МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

О.Е. КУРИЛОВА, Е.А. ПРОСВИРКИНА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Часть II

Практикум

Самара
Самарский государственный технический университет
2012

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

УДК 517.1 (075.8)
К 93

Курилова О.Е., Просвиркина Е.А.

К 93 **Уравнения математической физики:** Часть II Практикум / *О.Е. Курилова*, *Е. А. Просвиркина*. Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2012. – 82 с.

Приведены краткие сведения и формулы по разделу «Уравнения математической физики». Примеры части А предназначены для решения в аудитории, части Б – для самостоятельного внеаудиторного решения, «задачи для самостоятельного решения» готовят студентов к проведению контрольных и самостоятельных работ. С целью осуществления самоконтроля все задания (часть А и часть Б) приведены с ответами.

Предназначено для студентов третьего курса инженерно–экономического факультета, специальности «Прикладная математика».

УДК 517.1 (075.8)
К 93

Р е ц е н з е н т   канд. физ.–мат. наук А.Ю. Смыслов

ВВЕДЕНИЕ

В практикуме представлены задачи, решаемые одним из основных методов, используемых для уравнений в частных производных, это метод разделения переменных, или метод Фурье. Метод применяется для задач 1 и 3 разделов, а также для задач 2 раздела на отрезке.

Для задач 2 раздела на бесконечной и полубесконечной прямой применяется метод функции источника или метод функции Грина.

Практикум предназначен для студентов 3 курса обучения специальности «Прикладная математика».

РАЗДЕЛ 1

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Метод Фурье решения задачи для однородного волнового уравнения с граничными условиями I рода

Решение задачи Коши (1) для однородного волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x;t)\big|_{t=0} = j\ (x)$, $\left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\ (x)$ и граничным условиям I рода $u(x;t)\big|_{x=0} = 0$, $u(x;t)\big|_{x=l} = 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=l} = 0, & t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\ (x), \quad \left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\ (x), & 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{1}$$

может быть представлено как сумма ряда:

$$u(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\frac{kp\,a}{l} t + b_k \cdot \sin\frac{kp\,a}{l} t \right) \cdot \sin\frac{kp}{l} x,$$

где

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l j\ (x) \cdot \sin\frac{kp}{l} x\,dx, \; b_k = \frac{2}{kp\,a} \int_0^l y\ (x) \cdot \sin\frac{kp}{l} x\,dx, \; k = \overline{1;\infty}.$$

Найти решение задачи Коши методом Фурье:

Часть А

1. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=\frac{p}{2}} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 1, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=\frac{p}{4}} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x. \end{cases}$$

3. Найти решение задачи Коши в момент времени $t = \dfrac{p}{2a}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=p} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin\dfrac{2p}{l}x, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;t)\big|_{x=\frac{p}{2}} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = x^2, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;t)\big|_{x=\frac{p}{2}} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -x. \end{cases}$$

Часть B

7. Определить форму струны для любого момента времени, если начальные отклонения струны, закреплённой в точках $x = 0$ и $x = l$,

равны нулю, а начальная скорость выражаются формулой:

$$\left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0, & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|\le\dfrac{h}{2},\\ 0, & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|>\dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

8. Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=3$. В начальный момент времени форма струны имеет вид ломаной OAB, где $O(0;0)$, $A(2;-0{,}1)$, $B(3;0)$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

9. Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=1$. В начальный момент времени струна имеет форму $u=h\left(x^4-2x^3+x\right)$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

10. Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=l$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные отклонения точек струны равны нулю, а начальные скорости выражаются формулой

$$\left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} \cos\dfrac{p\left(x-\dfrac{l}{2}\right)}{h}, & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|\le\dfrac{h}{2},\\ 0, & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|>\dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l - x, & \dfrac{l}{2} \le x \le l, \end{cases} \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Метод Фурье решения задачи для однородного волнового уравнения с граничными условиями II и III рода

Решение задачи Коши (2) для однородного волнового уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x)$, $\left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x)$ и граничному условию I рода $u(x;t)\big|_{x=0} = 0$ при $x = 0$ и граничному условию II рода $\left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$ при $x = l$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{2}$$

может быть представлено как сумма ряда:

$$u(x;\, t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\frac{2k+1}{2l}p\,at+b_k\cdot\sin\frac{2k+1}{2l}p\,at\right)\cdot\sin\frac{2k+1}{2l}p\,x,$$

где $a_k=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l j\,(x)\cdot\sin\frac{2k+1}{2l}p\,x\,dx,$

$$b_k=\frac{4}{(2k+1)p\,a}\cdot\int_0^l y\,(x)\cdot\sin\frac{2k+1}{2l}p\,x\,dx,\ k=\overline{0;\infty}.$$

Найти решение задачи Коши:

Часть А

12. $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\\ u(x;\, t)\big|_{x=0}=0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0;\\ u(x;\, t)\big|_{t=0}=\sin\dfrac{5p}{2l}x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos\dfrac{p}{2l}x.\end{cases}$$

13. $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0<x<l, \quad t>0;\\ \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u(x;\, t)\big|_{x=l}=0, \quad t\ge 0;\\ u(x;\, t)\big|_{t=0}=j\,(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=y\,(x), \quad 0\le x\le l.\end{cases}$$

14. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad u(x;\, t)\Big|_{x=l} = 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = \cos\dfrac{p}{2l}x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos\dfrac{3p}{2l}x + \cos\dfrac{5p}{2l}x. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;\, t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin\dfrac{p}{2l}x + \sin\dfrac{3p}{2l}x. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = j\,(x), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

17. $$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

Часть B

18. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} + h \cdot u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad h > 0, \quad t \geq 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} + h \cdot u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad h > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} - h \cdot u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \quad h > 0, \quad t \geq 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \qquad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=0} - h \cdot u(x;\, t)\big|_{x=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=l} + h \cdot u(x;\, t)\big|_{x=l} = 0, \quad h > 0, \quad t \geq 0; \\ u(x;\, t)\big|_{t=0} = j\,(x), \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Метод Фурье решения задачи для неоднородного волнового уравнения

Решение задачи Коши (3) для неоднородного волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\,(x;\, t)$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x;\, t)\big|_{t=0} = j\,(x)$, $\left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x)$ и однородным граничным условиям I рода $u(x;\, t)\big|_{x=0} = 0$, $u(x;\, t)\big|_{x=l} = 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\,(x;\, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;\, t)\big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;\, t)\big|_{x=l} = 0 \quad t \geq 0; \\ u(x;\, t)\big|_{t=0} = j\,(x), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 < x < l, \end{cases} \tag{3}$$

имеет вид:

$$u(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\frac{kp\,a}{l}t+b_k\cdot\sin\frac{kp\,a}{l}t\right)\cdot\sin\frac{kp}{l}x+\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{T}_k(t)\cdot\sin\frac{kp}{l}x,$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l j\,(x)\cdot\sin\frac{kp\,x}{l}dx,\ b_k=\frac{2}{kp\,a}\cdot\int_0^l y\ \ (x)\cdot\sin\frac{kp\,x}{l}dx,$$

$$\mathrm{T}_k(t)=\frac{2}{kp\,a}\cdot\int_0^t\sin\frac{kp\,a}{l}(t-t\,)\,dt\int_0^l f\,(x;t\,)\cdot\sin\frac{kpx}{l}dx\,,$$

или

$$\mathrm{T}_k(t)=\frac{l}{kp\,a}\cdot\int_0^t f_k(t\,)\sin\frac{kp\,a}{l}(t-t\,)\,dt\ ,\ \text{где}\ \ f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f\,(x;t)\sin\frac{kpx}{l}dx\ ,$$

$k=\overline{1;\infty}$.

Часть А

Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения с однородными граничными условиями:

22. $$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Ae^{-t}\sin\dfrac{p\,x}{l}; \\[2ex] u(x;t)\big|_{x=0}=0, \qquad u(x;t)\big|_{x=l}=0; \\[2ex] u(x;t)\big|_{t=0}=0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0.\end{cases}$$

23. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Axe^{-t}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\sin t; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-t}\cos\dfrac{p\,x}{2l}; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\sin 2t \cdot \sin 2x; \\ u(x;\, t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;\, t)\Big|_{x=p} = 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{25} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\sin 5x \cdot \cos 2t, \quad 0 < x < p, \quad t > 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;\, t)\Big|_{x=p} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le p. \end{cases}$$

Часть B

Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения с неоднородными граничными условиями

Рассмотрим задачу Коши (4):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;\, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{x=0} = m_1(t), \qquad u(x;\, t)\Big|_{x=l} = m_2(t), \quad t \ge 0; \\ u(x;\, t)\Big|_{t=0} = j\,(x), \qquad \dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4}$$

Решение задачи (4) ищется в виде $u = v + w$, где $w(x;t) = m_1(t) +$

$+\left[m_2(t) - m_1(t)\right]\cdot\dfrac{x}{l}$, а $v(x;t)$– решение задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x;t); \\ v(x;t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad v(x;t)\Big|_{x=l} = 0; \\ v(x;t)\Big|_{t=0} = j_1(x), \qquad \dfrac{\partial v(x;t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = y_1(x), \end{cases}$$

которая решается аналогично задаче (3):

$$v(x;t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \cos\frac{kp\,a}{l}t + b_k \cdot \sin\frac{kp\,a}{l}t\right)\cdot \sin\frac{kp}{l}x + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{T}_k(t)\cdot\sin\frac{kp}{l}x,$$

где $a_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l j_1(x)\cdot\sin\frac{kp\,x}{l}dx$, $b_k = \dfrac{2}{kp\,a}\cdot\displaystyle\int_0^l y_1(x)\cdot\sin\frac{kp\,x}{l}dx$,

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x;t)\cdot\sin\frac{kpx}{l}dx, \quad \mathrm{T}_k(t) = \frac{l}{kp\,a}\cdot\int_0^t f_k(t)\cdot\sin\frac{kp\,a}{l}(t-t)\,dt,$$

$k = \overline{1;\infty}$, $j_1(x) = j(x) - m_1(0) - \left[m_2(0) - m_1(0)\right]\cdot\dfrac{x}{l}$,

$$y_1(x) = y(x) - m_1'(0) - \left[m_2'(0) - m_1'(0)\right]\cdot\frac{x}{l},$$

$$f_1(x;t) = f(x;t) - m_1''(t) - \left[m_2''(t) - m_1''(t)\right]\cdot\frac{x}{l}.$$

28. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;\,t)\big|_{x=0} = -8, \quad u(x;\,t)\big|_{x=2} = 2; \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = \sin 6p\,x - 8 + 5x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 36 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;\,t)\big|_{x=0} = 4t, \quad u(x;\,t)\big|_{x=4} = 8t; \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 24p \cdot \sin 4p\,x + 4 + x. \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x); \\ u(x;\,t)\big|_{x=0} = a, \quad u(x;\,t)\big|_{x=l} = b; \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

31. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;\,t)\big|_{x=0} = t^2, \quad u(x;\,t)\big|_{x=p} = t^3; \\ u(x;\,t)\big|_{t=0} = \sin x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

32. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin 2t; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \dfrac{a}{2} \cdot \sin \dfrac{2l}{a} \cdot \sin 2t; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -2\cos \dfrac{2x}{a}. \end{cases}$$

33. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = t, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=p} = 1; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \sin \dfrac{x}{2}, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1. \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = e^{-t}, \quad u(x;t)\big|_{x=p} = t; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \sin x \cdot \cos x, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

35. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = m_1(t), \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = m_2(t), \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = m_1(t), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = m_2(t), \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

37. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = m_1(t), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = m_2(t), \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = y\,(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Замечание: в задачах 35–37 $v(x;t)$ – решения задач, которые получаются при подстановке $u(x;t) = v(x;t) + w(x;t)$ в условия заданных задач, как это сделано в задаче (4).

38. $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 64 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 2, \qquad u(x;t)\big|_{x=3} = -7, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = 2 - 3x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 24p \cdot \sin 3p\, x, \quad 0 \le x \le 3. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Найти решение волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < l$; $t > 0$;

при следующих заданных граничных и начальных условиях:

1) $$\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0} = t^2 - 1, \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = e^{-t}, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \cos\dfrac{p}{l}x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \sin t, \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = \cos t, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \cos\dfrac{p}{l}x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0} = e^{-t}, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = t, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \sin 2x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \sin wt, & u(x;t)\big|_{x=l} = t, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \cos wx, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2 + 1, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0} = t, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = t^2, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = -\cos x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin 2x, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0} = \sin t, & u(x;t)\big|_{x=l} = t^2 + 1, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \cos x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

II. Найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ 0 < x < l\,,\ t > 0;$$

при следующих заданных граничных и начальных условиях:

1) $$\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, & u(x;t)\big|_{x=p}=0, \quad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=p-x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=x+p, \quad 0\le x\le p; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, & u(x;t)\big|_{x=p}=0, \quad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=\dfrac{p+x}{2}, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=x-p, \quad 0\le x\le p; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, & u(x;t)\big|_{x=p}=0, \quad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=\sin p\,x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=p-x, \quad 0\le x\le p; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, & u(x;t)\big|_{x=l}=0, \quad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=l-2x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=x, \quad 0\le x\le p; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, & u(x;t)\big|_{x=p}=0, \quad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=\sin 2x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\dfrac{x}{p}, \quad 0\le x\le p; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, & u(x;t)\big|_{x=l}=0, \quad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=\cos\dfrac{p\,x}{l}, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=e^{-x}, \quad 0\le x\le l; \end{cases}$$

7) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, \qquad u(x;t)\big|_{x=2}=0, \qquad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=\begin{cases} x, & x\in[0;1], \\ 2-x, & x\in[1;2]. \end{cases} \end{cases}$

III. Найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ 0<x<l\, ,\ t>0;$$

при следующих заданных граничных и начальных условиях:

1) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0, \qquad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=\sin x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\cos\dfrac{px}{l}, \qquad 0\le x\le l; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad u(x;t)\big|_{x=l}=0, \qquad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=\sin x, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \qquad 0\le x\le l; \end{cases}$

3) $\begin{cases} u(x;t)\big|_{x=0}=0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0, \qquad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=2x+1, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=x, \qquad 0\le x\le l; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad u(x;t)\big|_{x=l}=0, \qquad t\ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0}=0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0}=e^{-x}, \qquad 0\le x\le l; \end{cases}$

$$5)\ \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & \left.u(x;t)\right|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ \left.u(x;t)\right|_{t=0} = x-1, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = e^{-x}, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

$$6)\ \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & \left.u(x;t)\right|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ \left.u(x;t)\right|_{t=0} = x, & \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 1, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

IV. Найти решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x;t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left.u(x;t)\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.u(x;t)\right|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ \left.u(x;t)\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l, \end{cases}$$

если:

1) $f(x;t) = e^{-t}$;

2) $f(x;t) = \cos\dfrac{p\,x}{l}$;

3) $f(x;t) = \sin\dfrac{p\,x}{l}$;

4) $f(x;t) = \sin wt$;

5) $f(x;t) = x \cdot t$;

6) $f(x;t) = t \cdot e^{-x}$;

7) $f(x;t) = \cos\dfrac{p\,x}{2l}$;

8) $f(x;t) = x \cdot e^{-t}$.

V. Корректно ли поставлена задача:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = y\,(t), \quad 0 \le t < \infty; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \quad 0 \le x < \infty; \\ j\,(0) = y\,(0), \qquad j''(0) = y''(0)? \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = j\,(t), \quad t \ge 0; \\ u\left(x; \dfrac{x}{2}\right)\Big|_{t=0} = y\,(x), \quad x \ge 0; \\ j\,(0) = y\,(0), \qquad j''(0) = y''(0)? \end{cases}$$

VI. В каком виде нужно искать решение задачи:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\,(x;t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = \sin wt, \qquad u(x;t)\big|_{x=l} = t, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \cos wx, \qquad \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = x^2 + 1, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x;t\right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u\left(x;t\right)\Big|_{x=0} = \sin t, \qquad u\left(x;t\right)\Big|_{x=l} = t^2 + 1, \quad t \ge 0; \\ u\left(x;t\right)\Big|_{t=0} = \cos x, \qquad \left.\dfrac{\partial u\left(x;t\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = x, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(x;t\right), \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u\left(x;t\right)\Big|_{x=0} = t, \qquad \left.\dfrac{\partial u\left(x;t\right)}{\partial x}\right|_{x=l} = t^2, \quad t \ge 0; \\ u\left(x;t\right)\Big|_{t=0} = -\cos x, \qquad \left.\dfrac{\partial u\left(x;t\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin 2x, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

РАЗДЕЛ 2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Решение краевых задач для уравнения теплопроводности

Пусть $u = u\left(M;t\right)$–температура в точке M однородного тела в момент времени t. Если тело является стержнем, направленным по оси OX, то уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5}$$

где $a^2 = \dfrac{k}{r\,g}$ – коэффициент внутренней теплопроводности, r – плотность вещества, g – коэффициент пропорциональности (теплоёмкости вещества).

Для неограниченного стержня, при $-\infty < x < +\infty$, решением уравнения (1) при начальном условии $u(x;\,t)\big|_{t=0} = j\,(x)$ является функция $u(x;\,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4p\,a^2 t}} \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} j\,(x) \cdot \exp\left(-\dfrac{(x-x)^2}{4a^2 t}\right) dx$, называемая интегралом Пуассона, или $u(x;\,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4p\,a^2 t}} \cdot \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} j\,(x) \cdot G(x-x;\,t)\, dx$,

где $G(x-x;\,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4p\,a^2 t}} \cdot \exp\left(-\dfrac{(x-x)^2}{4a^2 t}\right)$ – фундаментальное решение или функция Грина на бесконечной прямой.

Часть А

Решение краевых задач для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой

Методом функции Грина найти решение задач:

39. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le l, \\ 0, & x < 0, \quad x > l, \quad \text{где } \ l > 0. \end{cases} \end{cases}$$

40. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & x_1 \le x \le x_2, \\ 0, & x < x_1, \quad x > x_2. \end{cases} \end{cases}$$

41. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_2, & x \ge 0. \end{cases} \end{cases}$$

42. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le l, \\ \dfrac{1}{l}, & -l \le x < 0, \\ 0, & x < -l, \quad x > l, \quad \text{где } \ l > 0. \end{cases} \end{cases}$$

43. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{l}, & 0 \le x \le l, \\ 1 + \dfrac{x}{l}, & -l \le x < 0, \\ 0, & x < -l, \quad x > l, \qquad \text{где } \ l > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Часть В

Решение краевых задач для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой

Решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, при $0 < x < +\infty$, $t > 0$, удовлетворяющее граничному условию $u(x;\, t)\big|_{x=0} = y\ (t)$ при $t \ge 0$ и начальному условию $u(x;\, t)\big|_{t=0} = j\ (x)$ при $0 \le x < +\infty$, выражается формулой:

$$u(x;\, t) = \frac{1}{\sqrt{4p\, a^2 t}} \cdot \int\limits_0^{+\infty} j\ (x\ ) \cdot \left[\exp\left(-\frac{(x - x)^2}{4a^2 t} \right) - \exp\left(-\frac{(x + x)^2}{4a^2 t} \right) \right] dx\ +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{4p\, a^2 t}} \cdot \int\limits_0^{t} y\ (t\ ) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 (t - t\ )} \right) \cdot (t - t\ )^{-1{,}5}\, dt\ .$$

Для задачи
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;\, t)\big|_{x=0} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;\, t)\big|_{t=0} = j\ (x), \qquad 0 \le x < +\infty, \end{cases} \tag{6}$$

решением является функция $u(x;\, t) = \int\limits_0^{+\infty} j\ (x\ ) \cdot G^*(x;\, x\,;\, t)\, dx$, где

$$G^*(x;\, x\,;\, t) = \frac{1}{\sqrt{4p\, a^2 t}} \cdot \left[\exp\left(-\frac{(x - x\ )^2}{4a^2 t} \right) - \exp\left(-\frac{(x + x\ )^2}{4a^2 t} \right) \right].$$

Для задачи $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \\ \left. u(x;t)\right|_{t=0} = j\,(x), \quad 0 \le x < +\infty, \end{cases}$ (7)

решением является функция $u(x;t) = \int\limits_0^{+\infty} j\,(x)\cdot G^{**}(x;x;t)\,dx$,

где $G^{**}(x;x;t) = \dfrac{1}{\sqrt{4p\,a^2 t}} \cdot \left[\exp\left(-\dfrac{(x-x)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\dfrac{(x+x)^2}{4a^2 t}\right)\right]$.

Найти решение задач:

44. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ \left. u(x;t)\right|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \\ \left. u(x;t)\right|_{t=0} = 1, \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ \left. u(x;t)\right|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \\ \left. u(x;t)\right|_{t=0} = u_0, \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases}$

46. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & 0 \le x \le l, \\ 0, & x < 0, \quad x > l, \end{cases} \text{ где } l > 0. \end{cases}$$

47. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} u_1, & 0 \le x \le l, \\ u_2, & x > l. \end{cases} \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

VII. Найти решение задач:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x < 0, \quad x \ge 1; \end{cases} \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \le x \le 0, \\ 0, & x < -1, \quad x > 0; \end{cases} \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\Big|_{t=0} = j\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, \qquad -2 \le x < 0, \\ 1, \qquad 0 \le x \le 2, \\ 0, \qquad x \le -2, \qquad x > 2; \end{cases} \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\Big|_{t=0} = j\,(x) = \begin{cases} 2, \qquad 0 \le x \le 1, \\ 0, \qquad x > 1; \end{cases} \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\Big|_{x=0} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\Big|_{t=0} = j\,(x) = 2, \qquad 0 \le x \le \infty; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\Bigg|_{x=0} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\Big|_{t=0} = \begin{cases} 1 - x, \qquad 0 \le x \le 1, \\ 0, \qquad x > 1; \end{cases} \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x < -1, \quad x \ge 1; \end{cases} \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0, \\ 1-x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < -1, \quad x > 1; \end{cases} \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} 1+x, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < -1, \quad x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

10) Непосредственной проверкой убедиться в том, что функция

$$u(x;t) = \int_0^t v(x;t;t)\,dt \,,$$

где

$$v(x;t;t) = \frac{1}{\sqrt{4p(t-t)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-x)^2}{4(t-t)}\right) \cdot g(x;t)\,dx \text{ , при } t > t \text{ ,}$$

удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial t} = t \cdot g(x;\,t) \cdot \dfrac{\partial^2 u(x;\,t)}{\partial x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$

Решение краевых задач для уравнения теплопроводности для ограниченного стержня

Решение $u = u(x;\,t)$ уравнения теплопроводности (параболического типа) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (5) для ограниченного стержня, $0 < x < l$, находят для начального условия $u(x;\,t)\big|_{t=0} = f(x)$. Рассматривают граничные условия I рода (когда задана температура на концах стержня) $u(x;\,t)\big|_{x=0} = j_1(t)$, $u(x;\,t)\big|_{x=l} = j_2(t)$.

Граничные условия II рода (когда задан поток тепла через концы стержня) имеют вид: $\left.\dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = j_1(t)$, $\left.\dfrac{\partial u(x;\,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = j_2(t)$.

В случае стержня, ограниченного с двух концов, решение уравнения (5), удовлетворяющего начальному условию $u(x;\,t)\big|_{t=0} = j(x)$ при $0 \le x \le l$ и двум граничным условиям $u(x;\,t)\big|_{x=0} = u(x;\,t)\big|_{x=l} = 0$ при $t \ge 0$, выражается формулой:

$$u(x;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \exp\left(-\left(\frac{kp\,a}{l} \right)^2 \cdot t \right) \cdot \sin\frac{kp\,x}{l},$$

где

$$b_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l j\,(x) \cdot \sin\frac{kp\,x}{l}\,dx,\ k = \overline{1;\infty}.$$

Или, при граничных условиях $\left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$, решением соответствующей задачи для уравнения теплопроводности (5) является сумма ряда:

$$u(x;t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \exp\left(-\left(\frac{kp\,a}{l}\right)^2 t\right) \cdot \cos\frac{kp\,x}{l},$$

где $a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l j\,(x)\,dx$, $a_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l j\,(x) \cdot \cos\frac{kp\,x}{l}\,dx$, $k = \overline{1;\infty}$.

Граничные условия III рода: $\left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} - h \cdot u(x;t)\big|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} + h \cdot u(x;t)\big|_{x=l} = 0$, получаются, если учитывается на концах стержня теплообмен со средой, имеющей температуру $b\,(x;t)$. Здесь, по закону Ньютона, $-k \cdot \left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = h \cdot (u - b)\big|_{x=0}$,

$$-k \cdot \left.\frac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = h \cdot (u - b)\big|_{x=l}.$$

Найти решение задач:

Часть А

48. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = Ax, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

49. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \dfrac{cx(l-x)}{l^2}, \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

50. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = x(l-x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

51. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0; \\[2ex] u(x;t)\big|_{x=0} = u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \qquad t \ge 0; \\[2ex] u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l - x, & \dfrac{l}{2} \le x \le l, \quad \text{где } l > 0. \end{cases} \end{cases}$$

52. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \dfrac{p}{2}, \qquad t > 0; \\[2ex] u(x;t)\big|_{x=0} = u(x;t)\big|_{x=\frac{p}{2}} = 0, \qquad t \ge 0; \\[2ex] u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \dfrac{p}{4}, \\ x, & \dfrac{p}{4} < x < \dfrac{p}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

53. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0; \\[2ex] u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \qquad t \ge 0; \\[2ex] u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \qquad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

54. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0; \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \qquad \left. u(x;t) \right|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0; \\ \left. u(x;t) \right|_{t=0} = j\,(x), \qquad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

55. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0; \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \qquad \left. u(x;t) \right|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0; \\ \left. u(x;t) \right|_{t=0} = A(l - x), \qquad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Часть B

56. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0; \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \qquad \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0; \\ \left. u(x;t) \right|_{t=0} = j\,(x), \qquad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

57. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = u_0, \qquad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

58. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < p, \qquad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=p} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{p}{2}, \\ 1, & \dfrac{p}{2} < x < p. \end{cases} \end{cases}$$

59. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2}, \\ l - x, & \dfrac{l}{2} < x \le l. \end{cases} \end{cases}$$

60. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=l} + h \cdot u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad h > 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x), \quad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

61. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=0} - h \cdot u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad h > 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = u_0, \qquad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

62. $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=0} - h \cdot u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \\ \left. \dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x} \right|_{x=l} + h \cdot u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad h > 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = u_0, \qquad 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

VIII. Найти решение задач:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = j\,(x) = x^2, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;t)}{\partial x}\right|_{x=2} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1; \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2; \end{cases} \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=l} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = x^2, \quad 0 \le x \le l; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(x;t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x;t)\big|_{x=2} = 0, \quad t \ge 0; \\ u(x;t)\big|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1; \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2; \end{cases} \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 9 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0; \\ u(x;\, t)\big|_{x=0} = 0, \qquad u(x;\, t)\big|_{x=1} = 0, \qquad t > 0; \\ u(x;\, t)\big|_{t=0} = 2\sin 2p\, x + 3\sin 3p\, x, \qquad 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 6, \qquad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad u(x;\, t)\big|_{x=6} = 0, \qquad t \ge 0; \\ u(x;\, t)\big|_{t=0} = 5\sin 3p\, x, \qquad 0 \le x \le 6; \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 7 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 3, \qquad t > 0; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=3} = 0, \qquad t > 0; \\ u(x;\, t)\big|_{t=0} = 6\sin 2p\, x + 7\sin 3p\, x, \qquad 0 \le x \le 3; \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5 \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < 5, \qquad t > 0; \\ u(x;\, t)\big|_{x=0} = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial u(x;\, t)}{\partial x}\right|_{x=5} = 0, \qquad t > 0; \\ u(x;\, t)\big|_{t=0} = 7\sin 2p\, x, \qquad 0 \le x \le 5; \end{cases}$$

РАЗДЕЛ 3

ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Уравнение Лапласа. Задача Дирихле

Уравнение теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ (для нестационарного случая) для стационарного случая, в силу $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, обращается в уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{8}$$

Уравнение Лапласа можно записать в виде $\Delta u = 0$. Здесь $u = u(x;\ y;\ z)$ есть только функция точки и не зависит о времени t.

Для задач, относящихся к плоским фигурам уравнение Лапласа записывают в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{9}$$

Такой же вид уравнение Лапласа имеет и для пространства, если u не зависит от координаты z, т.е. если $u(M)$ сохраняет постоянное значение при перемещении точки M по прямой, параллельной оси OZ.

Заменой $x = r \cdot \cos j$, $y = r \cdot \sin j$ уравнение (9) можно преобразовать к полярным координатам:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0. \tag{10}$$

С уравнением Лапласа связано понятие гармонической функции. Функция называется гармонической в области D, если в этой области она непрерывна со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа.

Для уравнения (8) функция $u = \dfrac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$ является гармонической в любой области, исключая точку $(x_0; y_0; z_0)$. Если $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, то $u = \dfrac{1}{r}$.

Для уравнения (9) гармонической является функция $u = \ln\left(\dfrac{1}{r}\right)$ (или $u = \ln r$).

Задача отыскания функции *u*, гармонической в области *D*, непрерывной в *D*, включая поверхность *S*, ограничивающую эту область, и удовлетворяющую граничным условиям, называется задача Дирихле: $\begin{cases} \Delta u = 0; \\ u\big|_s = f(x; y; z) \end{cases}$, где $f(x; y; z)$ – заданная непрерывная функция на *S*.

Найти решение задач:

63. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня $u(x)\big|_{x=0} = u_0$, $u(x)\big|_{x=l} = u_l$.

64. Рассчитать потенциал электростатического поля между обкладками цилиндрического конденсатора.

Указание: перейти к цилиндрическим координатам, считая, что u не зависит от j и z.

Радиусы цилиндров равны r_1 и r_2, на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура $u\big|_{r=r_1} = u_1$, $u\big|_{r=r_2} = u_2$.

Нахождение гармонических функций в круге и вне круга

Решением задачи Дирихле в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad 0 < r < R; \\ u(r; j)\big|_{r=R} = f(j); \\ u(r; j + 2p) = u(r; j), \qquad 0 \le r \le R; \end{cases} \tag{11}$$

является функция $u(r; j) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k \cdot (a_k \cdot \cos kj + b_k \cdot \sin kj)$,

где $a_0 = \dfrac{1}{2p} \cdot \int\limits_0^{2p} f(x)\,dx$, $\qquad a_k = \dfrac{1}{p R^k} \cdot \int\limits_0^{2p} f(x) \cdot \cos kx\,dx$,

$b_k = \dfrac{1}{p R^k} \cdot \int\limits_0^{2p} f(x) \cdot \sin kx\,dx$, $k = \overline{1;\infty}$.

Решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad R < r < \infty; \\ u(r; j)\big|_{r=R} = f(j); \\ u(r; j + 2p) = u(r; j), \qquad R \le r < \infty; \end{cases} \tag{12}$$

для внешности круга радиуса R представляется суммой ряда $u(r;\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}\cdot\left(a_k\cdot\cos k\varphi+b_k\cdot\sin k\varphi\right)$, коэффициенты которого определяются из граничного условия $u(r;\varphi)\big|_{r=R}=f(\varphi)$.

Для кольцевой области, образованной двумя концентрическими окружностями радиусов R_1 и R_2, решение является суммой ряда $u(r;\varphi)=a_0+b_0\ln\frac{1}{r}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\cdot r^k+\frac{d_k}{r_k}\right)\cdot\left(a_k\cdot\cos k\varphi+b_k\cdot\sin k\varphi\right)$, коэффициенты которого определяются из граничных условий: $u(r;\varphi)\big|_{r=R_1}=f_1(\varphi)$, $u(r;\varphi)\big|_{r=R_2}=f_2(\varphi)$.

Найти решение задач:

65. Показать, что функция $u(x;y)$, гармоническая в круге $|z|<R$, внутри этого круга представляется в виде суммы ряда $u(r;\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}r^k\cdot\left(a_k\cdot\cos k\varphi+b_k\cdot\sin k\varphi\right)$, где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, $z=x+iy$; a_k, b_k – действительные постоянные.

66. Показать, что ограниченная, гармоническая вне круга $|z|\le R$, функция $u(x;y)$ представляется по формуле: $u(r;\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}\cdot\left(a_k\cdot\cos k\varphi+b_k\cdot\sin k\varphi\right)$, где $r=|z|$, $\varphi=\arg z$, $z=x+iy$; a_k, b_k – действительные постоянные.

Часть А

67. В круге $x^2+y^2=r^2<R^2$ решить задачу Дирихле

$$\begin{cases}\Delta u(x;\,y)=0, & 0<r\le R;\\ u(x;\,y)=f(x;\,y), & \text{при} \quad r=R;\end{cases}$$

если:

1) $f(x;\,y)=x+xy$;

2) $f(x;\,y)=2\left(x^2+y\right)$;

3) $f(x;\,y)=4y^3$;

4) $f(x;\,y)=x^2-2y^2$;

5) $f(x;\,y)=4xy^2$;

6) $f(x;\,y)=\dfrac{y^2}{R}+R\cdot xy$;

7) $f(x;\,y)=2x^2-x-y$;

Часть В

68. Вне круга $x^2+y^2=r^2\le R^2$ решить задачу Дирихле

$$\begin{cases}\Delta u(x;\,y)=0, & R<r<\infty;\\ u(x;\,y)=f(x;\,y), & \text{при} \quad r=R; \quad \left|u(x;\,y)\right|<\infty;\end{cases}$$

если:

1) $f(x;\,y)=y+2xy$;

2) $f(x;\,y)=ax+by+c$;

3) $f(x;\,y)=x^2-y^2$;

4) $f(x;\,y)=x^2+1$;

5) $f(x;\,y)=y^2-xy$;

6) $f(x;\,y)=y^2+x+y$;

7) $f(x;\,y)=2x^2-x+y$.

Задачи для самостоятельного решения

IX. В круге $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ найти гармоническую функцию $u(x; t) \in C^1$, удовлетворяющую условию $u(R; j) - u(R_1; j) = f(j)$, где $0 < R_1 < R$, $\int\limits_0^{2p} f(j)\,dj = 0$, если:

1) $f(j) = \sin j$;

2) $f(j) = \cos j$;

3) $f(j) = \cos^2 j + c$, где $c = \text{const}$.

4) $f(j) = \sin 2j + \cos 3j$;

5) $f(j) = A \cdot \cos^2 j + B \cdot \sin^2 j$, где A и B– постоянные;

6) $f(j) = \sin j - 3\cos^2 j + c$, где $c = \text{const}$;

X. Вне круга $x^2 + y^2 = r^2 \le R^2$ найти ограниченную гармоническую функцию $u(x; t) \in C^1$, удовлетворяющую условию $u(R; j) - u(R_1; j) = f(j)$, где $R < R_1 < \infty$, $\int\limits_0^{2p} f(j)\,dj = 0$, если:

1) $f(j) = 3\sin 2j$;

2) $f(j) = 5 \cdot \sin^2 j - A$, где A – постоянная;

3) $f(j) = \sin^3 j + 2$;

4) $f(j) = \sin j + 3\cos^2 j - A$, где A– постоянная;

5) $f(j) = \sin j + \cos 5j$.

XI. Найти условие, при соблюдении которого в круге $x^2 + y^2 = r^2 < R^2$ правильно поставлена задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u(x;\, y) = 0, \quad 0 < r < R; \\ \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial r} = g(x;\, y), \quad \text{при} \quad r = R. \end{cases}$$

Найти решение правильно поставленной задачи, если:

1) $g(x;\, y) = A$, где $A = \text{const}$;

2) $g(x;\, y) = 2x^2 + A$, где $A = \text{const}$;

Указание: воспользоваться формулой: $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} r^k \left(a_k \cdot \cos kj + b_k \cdot \sin kj\right)$.

3) $g(x;\, y) = 2xy$;

4) $g(x;\, y) = A \cdot y^2 - B$, где A и B– постоянные;

5) $g(x;\, y) = A \cdot x^2 - B \cdot y^2 + y$, где A и B– постоянные;

XII. Установить, для каких функций $g(x;\, y)$ правильно поставлена вне круга $x^2 + y^2 = r^2 \le R^2$ задача Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u(x;\, y) = 0, \quad R < r < \infty; \\ \dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial r} = g(x;\, y), \quad \text{при} \quad r = R, \quad \left|u(x;\, y)\right| < \infty. \end{cases}$$

Найти решение правильно поставленной задачи, если:

1) $g(x;\, y) = y^2 - A$;

Указание: воспользоваться формулой: $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k} \cdot \left(a_k \cdot \cos kj + b_k \cdot \sin kj\right)$.

2) $g(x;\, y) = x^2 + A \cdot y - B$;

3) $g(x;\, y) = 2xy - A \cdot x^2 + B$;

4) $g(x;\, y) = x^2 - A \cdot y^2 + B$. Здесь *A*, *B* – постоянные.

Решение задачи Дирихле в круге с помощью формулы Пуассона

Рассмотрим уравнение $r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial j^2} = 0$. (13)

Найдём функцию $u(r;\, j)$, гармоническую в круге радиуса R с центром в полюсе *O* полярной системы координат, удовлетворяющую на окружности условию $u(r;\, j)\big|_{r=R} = f(j)$, где $f(j)$ – заданная, непрерывная функция на окружности.

$$u(r;\, j) = \frac{1}{2p} \cdot \int\limits_0^{2p} f(t) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2R \cdot r \cos(t - j) + r^2}\, dt \qquad (14)$$

Решить задачи:

69. Найти стационарное распределение температуры u на однородной тонкой круглой пластинке радиуса *R*, верхняя половина которой поддерживается при температуре 1°*C*, а нижняя при температуре 0°*C*.

70. Найти решение уравнения Лапласа для внутренней части кольца $1 \le r \le 2$, удовлетворяющее краевым условиям $u(r; j)\big|_{r=1} = 0$, $u(r; j)\big|_{r=2} = y$.

Указание: ввести полярные координаты.

Нахождение гармонических функций в прямоугольнике

71. Найти решения $u(x; y)$ уравнения Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в прямоугольнике $0 < x < p,\ 0 < y < q$, удовлетворяющие, соответственно, краевым условиям:

Часть А

1) $$\begin{cases} u(0; y) = 0, & \dfrac{\partial u(p; y)}{\partial x} = 0; \\ u(x; 0) = 0, & u(x; q) = f(x); \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0; y)}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial u(p; y)}{\partial x} = 0; \\ u(x; 0) = A, & u(x; q) = Bx; \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0; y)}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial u(p; y)}{\partial x} = 0; \\ u(x; 0) = 0, & \dfrac{\partial u(x; q)}{\partial y} = Bx; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} u(0;\, y) = U, & \dfrac{\partial u(p;\, y)}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial u(x;\, 0)}{\partial y} = T\sin\dfrac{p\,x}{2p}, & u(x;\, q) = 0; \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} u(0;\, y) = 0, & \dfrac{\partial u(p;\, y)}{\partial x} = A; \\ u(x;\, 0) = 0, & u(x;\, q) = U; \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} u(0;\, y) = 0, & u(p;\, y) = T\cdot y; \\ u(x;\, 0) = 0, & u(x;\, q) = \dfrac{Tq}{p}\cdot x; \end{cases}$$

Часть B

7) $$\begin{cases} u(0;\, y) = 0, & u(p;\, y) = 0; \\ u(x;\, 0) = j_1(x), & u(x;\, q) = j_2(x); \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} u(0;\, y) = j_1(y), & u(p;\, y) = j_2(y); \\ u(x;\, 0) = y_1(x), & u(x;\, q) = y_2(x); \end{cases}$$

где

$$j_1(0) = y_1(0),\ j_1(q) = y_2(0),\ j_2(0) = y_1(p),\ j_2(q) = y_2(p).$$

9) $$\begin{cases} u(0;\, y) = A\cdot y(b-y), & u(p;\, y) = 0; \\ u(x;\, 0) = B\cdot\sin\dfrac{p\,x}{p}, & u(x;\, q) = 0; \end{cases}$$

10) $\begin{cases} u(0;\ y)=U, & u(p;\ y)=0; \\ u(x;\ 0)=0, & u(x;\ q)=0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} u(0;\ y)=j_1(y), & u(p;\ y)=j_2(y); \\ \dfrac{\partial u(x;\ 0)}{\partial y}=y_1(x), & \dfrac{\partial u(x;\ q)}{\partial y}=y_2(x); \end{cases}$

12) $\begin{cases} u(0;\ y)=j_1(y), & u(p;\ y)=j_2(y); \\ u(x;\ 0)=y_1(x), & \dfrac{\partial u(x;\ q)}{\partial y}=y_2(x); \end{cases}$

где $j_1(0)=y_1(0)$.

Задачи для самостоятельного решения

XIII. Найти решение задач:

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<2, \quad 0<y<1; \\ u(x;\ y)\big|_{x=0}=0, \quad u(x;\ y)\big|_{x=2}=0, \quad 0\le y\le 1; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\ y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\sin\dfrac{p\,x}{4}, \quad u(x;\ y)\big|_{y=1}=0, \quad 0\le x\le 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<2, \quad 0<y<2; \\ u(x;\ y)\big|_{x=0}=0, \quad u(x;\ y)\big|_{x=2}=0, \quad 0\le y\le 2; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\ y)}{\partial y}\right|_{y=0}=A, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\ y)}{\partial y}\right|_{y=2}=x, \quad 0\le x\le 2; \end{cases}$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & 0<x<2, \quad 0<y<1; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\,y)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u(x;\,y)\big|_{x=2}=0, & 0\le y\le 1; \\ u(x;\,y)\big|_{y=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\,y)}{\partial y}\right|_{y=1}=A\cdot x, & 0\le x\le 2; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & 0<x<1, \quad 0<y<2; \\ u(x;\,y)\big|_{x=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\,y)}{\partial x}\right|_{x=1}=A, & 0\le y\le 2; \\ u(x;\,y)\big|_{y=0}=0, \quad u(x;\,y)\big|_{y=2}=B, & 0\le x\le 1; \end{cases}$$

$$5)\ \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & 0<x<1, \quad 0<y<1; \\ u(x;\,y)\big|_{x=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\,y)}{\partial x}\right|_{x=1}=0, & 0\le y\le 1; \\ \left.\dfrac{\partial u(x;\,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\sin\dfrac{p\,x}{2}, \quad u(x;\,y)\big|_{y=1}=0, & 0\le x\le 1; \end{cases}$$

$$
6)\ \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<1, \quad 0<y<2;\\
\left.\dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u(x;\, y)\big|_{x=1}=0, \quad 0\le y\le 2;\\
u(x;\, y)\big|_{y=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\right|_{y=2}=B\cdot x, \quad 0\le x\le 1;
\end{cases}
$$

$$
7)\ \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<p, \quad 0<y<q;\\
\left.\dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad u(x;\, y)\big|_{x=p}=0, \quad 0\le y\le q;\\
u(x;\, y)\big|_{y=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\right|_{y=q}=B\cdot x, \quad 0\le x\le p;
\end{cases}
$$

$$
8)\ \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<p, \quad 0<y<q;\\
u(x;\, y)\big|_{x=0}=0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial x}\right|_{x=p}=u_0, \quad 0\le y\le q;\\
u(x;\, y)\big|_{y=0}=0, \quad u(x;\, y)\big|_{y=q}=u_1, \quad 0\le x\le p;
\end{cases}
$$

$$
9)\ \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<p, \quad 0<y<q;\\
u(x;\, y)\big|_{x=0}=0, \quad u(x;\, y)\big|_{x=p}=0, \quad 0\le y\le q;\\
\left.\dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\right|_{y=0}=u_0, \quad \left.\dfrac{\partial u(x;\, y)}{\partial y}\right|_{y=q}=x, \quad 0\le x\le p.
\end{cases}
$$

Решение уравнения в частных производных операционным методом

Ограничимся случаем, когда искомая функция $u(x;\,t)$ зависит от двух независимых переменных *x*, *t*. Преобразование Лапласа выполняется по переменной координате *t*: $U(x;\ p)=\int\limits_0^{\infty} u(x;\,t)\cdot e^{-pt}\,dt$. Тогда в пространстве изображений уравнение математической физики представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно пространственной координаты *x*.

Замечание. Более полно и подробно решение уравнений в частных производных операционным методом разбирается в курсе «Операционное исчисление», который студенты третьего курса инженерно-экономического факультета, обучающиеся по специальности «Прикладная математика», изучают в шестом семестре.

Часть А

Решить задачи с помощью преобразования Лапласа:

72. Стержень длины l находится в состоянии покоя. Один из его концов закреплён, а к свободному концу приложена сила $A\cdot\sin wt$, направленная по оси стержня. Найти продольные колебания стержня $u(x;\,t)$ при заданных начальных $u(x;\,0)=0$, $\dfrac{\partial u(x;\,0)}{\partial t}=0$ и граничных условиях $u(0;\,t)=0$, $\dfrac{\partial u(l;\,t)}{\partial x}=\dfrac{A}{E}\cdot\sin wt$, где *E*–модуль упругости.

73. Концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены жёстко. Начальное отклонение задано равенством $u(x;\,0)=A\cdot\sin\frac{p}{l}x$, $0\le x\le l$; начальная скорость равна нулю. Найти отклонение $u(x;\,t)$ при $t>0$.

74. Найти решение волнового уравнения $\frac{\partial^2 u(x;\,t)}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u(x;\,t)}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x;\,0)=A\cdot\cos\frac{kp}{l}x$, $\frac{\partial u(x;\,0)}{\partial t}=0$, $0\le x\le l$, и граничным условиям $\frac{\partial u(0;\,t)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial u(l;\,t)}{\partial x}=0$, $t\ge 0$.

75. Найти решение волнового уравнения $\frac{\partial^2 u(x;\,t)}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u(x;\,t)}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x;\,0)=0$, $\frac{\partial u(x;\,0)}{\partial t}=B\cdot\sin\frac{kp}{l}x$, $0\le x\le l$, и граничным условиям $u(0;\,t)=0$, $u(l;\,t)=0$, $t\ge 0$.

Часть B

76. Найти распределение температуры $u(x;\,t)$ в линейном проводнике тепла при заданных начальном $u(x;\,0)=0$ и граничном $u(0;\,t)=u_0$ условиях, $0<x<+\infty$, $t>0$.

77. Найти распределение температуры $u(x;t)$ в стержне $0 < x < +\infty$, если на его конце x=0 поддерживается заданная температура $f(t)$, а начальная температура стержня равна нулю.

78. Найти распределение температуры $u(x;t)$ в ограниченном стержне $0 < x < l$, левый конец которого теплоизолирован $\frac{\partial u(0;t)}{\partial x} = 0$, а на правом– поддерживается постоянная температура u_1, $u(l;t) = u_1$, начальная температура u_0 постоянна, $u(x;0) = u_0$.

79. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному и граничным условиям: $u(x;0) = A \cdot \sin\frac{kp}{l}x$, $0 \le x \le l$; $u(0;t) = u(l;t) = 0$, $t \ge 0$.

Часть В

Решить задачи с помощью преобразования Лапласа:

80. Найти решение уравнения $\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x;0) = 0$, $0 \le x \le l$, и граничным условиям $u(0;t) = 0$, $u(l;t) = u_0$, $t \ge 0$.

81. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}$, удовлетворяющее условиям: $u(x;0) = 0$, $x \ge 0$; $u(0;t) = A$, $\lim\limits_{x \to \infty} u(x;t) = 0$.

ОТВЕТЫ

1. $u(x;\, t) = \dfrac{2}{p}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left(1+(-1)^{k+1}\right)}{k}\cdot\cos 2kt\cdot\sin 2kx.$

2. $u(x;\, t) = \dfrac{1}{16}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}\cdot\sin 8kt\cdot\sin 4kx.$

3. $u(x;\, t) = \cos at\cdot\sin x + \dfrac{2}{p\,a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^{k+1}}{k^2}\cdot\sin kat\cdot\sin kx,$

$$u\left(x;\ \frac{p}{2a}\right) = \frac{2}{p\,a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{k+1}}{k^2}\cdot\sin\frac{kp}{2}\cdot\sin kx.$$

4. $u(x;\, t) = \dfrac{l}{2p\,a}\cdot\sin\dfrac{2p\,a}{l}t\cdot\sin\dfrac{2p}{l}x.$

5. $u(x;\, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{p}{2k}\cdot(-1)^{k+1} + \dfrac{1}{k^3p}\cdot(-1)^k - \dfrac{1}{k^3p}\right)\cdot\cos 2kt\cdot\sin 2kx.$

6. $u(x;\, t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\cos 2kt + \dfrac{(-1)^k}{2k^2}\cdot\sin 2kt\right)\cdot\sin 2kx.$

7. $u(x;\, t) = \dfrac{4v_0\, l}{p^2 a}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\cdot\sin\dfrac{kp}{2}\cdot\sin\dfrac{kp\,h}{2l}\cdot\cos\dfrac{kp\,a}{l}t\cdot\sin\dfrac{kp}{l}x.$

8. $u(x;\, t) = \dfrac{-9}{10p^2}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\cdot\sin\dfrac{2kp}{3}\cdot\cos\dfrac{kp\,a}{3}t\cdot\sin\dfrac{kp}{3}x.$

9. $$u(x;t)=\frac{48h}{p^5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^k}{k^5}\cdot\cos kp\,at\cdot\sin kp\,x,\ \text{или}$$

$$u(x;t)=\frac{96h}{p^5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^5}\cdot\cos(2k+1)p\,at\cdot\sin(2k+1)p\,x.$$

10. $$u(x;t)=\frac{4h^2l}{p^2a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(k^2h^2-l^2\right)}\cdot\sin\frac{kp}{2}\cdot\cos\frac{kp\,h}{2l}\cdot\sin\frac{kp\,a}{l}t\cdot\sin\frac{kp}{l}x.$$

11. $$u(x;t)=\frac{4l}{p^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cdot\sin\frac{kp}{2}\cdot\cos\frac{kp\,a}{l}t\cdot\sin\frac{kp}{l}x\ .$$

12. $$u(x;t)=\cos\frac{5p\,at}{2l}\cdot\sin\frac{5p\,x}{2l}+\frac{4l}{p^2a}\cdot\sin\frac{p\,at}{2l}\cdot\sin\frac{p\,x}{2l}+$$

$$+\frac{2l}{p^2a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1+(-1)^{k+1}}{k(k+1)(2k+1)}\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,at}{2l}\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,ax}{2l}.$$

13. $$u(x;t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\frac{2k+1}{2l}p\,at+b_k\cdot\sin\frac{2k+1}{2l}p\,at\right)\cdot\cos\frac{2k+1}{2l}p\,x,$$

где $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l j\,(x)\cdot\cos\frac{2k+1}{2l}p\,x\,dx,$

$$b_k=\frac{4}{(2k+1)p\,a}\cdot\int_0^l y\,(x)\cdot\cos\frac{2k+1}{2l}p\,x\,dx,\ k=\overline{0;\infty}.$$

14.

$$u(x;t)=\cos\frac{p\,at}{2l}\cos\frac{p\,x}{2l}+\frac{2l}{3p\,a}\cdot\sin\frac{3p\,at}{2l}\cos\frac{3p\,x}{2l}+\frac{2l}{5p\,a}\cdot\sin\frac{5p\,at}{2l}\cos\frac{5p\,x}{2l}.$$

15. $u(x;t)=\frac{2l}{ap}\cdot\sin\frac{apt}{2l}\cdot\sin\frac{px}{2l}+\frac{2l}{3ap}\cdot\sin\frac{3apt}{2l}\cdot\sin\frac{3px}{2l}+$

$$+\frac{8l}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\cos\frac{(2k+1)apt}{2l}\cdot\sin\frac{(2k+1)px}{2l}.$$

16. $u(x;t)=a_0+b_0\cdot t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{kpat}{l}+b_k\sin\frac{kpat}{l}\right)\cdot\cos\frac{kpx}{l}$, где

$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l j(x)dx,\ b_0=\frac{1}{l}\int_0^l y(x)dx,$

$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l j(x)\cdot\cos\frac{kpx}{l}dx,\ b_k=\frac{2}{kpa}\int_0^l y(x)\cdot\cos\frac{kpx}{l}dx,\ k=\overline{1;\infty}.$

17. $u(x;t)=t+\frac{l}{2}-\frac{4l}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cdot\cos\frac{(2k+1)pat}{l}\cdot\cos\frac{(2k+1)px}{l}.$

18. $u(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos a\sqrt{l_k}t+b_k\cdot\sin a\sqrt{l_k}t\right)\cdot\cos a\sqrt{l_k}x$, где

$a_k=\frac{1}{\left|\sin\sqrt{l_k}x\right|^2}\cdot\int_0^l j(x)\cdot\sin\sqrt{l_k}x\,dx,$

$b_k=\frac{1}{a\,l_k\left|\sin\sqrt{l_k}x\right|^2}\cdot\int_0^l y(x)\cdot\sin\sqrt{l_k}x\,dx,\ k=\overline{1;\infty},$

$\left|\sin\sqrt{l_k}x\right|^2=\int_0^l\sin^2\sqrt{l_k}x\,dx=\frac{l\left(h^2+l_k\right)+h}{2\left(h^2+l_k\right)},$ l_k–положительные

корни уравнения $h\cdot\mathrm{tg}\sqrt{l}\,l=-\sqrt{l}$.

19. $u(x;t)=\frac{2h}{a}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{h^2+l_k}}{l_k\left(l\left(h^2+l_k\right)+h\right)}\cdot\sin a\sqrt{l_k}t\cdot\cos\sqrt{l_k}x$, где

l_k – положительные корни уравнения $\sqrt{l}\cdot\mathrm{tg}\sqrt{l}\,l=h$.

20. $u(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos a\sqrt{l_k}t+b_k\sin a\sqrt{l_k}t\right)\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)$,

где $a_k=\frac{1}{\left|\Phi_k(x)\right|^2}\int_0^l\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)\cdot j\,(x)dx$,

$b_k=\frac{1}{a\sqrt{l_k}\left|\Phi_k(x)\right|^2}\int_0^l\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)\cdot y\,(x)dx$, $k=\overline{1;\infty}$

$$\left|\Phi_k(x)\right|^2=\int_0^l\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)^2dx=\frac{l\left(h^2+l_k\right)+h}{2},$$

l_k – положительные корни уравнения $h\cdot\mathrm{ctg}\sqrt{l}\,l=\sqrt{l}$.

21. $u(x;t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos a\sqrt{l_k}t+b_k\sin a\sqrt{l_k}t\right)\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)$,

где $a_k=\frac{1}{\left|\Phi_k(x)\right|^2}\int_0^l\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)\cdot j\,(x)dx$,

$b_k=\frac{1}{a\sqrt{l_k}\left|\Phi_k(x)\right|^2}\int_0^l\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)\cdot y\,(x)dx$, $k=\overline{1;\infty}$

$$\left|\Phi_k(x)\right|^2=\int_0^l\left(\sqrt{l_k}\cos\sqrt{l_k}x+h\sin\sqrt{l_k}x\right)^2dx=\frac{l\left(h^2+l_k\right)+2h}{2},$$

l_k – неотрицательные корни уравнения $\operatorname{ctg}\sqrt{l}\,l=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{l}}{h}-\frac{h}{l}\right)$.

22. $u(x;\,t)=\dfrac{A}{1+\left(\dfrac{ap}{l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{p\,at}{l}+\dfrac{l}{ap}\sin\dfrac{p\,at}{l}\right)\sin\dfrac{p\,x}{l}$.

23. $u(x;\,t)=\dfrac{2lA}{p}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\dfrac{\left(e^{-t}-\cos\dfrac{kp\,at}{l}+\dfrac{l}{kp\,a}\sin\dfrac{kp\,at}{l}\right)}{1+\left(\dfrac{kp\,a}{l}\right)^2}\cdot\sin\dfrac{kp\,x}{l}$.

24. $u(x;\,t)=\dfrac{4A}{p}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)\left[\left(\dfrac{ap\,(2k+1)}{2l}\right)^2-1\right]}\times$

$\times\left[\sin t-\dfrac{2l}{ap\,(2k+1)}\sin\dfrac{a(2k+1)p\,t}{2l}\right]\cdot\sin\dfrac{(2k+1)p\,x}{2l}$.

25. $u(x;\,t)=\dfrac{A}{1+\left(\dfrac{ap}{2l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\dfrac{p\,at}{2l}+\dfrac{2l}{ap}\sin\dfrac{p\,at}{2l}\right)\cos\dfrac{p\,x}{2l}$.

26. $u(x;\,t)=\dfrac{3}{5}\left(7\sin\dfrac{t}{2}-3\sin 2t\right)\sin 2x$.

27. $u(x;\,t)=(\cos t-\cos 2t)\cdot\sin 5x$.

28. $u(x;\,t)=5x-8+\cos 18p\,t\cdot\sin 6p\,x$.

29. $u(x;\,t) = 4t + xt + \sin 24p\,t \cdot \sin 4p\,x\,.$

30. $u(x;\,t) = a + (b - a)\dfrac{x}{l} + \dfrac{2}{p}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k\,b - a}{k}\cdot\cos\dfrac{kp\,at}{l}\cdot\sin\dfrac{kp\,x}{l} +$

$+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathrm{T}_k(t)\cdot\sin\dfrac{kp\,x}{l}$, где $T_k(t) = \dfrac{f_k\cdot l^2}{(kp\,a)^2}\cdot\left(1-\cos\dfrac{kp\,at}{l}\right)$,

$f_k = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cdot\sin\dfrac{kpx}{l}\,dx\,.$

31. $u(x;\,t) = \left(1 - \dfrac{x}{p}\right)t^2 + \dfrac{x}{p}t^3 + \sin x\cdot\cos t +$

$+\dfrac{4}{p}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^3}\cdot\left(3t\cdot(-1)^k - 1 + \cos kt - \dfrac{3\cdot(-1)^k}{k}\sin kt\right)\sin kx\,.$

32. $u(x;\,t) = \dfrac{t}{2} - \left(\dfrac{1}{4} + \cos\dfrac{2x}{a}\right)\cdot\sin 2t\,.$

33. $u(x;\,t) = x + t + \cos\dfrac{t}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{8}{p}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cdot\cos\dfrac{2k+1}{2}t\cdot\sin\dfrac{2k+1}{2}x\,.$

34. $u(x;\,t) = \left(1 - \dfrac{x}{p}\right)e^{-t} + \dfrac{xt}{p} + \dfrac{1}{2}\cos 2t\cdot\sin 2x -$

$-\dfrac{2}{p}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\left(k^2+1\right)}\cdot\left(e^{-t} + k^2\cos kt - \left(2k + \dfrac{1}{k}\right)\sin kt\right)\sin kx\,.$

35. $u(x;\, t) = v(x;\, t) + w(x;\, t)$, где $w(x;\, t) = m_1(t)(x-l) + m_2(t)\dfrac{x^2}{l^2}$, или

$$w(x;\, t) = m_1(t)\left(x - \frac{x^2}{2l} - \frac{l}{2} \right) + m_2(t)\left(\frac{x^2}{2l^2} + \frac{1}{2} \right).$$

36. $u(x;\, t) = v(x;\, t) + w(x;\, t)$, где $w(x;\, t) = m_1(t) + m_2(t)\dfrac{x^2}{2l}$, или

$$w(x;\, t) = m_1(t)(x+1) + \left[m_2(t) - m_1(t) \right] \cdot \frac{x^2}{2l}.$$

37. $u(x;\, t) = v(x;\, t) + w(x;\, t)$,

где $w(x;\, t) = x \cdot m_1(t) + \left[m_2(t) - l \cdot m_1(t) \right] \cdot \dfrac{x^2}{2l}$,

или $w(x;\, t) = -\dfrac{(x-l)^2}{2l} \cdot m_1(t) + m_2(t) \cdot \dfrac{x^2}{2l}$.

38. $u(x;\, t) = 2 - 3x + \sin 3p\, x \cdot \sin 24p\, t$.

39. $u(x;\, t) = \dfrac{1}{2} \cdot \Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{4a^2t}} \right) - \dfrac{1}{2} \cdot \Phi\left(\dfrac{x-l}{\sqrt{4a^2t}} \right)$,

где $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{p}} \displaystyle\int_0^z e^{-y^2}\, dy = \operatorname{erf} z$ – интеграл ошибок.

40. $u(x;\, t) = \dfrac{u_0}{2} \cdot \left[\Phi\left(\dfrac{x - x_1}{\sqrt{4a^2t}} \right) - \Phi\left(\dfrac{x - x_2}{\sqrt{4a^2t}} \right) \right]$.

41. $u(x;\, t) = \dfrac{u_1 + u_2}{2} + \dfrac{u_2 - u_1}{2} \cdot \Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{4a^2t}} \right)$

42. $$u(x;\,t)=\frac{1}{2l}\cdot\Phi\left(\frac{x+l}{\sqrt{4a^2t}}\right)+\frac{l-1}{2l}\cdot\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\Phi\left(\frac{x-l}{\sqrt{4a^2t}}\right)$$

43. $$u(x;\,t)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{x}{l}\right)\cdot\Phi\left(\frac{x+l}{\sqrt{4t}}\right)-\frac{2x}{l}\cdot\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)-\left(1-\frac{x}{l}\right)\cdot\Phi\left(\frac{x-l}{\sqrt{4t}}\right)\right]+$$
$$+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{p}\,l}\left[\exp\left(-\frac{(x+l)^2}{4t}\right)-2\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)+\exp\left(-\frac{(x-l)^2}{4t}\right)\right].$$

44. $$u(x;\,t)=\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right).$$

45. $$u(x;\,t)=u_0\cdot\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right).$$

46. $$u(x;\,t)=\frac{u_0}{2}\cdot\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

47. $$u(x;\,t)=u_2+\frac{u_2-u_1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

48. $$u(x;\,t)=\frac{2lA}{p}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot e^{-\left(\frac{kp\,a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\frac{kp\,x}{l}.$$

49. $u(x;\,t)=\dfrac{4c}{p^{3}}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}+1}{k^{3}}\cdot e^{-\left(\frac{kp}{l}\right)^{2}t}\cdot\sin\dfrac{kp\,x}{l}$, или

$$u(x;\,t)=\frac{8c}{p^{3}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{3}}\cdot\exp\left(-\frac{(2k+1)^{2}p^{2}t}{l^{2}}\right)\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,x}{l}.$$

50. $u(x;\,t)=\dfrac{4l^{2}}{p^{3}}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}-1}{k^{3}}\cdot e^{-\left(\frac{kp}{l}\right)^{2}t}\cdot\sin\dfrac{kp\,x}{l}$,

или $u(x;\,t)=-\dfrac{8l^{2}}{p^{3}}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^{3}}\cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)p}{l}\right)^{2}t}\cdot\sin\dfrac{(2k+1)p\,x}{l}$.

51. $u(x;\,t)=\dfrac{4l}{p^{2}}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^{2}}\cdot\sin\dfrac{kp}{2}\cdot e^{-\left(\frac{kp}{l}\right)^{2}t}\cdot\sin\dfrac{kp\,x}{l}$,

или $u(x;\,t)=\dfrac{4l}{p^{2}}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}}{(2k+1)^{2}}\cdot\exp\left(-\dfrac{(2k+1)^{2}p^{2}t}{l^{2}}\right)\cdot\sin\dfrac{(2k+1)p\,x}{l}$.

52. $u(x;\,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}\cdot\cos\dfrac{kp}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{p}\right)+\dfrac{2}{kp}+(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{4k^{2}}\cdot\sin\dfrac{kp}{2}\right)\times$

$$\times\exp\left(-(2ka)^{2}t\right)\cdot\sin 2kx.$$

53. $u(x;\,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{k}\cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)p\,a}{2l}\right)^{2}t}\cdot\sin\dfrac{(2k+1)p\,x}{2l}$, где $a_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l j\left(x\right) \cdot \sin\frac{\left(2k+1\right)p\,x}{2l}\,dx,\ k = \overline{0;\infty}.$

54. $u\left(x;\,t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)p\,a}{2l}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{\left(2k+1\right)p\,x}{2l},$

где $a_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l j\left(x\right) \cdot \cos\frac{\left(2k+1\right)p\,x}{2l}\,dx,\ k = \overline{0;\infty}.$

55. $u\left(x;\,t\right) = \frac{8lA}{p^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2k+1\right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{(2k+1)p\,a}{2l}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{\left(2k+1\right)p\,x}{2l}.$

56. $u\left(x;\,t\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot e^{-\left(\frac{kp\,a}{l}\right)^2 t} \cdot \cos\frac{kp\,x}{l},$

где $a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l j\left(x\right)dx,\ a_k = \frac{2}{l}\int_0^l j\left(x\right) \cdot \cos\frac{kp\,x}{l}\,dx,\ k = \overline{1;\infty}.$

57. $u\left(x;\,t\right) = u_0.$

58.

$$u\left(x;\,t\right) = \frac{p}{8} + \frac{1}{2} + \frac{4c}{p^3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p-2}{kp}\sin\frac{kp}{2} + \frac{2}{k^2 p}\left(\cos\frac{kp}{2} - 1\right)\right) \cdot e^{-(ka)^2 t} \cdot \cos kx.$$

59.

$$u(x;t)=\frac{l}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4l}{(kp)^2}\cdot\cos\frac{kp}{2}-\frac{2l}{(kp)^2}\cdot\left(1+(-1)^k\right)\right)\cdot e^{-\left(\frac{kp\,a}{l}\right)^2 t}\cdot\cos\frac{kp\,x}{l}.$$

60.

$$u(x;t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{h^2+m_k^2}{l\left(h^2+m_k^2\right)+h}\int_0^l j\,(x)\cdot\cos(m_k x)\,dx\right]\cdot e^{-(am_k)^2 t}\cdot\cos(m_k x),$$

где m_k–положительные корни уравнения $m\cdot\mathrm{tg}(ml)=h$.

61. $u(x;t)=2u_0\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{h-(-1)^k\sqrt{h^2+m_k^2}}{m_k\left(l\left(h^2+m_k^2\right)+h\right)}\cdot e^{-(am_k)^2 t}\cdot\Phi_k(x),$

где $\Phi_k(x)=m_k\cdot\cos(m_k x)+h\cdot\sin(m_k x)$, m_k–положительные корни уравнения $h\cdot\mathrm{tg}(ml)=-m$.

62. $u(x;t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\cdot e^{-(am_k)^2 t}\cdot\left(m_k\cdot\cos(m_k x)+h\cdot\sin(m_k x)\right)$

$$a_k=\frac{2u_0}{l\left(h^2+m_k^2\right)+2h}\cdot\left(\frac{h}{m_k^2}+\frac{h^2+m_k^2}{2m_k^2}\cdot\sin(m_k\cdot l)\right),$$

где m_k– положительные корни уравнения $\mathrm{ctg}(ml)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{m}{h}-\dfrac{h}{m}\right)$.

63. $u(x)=\dfrac{u_l-u_0}{l}\cdot x+u_0$.

64. $u(r)=u_1+(u_1-u_2)\cdot\left[\ln\frac{r}{r_1}:\ln\frac{r_1}{r_2}\right].$

67. **1)** $u(x;\ y)=x+xy$.

2) $u(x;\ y)=x^2-y^2+2y+R^2$.

3) $u(x;\ y)=3\left(R^2-x^2-y^2\right)\cdot y+4y^3$.

4) $u(x;\ y)=-\frac{1}{2}\cdot R^2+\frac{3}{2}\cdot\left(x^2-y^2\right).$

5) $u(x;\ y)=R^2x-4x^3+3x\left(x^2+y^2\right).$

68. **1)** $u(x;\ y)=\left(\frac{R}{r}\right)^2 y+2\left(\frac{R}{r}\right)^4 xy$.

2) $u(x;\ y)=\left(\frac{R}{r}\right)^2\cdot(ax+by)+c$.

3) $u(x;\ y)=\left(\frac{R}{r}\right)^4\cdot\left(x^2-y^2\right).$

4) $u(x;\ y)=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\cdot\left(x^2-y^2\right)+\frac{R^2}{2}+1.$

5) $u(x;\ y)=\frac{R^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\cdot\left(x^2-y^2+2xy\right).$

6) $u(x;\ y)=\frac{R^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^4\cdot\left(x^2-y^2\right)+\left(\frac{R}{r}\right)^2\cdot(x+y).$

7) $u(x;\, y) = R^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \cdot \left(x^2 - y^2\right) - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot (x - y)$.

IX. **1**) $u(r;\, j) = \dfrac{r \cdot \sin j}{R - R_1} + a_0$, где $a_0 = \mathrm{const}$.

2) $u(r;\, j) = \dfrac{r \cdot \cos j}{R - R_1} + a_0$, где $a_0 = \mathrm{const}$.

3) $u(r;\, j) = \dfrac{r^2 \cdot \cos 2j}{2\left(R^2 - R_1^2\right)} + a_0$, где $a_0 = \mathrm{const}$, при $c = -\dfrac{1}{2}$. При $c \neq -\dfrac{1}{2}$ не выполнено условие $\int\limits_0^{2p} f(j)\, dj = 0$.

4) $u(r;\, j) = \dfrac{r^2 \cdot \sin 2j}{R^2 - R_1^2} + \dfrac{r^3 \cdot \cos 3j}{R^3 - R_1^3} + a_0$, где $a_0 = \mathrm{const}$.

5) $u(r;\, j) = A \cdot \dfrac{r^2 \cdot \cos 2j}{R^2 - R_1^2} + a_0$, где $a_0 = \mathrm{const}$, при $B = -A$; при $B \neq -A$ не выполнено условие $\int\limits_0^{2p} f(j)\, dj = 0$.

6) $u(r;\,j)=\dfrac{r\cdot\sin j}{R-R_1}-3\dfrac{r^2\cdot\cos 2j}{2\left(R^2-R_1^2\right)}+a_0$, где $a_0=\mathrm{const}$, при $c=\dfrac{3}{2}$;

при $c\neq\dfrac{3}{2}$ не выполняется условие $\int\limits_0^{2p} f(j)\,dj=0$.

X. **1)** $u(r;\,j)=\dfrac{3R^2\cdot R_1^2\cdot\sin 2j}{r^2\left(R_1^2-R^2\right)}+a_0$, где $a_0=\mathrm{const}$.

2) $u(r;\,j)=\dfrac{5R^2\cdot R_1^2\cdot\cos 2j}{2r^2\left(R_1^2-R^2\right)}+a_0$, где $a_0=\mathrm{const}$, при $A=\dfrac{5}{2}$; при $A\neq\dfrac{5}{2}$ не выполняется условие $\int\limits_0^{2p} f(j)\,dj=0$.

3) Задача не имеет решения, так как не выполнено условие $\int\limits_0^{2p} f(j)\,dj=0$.

4) $u(r;\,j)=\dfrac{R\cdot R_1\cdot\sin j}{r\left(R_1-R\right)}+\dfrac{3R^2\cdot R_1^2\cdot\cos 2j}{2r^2\left(R_1^2-R^2\right)}+a_0$, где $a_0=\mathrm{const}$, при $A=\dfrac{3}{2}$; при $A\neq\dfrac{3}{2}$ не выполняется условие $\int\limits_0^{2p} f(j)\,dj=0$.

5) $u(r;\,j)=\dfrac{R\cdot R_1\cdot\sin j}{r\left(R_1-R\right)}+\dfrac{R^5\cdot R_1^5\cdot\cos 5j}{r^5\left(R_1^5-R^5\right)}+a_0$, где $a_0=\mathrm{const}$.

XI. **1**) $u(x;\, y) = A$, при $A = 0$. При $A \neq 0$ задача поставлена неправильно.

2) $u(x;\, y) = \frac{1}{2} R\left(x^2 - y^2\right) + \mathrm{const}$, при $A = \frac{1}{2} R$. При $A \neq \frac{1}{2} R$ задача поставлена неправильно.

3) $u(x;\, y) = R \cdot xy + \mathrm{const}$.

4) $u(x;\, y) = -\frac{A}{4} \cdot R\left(x^2 - y^2\right) + \mathrm{const}$, при $B = \frac{A}{2} \cdot R^2$. При $B \neq \frac{A}{2} \cdot R^2$ задача поставлена неправильно.

5) $u(x;\, y) = \frac{A}{2} \cdot R\left(x^2 - y^2\right) + R \cdot y + \mathrm{const}$, при $B = A$. При $B \neq A$ задача поставлена неправильно.

XII. **1**) $u(x;\, y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{R^5}{r^4}\left(x^2 - y^2\right) + \mathrm{const}$, при $A = \frac{1}{2} \cdot R^2$. При $A \neq \frac{1}{2} \cdot R^2$ задача поставлена неправильно.

2) $u(x;\, y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{R^5}{r^4}\left(y^2 - x^2\right) - \frac{1}{r^2} \cdot AR^3 \cdot y + \mathrm{const}$, при $B = \frac{1}{2} \cdot R^2$. При $B \neq \frac{1}{2} \cdot R^2$ задача поставлена неправильно.

3) $u(x;\,y)=\frac{1}{4}\cdot\frac{R^5}{r^4}\left(x^2-y^2\right)-\frac{R^5}{r^4}\cdot xy+\text{const}$, при $B=\frac{A}{2}\cdot R^2$. При $B\neq\frac{A}{2}\cdot R^2$ задача поставлена неправильно.

4) $u(x;\,y)=\frac{(1+A)}{4}\cdot\frac{R^5}{r^4}\left(y^2-x^2\right)+\text{const}$, при $B=\frac{A-1}{2}\cdot R^2$. При $B\neq\frac{A-1}{2}\cdot R^2$ задача поставлена неправильно.

69. $u(r;\,j\,)=-\frac{1}{p}\cdot\text{arctg}\,\frac{\mathrm{R}^2-r^2}{2R\cdot r\cdot\sin j}$.

70. $u(r;\,j\,)=\frac{8}{3}\cdot\text{sh}\left(\ln r\right)\cdot\sin j$.

71. **1)** $u(x;\,y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,x}{2p}\cdot\text{sh}\frac{(2k+1)p\,y}{2p}$,

где $a_k=\frac{2}{p}sh^{-1}\frac{(2k+1)p\,q}{2p}\cdot\int\limits_0^p f(x)\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,x}{2p}dx,\ k=\overline{0;\infty}$.

2) $u(x;\,y)=\frac{(pB-2A)y}{2q}+A-\frac{4pB}{p^2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)p\,x}{p}\cdot\text{sh}\frac{(2k+1)p\,y}{p}}{(2k+1)^2\cdot\text{sh}\frac{(2k+1)p\,q}{p}}$.

3)

$$u(x;\, y)=\frac{8p^2B}{p^3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k p^2(2k+1)^2-2}{(2k+1)^3\cdot\text{ch}\,\frac{(2k+1)p\,q}{2p}}\cdot\cos\frac{(2k+1)p\,x}{2p}\cdot\text{sh}\,\frac{(2k+1)p\,y}{2p}.$$

4) $$u(x;\, y)=U-\frac{4U}{p}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{ch}^{-1}\frac{(2k+1)p\,q}{2p}}{2k+1}\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,x}{2p}\cdot\text{ch}\,\frac{(2k+1)p\,y}{2p}+$$

$$+\frac{2p}{\Pi}\left[T\cdot\text{sh}\,\frac{p\,y}{2p}-\left(\frac{2U}{p}+T\cdot\text{sh}\,\frac{p\,q}{2p}\right)\cdot\text{ch}\,\frac{p\,y}{2p}\cdot\text{ch}^{-1}\frac{p\,q}{2p}\right]\cdot\sin\frac{p\,x}{2p}.$$

5) $$u(x;\, y)=\frac{4Aq}{p^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\cdot\cos\frac{(2k+1)p\,p}{q}}\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,y}{q}\times$$

$$\times\text{sh}\,\frac{(2k+1)p\,x}{q}+\frac{4U}{p}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)p\,x}{2p}}{(2k+1)\cdot\text{sh}\,\frac{(2k+1)p\,q}{2p}}\cdot\text{sh}\,\frac{(2k+1)p\,y}{2p}.$$

6) $$u(x;\, y)=\frac{2qT}{p}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot\left(\frac{\sin\frac{kp\,x}{p}\cdot\text{sh}\,\frac{kp\,y}{p}}{\text{sh}\,\frac{kp\,q}{p}}+\frac{\sin\frac{kp\,y}{q}\cdot\text{sh}\,\frac{kp\,x}{q}}{\text{sh}\,\frac{kp\,p}{q}}\right).$$

7) $$u(x;\, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cdot\exp\left(\frac{kp\,y}{p}\right)+b_k\cdot\exp\left(-\frac{kp\,y}{p}\right)\right]\cdot\sin\frac{kp\,x}{p},$$

где a_k, b_k – являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a_k + b_k = \dfrac{2}{p} \cdot \displaystyle\int_0^p j_1(x) \cdot \sin \dfrac{kp\, x}{p} dx, \\ a_k \cdot \exp\left(\dfrac{kp\, q}{p}\right) + b_k \cdot \exp\left(-\dfrac{kp\, q}{p}\right) = \dfrac{2}{p} \cdot \displaystyle\int_0^p j_2(x) \cdot \sin \dfrac{kp\, x}{p} dx; \end{cases}$$

или $a_k = \dfrac{1}{p} \cdot \mathrm{sh}^{-1} \dfrac{kp\, x}{p} \cdot \displaystyle\int_0^p \left[j_2(x) - j_2(x) \cdot \exp\left(-\dfrac{kp\, q}{p}\right)\right] \cdot \sin \dfrac{kp\, x}{p} dx,$

$$b_k = \frac{1}{p} \cdot \mathrm{sh}^{-1} \frac{kp\, q}{p} \cdot \int_0^p \left[j_1(x) \cdot \exp\left(\frac{kp\, q}{p}\right) - j_2(x) \right] \cdot \sin \frac{kp\, x}{p} dx, \ k = \overline{1;\infty}.$$

8) $u(x;\, y) = \dfrac{2}{p} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathrm{sh} \dfrac{kp\,(q-y)}{p} \cdot \displaystyle\int_0^p y_1(x) \cdot \sin \dfrac{kp\, x}{p} dx + \right.$

$$\left. + \mathrm{sh} \frac{kp\, y}{p} \cdot \int_0^p y_2(x) \cdot \sin \frac{kp\, x}{p} dx \right] \cdot \frac{\sin \dfrac{kp\, x}{p}}{\mathrm{sh} \dfrac{kp\, q}{p}} + \frac{2}{q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathrm{sh} \frac{kp\,(p-x)}{q} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^q j_1(y) \cdot \sin \frac{kp\, y}{q} dy + \mathrm{sh} \frac{kp\, x}{q} \cdot \int_0^q j_2(y) \cdot \sin \frac{kp\, y}{q} dy \right] \cdot \frac{\sin \dfrac{kp\, y}{q}}{\mathrm{sh} \dfrac{kp\, p}{q}}.$$

9) $u(x;\, y) = \dfrac{8Aq^2}{p^3} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\mathrm{sh} \dfrac{(2k+1)p\,(p-x)}{q}}{(2k+1)^3} \cdot \dfrac{\sin \dfrac{(2k+1)p\, y}{q}}{\mathrm{sh} \dfrac{(2k+1)p\, p}{q}} +$

$$+B\cdot\frac{\operatorname{sh}\dfrac{p\,(q-y)}{p}}{\operatorname{sh}\dfrac{p\,q}{p}}\cdot\sin\frac{p\,x}{p}.$$

$$\mathbf{10)}\ u(x;\,y)=\frac{4U}{p}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)p\,(p-x)}{q}}{(2k+1)}\cdot\frac{\sin\dfrac{(2k+1)p\,y}{q}}{\operatorname{sh}\dfrac{(2k+1)p\,p}{q}}.$$

$$\mathbf{11)}\ u(x;\,y)=\frac{2}{p}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\operatorname{ch}\frac{kp\,y}{p}\cdot\int_0^p y_2(x)\cdot\sin\frac{kp\,x}{p}dx+$$

$$+\operatorname{ch}\frac{kp\,(q-y)}{p}\cdot\int_0^p y_1(x)\cdot\sin\frac{kp\,x}{p}dx\Bigg]\cdot\frac{\sin\dfrac{kp\,x}{p}}{k\cdot\operatorname{sh}\dfrac{kp\,q}{p}}+\frac{2}{q}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\operatorname{sh}\frac{kp\,x}{q}\times$$

$$\times\int_0^q j_2(y)\cdot\cos\frac{kp\,y}{q}dy+\operatorname{sh}\frac{kp\,(p-x)}{q}\cdot\int_0^q j_1(y)\cdot\cos\frac{kp\,y}{q}dy\Bigg]\cdot\frac{\cos\dfrac{kp\,y}{q}}{\operatorname{sh}\dfrac{kp\,p}{q}}+$$

$$+\frac{p-x}{pq}\cdot\int_0^q j_1(y)\,dy+\frac{x}{pq}\cdot\int_0^q j_2(y)\,dy.$$

$$\mathbf{12)}\ u(x;\,y)=\frac{2}{p}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[\operatorname{ch}\frac{(2k+1)p\,(y-q)}{2p}\cdot\int_0^p y_1(x)\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,x}{2p}dx+$$

$$+\frac{2p}{(2k+1)p}\cdot\operatorname{sh}\frac{(2k+1)p\,y}{2p}\cdot\int_0^p y_2(x)\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,x}{2p}dx\Bigg]\cdot\frac{\sin\dfrac{(2k+1)p\,x}{2p}}{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)p\,q}{p}}+$$

$$+\frac{2}{q}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left[\operatorname{ch}\frac{(2k+1)p\,(x-p)}{2q}\cdot\int_{0}^{q} j_{1}(y)\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,y}{2q}\,dy+\frac{2q}{(2k+1)p}\times\right.$$

$$\left.\times\operatorname{sh}\frac{(2k+1)p\,x}{2q}\cdot\int_{0}^{q} j_{2}(y)\cdot\sin\frac{(2k+1)p\,y}{2q}\,dy\right]\cdot\frac{\sin\dfrac{(2k+1)p\,y}{2q}}{\operatorname{ch}\dfrac{(2k+1)p\,p}{2q}}.$$

72. $u(x;\,t)=\dfrac{Awa}{E}\left(\dfrac{\sin\dfrac{w}{a}x\cdot\sin wt}{w^{2}\cdot\cos\dfrac{w}{a}l}+\dfrac{2a}{l}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\cdot\dfrac{\sin\dfrac{w_{k}}{a}x\cdot\sin w_{k}t}{\left(w_{k}^{2}-w^{2}\right)\cdot w_{k}}\right).$

73. $u(x;\,t)=A\cdot\cos\dfrac{p\,a}{l}t\cdot\sin\dfrac{p}{l}x.$

74. $u(x;\,t)=A\cdot\cos\dfrac{kp\,a}{l}t\cdot\cos\dfrac{kp}{l}x.$

75. $u(x;\,t)=B\cdot\sin\dfrac{kp\,a}{l}t\cdot\sin\dfrac{kp}{l}x.$

76. $u(x;\,t)=u_{0}\cdot\Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{4a^{2}t}}\right)=u_{0}\cdot\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{p}}\cdot\displaystyle\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{4a^{2}t}}}e^{-y^{2}}\,dy\right).$

77. $u(x;\, t) = \dfrac{2}{\sqrt{p}} \cdot \displaystyle\int\limits_{\frac{x}{\sqrt{4a^2 t}}}^{\infty} f\left(t - \dfrac{x^2}{4a^2 y^2}\right) \cdot e^{-y^2}\, dy$.

78. $U(x;\ p) = \dfrac{u_0 \cdot \mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{p}}{a} l + (u_1 - u_0) \cdot \mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{p}}{a} x}{p \cdot \mathrm{ch}\dfrac{\sqrt{p}}{a} l} = \dfrac{b_1(p)}{b_2(p)}$, затем оригинал $u(x;\, t)$ находится по теореме вычетов.

79. $u(x;\, t) = A \cdot \exp\left(-\left(\dfrac{kp\, a}{l}\right)^2 t\right) \cdot \sin\dfrac{kp}{l} x$.

80. $u(x;\, t) = u_0 \cdot \left(\dfrac{x}{l} + \dfrac{2}{p} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} \cdot \exp\left(-\left(\dfrac{kp\, a}{l}\right)^2 t\right) \cdot \sin\dfrac{kp}{l} x\right)$.

81. $u(x;\, t) = A \cdot \Phi\left(\dfrac{x}{\sqrt{4a^2 t}}\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам решения задач, предложенных в практикуме, студенты должны освоить разделы: краевые задачи для уравнений гиперболического типа, краевые задачи для уравнений параболического типа и краевые задачи для уравнений эллиптического типа.

Все разделы принадлежат к задачам классических уравнений математической физики. Для студентов специальности «Прикладная математика» задачи практикума являются базовыми и завершают изучение «Уравнений математической физики» в рабочей программы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975, 128 с.
2. Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудерн А.Д. Физические основы математического моделирования; Учебн. пос. М.: Академия, 2006, 320 с.
3. Евдокимов М.А., Гревцева В.Н. Математика – 10 для студентов вузов. Мат.физика; Учебн. пособ. Самар. Гос. Техн. Ун-т. Самара, 2004, 60с.
4. Алиев Р.Г. Сборник задач по уравнениям в частных производных. – М.: Экзамен, 2006.
5. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974.
6. Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985.

7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981.
8. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982.
9. Будак А.В., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972.
10. Владимиров В.С., Вашарин А.А. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
11. Владимиров В.С., Михайлов В.П. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1974.
12. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II. – М.: Высшая школа,1980.
13. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАЗДЕЛ 3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Учебное издание

Практикум по уравнениям математической физики

КУРИЛОВА Ольга Евгеньевнна
ПРОСВИРКИНА Елена Анатольевна

Редактор *Ю.А. Петропольская*
Вёрстка *И.О. Миняева*
Выпускающий редактор *Е.В. Абрамова*

Подписано в печать 11.10.12.
Формат $60 \times 84\ 1/16$. Бумага офсетная.
Усл. п. л. 4,72. Уч.-изд. л. 4,2.
Тираж 50 экз. Рег. .№ 154/12

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус № 8