}k\right)\right),\ k=0,1,2,3;$

4) $z_{k+1}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2p}{9}+\frac{2pk}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2p}{9}+\frac{2pk}{3}\right)\right),\ k=0,1,2.$

**6.** 1) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2};$

2) $z_{k+1}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(\frac{5p}{16}+\frac{p}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{5p}{16}+\frac{p}{2}k\right)\right),\ k=0,1,2,3;$

3) $z=\left(1-\sqrt{2}\right)i;$ 4) $z=\left(1\pm\sqrt{3}i\right)x,\ x\le 0;$

5) $z=0$, при $n=2$, $z=x$ где $x\in R^1;$

при $n \neq 2$ $z_{k+1} = \cos\dfrac{2pk}{n} + i\sin\dfrac{2pk}{n}$, где $k = 0,1,2,\ldots, n-1$;

6) $z_1 = -3+i$, $z_2 = -2+i$; 7) $z_1 = \dfrac{-1-i}{2}$, $z_2 = \dfrac{7-3i}{2}$.

**7.** Радиус окружности $R = \dfrac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{a}$; центр окружности $z_0 = -\dfrac{b}{a}$.

**8.** 1) концентрическое кольцо с центром в точке $z_0$ и радиусами $r_1$ и $r_2$;

2) угол с вершиной в точке $z = 0$, образованный лучами $\arg z = j_1$ и $\arg z = j_2$;

3) при $c = 0$ – мнимая ось с выколотой точкой $y = 0$; при $c \neq 0$ – окружность с центром в точке $\left(\dfrac{1}{2c}, 0\right)$ и радиусом $\dfrac{1}{2|c|}$;

4) часть плоскости, лежащей вне параболы $x = -1 + \dfrac{y^2}{4}$;

5) объединение открытых кругов $\{z : |z-i| < \sqrt{2}\}$, $\{z : |z+i| < \sqrt{2}\}$ без их общей части;

6) $\left\{z : \left|z + \dfrac{10}{3}i\right| < \dfrac{8}{3}\right\}$.

**9.** 1) $\operatorname{Re} w = 2^{1+\frac{n}{2}} \cos\dfrac{np}{4}$, $\operatorname{Im} w = 0$;

2) $\operatorname{Re} w = \begin{cases} 0, & n = 2k+1; \\ (-1)^k, & n = 2k; \end{cases}$. $\operatorname{Im} w = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ (-1)^k, & n = 2k+1; \end{cases}$ $k = 0,1,2,\ldots$

3) $\operatorname{Re} w = -\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{Im} w = 0$;

4) $\operatorname{Re} w = 2^n \sin^n \dfrac{j}{2} \cos\dfrac{(p-j)n}{2}$, $\operatorname{Im} w = 2^n \sin^n \dfrac{j}{2} \sin\dfrac{(p-j)n}{2}$.

**10.** 1) $|w| = 8$, $\arg w = p$; 2) $|w| = 2^{12}$, $\arg w = 0$.

**11.** 1) $z_{1,2} = \dfrac{\left(\pm\sqrt{3}+i\right)}{2}$, $z_3 = -i$; 2) $z_{1,2} = \pm\sqrt[4]{5}\left(\sin\dfrac{\operatorname{arctg} 2}{2} + i\cos\dfrac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)$;

3) $z_{k+1} = \sqrt[16]{2}\left(\cos\left(\dfrac{p}{32} + \dfrac{p}{4}k\right) + i\sin\left(\dfrac{p}{32} + \dfrac{p}{4}k\right)\right)$, $k = 0,1,2,\ldots,7$;

4) $z_{k+1} = \cos\dfrac{p(2k+1)}{7} + i\sin\dfrac{p(2k+1)}{7}$, $k = 0,1,2,\ldots,6$.

**12.** 1) $z_{k+1}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5p}{24}+\frac{p}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{5p}{24}+\frac{p}{2}k\right)\right),\ k=0,1,2,3;$

2) $z=\frac{3}{2}-2i;$

3) $z_{1,2}=\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{p}{8}+i\sin\frac{p}{8}\right),\ z_{3,4}=\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{p}{8}-i\sin\frac{p}{8}\right);$

4) $z_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2};$

5) $z_{k+1}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{4p}{9}+\frac{2pk}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4p}{9}+\frac{2pk}{3}\right)\right),\ k=0,1,2;$

6) $z_{k+1}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{p}{24}+\frac{p}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{p}{24}+\frac{p}{2}k\right)\right),\ k=0,1,2,3;$

$z_{k+1}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{p}{24}+\frac{p}{2}k\right)+i\sin\left(-\frac{p}{24}+\frac{p}{2}k\right)\right),\ k=4,5,6,7.$

**15.** 1) полоса $0<y\le\sqrt{3};$ 2) гипербола $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2x+1)};$

3) при $c=0$ – действительная ось с выколотой точкой $x=0$, при $c\neq 0$ – окружность с центром в точке $\left(0,-\frac{1}{2c}\right)$ и радиусом $\frac{1}{2|c|}$;

4) эллипс с фокусами в точках $z_1$ и $z_2$ с большой полуосью, равной $a$;

5) гипербола с фокусами в точках $z_1$ и $z_2$ и действительной полуосью, равной $a$;

6) $\{z:|z-1-i|>\sqrt{2}\}\ \mathbf{I}\ \{z:|z-2-2i|<2\sqrt{2}\}.$

**16.** 1) нет; 2) $z=0$; 3) $\{z:x=y\}$; 4) $C\setminus\{0\}$; 5) $C$; 6) $z$=0.

**17.** 1) $c=1;\ a=-b;\ f(z)=(1-ai)z;$ 2) $a=b=-1;\ f(z)=e^{iz}.$

**18.** $f(z)=z^3+2+i.$

**19.** $f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}.$

**21.** 1) Нет; 2) $C$; 3) $z=0$; 4) $z=0$.

**22.** 1) $w=3z^2;$ 2) $w=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right).$

**23.** $f(z)=z^2+2z+2i-4.$

**24.** $f(z)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+i\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln z.$

**25.** $f(z) = -2xy + \dfrac{x}{2(x^2+y^2)} + C + i\left(3 + x^2 - y^2 - \dfrac{y}{2(x^2+y^2)}\right) = iz^2 + \dfrac{1}{2z} + 3i + C.$

**26.** 1) $k = 4;\ q = \dfrac{p}{4};$  2) $k = 10;\ q = p - \mathrm{arctg}\dfrac{4}{3};$

3) $k = 6;\ q = \dfrac{p}{2};$  4) $k = 3;\ q = 0.$

**27.** 1) $\left\{z : |z| < \dfrac{1}{2}\right\}$ сжимается, $\left\{z : |z| > \dfrac{1}{2}\right\}$ растягивается;

2) $\left\{z : |z+1| < \dfrac{1}{2}\right\}$ сжимается, $\left\{z : |z+1| > \dfrac{1}{2}\right\}$ растягивается;

3) $\{z : |z| < 1\}$ сжимается, $\{z : |z| > 1\}$ растягивается.

**28.** $w = (2+i)z + 1 - 3i.$  **29.** $w = (1+i)(1-z).$

**30.** 1) $w = az + b,\ a > 0,\ b \in R^1;$  2) $w = -i(az - b),\ a > 0,\ b \in R^1.$

**31.** 1) $w = -z + 1 + bi,\ b \in R^1$ или $w = z + bi,\ b \in R^1;$

2) $w = -z + 1 + b(1+i),\ b \in R^1$ или $w = z + b(1+i),\ b \in R^1.$

**32.** 1) $w = \dfrac{z-a}{h};$  2) $w = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{b} z e^{-\left(\frac{p}{2} + \mathrm{arctgk}\right)i}.$

**33.** 1) $z_0 = -1 + 3i,\ q = 0,\ k = 2,\ w + 1 - 3i = 2(z + 1 - 3i);$

2) $z_0 = 2 + 2i,\ q = \dfrac{p}{2},\ k = 1,\ w - 2 - 2i = i(z - 2 - 2i);$

3) $z_0$ не существует;

4) $z_0 = \dfrac{w_1 - az_1}{1-a}\ (a \neq 1),\ q = \arg a,\ k = |a|;$

5) $z_0 = \dfrac{b}{1-a}\ (a \neq 1),\ q = \arg a,\ k = |a|.$

**34.** 1) $w = -az + b,\ a > 0,\ b \in R^1;$  2) $w = az + bi,\ a > 0,\ b \in R^1.$

3) $w = z + b$ или $w = -z - i + b,\ b \in R^1.$

**35.** 1) $w = -\dfrac{z-a}{h} + 1 + i;$  2) $w = \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{b_2 - b_1} e^{-\left(\frac{p}{2} + \mathrm{arctgk}\right)i}(z - b_1 i).$

**36.** $w = r \cdot e^{ia} z + w_0.$

**37.** 1) $\mathrm{Re}\, w = \dfrac{1}{a};$  2) $\mathrm{Im}\, w = -k\mathrm{Re} w;$

3) циссоида $u^2 = -\dfrac{v^3}{1+v}$, где $u = \operatorname{Re} w,\ v = \operatorname{Im} w$.

**38.** $\{w : \operatorname{Im} w < 0\} \,\mathbf{I}\, \left\{w : \left|w - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\right| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

**39.** $w = \dfrac{d}{z} + hi$ или $w = -\dfrac{d}{z} + 1 + hi$ , где $h \in R^1$.

**40.** 1) $\dfrac{w}{w-1+i} = \dfrac{-1+2i}{5} \cdot \dfrac{z+1}{z-1-i}$; 2) $w = \dfrac{(2i+1)z + 6 - 3i}{5(z-i)}$.

**41.** $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in R^1$ и $ad - bc > 0$.

**42.** 1) $w = \dfrac{2}{2-z}$; 2) $w = \dfrac{4z+2}{2-z}$.

**43.** 1) $w = \dfrac{2+i}{5}$; 2) $w = \dfrac{9}{2} + i$.

**44.** 1) $|w| = 2$; 2) $\operatorname{Re} w = 0{,}5$; 3) $\left|w - \dfrac{1}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$; 4) $x_0 \operatorname{Re} w + y_0 \operatorname{Im} w = \dfrac{1}{2}$;

5) $|w - z_0| = \sqrt{|z_0|^2 - 1}$, т.е. симметрия окружности самой себе.

**45.** $w = \dfrac{z-i}{z+i}$; **46.** $w = \dfrac{2z-1}{2-z}$; **47.** $w = \dfrac{2i-z}{z+2i}$;

**48.** 1) $\operatorname{Im} w = -\dfrac{1}{b}$; 2) $\left|w + \dfrac{1+i}{2b}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}b}$.

**49.** 1) прямая $x = c$ переходит в окружность $\left|w - h + \dfrac{1}{2(x_0 - c)}\right| = \dfrac{1}{2|x_0 - c|}$,

прямая $y = c$ переходит в окружность $\left|w - h - \dfrac{i}{2(y_0 - c)}\right| = \dfrac{1}{2|y_0 - c|}$.

2) окружность $|z - z_0| = R$ переходит в окружность $|w - h| = \dfrac{1}{R}$, луч $\arg(z - z_0) = a$ переходит в луч $\arg(w - h) = -a$ .

**50.** $\{w : \operatorname{Re} w > 0{,}5\} \setminus \left\{w : \left|w - \dfrac{4}{3}\right| \le \dfrac{2}{3}\right\}$.

**51.** $w = \dfrac{d_1}{d_2 - d_1}\left(\dfrac{d_2}{z} - 1\right) + hi,\ h \in R^1$.

**52.** 1) $w = \dfrac{z+2+i}{z+2-i}$; 2) $w = \dfrac{iz+i+2}{z+1}$; 3) $w = \dfrac{1-i}{2}(z+1)$.

**53.** $w=\dfrac{z(1+2i)-i}{z+i}$.

**54.** 1) $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a,b,c,d\in R^1$ и $ad-bc<0$;

2) $w=i\,\dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a,b,c,d\in R^1$ и $ad-bc<0$.

**55.** $w=\dfrac{R-z}{R+z}$, $\{w:\operatorname{Re}w>0;\ \operatorname{Im}w<0\}$ – образ верхнего полукруга.

**56.** $w=\dfrac{iz+2}{z+2i}$.

**57.** $w=Ri\,\dfrac{z-i}{z+i}+w_0$.

**58.** $w=\dfrac{1+2iz}{2+iz}$.

**59.** $w=-4\,\dfrac{iz+2}{z-2-4i}$.

**60.** 1) внешность эллипса $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$;

2) внешность эллипса $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$;

3) плоскость с разрезом по отрезку $[-1,1]$;

4) разрез по отрезку $[-1,1]$;

5) плоскость с разрезами по лучам $(-\infty;-1\ ]$ и $[1,+\infty\ )$;

6) плоскость с разрезами по лучам $(-\infty;-1\ ]$ и $[1,+\infty\ )$;

7) $\{w:\operatorname{Im}w<0\}$; 8) $\{w:\operatorname{Im}w>0\}$; 9) $\{w:\operatorname{Im}w>0\}$;

10) верхняя половина эллипса $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$;

11) нижняя половина эллипса $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$;

12) правая половина эллипса $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ с разрезом по

отрезку $\left[-1, \frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\right]$.

13) $\left\{w = u + iv \in C\colon \frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} < 1\right\}$.

**61.** $w = \frac{e^{ia}}{c}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right)$.

**62.** При $a > 0$ плоскость с разрезом по отрезку $\left[-1, \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$, при $a < 0$ плоскость с разрезами по лучам $\left(-\infty; \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$ и $[-1, +\infty\ )$.

**63.** $w = \sqrt{\dfrac{1+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}}$.

**64.** Окружность $|z| = R$ переходит в эллипс $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2} = 1$;

луч $\arg z = j$ переходит в гиперболу $\dfrac{u^2}{\cos^2 j} - \dfrac{v^2}{\sin^2 j} = -1$.

**65.** $w = \sqrt{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}+a+\frac{1}{a}\right)}$.

**66.** $w = \sqrt{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}+a^2+\frac{1}{a^2}\right)}$.

**67.** $w = \sqrt{\frac{z+1}{1-z}}$.

**68.** $w = \sqrt{\frac{z-i}{z+i}}$.

**69.** $w = \sqrt{\frac{z-z_1}{z_2-z}}$.

**70.** 1) логарифмические спирали $r = e^{\frac{q-b}{k}}$;

2) угол $b - a$ между лучами $\arg w = a$ и $\arg w = b$;

3) часть кольца $g < \arg w < d$, $e^a < |w| < e^b$ при $0 < g < d < 2p$,

кольцо $e^a < |w| < e^b$ с разрезом по отрезку $\left[e^{a}, e^{b}\right]$ при $g = 0, d = 2p$,

кольцо $e^a < |w| < e^b$ с разрезом по лучу $\arg w = g$ при $g < 0$ и

$d - g = 2p$.

**71.** 1) $\operatorname{Re} w = \ln A + k \operatorname{Im} w$; 2) $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < a\}$;

3) $\{w : \ln r_1 < \operatorname{Re} w < \ln r_2 ,\ 0 < \operatorname{Im} w < 2p\}$.

**72.** $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

**73.** Правая полуплоскость с разрезом по отрезку $[0,1]$.

**74.** $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

**75.** 1) верхняя полуплоскость с разрезом по отрезку $[0, i]$;

2) плоскость с разрезом по отрезку $[-i, i]$;

**76.** 1) плоскость с разрезом по спирали $r = e^{\arg w}$;

2) $\{w : |w| > 1;\ 0 < \arg w < a\}$.

**77.** $\{w : \operatorname{Re} w < 0;\ 0 < \operatorname{Im} w < a\}$.

**78.** 1) плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

2) правая полуплоскость с разрезом по отрезку $[0,1]$.

**79.** $\left\{w : |\operatorname{Re} w| < \dfrac{p}{2};\ \operatorname{Im} w > 0\right\}$.

**80.** Плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$.

**81.** $w = \sqrt{\dfrac{z+R}{z-R}}$.

**82.** $\{w : \operatorname{Re} w < 2\} \setminus \left\{w : \left|w - \dfrac{11}{8}\right| < \dfrac{5}{8}\right\}$.

**83.** $w = \sqrt{z^2 + h^2}$.

**84.** $w = \dfrac{h}{p} \ln \sqrt{\dfrac{z+a}{z-a}}$.

**85.** $w = \dfrac{h}{p} \ln \left( e^{\frac{p}{h}(z-a)} + 1 \right)$.

**86.** $w = e^{ij} \dfrac{f(z) - i}{f(z) + i}$, где $f(z) = \sqrt{\dfrac{0{,}5e^{-ia}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + 1}{0{,}5e^{-ia}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) - a}}$, $j \in R^1$.

**87.** $w = \sqrt{1 + \dfrac{1}{\operatorname{ch} \dfrac{4p}{z}}}$.

**88.** $w = i e^{ij} \operatorname{tg} \dfrac{z}{2}$.

**89.** 1) $w=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$; 2) $w=\sqrt{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2+\mathrm{tg}^2\,\dfrac{a}{2}}$; 3) $w=\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\dfrac{a}{2}-\mathrm{tg}^2\,\dfrac{z}{2}}$;

4) $w=\sqrt{\dfrac{e^z}{e^z-e^a}}$; 5) $w=\sqrt{\mathrm{ch}^2\,z+\mathrm{sh}^2\,a}$; 6) $w=\sqrt{\dfrac{z-a}{z-b}}$.

**90.** 1) $2-i$; 2) $8pi$; 3) $16pi$.

**91.** $-1$.

**92.** 1) $1-2e^{-2}+e^{-2}(\cos 1-i\sin 1)$;

2) $\dfrac{e^{-5}}{5}(4(\cos 1+i\sin 1)-3(\cos 1-i\sin 1)+3-4i)$.

**93.** $pi$.

**94.** 1) 0; 2) $8pi$; 3) $\dfrac{pi\sin 1}{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}pi$;

5) а) $\dfrac{e^3pi}{3}$; б) $-\dfrac{pi}{3e^3}$; в) 0; г) $\dfrac{2pi}{3}\,\mathrm{sh}\,3$;

6) $-\dfrac{pi}{6}\left(6\sqrt{3}+p\right)$; 7) $p\,(1-\cos 2+i\sin 2)$;

8) $-\dfrac{pi}{9}$; 9) $p\,(\mathrm{ch}\,1-\sin 1-\cos 1+i\sin 1)$.

**95.** 1) $\dfrac{pi}{2}$; 2) $-\dfrac{2p}{3}(1+2i)$; 3) $pi(2e-5)$; 4) $pi\cos 1$;

5) а) $\dfrac{3pi}{8}$; б) $-\dfrac{3pi}{8}$; в) 0; 6) 0; 7) $\dfrac{pi}{2}$; 8) $e^a\left(1+\dfrac{a}{2}\right)$; 9) $2p\,\mathrm{sh}\,1$.

**96.** 1) расходится; 2) сходится абсолютно; 3) сходится абсолютно;
4) расходится; 5) расходится; 6) сходится абсолютно.

**97.** 1) сходится абсолютно в $C$;

2) сходится в кольце $\{z:1<|z-2i|\le 2\}$, кроме точки $z=2+2i$;

3) сходится в точке;

4) сходится в круге $\left\{z:|z-1|\le\dfrac{2}{3}\right\}$, кроме точки $z=\dfrac{5}{3}$;

5) сходится абсолютно в круге $\{z:|z|<2\}$;

6) сходится абсолютно в круге $\{z:|z|<e\}$.

**98.** 1) сходится абсолютно; 2) сходится абсолютно;
3) сходится абсолютно; 4) сходится абсолютно;
5) расходится; 6) сходится абсолютно.

**99.** 1) сходится в круге $\{z:|z-1|\le 1\}$;

2) сходится абсолютно в кольце $\{z : 1 < |z| < 5\}$;

3) сходится абсолютно в круге $\left\{z : |z-2| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$;

4) сходится абсолютно в области $\{z : |z-1| > 1\}$.

**100.** 1) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!}$;

2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{4n+2}} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{4n+1}} + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{4n}}$.

**101.** 1) $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$; 2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$.

**102.** 1) $f(z) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z-1)^n$; 2) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$.

**103.** $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n z^{n+1}$.

**104.** $f(z) = -\frac{1}{2z} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}$.

**105.** $f(z) = \frac{1}{4(z-i)} - \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z-i)^n \left( \frac{1}{(1-i)^{n+1}} + \frac{n+1}{(1-i)^{n+2}} - \frac{i^n}{2^{n+1}} \right)$, ряд сходится в области $\{z : 0 < |z-i| < \sqrt{2}\}$.

**106.** 1) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$;

2) $f(z) = \cos 1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sin 1 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n}}{(2n)!}$.

**107.** 1) $f(z) = e\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (z-1)^n}{n!}$;

2) $f(z) = \operatorname{ch} 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} + i \operatorname{sh} 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^{2n}}{(2n)!}$;

3) $f(z) = \cos 2 \left( \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} (z-1)^{2n}}{(2n)!} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} (z-1)^{2n+1}}{(2n)!} \right) -$

$$-\sin 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}(z-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}(z-1)^{2n+2}}{(2n)!}\right);$$

4) $f(z)=25+70(z-2)+74(z-2)^2+39(z-2)^3+10(z-2)^4+(z-2)^5.$

**108.** 1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^{2n}}$; 2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{2n}}$;

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+i)^{2n-2}}$.

**109.** 1) $a=0$: $f(z)=\frac{1}{2z}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+2}}$, сходится в области $\{z:0<|z|<2\}$;

$a=-2$: $f(z)=-\frac{1}{2(z+2)}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{2^{n+2}}$, сходится в области $\{z:0<|z+2|<2\}$;

2) $a=0$: $f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)z^{n-2}$, сходится в области $\{z:|z|<1\}$;

$a=-1$: $f(z)=\frac{1}{(z+1)^3}$, сходится в области $\{z:|z+1|>0\}$;

3) $a=-1$: $f(z)=\frac{1}{9(z+1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+3}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+1)^{n-1}}{3^{n+2}}$, сходится в области $\{z:0<|z+1|<3\}$;

$a=2$: $f(z)=\frac{1}{3(z-2)^2}-\frac{1}{9(z-2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^{n+3}}$, сходится в области $\{z:0<|z-2|<3\}$;

4) $a=-1$: $f(z)=-\frac{2}{z-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$, сходится в области $\{z:0<|z-1|<1\}$;

$a=2$: $f(z)=\frac{3}{z-2}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$, сходится в области $\{z:0<|z-2|<1\}$.

**110.** 1) $z_1 = 1;\ z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ – нули второго порядка;

2) $z_n = \frac{pn}{2},\ n \in Z$ – нули первого порядка;

3) $z_n = \frac{p}{2} + pn,\ n \in Z$ – нули второго порядка;

4) $z_0 = -2$ – нуль шестого порядка.

**111.** 1) $z = 0$ – полюс второго порядка, $\operatorname{res} f(0) = 1$;

2) $z = \frac{p}{2}$ – устранимая особая точка, $\operatorname{res} f(\frac{p}{2}) = 0$;

3) $z = 0$ – устранимая особая точка, $\operatorname{res} f(0) = 0$;

4) $z_1 = 0;\ z_2 = i;\ z_3 = -i$ – простые полюсы, $\operatorname{res} f(0) = 1$,

$\operatorname{res} f(i) = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{res} f(-i) = -\frac{1}{2}$;

5) $z_1 = 0$ – полюс третьего порядка; $z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы второго порядка, $\operatorname{res} f(0) = -\frac{1}{32}$, $\operatorname{res} f(2i) = \frac{1}{64}$, $\operatorname{res} f(-2i) = \frac{1}{64}$;

6) $z_k = \ln 3 + i(p + 2pk),\ k \in Z$ – простые полюсы,

$\operatorname{res} f(z_k) = -\frac{\left(\ln 3 + p i(2k+1)\right)^2}{3}$;

7) $z = 1$ – существенно особая точка, $\operatorname{res} f(1) = -\frac{1}{e}$;

8) $z_0 = 0$ – устранимая особая точка, $\operatorname{res} f(0) = 0$, $z_k = pk,\ k \in Z \setminus \{0\}$ – простые полюсы, $\operatorname{res} f(p k) = (-1)^k p k, k \neq 0$;

9) $z_k = \frac{p}{2} + 2pk,\ k \in Z$ – полюсы второго порядка, $\operatorname{res} f(z_k) = 0$;

10) $z = 0$ – существенно особая точка, $\operatorname{res} f(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!}$;

11) если $a \neq \pm\frac{p}{2} + 2pm, m \in Z$, то $z_k = a + 2pk$, $z_k = -a + p + 2pk$, $k \in Z$ – полюсы первого порядка, $\operatorname{res} f(a + 2p k) = \cos a$,

$\operatorname{res} f(-a + p + 2p k) = -\cos a$; если $a = \pm\frac{p}{2} + 2pm,\ m \in Z$, то $z_k$ – полюсы второго порядка, $\operatorname{res} f(a + 2p k) = 2(-1)^{m+1}$,

$\text{res}\, f\left(-a+p+2pk\right)=2\left(-1\right)^m$;

12) $z_1=1$ – устранимая особая точка, $z_2=-2$ – простой полюс, $z_3=0$ – существенно особая точка, $\text{res}\, f(1)=0$, $\text{res}\, f(-2)=0$,

$\text{res}\, f(0)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)\cdot\dfrac{\left(-1\right)^k p^{2k-1}}{\left(2k-1\right)!}$.

**112.** 1) $z_k=\left(-1\right)^k \dfrac{p}{6}+pk,\ k\in Z$ – простые полюсы, $\text{res}\, f(\dfrac{p}{6}+2pk)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\text{res}\, f\left(\dfrac{5p}{6}+2pk\right)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;

2) $z_1=2;\ z_2=-2$ – полюсы второго порядка, $\text{res}\, f(2)=-\dfrac{5}{32}$;

$\text{res}\, f(-2)=\dfrac{5}{32}$;

3) $z_1=1$ – полюс третьего порядка, $z_{2,3}=\pm i$ – простые полюсы,

$\text{res}\, f(1)=-1$, $\text{res}\, f(i)=-\dfrac{1+i}{8}$, $\text{res}\, f(-i)=-\dfrac{1-i}{8}$, $\text{res}\, f(1)=\dfrac{1}{4}$;

4) $z_1=\dfrac{p}{4}$ – устранимая особая точка, $z_1=\dfrac{p}{8}$ – полюс второго порядка, $\text{res}\, f\left(\dfrac{p}{4}\right)=0$, $\text{res}\, f\left(\dfrac{p}{8}\right)=\dfrac{8\sqrt{2}}{p^2}\left(p-4\right)$;

5) $z_k=\dfrac{p}{2}k,\ k\in Z$ – простые полюсы, $\text{res}\, f(z_k)=\dfrac{\left(-1\right)^k}{4}$;

6) $z_1=0$ – простой полюс, $z_1=p$ – устранимая особая точка,

$\text{res}\, f(0)=-\dfrac{1}{p}$, $\text{res}\, f(p)=0$;

7) $z=0$ – существенно особая точка, $\text{res}\, f(0)=0$;

8) $z=0$ – существенно особая точка, $\text{res}\, f(0)=1$;

9) $z_k=2pk,\ k\in Z$ – устранимые особые точки, $\text{res}\, f(2pk)=0$;

10) $z_1=-1$ – простой полюс, $z_2=0$ – существенно особая точка,

$\text{res}\, f(-1)=-e^{-1}$, $\text{res}\, f(0)=e^{-1}-\dfrac{1}{3}$.

**113.** 1) $4pi$; 2) $-\dfrac{pi}{2}\cos 1$; 3) $6pi$; 4) $2pi$; 5) $p\,\text{sh}\, 2$;

6) $0$; 7) $\frac{8pi}{25}$; 8) $2pi\left(1-\frac{p^2}{2}\right)$; 9) $-\frac{6pi}{625}$; 10) $1{,}5pi$.

**114.** $2pi\,\mathrm{th}\,1$. **115.** $0$. **116.** $-p^2 i$.

**117.** 1) $\frac{pi}{12}$; 2) $2pi\left(2-p^2\right)$; 3) $pi\left(1-\frac{3}{4}p^2\right)$; 4) $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$;

5) $-2p^2$; 6) $4pi$; 7) $32pi$; 8) $\frac{(-1)^{n-1}2pi}{(z-b)^n}$.

**119.** 1) $2pi$; 2) $-\frac{3}{25}p(3+4i)$; 3) $\frac{2p}{25}(7+i)$; 4) $-2p-p^2 i$;

5) $-\frac{pi}{6}(\mathrm{ch}\,4+3)$; 6) $2p^2 i$; 7) $-\frac{2pi}{e}$; 8) $\frac{4pi}{3}$;

9) $\frac{8(p-2)i}{p^2}$; 10) $-\frac{2p}{5}(1-3i)$.

**120.** $0$. **121.** $pi$. **122.** $2pi$.

**123.** 1) $\frac{2p}{\sqrt{a^2-b^2}}$; 2) $\frac{2p}{1-a^2}$ при $|a|<1$, $\frac{2p}{a^2-1}$ при $|a|<1$;

3) $\frac{p}{\sqrt{2}}$; 4) $2pi\sin t$.

**124.** 1) $\frac{p}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$; 2) $\frac{2p}{n!}$ при $n\ge 0$, $0$ при $n<0$.

**125.** 1) $-p$; 2) $\frac{p}{3e^3}(3\cos 1+\sin 1)$; 3) $\frac{p}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$;

4) $p(b-a)$; 5) $\frac{p}{2}$; 6) $\frac{3p}{8}$; 7) $\frac{p}{n\sin\frac{p}{n}}$.

**126.** 1) $\frac{2p}{\sqrt{a^2-1}}$; 2) $\frac{pa}{\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^3}}$; 3) $\frac{pi}{2}e^{-t}(t+1)$; 4) $\frac{p}{4a}$; 5) $-\frac{p}{27}$.

**127.** 1) $-\frac{p}{27e^3}(9\sin 1+7\cos 1)$; 2) $pe^{-\frac{\sqrt{7}}{2}}\left(\cos\frac{5}{2}+\frac{5}{\sqrt{7}}\sin\frac{5}{2}\right)$;

3) $\frac{p}{ab(a+b)}$; 4) $\frac{p\sqrt{2}}{2}$; 5) $\frac{p}{2}\left(\frac{2}{e}-1\right)$.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1972.
2. *Волковысский Л.И., Лунц Г. А., Араманович И. Г.* Сборник задач и упражнений по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
4. *Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С.* Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГУ, 1992.
5. *Морозова В. Д.* Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГТУ, 2000.
6. *Пантелеев А. В., Якимова А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2001.
7. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа/Под ред. А. В. Ефимова. М.: Наука, 1977.
8. *Свешников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1999.
9. *Шабунин М. И., Половинкин Е. С. Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

СОДЕРЖАНИЕ

**Сборник задач и упражнений**
**по теории функций комплексной переменной**

Составители: *ПАВЛОВА Галина Александровна*
*ПОПОВ Николай Николаевич*

Редактор
Технический редактор

Подписано в печать
Формат 60х841/16. Бумага типогр. №1.
Печать офсетная.
Усл.п.л. . Усл.кр.-отт. Уч.-изд.л.
Тираж 150 экз. С-

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
Корпус № 8