МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

О.Е. КУРИЛОВА, Е.А. ПРОСВИРКИНА

ПРАКТИКУМ ПО УРАВНЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть I

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517.1 (075.8)

Курилова О.Е., Просвиркина Е.А.

Практикум по уравнениям математической физики: Часть I / *О.Е. Курилова, Е. А. Просвиркина*. Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2010. – 47 с.

Приведены краткие сведения и формулы по разделу «Уравнения математической физики».Практикум содержит задачи для самостоятельного решения (часть А и часть Б). Примеры части А предназначены для решения в аудитории, части Б – для самостоятельного внеаудиторного решения. С целью осуществления самоконтроля все задания приведены с ответами.

Предназначено для студентов третьего курса инженерно–экономического факультета, специальности «Прикладная математика».

Библиограф.: 10 назв.

Р е ц е н з е н т ы : к. ф. - м. наук Л.Н. С м и р н о в а

Введение

Основы классической математической физики были заложены на заре становления физики и математики, во времена Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма фон Лейбница. С развитием математического аппарата (появление дифференциального и интегрального исчисления) стало возможно численное исследование таких физических объектов, как колебания струн, маятников, стержней, решение задач, связанных с акустикой, гидродинамикой, теплопроводностью, волновыми процессами.

Дальнейший сплав наук: математики и физики, позволил моделировать сложные процессы, вплоть до взрыва атомной бомбы или работы атомного реактора в реальном масштабе времени. Подобные задачи можно отнести к современной математической физике, где физическая модель формулируется в виде системы аксиом, в отличии от классической математической физики, где модели сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений.

Исследуемые в I части практикума модели почти всегда будут сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений. Практикум позволит освоить решение основных задач классической математической физики, отработать навык применения математического аппарата к исследованию колебаний струн, волновых процессов, термодинамических задач.

Частные производные сложных функций.
Замена переменных в дифференциальных выражениях

Часть А

1. Найти частные производные второго порядка сложной функции: $z=\ln\left(u^2+v^2\right)$, где $u=xy$, $v=\dfrac{x}{y}$.

2. Убедиться, что функция $z=j\left(x^2+y^2\right)$, где j – произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению: $y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. Проверить тождественность равенства: $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$, если $z=\dfrac{y}{f\left(x^2-y^2\right)}$, где f – произвольная дифференцируемая функция.

4. Проверить тождественность равенства: $x^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$, если $z=\dfrac{y^2}{3x}+j\left(x\cdot y\right)$, где j – произвольная дифференцируемая функция.

5. Преобразовать выражение $u=\left(z+e^x\right)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(z+e^y\right)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}-\left(z^2-e^{x+y}\right)$, где $z=z(x;\,y)$, приняв за новые независимые переменные $x=y+z\cdot e^{-x}$, $h=x+z\cdot e^{-y}$.

6. Решить уравнение $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, введя новые независимые переменные $x=x+y$, $h=x-y$.

Часть Б

7. Преобразовать к полярным координатам r и j, где $\begin{cases} x = r\cos j \\ y = r\sin j \end{cases}$, функцию:

1) $u = x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$, 2) $u = x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$, 3) $u = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

8. Показать, что функция $z = y\cdot f\left(x^2 - y^2\right)$, где f – произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет дифференциальному уравнению: $y^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz$.

9. Вводя новые независимые переменные $x = x$, $h = x^2 + y^2$, решить уравнение $y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

10. Вводя новые независимые переменные $x = x$, $h = y - x$, $V = z - x$, решить уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

11. Найти первые частные производные сложной функции $z = f\left(u; v\right)$, где $u = \sin\dfrac{x}{y}$, $v = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

12. Проверить, является ли функция $u = e^{x^2+y^2}\cdot\left(j\left(x\right) + y\left(y\right)\right)$ решением дифференциального уравнения: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\cdot u = 0$

Замена переменных в дифференциальных уравнениях. Решение простейших дифференциальных уравнений

Часть А

13. Проверить тождественность равенства: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если

$u = j\,(x - at) + j\,(x + at)$, где j – произвольная дифференцируемая функция.

14. Проверить тождественность равенства: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если $u = x \cdot j\,(x + y) + y \cdot y\,(x + y)$, где j и y – произвольные дифференцируемые функции.

15. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, если $z = z(x;\, y)$.

16. Найти решение $z(x;\, y)$ уравнения $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, удовлетворяющее условиям: $z(x;\, y)\big|_{y=0} = x,\qquad z(x;\, y)\big|_{x=0} = y^2$.

17. Преобразовать к полярным координатам r и j, где $\begin{cases} x = r\cos j \\ y = r\sin j \end{cases}$, функцию

$$w = x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

18. Преобразовать уравнение $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$.

19. Найти функцию $z = z(x;\, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$; 2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$.

20. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$; 2) $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$.

Часть Б

21. Проверить тождество: $x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, если

$$u = j\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot y\left(\frac{y}{x}\right).$$

22. Решить уравнение: 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 y$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x$.

23. Решить уравнение $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, при заданном условии $z(x;\, y)\big|_{y=x^2} = 1$.

24. Преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

25. Преобразовать уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2xy} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

26. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + y$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2 - xy$.

27. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y - xy$, удовлетворяющее условию: $u(x;\, y)\big|_{x=0} = y^2$.

Дифференциальные уравнения первого порядка, линейные относительно частных производных

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathrm{X} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \Upsilon \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{Z}, \tag{1}$$

где $\mathrm{X}, \Upsilon, \mathrm{Z}$ – функции $x,\ y,\ z$. Предварительно решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{\mathrm{X}} = \frac{dy}{\Upsilon} = \frac{dz}{\mathrm{Z}}$. Пусть решение этой системы определяется равенствами:

$$w_1(x;\, y;\, z) = C_1, \qquad w_2(x;\, y;\, z) = C_2.$$

Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\Phi\Big(w_1(x;\, y;\, z);\quad w_2(x;\, y;\, z)\Big) = 0,$$

где $\Phi\left(w_1; w_2\right)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, или

$$w_1(x;\, y;\, z) = j\left(w_2(x;\, y;\, z)\right).$$

Часть А

28. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1) $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, 2) $\sin x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \sin y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \sin z$; 3) $yz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + xz \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$.

29. Найти уравнение векторной поверхности, удовлетворяющее дифференциальному уравнению: $\left(x^2 + y^2\right) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

30. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = j\left(\dfrac{y}{x^2 - y^2}\right)$ дифференциальному уравнению: $\left(x^2 + y^2\right) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Часть Б

31. Найти уравнение векторной поверхности, удовлетворяющее дифференциальному уравнению:

1) $y^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = xz$; 2) $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4z$;

3) $x^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - xy \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$; 4) $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = x$.

32. Найти уравнение векторной поверхности, удовлетворяющее дифференциальному уравнению: $\left(y^2 - 4\right) \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, проходящей через кривую, заданную в параметрическом виде: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t^2, \\ y = 2t, \\ z = 1. \end{cases}$

33. Найти поверхность, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $yz\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+xz\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$, проходящую через окружность $x^2+y^2=16$ в плоскости $z=3$.

34. Найти поверхность, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=4$, проходящую через параболу $y^2=z$ в плоскости $x=0$.

Приведение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами к каноническому виду

Рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a_{11}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2a_{12}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+a_{22}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+F\left(x;y;z;\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \qquad (2)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} – функции x и y.

Говорят, что уравнение (2) в области D принадлежит гиперболическому типу, если в этой области $\Delta=a_{12}{}^2-a_{11}\cdot a_{22}>0$. Если $\Delta=a_{12}{}^2-a_{11}\cdot a_{22}=0$, то уравнение принадлежит параболическому типу, а если $\Delta=a_{12}{}^2-a_{11}\cdot a_{22}<0$, – эллиптическому типу.

Уравнения:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=F\left(x;\ y;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ – каноническое уравнение гиперболического типа;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x;\ y;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ – каноническое уравнение параболического типа;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x;\ y;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ – каноническое уравнение эллиптического типа.

Часть А

35. Установить тип дифференциального уравнения, привести его к каноническому виду и найти его общее решение: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

36. Установить тип дифференциального уравнения и привести его к каноническому виду: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

37. Привести дифференциальное уравнение к каноническому виду и найти его общее решение:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Часть Б

38. Привести дифференциальное уравнение к каноническому виду и найти его общее решение:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 9\frac{\partial u}{\partial x} + 9\frac{\partial u}{\partial y} - 10u = 0$.

39. Привести дифференциальное уравнение к каноническому виду:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 32u = 0$.

Приведение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами к каноническому виду

Часть А

40. Установить тип дифференциального уравнения и привести его к каноническому виду:

1) $x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; 2) $\left(1+x^2\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \cdot \left(1+x^2\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

3) $y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; 4) $y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{y^2}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^2}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

Часть Б

41. Установить тип дифференциального уравнения и привести его к каноническому виду:

1) $x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot e^{\frac{y}{x}} = 0$;

2) $x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$; 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(1+y^2\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\left(1+y^2\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

4) $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; 5) $x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$.

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Часть А

42. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка:

1) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x;\, 0) = j\,(x); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = t \sin x, \\ u(x;\, x) = \cos x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x+y), \\ u(x;\, 0) = j\,(x); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - 4u = e^{x+y}, \\ u(x;\, 0) = j\,(x); \end{cases}$

Часть Б

43. Решить задачу для дифференциального уравнения первого порядка:

1) $\begin{cases} 3\dfrac{\partial u}{\partial x} - 4\dfrac{\partial u}{\partial y} + e^{4x+3y} \cdot u = 0, \\ u(x;\, 0) = \cos x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(x;\, -x) = j\,(x); \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = e^{x+t}, \\ u(x;\, 0) = j\,(x); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0, \\ u(x;\, 0) = j\,(x). \end{cases}$

Волновое уравнение. Задача Коши для уравнения второго порядка гиперболического типа.

Задача Коши для уравнения

$$a_{11} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c \cdot u = f\,(x;\, y) \qquad (3)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c – функции x и y,

с условиями:

$$u\big|_{\Gamma} = j\,(x;\, y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\Gamma} = y\,(x;\, y) \qquad (4)$$

состоит в следующем. Пусть в области D задано уравнение (3) гиперболического типа $\left(\Delta = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0\right)$ и на кривой Γ, которая принадлежит области D или является частью границы области D, заданы функции $j\,(x;\, y)$, $y\,(x;\, y)$ и направление $l(x;\, y)$. Требуется найти функцию $u(x;\, y)$, которая в области D является решением уравнения (3) и на кривой Г удовлетворяет условиям (4).

Если в каждой точке кривой Г направление l не является касательным к кривой Г, и касательное направление к кривой Г не является характеристическим, то в области D, ограниченной характеристиками, проходящими через концы кривой Г, при достаточной гладкости коэффициентов уравнения (3) и данных условий (4) существует решение задачи Коши (3), (4).

Часть А

44. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; 2) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

3) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\right) + x \cdot \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\right) + x^2 y = 0$;

Замечание: выполнить замену $\dfrac{\partial u}{\partial x} + u = e^{-xy} \cdot v$, где $v = v(x;\, y)$;

4) $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

45. Решить задачу для уравнения гиперболического типа при заданных условиях:

1) $$\begin{cases} 4y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(1 - y^2\right) \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{2y}{1 + y^2} \cdot \left(2\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=0} = j\,(x), \qquad \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = y\,(x); \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} e^y \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = x \cdot e^{2y}, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=0} = \sin x, \qquad \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = \dfrac{1}{1 + x^2}; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \cos^2 x\right) \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(2 - \sin x - \cos x\right) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=\cos x} = 0, \qquad \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=\cos x} = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos x. \end{cases}$$

Часть Б

46. Решить задачу для гиперболического уравнения при заданных условиях:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4e^y = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{x=0} = j\,(y), \qquad \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial x}\Bigg|_{x=0} = y\,(y); \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=\sin x} = x + \cos x, \\ \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=\sin x} = \sin x; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=x} = \dfrac{x}{1+x^2}, \qquad \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=x} = \sin x. \end{cases}$$

47. Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{5}{16}u = 0;$$

2) $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\right) + 2x^2 y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\right) = 0.$$

48. Решить задачу для уравнения гиперболического типа при заданных условиях:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=0} = x \cdot e^{-\frac{5}{2}x - x^2}, \\ \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = e^{-\frac{5}{2}x}; \end{cases}$$

$$
2)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\sin x + \cos x + 1\right) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u\left(x;\, y\right)\Big|_{y=-\cos x} = 1 + 2\sin x, \\ \left.\dfrac{\partial u\left(x;\, y\right)}{\partial y}\right|_{y=-\cos x} = \sin x. \end{cases}
$$

Метод Даламбера для однородного одномерного волнового уравнения на прямой

Классической задачей Коши для волнового уравнения называется задача о нахождении функции $u\left(x;\, y\right)$ класса $C^2\left(t>0\right) \cap C^1\left(t \geq 0\right)$, удовлетворяющей при $t>0$ уравнению

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x;\, t\right) \tag{5}
$$

и начальным условиям

$$
u\left(x;\, t\right)\Big|_{t=0} = j\left(x\right),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = y\left(x\right), \tag{6}
$$

где f, j и y – заданные функции.

Если выполняются условия

$$
f \in C^1\left(t \geq 0\right),\ j \in C^2\left(R^1\right),\ y \in C^1\left(R^1\right), \tag{7}
$$

то решение задачи Коши (5), (6) существует, единственно и выражается формулой Даламбера

$$
u\left(x;\, t\right) = \frac{1}{2}\left[j\left(x-at\right) + j\left(x+at\right)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} j\left(x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a\left(t-t\right)}^{x+a\left(t-t\right)} f\left(x;\, t\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{8}
$$

При решении задачи Коши для однородного волнового уравнения

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9}
$$

и начальных условий

$$u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x) \tag{10}$$

формула Даламбера имеет вид:

$$u(x;t) = \frac{1}{2}\big[j\,(x-at) + j\,(x+at)\big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} y\,(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11}$$

Часть А

49. Найти решение задачи Коши методом Даламбера:

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = x^2, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \dfrac{x}{a}, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{1}{x^2}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos^2 x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \dfrac{\cos x}{a}, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x \cdot \cos x. \end{cases}$

50. Найти форму струны, определяемой уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в момент $t = p$, если $u(x;t)\big|_{t=0} = \sin x$, $\left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x.$

51. Найти решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 3x^2, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} e^t \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = -\dfrac{x^2}{2}, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\sin x. \end{cases}$

Часть Б

52. Методом Даламбера найти решение дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при заданных начальных условиях:

1) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{t=0} = \dfrac{1}{8}\cos 4x, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = a\sin 5x \cdot \cos x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{t=0} = \sin(a - 2x), \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 2a \cdot \cos(a - 2x); \end{cases}$

4) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{t=0} = \cos 5x, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = e^{-3x}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{t=0} = \sin p\, x, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 27p \cdot \sin 3p, \end{cases}$ если $a = 9$.

53. Найти решение дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $t = \dfrac{p}{2a}$, если $\begin{cases} u(x;t)\big|_{t=0} = \sin x, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1. \end{cases}$

54. Найти решение задачи для дифференциального уравнения при заданных условиях:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=x} = \sin x, \quad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial y}\Bigg|_{y=x} = \cos x; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(x;\, y)\Big|_{y=0} = j\,(x), \quad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial y}\Bigg|_{y=0} = y\,(x). \end{cases}$$

Метод Даламбера для неоднородного одномерного волнового уравнения на прямой

Часть А

55. Найти решение задачи Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = x^2, \quad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = 4x, \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = x^2, \quad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = x, \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = \sin x, \quad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

4) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \sin x, \quad \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = x + \cos x, \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx^2, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = e^{-x}, \quad \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = a, \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ae^{-t}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = b \cdot \sin x, \quad \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = c \cdot \cos x, \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \cdot \sin bt, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \cos x, \quad \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sin x, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

56. Показать, что если $u(x;t)$ является решением дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то решением этого уравнения являются и функции

1) $u\left(\dfrac{x}{x^2 - t^2}; \dfrac{t}{x^2 - t^2}\right)$, 2) $x \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + t \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t}$, 3) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$,

4) $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial t}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2}$, где $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \neq \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$, всюду, где они определены.

Часть Б

57. Методом Даламбера решить волновое уравнение на прямой при заданных начальных условиях:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + at \cdot x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = x; \quad \dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sin x, \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \cdot \sin t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = \sin x; \quad \dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \cos x; \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = 1; \quad \dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 1; \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin wx, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = 0; \quad \dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0; \quad -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin wt, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = 0; \quad \dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0; \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

58. Доказать, что если в задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = 0; \quad \dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0; \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

функция $f(x;t)$ нечётна относительно x, то $u(0;t)=0$, а если функция $f(x;t)$ чётна относительно x, то – $\left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0$.

Метод Даламбера для волнового уравнения на полупрямой

Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<+\infty,\quad t>0, \\ u(x;t)\big|_{x=0}=0, & t\geq 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=j\,(x),\quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=y\,(x), & 0\leq x<+\infty, \end{cases} \tag{12}$$

начальные функции $j\,(x)$ и $y\,(x)$ продолжают нечётным образом на отрицательную полуось оси OX. Построим функции:

$$j_1(x)=\begin{cases} j\,(x), & \text{если } x\geq 0, \\ -j\,(-x), & \text{если } x<0, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad y_1(x)=\begin{cases} y\,(x), & \text{если } x\geq 0, \\ -y\,(-x), & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(x;t)=\frac{1}{2}\cdot\left[j_1(x-at)+j_1(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\cdot\int\limits_{x-at}^{x+at} y_1(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

является решением задачи (12).

Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<+\infty,\quad t>0, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, & t\geq 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=j\,(x),\quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=y\,(x), & 0\leq x<+\infty, \end{cases} \tag{14}$$

начальные функции $j\left(x\right)$ и $y\left(x\right)$ продолжают чётным образом на отрицательную полуось оси OX. Построим функции:

$$j_2(x)=\begin{cases} j\left(x\right), & \text{если}\, x\geq 0,\\ j\left(-x\right), & \text{если}\, x<0, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad y_2(x)=\begin{cases} y\left(x\right), & \text{если}\, x\geq 0,\\ y\left(-x\right), & \text{если}\, x<0. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(x;t)=\frac{1}{2}\cdot\left[j_2(x-at)+j_2(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\cdot\int\limits_{x-at}^{x+at} y_2(x)\,\mathrm{d}x \qquad (15)$$

является решением задачи (14).

Часть А

59. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения на полупрямой:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u(x;t)\big|_{x=0}=0, \quad t\geq 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0}=j\left(x\right), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=y\left(x\right), \quad 0\leq x<+\infty; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad t\geq 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0}=j\left(x\right), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=y\left(x\right), \quad 0\leq x<+\infty; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ u(x;t)\big|_{x=0}=m(t), \quad t\geq 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leq x<+\infty; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<+\infty, \quad t>0,\\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0}=v(t), \quad t\geq 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \quad 0\leq x<+\infty; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x < +\infty; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x < +\infty; \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0} = j(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y(x), \quad 0 \le x < +\infty; \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \quad u(x;t)\big|_{t=0} = j(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y(x), \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Часть Б

60. Найти решение задачи Коши для волнового уравнения на полупрямой:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;t), \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x;t)\big|_{x=0} = m(t), \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y(x), \quad 0 \le x < +\infty; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;t) \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = v(t), \qquad t \ge 0; \\ \left. u(x;t)\right|_{t=0} = j\,(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \le x < +\infty; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} - h \cdot \left. u\right|_{x=0} = c\,(t), \qquad t \ge 0, \qquad h > 0; \\ \left. u(x;t)\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Задачи, корректно поставленные для уравнений гиперболического типа

Задача называется корректно поставленной для дифференциального уравнения, если её решение существует, единственно и устойчиво. Понятие устойчивости означает, что малому изменению данных задачи соответствует малое изменение её решения.

Часть А

61. Показать, что задача нахождения непрерывного решения $u(x;t)$ уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с условиями $u(x;x) = j\,(x)$, $\dfrac{\partial u(x;x)}{\partial t} = y\,(x)$, заданными на характеристике $x - t = 0$, поставлена некорректно (т.е. она или не имеет решения, или, когда имеет, оно не единственно).

62. Найти решение $u(x;t)$ задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;t)\big|_{AB} = j\,(x), \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{AB} = y\,(x), \end{cases}$$

где AB – отрезок прямой $x = kt$, от точки $A(0;0)$ до точки $B\left(1;\dfrac{1}{k}\right)$, $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Определить значение постоянной k.

63. Определить область распространения волны, найденной в задании 62, и доказать устойчивость решения.

64. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a^2}{4}\cdot u(x;t) = 0, \quad a = \text{const}, \\ u(x;t)\big|_{x=0} = j\,(t), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = y\,(t). \end{cases}$$

Указание: сделать замену искомой функции $u(x;t) = e^{-\frac{a}{2}x}\cdot v(x;t)$, где $v(x;t)$ – новая неизвестная функция.

65. Найти решение задачи Гурса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a^2}{4}\cdot u(x;t) = 0, \qquad a = \text{const}, \\ u(x;x) = j\,(x), \quad u(x;-x) = y\,(x), \quad x \ge 0, \quad j\,(0) = y\,(0). \end{cases}$$

Указание: сделать замену искомой функции $u(x;t) = e^{-\frac{a}{2}x}\cdot v(x;t)$.

Часть Б

66. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{b^2}{4}\cdot u(x;t)=0, \quad b=\text{const}, \\ u(x;t)\Big|_{x=0}=j(t), \quad \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=y(t). \end{cases}$$

Указание: сделать замену искомой функции $u(x;t)=e^{\frac{bt}{2}}\cdot v(x;t)$.

67. Найти решение задачи Гурса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+b\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{b^2}{4}\cdot u(x;t)=0, \quad b=\text{const}, \\ u(x;x)=j(x), \quad u(x;-x)=y(x), \quad x\ge 0, \quad j(0)=y(0). \end{cases}$$

Указание: сделать замену искомой функции $u(x;t)=e^{\frac{bt}{2}}\cdot v(x;t)$.

68. Найти решение задачи Гурса: $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x;x)=j(x), \quad 0\le x\le a, \\ u(x;-x)=y(x), \quad 0\le x\le b, \\ j(0)=y(0), \end{cases}$

Найти область распространения волны.

69. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}+b\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{a^2}{4}u-\dfrac{b^2}{4}u=0, \\ u(x;t)\Big|_{x=0}=j(t), \quad a=const, \quad b=const, \\ \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=y(t). \end{cases}$$

Указание: сделать замену искомой функции $u(x;t)=e^{\frac{bt-ax}{2}}\cdot v(x;t)$.

70. Найти решение задачи Гурса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{a^2}{4}u - \dfrac{b^2}{4}u = 0, \\ u(x;\, x) = j\,(x),\ u(x;\, -x) = y\,(x),\quad x \geq 0,\quad j\,(0) = y\,(0). \end{cases}$$

Указание: сделать замену искомой функции $u(x;\, t) = e^{\frac{bt - ax}{2}} \cdot v(x;\, t)$.

Системы дифференциальных уравнений

Часть А

71. Найти общее решение $u(x;\, y)$, $v(x;\, y)$ системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

72. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$ найти решение, удовлетворяющее условиям: $u(x;\, y)\big|_{y=0} = j\,(x)$, $v(x;\, y)\big|_{y=0} = y\,(x)$, где j и y – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

73. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$ найти решение, удовлетворяющее условиям: $u(x;\, x) = j\,(x)$, $v(x;\, -x) = y\,(x)$, $x \geq 0$, где j и y – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Часть Б

74. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$ найти решение, удовлетворяющее условиям: $u(x;0) = j\,(x)$, $v(x;-x) = y\,(x)$, $x \geq 0$, где j и y – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

75. Для системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$ найти решение, удовлетворяющее условиям: $u(x;0) = j\,(x)$, $v(x;x) = y\,(x)$, $x \geq 0$, где j и y – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

76. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad a = const, \quad a > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

77. Для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad a = const, \quad a > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

найти решение, удовлетворяющее условиям: $u\left(x; \dfrac{x}{\sqrt{a}}\right) = j\,(x)$, $v\left(x; -\dfrac{x}{\sqrt{a}}\right) = y\,(x)$, $x \geq 0$, где j и y – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Ответы

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2\left(y^4-1\right)}{y\left(y^4+1\right)}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2\left(y^8-8y^4-1\right)}{y^2\left(y^4+1\right)^2}$.

2. Функция удовлетворяет уравнению.

3. Равенство верное.

4. Равенство верное.

5. $u=\dfrac{e^{x+y}-z^2}{1-\dfrac{\partial z}{\partial x}e^{-x}-\dfrac{\partial z}{\partial h}e^{-y}}$.

6. $\dfrac{\partial z}{\partial h}=0$, $z=j\left(x+y\right)$, где j – произвольная дифференцируемая функция.

7. 1) $u=\dfrac{\partial z}{\partial j}$, 2) $u=r\dfrac{\partial z}{\partial r}$, 3) $u=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial j^2}$.

8. Функция удовлетворяет уравнению.

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, $z=j\left(x^2+y^2\right)$, где j – произвольная дифференцируемая функция.

10. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$, где $u=j\left(y-x;\, z-x\right)$.

11. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\left(\cos\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}\left(\cos\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)$.

12. Функция u не является решением дифференциального уравнения.

13. Равенство верное.

14. Равенство верное.

15. $z = j\,(x) + y\,(y)$, где j и y – произвольные дифференцируемые функции.

16. $z(x;\, y) = \frac{1}{2}xy(x+y) + x + y^2$.

17. $w = r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 4r^2 \cdot \sin^3 j \cdot \cos j \cdot \frac{\partial u}{\partial j}$.

18. $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

19. 1) $z = x + j\,(y)$, 2) $z = y^3 + y \cdot j\,(x) + y\,(x)$.

20. 1) $z = x \cdot y + j\,(x) + y\,(y)$; 2) $z = x \cdot j_1(y) + j_2(y) + y \cdot j_3(x) + j_4(x)$.

21. Тождество верное.

22. 1) $z = \frac{1}{6}x^2y^3 + y \cdot j\,(x) + y\,(x)$; 2) $z = \frac{1}{2}x^2y + j\,(x) + y\,(y)$.

23. $z = -2x^4 + x^2y + y^2 + 1$.

24. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$.

25. $\left(u - \frac{1}{2v}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{v}{u}\left(v + \frac{1}{2u}\right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

26. 1) $u = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + x \cdot j\,(y) + y\,(y)$;

2) $u = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{4}x^2y^2 + j\,(x) + y\,(y)$.

27. $u=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{4}x^2y^2+j\left(x\right)+y^2$.

28. 1) $z=x\cdot j\left(\frac{y}{x}\right)$, 2) $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot j\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)$; 3) $z^2=x^2+j\left(y^2-x^2\right)$.

29. $\Phi\left(\frac{y}{x^2-y^2};\, z\right)=0$; $z=j\left(\frac{y}{x^2-y^2}\right)$.

30. Функция z удовлетворяет дифференциальному уравнению.

31. 1) $\Phi\left(x^2+y^2;\, \frac{z}{y}\right)=0$; $z=y\cdot j\left(x^2+y^2\right)$;

2) $\Phi\left(\frac{x^2}{y};\, \frac{z}{y^2}\right)=0$; $z=y^2\cdot j\left(\frac{x^2}{y}\right)$;

3) $\Phi\left(x\cdot y;\, \frac{y^2}{3x}-z\right)=0$; $z=\frac{y^2}{3x}+j\left(x\cdot y\right)$;

4) $\Phi\left(x\cdot y;\, z-x\right)=0$; $z=x+j\left(x\cdot y\right)$.

32. $\Phi\left(x-\frac{1}{2}y^2+4\ln y;\, \frac{z}{y}\right)=0$; $\frac{3}{8}\cdot\frac{y^2}{z^2}+4\ln z+x-\frac{1}{2}\cdot y^2=0$.

33. $x^2+y^2+z^2=25$.

34. $z=x^2+y^2$.

35. гиперболический тип: $x=y-2x,\ h=y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h}=0$;

$u\left(x;\,y\right)=f_1\left(y-2x\right)+f_2\left(y\right)$.

36. эллиптический тип: $x = x + y,\ h = x;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0$.

37. 1) параболический тип: $x = y - 2x,\ h = x,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial h} = 0$;

$$u(x;\ y) = e^{-\frac{3}{2}x} \cdot f_1(y - 2x) + f_2(y - 2x);$$

2) гиперболический тип: $x = x + y,\ h = 3x + y,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;

$$u(x;\ y) = e^{3x+y} \cdot f_1(x + y) + f_2(3x + y).$$

38. 1) параболический тип: $x = x + y,\ h = x;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0$;

$$u(x;\ y) = x \cdot f_1(x + y) + f_2(x + y);$$

2) параболический тип: $x = x + y,\ h = -y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} - 9\dfrac{\partial u}{\partial h} - 10u = 0$;

$$u(x;\ y) = e^{y} \cdot f_1(x + y) + e^{-10y} \cdot f_2(x + y).$$

39. 1) эллиптический тип: $x = 2x - y,\ h = x;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \dfrac{\partial u}{\partial h} = 0$;

2) эллиптический тип: $x = x - y,\ h = 2x;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} - 8u = 0$.

40. 1) гиперболический тип: $x = \dfrac{y}{x},\ h = xy;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} - \dfrac{1}{2h} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;

$$u(x;\ y) = \sqrt{xy} \cdot f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \cdot f_2(x \cdot y);$$

2) эллиптический тип: $x = \operatorname{arctg} x,\ h = y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0$;

3) параболический тип: $x = y^2 - x^2,\ h = x^2;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} - \dfrac{x}{2h(x+h)} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2h} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial h} = 0;$

4) эллиптический тип: $x = y^2,\ h = x^2;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0.$

41. 1) параболический тип: $x = \dfrac{y}{x},\ h = y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \dfrac{2x^2}{h^2} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{h} \cdot e^x = 0;$

2) *а*) эллиптический тип:

$x = \sqrt{2y},\ h = 2\sqrt{x}$, если $x > 0,\ y > 0;$

$x = \sqrt{-2y},\ h = 2\sqrt{-x}$, если $x < 0,\ y < 0;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial h} = 0;$

б) гиперболический тип:

$x = 2\sqrt{x} - \sqrt{-2y},\ h = 2\sqrt{x} + \sqrt{-2y}$, если $x > 0,\ y < 0;$

$x = 2\sqrt{-x} - \sqrt{2y},\ h = 2\sqrt{-x} + \sqrt{2y}$, если $x < 0,\ y > 0;$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} + \frac{1}{h^2 - x^2} \cdot \left(h \cdot \frac{\partial u}{\partial h} - x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0;$$

3) гиперболический тип: $x = x + \operatorname{arctg} y,\ h = x - \operatorname{arctg} y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = 0;$

$u(x;\ y) = f_1(x + \operatorname{arctg} y) + f_2(x - \operatorname{arctg} y);$

4) эллиптический тип: $x = y^2,\ h = x^2;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \dfrac{1}{2x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2h} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial h} = 0;$

5) *а*) гиперболический тип:

$x = \sqrt{x} + \sqrt{y},\ h = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, если $x > 0,\ y > 0;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = 0;$

$u(x;\ y) = f_1\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) + f_2\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$

$x = \sqrt{-x} + \sqrt{-y},\ h = \sqrt{-x} - \sqrt{-y}$, если $x < 0,\ y < 0;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = 0;$

$u(x;\ y) = f_1\left(\sqrt{-x} + \sqrt{-y}\right) + f_2\left(\sqrt{-x} - \sqrt{-y}\right);$

б) эллиптический тип:

$$x = \sqrt{x},\ h = \sqrt{-y}\text{, если } x > 0,\ y < 0,$$

$$x = \sqrt{-x},\ h = \sqrt{y}\text{, если } x < 0,\ y > 0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} = 0.$$

42. 1) $u(x;\,y) = j\,(x+y)$;

2) $u(x;\,t) = -t\cos x - \sin x + \frac{x+t}{2}\cos\frac{x+t}{2} + \cos\frac{x+t}{2} + \sin\frac{x+t}{2}$;

3) $u(x;\,y) = -\frac{1}{3}\cos(x+y) + \frac{1}{3}\cos\frac{2x-y}{2} + j\left(\frac{2x-y}{2}\right)$;

4) $u(x;\,y) = e^{x-2y}\cdot\left(e^{-(x+2y)}\cdot j\,(x+2y) - \frac{1}{3}e^{3y} + \frac{1}{3}\right)$.

43. 1) $u(x;\,y) = e^{\frac{y}{4}\cdot e^{4x+3y}}\cdot\cos\frac{4x+3y}{4}$;

2) $u(x;\,t) = j\left(\frac{x-t}{2}\right)$;

3) $u(x;\,t) = e^{x}\cdot \mathrm{sh}t + j\,(x-t)$;

4) $u(x;\,y) = e^{-2y}\cdot j\left(\frac{2x-y}{2}\right)$.

44. 1) $x = x+at,\ h = x-at$; $u(x;\,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$;

2) $x = y-2x,\ h = y-x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;

$$u(x;\,y) = e^{\frac{x-y}{2}}\cdot f_1(y-2x) + f_2(y-x);$$

3) $\frac{\partial v}{\partial y} = -x^2 y\cdot e^{xy}$; $\frac{\partial u}{\partial x} + u = 1 - xy + e^{-xy}\cdot f_1(x)$;

$$u(x;\,y) = (1+y)\cdot\left(1-e^{-x}\right) - xy + e^{-x}\cdot\int_0^x e^{t\cdot(1-y)}\cdot f_1(t)\,\mathrm{d}t + e^{-x}\cdot f_2(y).$$

4) $x = x + y,\ h = 3x + 2y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = 0;\ u(x; y) = f_1(x + y) + f_2(3x + 2y),$

где $f_1,\ f_2 \in \mathrm{C}^2$.

45. 1) $x = x - \dfrac{2y^3}{3},\ h = x + 2y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = 0;$

$$u(x;\ y) = f_1\left(x - \frac{2y^3}{3}\right) + f_2(x + 2y);\ u(x;\ y) = j\left(x - \frac{2y^3}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x - \frac{2y^3}{3}}^{x+2y} y\ (t)\,\mathrm{d}t;$$

2) $u(x;\ y) = \dfrac{x^2}{2} \cdot \left(e^y - 1\right) + \sin x + \dfrac{x^3 - \left(x + e^y - 1\right)^3}{6} + \operatorname{arctg}\left(x + e^y - 1\right) - \operatorname{arctg} x;$

3) $x = 2x - y + \cos x,\ h = 2x + y - \cos x;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial h} = 0;$

$$u(x;\ y) = f_1(2x - y + \cos x) + e^{-\frac{1}{4}(2x - y + \cos x)} \cdot f_2(2x + y - \cos x),$$

$$u(x;\ y) = 2e^{-\frac{2x - y + \cos x}{4}} \cdot \cos x \cdot \sin\left(\frac{y - \cos x}{2}\right).$$

46. 1) $x = y,\ h = 2x + y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = e^x;\ u(x;\ y) = (2x + y) \cdot e^y + f_1(2x + y) + f_2(y);$

$$u(x;\ y) = \left(2x + 1 + e^{2x}\right) \cdot e^y + j\ (y) + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{y}^{2x+y} y\ (t)\,\mathrm{d}t;$$

2) $x = y - x - \sin x,\ h = y + x - \sin x;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = 0;$

$$u(x;\ y) = f_1(y - x - \sin x) + f_2(y + x - \sin x);\ u(x;\ y) = x + \cos(x - y + \sin x);$$

3) $x = x + y,\ h = 2x + 3y;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial h} = 0;\ u(x;\ y) = f_1(x + y) + f_2(2x + 3y);$

$$u(x;\ y) = \frac{12(x + y)}{4 + (x + y)^2} + 10\cos\frac{x + y}{2} - \frac{25(2x + 3y)}{25 + (2x + 3y)^2} - 10\cos\frac{2x + 3y}{5}.$$

47. 1) $x = x+3y$, $h = 3x+y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h} - \dfrac{5}{32}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{32}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial h} - \dfrac{5}{1024}u = 0$,

$$u(x;\, y) = e^{\frac{7x+y}{16}}\cdot\left(f_1(x+3y) + f_2(3x+y)\right);$$

2) $u(x;\, y) = e^{-x}\cdot\left(f_1(y) + \int\limits_0^x e^{x-x^2\cdot y^2}\cdot f_2(x)\,\mathrm{d}x\right).$

48. 1) $x = x+y,\ h = x-y$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial h} + u = 0$;

$$u(x;\, y) = \frac{1}{2}e^{\frac{3y-5x}{2}}\cdot\left(2y + \left(x+y+\frac{3}{4}\right)\cdot e^{-(x+y)^2} + \left(x-y-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{-(x-y)^2}\right);$$

2) $x = -x+\cos x+y$, $h = x+\cos x+y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial h} = 0$,

$$u(x;\, y) = 1 - \sin(y-x+\cos x) + e^{y+\cos x}\cdot\sin(y+x+\cos x).$$

49. 1) $u(x;\, t) = x^2 + a^2\cdot t^2 + t$; 2) $u(x;\, t) = x(1-t)$;

3) $u(x;\, t) = \dfrac{x}{a} + \dfrac{t}{x^2 - a^2\cdot t^2}$; 4) $u(x;\, t) = x + \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4a}\sin 2at\cdot\cos 2x$;

5) $u(x;\, t) = \dfrac{1}{a}\cos(x+at) + \dfrac{x}{a}\sin at\cdot\cos x + t\sin x\cdot\cos at$.

50. $u(x;\, t) = \sin(x+t)$; $u(x;\, p) = -\sin x$.

51. 1) $x = 3x-t$, $h = x+t$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h} = 0$;

$$u(x;\, t) = j\,(3x-t) + y\,(x+t);\ u(x;\, t) = 3x^2 + t^2;$$

2) $x = x$, $h = x+e^t$; $u(x;\, t) = f_1(x) + f_2\left(x+e^t\right)$;

$$u(x;\, t) = -\frac{x^2}{2} + \cos\left(x-1+e^t\right) - \cos x.$$

52. 1) $u(x;\, t)=\frac{1}{a}\cos x\cdot\sin at$;

2) $u(x;\, t)=\frac{1}{8}\cos 4(x+at)+\frac{1}{12}\sin 6x\cdot\sin 6at$;

3) $u(x;\, t)=\sin\big(a-2(x-at)\big)$;

4) $u(x;\, t)=\cos 5x\cdot\cos 5at+\frac{1}{3a}e^{-3x}\cdot\mathrm{sh}3at$;

5) $u(x;\, t)=\sin p\,x\cdot\cos 9p\,t+\sin 3p\,x\cdot\sin 27p\,t$.

53. $u(x;\, t)=\sin x\cdot\cos at+t$; $u\left(x;\, \frac{p}{2a}\right)=\frac{p}{2a}$.

54. 1) $x=5x+y,\ h=x+y$; $-16\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h}=0$; $u(x;\, y)=\frac{5}{2}\sin\frac{x+y}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{5x+y}{6}$;

2) $x=x+3y$, $h=x+y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial h}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial h}$;

$$u(x;\, y)=e^{-\frac{1}{2}(x+3y)}\cdot\int_0^{x+y} f_1(t)\,\mathrm{d}t+f_2(x+3y);$$

$$u(x;\, y)=\frac{3e^{-y}}{2}\cdot j\,(x+y)-\frac{j\,(x+3y)}{2}+\frac{1}{4}e^{-\frac{x+3y}{2}}\cdot\int_{x+y}^{x+3y} e^{\frac{t}{2}}\cdot\big(3j\,(t)+2y\,(t)\big)\mathrm{d}t.$$

55. 1) $u(x;\, t)=(x+2t)^2$; 2) $u(x;\, t)=x^2+4t^2+xt+\frac{1}{6}xt^3$;

3) $u(x;\, t)=\sin x$; 4) $u(x;\, t)=xt+\sin(x+t)-e^x\cdot(1-\mathrm{ch}t)$;

5) $u(x;\, t)=e^{-x}\cdot\mathrm{ch}t+at+\frac{b}{2}x^2t^2+\frac{b}{12}t^4$;

6) $u(x;\, t)=b\sin x\cos t+c\sin t\cos x+at+a\left(e^{-t}-1\right)$;

7) $u(x;\, t)=\cos(x-t)+\frac{a}{b}t-\frac{a}{b^2}\sin bt$.

57. 1) $u(x;\, t)=x+\frac{a}{6}\cdot x\cdot t^3+\sin x\cdot\sin t$; 2) $u(x;\, t)=x(t-\sin t)+\sin(x+t)$;

3) $u(x;t)=1+t+\frac{1}{9}(1-\cos 3t)\cdot\sin x$;

4) $u(x;t)=\frac{1}{a^2w^2}\cdot(1-\cos awt)\cdot\sin wx$; 5) $u(x;t)=\frac{t}{w}-\frac{1}{w^2}\cdot\sin(w\cdot t)$.

59.

1) $$u(x;t)=\begin{cases}\dfrac{j(x-at)+j(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} y(x)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a};\\[2ex] \dfrac{j(at+x)-j(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{at-x}^{at+x} y(x)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

2) $$u(x;t)=\begin{cases}\dfrac{j(x-at)+j(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} y(x)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a};\\[2ex] \dfrac{j(at-x)+j(at+x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{0}^{at-x} y(x)\,\mathrm{d}x+ & \\[2ex] +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{0}^{at+x} y(x)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

3) $$u(x;t)=\begin{cases}0, & x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a};\\[2ex] m\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

4) $$u(x;t)=\begin{cases}0, & x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a};\\[2ex] -a\displaystyle\int_{0}^{t-\frac{x}{a}} v(t)\,\mathrm{d}t, & x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

$$5)\ u(x;t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}t\int_{x\text{-}a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a};\\[2ex] \dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mathrm{d}t\int_{a(t-t)-x}^{a(t-t)+x} f(x;t)\,\mathrm{d}x+ & \\[2ex] +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} \mathrm{d}t\int_{x\text{-}a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

$$6)\ u(x;t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}t\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a};\\[2ex] \dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mathrm{d}t\left[\int_0^{a(t-t)-x}+\int_0^{a(t-t)+x}\right] f(x;t)\mathrm{d}x+ & \\[2ex] +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} \mathrm{d}t\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

7)

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{j(x-at)+j(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{x\text{-}at}^{x+at} y(x)\mathrm{d}x+ & \\[2ex] +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}t\int_{x\text{-}a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a};\\[4ex] \dfrac{j(at+x)-j(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{at-x}^{at+x} y(x)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2a}\cdot\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mathrm{d}t\int_{a(t-t)-x}^{a(t-t)+x} f(x;t)\,\mathrm{d}x+ & \\[4ex] +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t} \mathrm{d}t\int_{x\text{-}a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x, & x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

8)

$$u(x;t)=\begin{cases} \dfrac{j(x-at)+j(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} y(x)\,\mathrm{d}x+ \\ +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}t\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x, \qquad x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a}; \\ \\ \dfrac{j(at-x)+j(at+x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^{at-x} y(x)\,\mathrm{d}x+ \\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{at+x} y(x)\,\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2a}\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}t\left[\int_0^{a(t-t)-x}+\int_0^{a(t-t)+x}\right] f(x;t)\,\mathrm{d}x+ \\ +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\mathrm{d}t\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x, \qquad x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

60. 1)

$$u(x;t)=\begin{cases} \dfrac{j(x-at)+j(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} y(x)\,\mathrm{d}x+ \\ +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^t \mathrm{d}t\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x, \qquad x\ge 0,\quad 0\le t<\dfrac{x}{a}; \\ \\ \dfrac{j(at+x)-j(at-x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{at-x}^{at+x} y(x)\,\mathrm{d}x+ \\ +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}t\int_{a(t-t)-x}^{a(t-t)+x} f(x;t)\,\mathrm{d}x+ \\ +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int_{t-\frac{x}{a}}^{t}\mathrm{d}t\int_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)} f(x;t)\,\mathrm{d}x+m\left(t-\dfrac{x}{a}\right), \quad x\ge 0,\quad t\ge\dfrac{x}{a}; \end{cases}$$

2)

$$u(x;t)=\begin{cases}\dfrac{j\,(x-at)+j\,(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int\limits_{x\text{-}at}^{x+at}y\,(x)\mathrm{d}x+\\ +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int\limits_{0}^{t}\mathrm{d}t\int\limits_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)}f(x;t)\mathrm{d}x, \qquad x\ge 0,\ \ 0\le t<\dfrac{x}{a};\\ \\ \dfrac{j\,(at-x)+j\,(at+x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int\limits_{0}^{at-x}y\,(x)\mathrm{d}x+\\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{0}^{at+x}y\,(x)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{d}t\left[\int\limits_{0}^{a(t-t)-x}+\int\limits_{0}^{a(t-t)+x}\right]f(x;t)\mathrm{d}x+\\ +\dfrac{1}{2a}\cdot\displaystyle\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}\mathrm{d}t\int\limits_{x-a(t-t)}^{x+a(t-t)}f(x;t)\mathrm{d}x-a\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}v(t)\mathrm{d}t, \qquad x\ge 0,\ \ t\ge\dfrac{x}{a};\end{cases}$$

3) $$u(x,t)=\begin{cases}0, & x\ge 0,\ \ 0\le t<\dfrac{x}{a};\\ -ae^{h(x-at)}\cdot\displaystyle\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}e^{aht}\cdot c\,(t)\mathrm{d}t, & x\ge 0,\ \ t\ge\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

61. Задача некорректно поставлена.

62. $u(x;t)=j\left(\dfrac{k(x-t)}{k-1}\right)+\dfrac{k+1}{\sqrt{2}\,k}\displaystyle\int\limits_{\frac{k}{k-1}(x-t)}^{\frac{k}{k+1}(x+t)}y\,(t)\,dt$ при $k\ne 0,\ |k|\ne 1$.

63. Область определения – прямоугольник: $\left\{x-t=0;\ x-t=1-\dfrac{1}{k};\ x+t=0;\right.$ $\left.x+t=1+\dfrac{1}{k}\right\}$; решение устойчиво (т.к. решение не содержит произвольных функций).

64. $u(x;t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{a}{2}x}\cdot\left(j\,(x+t)+j\,(t-x)+\int\limits_{t-x}^{x+t}\left(y\,(t\,)+\frac{a}{2}j\,(t\,)\right)dt\right).$

65. $u(x;t)=e^{-\frac{a}{2}x}\cdot\left(e^{\frac{a}{4}(x-t)}\cdot y\left(\frac{x-t}{2}\right)+e^{\frac{a}{4}(x+t)}\cdot j\left(\frac{x+t}{2}\right)-j\,(0)\right).$

66. $u(x;t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{b}{2}x}\cdot j\,(x+t)+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}x}\cdot j\,(t-x)+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{x+t}e^{\frac{b}{2}(t-t\,)}\cdot y\,(t\,)dt\,.$

67. $u(x;t)=e^{\frac{b}{2}t}\cdot\left(e^{-\frac{b}{4}(x+t)}\cdot j\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{b}{4}(x-t)}\cdot y\left(\frac{x-t}{2}\right)-j\,(0)\right).$

68. $u(x;t)=j\left(\frac{x+t}{2}\right)+y\left(\frac{x+t}{2}\right)-j\,(0)$; область распространения волны ограничена прямыми: $x+t=0$, $x+t=2a$, $x-t=0$, $x-t=2b$.

69.

$$u(x;t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{ax}{2}+\frac{bt}{2}}\cdot\left(e^{\frac{b}{2}(x-t)}\cdot j\,(t-x)+e^{-\frac{b}{2}(x+t)}\cdot j\,(x+t)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t-x}^{x+t}e^{-\frac{bt}{2}}\left(y\,(t\,)+\frac{a}{2}\cdot j\,(t\,)\right)dt\right).$$

70. $u(x;t)=e^{\frac{1}{2}(bt-ax)}\cdot\left(e^{\frac{a-b}{4}(x+t)}\cdot j\left(\frac{x+t}{2}\right)+e^{\frac{a+b}{4}(x-t)}\cdot y\left(\frac{x-t}{2}\right)-j\,(0)\right).$

71. $\begin{cases}u(x;y)=\mathrm{F}(x-y)+\Phi(x+y),\\ v(x;y)=\Phi(x+y)-\mathrm{F}(x-y),\end{cases}$

где F и Φ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

72. $$\begin{cases} u(x;\, y) = \dfrac{1}{2}\big(j\,(x+y) + y\,(x+y) + j\,(x-y) - y\,(x-y)\big), \\ v(x;\, y) = \dfrac{1}{2}\big(j\,(x+y) + y\,(x+y) - j\,(x-y) + y\,(x-y)\big). \end{cases}.$$

73. $$\begin{cases} u(x;\, y) = j\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - y\left(\dfrac{x-y}{2}\right) + y\,(0), \\ v(x;\, y) = j\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + y\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - j\,(0). \end{cases}$$

74. $$\begin{cases} u(x;\, y) = j\,(x+y) + y\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - y\left(\dfrac{x-y}{2}\right), \\ v(x;\, y) = j\,(x+y) + y\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + y\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - j\,(0) - y\,(0). \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} u(x;\, y) = j\,(x-y) + y\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - y\left(\dfrac{x-y}{2}\right), \\ v(x;\, y) = -j\left(\dfrac{x-y}{2}\right) + y\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + y\left(\dfrac{x-y}{2}\right) + j\,(0) - y\,(0). \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} u(x;\, y) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \mathrm{F}\big(x - \sqrt{a} \cdot y\big) + \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \Phi\big(x + \sqrt{a} \cdot y\big), \\ v(x;\, y) = \mathrm{F}\big(x - \sqrt{a} \cdot y\big) - \Phi\big(x + \sqrt{a} \cdot y\big), \end{cases}$$

где F и Φ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

77. $$\begin{cases} u(x;\, y) = j\left(\dfrac{x + \sqrt{a} \cdot y}{2}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot y\left(\dfrac{x - \sqrt{a} \cdot y}{2}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot y\,(0), \\ v(x;\, y) = -\sqrt{a} \cdot j\left(\dfrac{x + \sqrt{a} \cdot y}{2}\right) + y\left(\dfrac{x - \sqrt{a} \cdot y}{2}\right) + \sqrt{a} \cdot j\,(0). \end{cases}$$

Заключение

По результатам решения задач, предложенных в практикуме, студенты должны освоить темы: частные производные сложных функций, решение простейших дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения первого порядка, приведение дифференциальных уравнений второго порядка к каноническому виду, волновое уравнение на прямой и полупрямой, задача Коши для уравнений второго порядка гиперболического типа, метод Даламбера для волнового уравнения, задачи корректно поставленные для уравнений гиперболического типа, решение систем дифференциальных уравнений.

Все разделы принадлежат к задачам классических уравнений математической физики. Для студентов технических специальностей это достаточный объём в рамках рабочей программы, для студентов специальности «Прикладная математика» задачи практикума являются базовыми и готовят учащихся к освоению материала шестого семестра.

Оглавление

Библиографический список

1. Алиев Р.Г. Сборник задач по уравнениям в частных производных. – М.: экзамен, 2006.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974.
3. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981.
5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982.
6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972.
7. Владимиров В.С., Вашарин А.А. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
8. Владимиров В.С., Михайлов В.П. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1974.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II. – М.: Высшая школа, 1980.

10 Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.

Учебное издание

Практикум по уравнениям математической физики

КУРИЛОВА Ольга Евгеньевнна
ПРОСВИРКИНА Елена Анатольевна

Редактор *Ю.А. Петропольская*
Вёрстка *И.О. Миняева*
Выпускающий редактор *Н.В. Беганова*

Подписано в печать 21.12.10.
Формат $60 \times 84 \; 1/16$. Бумага офсетная.
Усл. п. л. 3,1. Уч.-изд. л. 3,1.
Тираж 50 экз. Рег. .№ . Заказ № .

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8