ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра прикладной математики и информатики

Вариационное исчисление

Задачи и упражнения

Самара 2006

Составители О.Е.Курилова, Н.Н. Попов

УДК 517.1 (075.8)

Вариационное исчисление: Задачи и упражнения/ Самар. гос. техн. ун-т. *О.Е. Курилова, Н.Н. Попов*. Самара, 2006. 24 с.

Содержит задачи и упражнения по основным разделам классического вариационного исчисления. В начале каждого раздела приводится сводка основных теоретических положений и формул. Сборник задач рассчитан на студентов специальности «Прикладная математика и информатика».

Библиогр.:7 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

Вариация функционала и ее свойства

Говорят, что кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, близки в смысле близости нулевого порядка, если $\left|y(x) - y_1(x)\right|$ мал на $[a,b]$.

Будем говорить, что кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, заданные на отрезке $[a,b]$, близки в смысле близости первого порядка, если $\left|y(x) - y_1(x)\right|$ и $\left|y'(x) - y_1'(x)\right|$ малы на $[a,b]$.

Кривые $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$ близки в смысле близости $k-$го порядка, если модули $\left|y(x) - y_1(x)\right|, \left|y'(x) - y_1'(x)\right|, \cdots, \left|y^{(k)}(x) - y_1^{(k)}(x)\right|$ малы на $[a,b]$.

Расстоянием нулевого порядка между любыми двумя функциями $y = y(x)$ и $y = y_1(x)$, принадлежащими классу $C_{[a,b]}$, называется число

$$r_0(y, y_1) = \max_{a \le x \le b} \left|y_1(x) - y_1(x)\right|.$$

Расстоянием первого порядка между функциями $y(x)$ и $y_1(x)$ из класса $C^1_{[a,b]}$ называется число

$$r_1(y, y_1) = \max_{a \le x \le b} \left\{\left|y(x) - y_1(x)\right|, \left|y'(x) - y_1'(x)\right|\right\}.$$

Аналогично можно ввести понятие расстояния $\rho_n(y, y_1)$ между функциями $y(x)$ и $y_1(x)$ из класса $C^{(n)}_{[a,b]}$.

Функционал $v\left[y(x)\right]$, называется непрерывным при $y = y_0(x)$ в смысле близости $n-$го порядка, если для любого числа $e > 0$ существует число $h > 0$, что для всех функций $y = y(x)$, удовлетворяющих условию $r_n(y, y_0) < h$ выполняется неравенство $\left|v\left[y(x)\right] - v\left[y_0(x)\right]\right| < e$.

Полагая

$$y^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x) + a w^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n),$$

где a – некоторый параметр, а $w(x)$ – произвольная функция, замечаем, что $\lim\limits_{a \to 0} y^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$ и определение непрерывности функционала при $y = y_0(x)$ можно записать так:

$$\lim_{a \to 0} v\left[y_0(x) + a w(x)\right] = v\left[y_0(x)\right].$$

Первое определение вариации функционала. Если приращение функционала $\Delta v = v\left[y(x) + d y\right] - v\left[y(x)\right]$ можно представить в виде

$$\Delta v = L\left[y(x), d y\right] + b\left(y(x), d y\right) \cdot \left\| d y \right\|,$$

где $L\left[y(x), d y\right]$ – линейный по $d y$ функционал и $b\left(y(x), d y\right) \to 0$ при $\left\| d y \right\| \to 0$, то линейная относительно $d y$ часть приращения функционала, т.е. $L\left[y(x), d y\right]$, называется вариацией функционала.

Второе определение вариации функционала. Вариацией функционала $v\left[y(x)\right]$ называется значение производной функционала $v\left[y(x) + a d y\right]$ по параметру a, когда $a = 0$:

$$d v = \frac{\partial}{\partial a} v\left[y(x) + a d y\right]\Big|_{a=0}.$$

Часть А

Установить порядок близости кривых:

1. $y(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2 + 1}, \quad y_1(x) \equiv 0$ на $[0, 2p]$.

2. $y(x) = \dfrac{\sin nx}{n^3}, \quad y_1(x) \equiv 0$ на $[0, p]$.

3. Найти расстояние между кривыми $y = xe^{-x}$ и $y_1 = 0$ на отрезке $[0, 2]$.

4. Найти расстояние между кривыми $y = x^2$ и $y_1 = x^3$ на отрезке $[0,1]$.

5. Найти расстояние первого порядка между кривыми $y = x$ и $y = \ln x$ на отрезке $\left[e^{-1}, e\right]$.

6. Показать, что функционал

$$v\left[y(x)\right] = \int_0^p y'^2(x)\,dx,$$

определенный на $C^1_{[0,p]}$, является непрерывным на функции $y_0(x) \equiv 0$ в смысле близости первого порядка.

7. Показать, что функционал

$$v\left[y(x)\right] = \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + y^2(x)}\,dx,$$

определенный на $C_{[0,1]}$, непрерывен на функции $y_0(x)=x^2$ в смысле близости нулевого порядка.

Найти вариации следующих функционалов в смысле первого определения:

8. $v\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1 xy^3(x)\,dx.$

9. $v\left[y(x)\right]=\int\limits_a^b yy'dx.$

Найти вариации следующих функционалов в смысле второго определения:

10. $v\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1 \left(xy+y'^2\right)dx.$

11. $v\left[y(x)\right]=\int\limits_0^2 x^2\sqrt{1+y^2}\,dx.$

12. Пусть функционал

$$v\left[y(x)\right]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$$

определен в пространстве $C^1_{[a,b]}$. Функция $F(x,y,y')$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно по всем аргументам. Доказать, что вариация этого функционала имеет вид

$$d\,v[y]=\int\limits_a^b \left(F_y d\,y+F_{y'}d\,y'\right)dx.$$

Используя результат задачи №12, найти вариации следующих функционалов:

13. $v\left[y(x)\right]=\int\limits_a^b \left(y'e^{-2y}-xy^3\right)dx.$

14. $v\left[y(x)\right]=\int\limits_0^1 \left(xy'^2+(x+1)y^2\right)dx.$

Часть Б

Установить порядок близости кривых:

15. $y(x)=\dfrac{\sin x}{n},\quad y_1(x)\equiv 0$ на $[0,p]$.

16. $y(x)=\sin\frac{x}{n^2}, \quad y_1(x)\equiv 0$ на $[0,p]$.

17. Найти расстояние между кривыми $y=\sin 2x$ и $y_1=\sin x$ на отрезке $\left[0,\frac{p}{2}\right]$.

18. Найти расстояние второго порядка между кривыми $y=x$ и $y_1=x-\cos x$ на отрезке $\left[0,\frac{p}{3}\right]$.

19. Исследовать на непрерывность функционал:

$$v\left[y(x)\right]=\int_0^p \sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

определенный на $C^1_{[0,p]}$, на функции $y_0(x)\equiv 0$ в смысле близости первого порядка.

20. Исследовать на непрерывность функционал

$$v\left[y(x)\right]=\int_0^1 x^2\sqrt{y+y'^2}\,dx,$$

определенный на множестве функций $y(x)\in C^1_{[0,1]}$, на функции $y_0(x)=2x$ в смысле близости первого порядка.

Найти вариацию следующих функционалов:

21. $v\left[y(x)\right]=\int_1^2\left(y'y+xy'^2\right)dx.$ 22. $v\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(x^2y-2yy'^2\right)dx.$

23. $v\left[y(x)\right]=\int_0^2\left(y'\cos y-2xy^2\right)dx.$ 24. $v\left[y(x)\right]=\int_1^3\left(y^3y'+xy^2\right)dx.$

Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Пусть функционал

$$v\left[y(x)\right]=\int_a^b F(x,y,y')dx \tag{1}$$

определен в классе $C^1_{[a,b]}$, а подынтегральная функция непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно.

Если функция $y=y(x)\in C^1_{[a,b]}$, удовлетворяет граничным условиям $y(a)=y_0,\ y(b)=y_1$ и реализует экстремум функционала (1), то она является решением уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

или в развернутой форме

$$y'' F_{y'y'} + y' F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0 .$$

Интегральные кривые уравнение Эйлера называются экстремалями.

Часть А

25. Составить уравнение Эйлера для функционала

$$v[y] = \int_a^b \left(yy'^2 + xy^2 \right) dx .$$

Найти экстремали следующих функционалов:

26. $v[y] = \int_0^1 (x\cos y + \sin y)\, dx; \quad y(0) = \frac{p}{2},\ y(1) = \frac{p}{4}$.

27. $v[y] = \int_0^1 \left(yshx - y^2 chx \right) dx; \quad y(0) = 1,\ y(1) = 1$.

28. $v[y] = \int_0^2 \left(\left(x^3 - e^{-y} \right) y' + xy^2 \right) dx; \quad y(0) = 0,\ y(2) = a$.

29. $v[y] = \int_1^2 \left(\left(2x + x^2 y' \right) e^y - x^2 - 3y^2 y' \right) dx; \quad y(1) = 0,\ y(2) = 4$.

30. $v[y] = \int_0^2 \left(2y'^3 + 2y' - 3 \right) dx; \quad y(0) = 1,\ y(2) = 4$.

31. $v[y] = \int_1^2 y' \left(1 + x^2 y' \right) dx; \quad y(1) = 3,\ y(2) = 5$.

32. $v[y] = \int_0^{\frac{p}{12}} \left(y'^2 - 4y^2 \right) dx; \quad y(0) = 0,\ y\left(\frac{p}{12} \right) = \frac{1}{2}$.

33. $v[y] = \int_1^e \left[\frac{2y}{x} + yy' + x^2 y'^2 \right] dx; \quad y(1) = 1,\ y(e) = 0$.

34. $v[y] = \int_0^{ln2} \left(y'^2 + 2y^2 + 2y \right) e^{-x} dx; \quad y(0) = 0,\ y(ln2) = -0,5$.

35. $v[y] = \int_{-2}^{-1} \left(2yy' - x^2 y'^2 \right) dx; \quad y(-2) = 1,5,\ y(-1) = 2$.

36. $v[y]=\int\limits_0^{\frac{p}{4}}\left(\frac{y'^2}{\cos x}+\frac{y}{\cos^2 x}\right)dx;\quad y(0)=0,\ y\left(\frac{p}{4}\right)=0{,}5$.

37. $v[y]=\int\limits_0^{\frac{p}{8}}\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx;\quad y(0)=0,\ y\left(\frac{p}{8}\right)=2$.

38. $v[y]=\int\limits_0^{1}y'^2e^{\sin y'}dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=-4$.

Часть Б

Найти экстремали следующих функционалов:

39. $v[y]=\int\limits_3^{6}x\left(x+3y\right)^2dx;\quad y(3)=-1,\ y(6)=3$.

40. $v[y]=\int\limits_1^{2}\frac{1}{x^2}\left(xy'-y\right)dx;\quad y(1)=0,\ y(2)=2$.

41. $v[y]=\int\limits_1^{4}\left(\left(xy'+y\right)^2+\left(1+x^2\right)y'\right)dx;\quad y(1)=-\frac{1}{2},\ y(4)=\frac{5}{2}$.

42. $v[y]=\int\limits_1^{e}\left(xy'^2+yy'\right)dx;\quad y(1)=0,\ y(e)=1$.

43. $v[y]=\int\limits_0^{1}\left(y^2+y'^2+2ye^x\right)dx;\quad y(0)=0,\ y(1)=\frac{e}{2}$.

44. $v[y]=\int\limits_0^{1}\left(e^x\left(y'-x\right)^2+2y\right)dx;\quad y(0)=1,\ y(1)=\frac{1}{2}$.

45. $v[y]=\int\limits_1^{4}\left(y'^2+\frac{3y^2}{4x^2}\right)dx;\quad y(1)=1,\ y(4)=8$.

46. $v[y]=\int\limits_0^{\frac{p}{8}}\left(y'^2-\frac{16}{9}y^2+32y\right)dx;\quad y(0)=9,\ y\left(\frac{p}{8}\right)=1$.

47. $v[y]=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y'^2}{\left(x-1\right)^2}-\frac{2y^2}{x\left(x-1\right)^3}\right)dx;\quad y\left(\frac{1}{4}\right)=1,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=2$.

48. $v[y]=\int\limits_0^{1}\left(y'^2\sqrt{4-x^2}-2y\right)dx;\quad y(0)=2,\ y(1)=\sqrt{3}$.

Обобщения простейшей вариационной задачи

Если функционал $v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int\limits_a^b F\left(x, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n'\right)dx$,

где $F -$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, достигает экстремума на системе функций $y_1, y_2, ..., y_n \in C^1_{[a,b]}$, то эта система функций является решением системы дифференциальных уравнений Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx}F_{y_i'} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если функционал

$$v[y] = \int\limits_a^b F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)dx$$

определенный на множестве функций из $C^n_{[a,b]}$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = y_{a0},\ y'(a) = y'_{a1}, ...,\ y^{(n-1)}(a) = y_{an-1};$$
$$y(b) = y_{b0},\ y'(b) = y'_{b1}, ...,\ y^{(n-1)}(b) = y_{bn-1} \quad ,$$

достигает экстремума на некоторой функции $y(x) \in C^{2n}_{[a,b]}$, то эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx}Fy' + \frac{d^2}{dx^2}Fy'' + ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0.$$

Если функционал

$$v[z(x, y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{dy}\right)dxdy,$$

где $F -$ дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов достигает экстремума на некоторой функции $z(x, y) \in C^2_D$, то эта функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных (уравнение Остроградского)

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}F_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{z_y} = 0.$$

Часть А

Найти семейства экстремалей заданных функционалов:

49. $v[y, z] = \int\limits_1^2 \left(6y^2 + x^2y'^2 + z'^2\right)dx; \quad y(1) = z(1) = 1,\ y(2) = 4,\ z(2) = 2.$

50. $v[y,z]=\int\limits_{0,5}^{1}\left(3y'^2-2xyz'\right)dx;\quad y(0,5)=2,\ z(0,5)=15,\ y(1)=1,\ z(1)=1.$

51. $v[y,z]=\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}}\left(y'^2+z'^2+3yz\right)dx;\quad y(0)=0,\ z(0)=0,\ y\left(\frac{p}{2}\right)=1,$

$z\left(\frac{p}{2}\right)=-1.$

52. $v[y,z]=\int\limits_{0}^{1}\left(2y+z^2+y'^2+z'^2\right)dx;\quad y(0)=0,\ z(0)=1,\ y(1)=0,5,$

$z(1)=e^{-1}.$

Найти экстремали следующих функционалов:

53. $v[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(2e^x y-y''^2\right)dx;\quad y(0)=y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$

54. $v[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(y^2+2y'^2+y''^2\right)dx;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=0,$

$y'(1)=-sh1.$

55. $v[y]=\int\limits_{-1}^{0}\left(240y-y'''^2\right)dx;\quad y(-1)=1,\ y'(-1)=-4,5,\ y''(-1)=16,$

$y(0)=y'(0)=y''(0)=0.$

56. $v[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(yy'+y'^2+yy''+y'y''+y''2\right)dx;\quad y(0)=y'(0)=y(1)=0,$

$y'(1)=1.$

Написать уравнение Остроградского для функционала

57. $v\left[z(x,y)\right]=\iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^4+12zf(x,y)\right]dxdy.$

Часть Б

Найти семейства экстремалей заданных функционалов:

58. $v[y,z]=\int\limits_{1}^{2}\left(z'^2-xy'z\right)dx;\quad y(1)=z(1)=1,\ y(2)=-\frac{1}{6},$

$z(2)=\frac{1}{2}.$

59. $v[y,z]=\int\limits_0^1\left(y'^2+z'^2+2y\right)dx;\quad y(0)=1,\ y(1)=\frac{3}{2},\ z(0)=0,\ z(1)=1$.

60. $v[y,z]=\int\limits_0^1\left(y^2+z^2+y'^2+z'^2\right)dx;\ y(0)=z(0)=1,\ y(1)=z(1)=e$.

Найти экстремали следующих функционалов:

61. $v[y]=\int\limits_0^1\left(-2xy+y''^2\right)dx;\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{120},\ y'(1)=\frac{1}{12}$.

62. $v[y]=\int\limits_0^{\frac{p}{2}}\left(y^2-2y'^2+y''^2\right)dx;\ y(0)=y'(0)=0,\ y\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{p}{2},\ y'\left(\frac{p}{2}\right)=1$.

63. $v[y]=\int\limits_0^1\left(y'^2+y''^2\right)dx;\quad y(0)=0, y(1)=sh1,\ y'(0)=0,\ y'(1)=ch1$.

Написать уравнение Остроградского для функционала:

64. $v\left[z(x,y)\right]=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$.

Вариационная задача с подвижными границами

Если функция $y=y(x)\in C^1_{[x_0,x_1]}$ дает экстремум функционала

$$v[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

при условии, что граничная точка (x_0,y_0) задана, а вторая граничная точка может перемещаться вдоль кривой $y_1=j(x_1)$, то выполняются

а) уравнение Эйлера

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0,$$

б) условие трансверсальности

$$\left(F+(j'-y')F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1}=0.$$

Если граничная точка (x_1,y_1) может перемещаться лишь по вертикальной прямой, то условие трансверсальности имеет вид

$$F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0.$$

Если граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по горизонтальной прямой $y = y_1$, то условие трансверсальности принимает вид

$$\left(F - y'F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1} = 0 .$$

Условие трансверсальности для функционала

$$v[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} f\left(x, y, z, y', z'\right)dx \qquad (1)$$

при условии, что граничная точка (x_0, y_0, z_0) закреплена, а другая граничная точка перемещается вдоль кривой $y_1 = j\,(x_1)$; $z_1 = y\,(x_1)$, имеет вид

$$\left(F + (j\,' - y')F_{y'} + (y\,' - z')\right)F_{z'}\Big|_{x=x_1} = 0 .$$

Если граничная точка (x_0, y_0, z_0) неподвижна, а другая граничная точка может перемещаться по некоторой поверхности $z_1 = j\,(x_1, y_1)$, то условия трансверсальности для функционала (1) имеют вид:

$$\left(F - y'F_{y'} + (j\,'_x - z')\right)F_{z'}\Big|_{x=x_1} = 0 ,$$

$$\left(F_{y'} + F_{z'}j\,'_y\right)\Big|_{x=x_1} = 0 .$$

Часть А

65. Найти экстремаль функционала

$$v[y] = \int_0^{p/4} \left(y'^2 - y^2 + 4y\cos x\right)dx ,$$

если $y(0) = 0$, а другая граничная точка перемещается вдоль вертикальной прямой $x = \dfrac{p}{4}$.

66. Найти условие трансверсальности при $x = x_1$ для функционала

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx ,$$

где $A(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция.

67. Найти экстремаль функционала

$$v[y] = \int_0^{x_1} \left(yy' + y'^2 + 1\right)dx ,$$

если $y(0) = 1$, а $y(x_1) = -3$.

68. Найти экстремаль функционала

$$v[y]=\int_0^{x_1} y'^2 dx,$$

если $y(0)=0$, а $y(x_1)=-x_1-1$.

69. Используя методы вариационного исчисления найти расстояние от начала координат до кривой $x^2 y=1$.

70. Используя методы вариационного исчисления найти расстояние между параболой $y=x^2$ и прямой $y=x-5$.

71. Используя методы вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние от точки $M(0,0,3)$ до поверхности $z=x^2+y^2$.

72. Найти решение с угловой точкой в задаче об экстремуме функционала

$$v[y]=\int_{-1}^{1} y^2\left(1-y'^2\right)dx;\ y(-1)=0,\ y(1)=1.$$

73. Найти допустимые экстремали функционала

$$v[y]=\int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx,$$

если $y(0)=0$, а точка (x_1,y_1) может перемещаться по прямой $y_1=x_1-3$.

Часть Б

74. Найти условия трансверсальности при $x=x_1$ для функционала

$$v[y]=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} y'}\sqrt{1+y'^2}dx, \qquad f(x,y)\neq 0.$$

75. Найти экстремаль функционала

$$v[y]=\int_1^2\left(x^3y'^2-8\left(x^2-x\right)yy'+4y^2+8x^2y'\right)dx,$$

если $y(2)=-7$, а другая граничная точка перемещается вдоль вертикальной прямой $x=1$.

76. Найти экстремаль функционала

$$v[y]=\int_1^3\left(8yy'\ln x-xy'^2+6xy'\right)dx,$$

если $y(1)=1$, а другая граничная точка перемещается вдоль вертикальной прямой $x=3$.

77. Найти экстремаль функционала

$$v[y]=\int_0^{x_1}\left(-2y+y'^2\right)dx,$$

если $y(0)=0$, а $y(x_1)=-2$.

78. Найти экстремаль функционала

$$v[y]=\int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

если $y(0)=0$, а $y(x_1)=x_1-1$.

79. Используя методы вариационного исчисления найти расстояние от точки $A(5,-1)$ до параболы $y=x^2$.

80. Используя методы вариационного исчисления найти расстояние между окружностью $x^2+y^2=1$ и прямой $y=4-x$.

81. Найти решение с угловой точкой в задаче об экстремуме функционала

$$v[y]=\int_0^{2}\left(y'^2+2xy-y^2\right)dx;\ y(0)=1,\ y(2)=4.$$

Достаточные условия экстремума

Рассматривается простейшая вариационная задача для функционала

$$v[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx \tag{1}$$

при граничных условиях

$$y(x_0)=y_0,\, y(x_1)=y_1. \tag{2}$$

Достаточные условия Вейерштрасса. Функцией Вейерштрасса $E(x,y,p,y')$ называется функция, определяемая равенством

$$E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_{y'}(x,y,p),$$

где $p=p(x,y)$ –наклон поля экстремалей в точке (x,y).

Кривая C доставляет экстремум функционалу (1), если:

1. Кривая C является экстремалью функционала (1), удовлетворяющей граничным условиям (2).

2. Экстремаль C может быть включена в поле экстремалей.

3а. Для сильного экстремума. Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')$ сохраняет знак во всех точках (x,y), близких к экстремали C, и для произвольных значений y'. В случае минимума $E\ge 0$, а в случае максимума $E\le 0$.

3б. Для слабого экстремума. Функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках (x, y), близких к экстремали C , и для близких к $p(x, y)$ значений y'. В случае минимума $E \geq 0$, в случае максимума $E \leq 0$.

Достаточное условия Лежандра. Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывную частную производную $F_{y'y'}(x, y, y')$ и пусть экстремаль C включена в поле экстремалей. Если на экстремали C имеем $F_{y'y'} > 0$, то на кривой C достигается слабый минимум; если $F_{y'y'} < 0$ на экстремали C , то на ней достигается слабый максимум.

В том случае, когда $F_{y'y'} \geq 0$ в точках (x, y), близких к экстремали C , при произвольных значениях y', то имеем сильный минимум, а в случае, когда для указанных значений аргументов $F_{y'y'} \leq 0$, имеем сильный максимум.

Часть А

Образуют ли поле (собственное или центральное) следующие семейства кривых в указанных областях:

82. $y = \cos x$; а) $|x| < \frac{p}{4}$; б) $\frac{p}{2} < x \leq p$; в) $|x| \leq p$.

83. $y = C\left(x^2 + 2x\right)$; а) $-1 < x \leq 0$; б) $-3 \leq x \leq 1$; в) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$.

84. $y = C\sin\left(x - \frac{p}{3}\right)$; а) $\frac{p}{3} \leq x < \frac{p}{2}$; б) $\frac{2p}{3} \leq x \leq p$; в) $\frac{p}{8} \leq x \leq 2p$.

85. $y = e^{x+C}$; $x^2 + y^2 \leq 1$.

Показать, что экстремали следующих вариационных задач можно включить в поле экстремалей:

86. $v[y] = \int\limits_{-1}^{1} y'\left(2x - \frac{1}{2}y'\right)dx$; $y(-1) = 0$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

87. $v[y] = \int\limits_{0}^{1} \left(y'^2 - 2xy\right)dx$; $y(0) = y(1) = 0$.

Найти C – дискриминант следующих семейств кривых:

88. $y(C - x) - C^2 = 0$.

89. $y = (1 + Cx)e^x$.

Используя условие Вейерштрасса, исследовать следующие функционалы на экстремум:

90. $v[y]=\int\limits_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=e$.

91. $v[y]=\int\limits_1^2 y'\left(1+x^2y'\right)dx$; $y(1)=3$, $y(2)=5$.

92. $v[y]=\int\limits_0^1\left(x+2y+\frac{1}{2}y'^2\right)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=0$.

93. $v[y]=\int\limits_1^2\frac{x^3}{y'^2}dx$; $y(1)=1$, $y(2)=4$.

94. $v[y]=\int\limits_0^a\left(y'^2+2yy'-9y^2\right)dx$; $y(0)=0$, $y(a)=0$ $\quad(a>0)$.

Используя условия Лежандра, исследовать следующие функционалы на экстремум:

95. $v[y]=\int\limits_0^1 y'\left(y'^2-4\right)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=-2$.

96. $v[y]=\int\limits_1^2\left(xy'^4-2yy'^3\right)dx$; $y(1)=0$, $y(2)=1$.

97. $v[y]=\int\limits_0^1\left(y'^2+y^2+2ye^{2x}\right)dx$; $y(0)=\frac{1}{3}$, $y(1)=\frac{1}{3}e^2$.

98. $v[y]=\int\limits_0^1\left((1+x)e^xy+\frac{1}{2}e^xy'^2\right)dx$; $y(0)=1$, $y(1)=\frac{3}{2}$.

99. $v[y]=\int\limits_1^2\left(x^2y'^2+yy'+12xy\right)dx$; $y(1)=1$, $y(2)=5$.

Часть Б

100. Образует ли поле семейство кривые $y=(x-C)^3$ в области $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1$.

101. Для функционала $v[y]=\int\limits_0^{p/4}\left(y'^2-y^2+x^2+4\right)dx$ указать собственное и центральное поле экстремалей.

102. Показать, что экстремаль функционала

$$v[y]=\int_0^1\left(2e^x y+y'^2\right)dx;\ y(0)=1,\ y(1)=e.$$

можно включить в поле экстремалей.

103. Найти C - дискриминант семейства кривых $x\left(C^2+y\right)-Cy=0$.

Исследовать на экстремум следующие функционалы:

104. $v[y]=\int_0^2\left(6y'^2-y'^4+y'y\right)dx;\ y(0)=0,\ y(2)=4.$

105. $v[y]=\int_{-1}^1\left(y'^3+y'^2\right)dx;\ y(-1)=-1,\ y(1)=3.$

106. $v[y]=\int_1^3\left(x^2y'^2+x^2yy'+xy^2+4xy\right)dx;\ y(1)=y(3)=4.$

107. $v[y]=\int_1^2 e^{-2x}\left(y'^2-y^2\right)dx;\ y(1)=e,\ y(2)=e^2.$

108. $v[y]=\int_1^2 y^3y'^3dx;\ y(1)=2,\ y(2)=2\sqrt{2}.$

109. $v[y]=\int_{-2}^{-1}\left(x^3y'^2+3xy^2-\dfrac{6y}{x}\right)dx;\ y(-2)=\dfrac{1}{4},\ y(-1)=1.$

110. $v[y]=\int_0^1\left(y'^2\sqrt{4-x^2}-2y\right)dx;\ y(0)=2,\ y(1)=\sqrt{3}.$

Вариационные задачи на условный экстремум

Функции $y_1, y_2,..., y_n$, реализующие экстремум функционала

$$v[y_1,y_2,...,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F\left(x,y_1,y_2,...,y_n,y_1',y_2',...,y_n'\right)dx \qquad (1)$$

при наличии условий

$$j_i\left(x,y_1,y_2,...,y_n\right)=0 \quad \left(i=1,2,...,m;\quad m<n\right),$$

удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $l_i(x)$ $\left(i=1,2,...,m\right)$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала

$$v^*=\int_{x_0}^{x_1}\left(F+\sum_{i=1}^m l_i(x)j_i\right)dx. \qquad (2)$$

Если на функциях $y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющих дифференциальным условиям

$$j_i\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0 \quad \left(i = 1, 2, ..., m; \quad m < n\right),$$

функционал (1) достигает экстремума, то функции $y_1, y_2, ..., y_n$ удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $l_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., m)$ уравнениям Эйлера, составленной для функционала (2).

Для получения основного необходимого условия в изопериметрической задаче о нахождении экстремума функционала (1) при наличии связей

$$\int_{x_0}^{x_1} j_i\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) dx = l_i \qquad \left(i = 1, 2, ..., m\right)$$

надо составить вспомогательный функционал

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} l_i j_i\right) dx,$$

где l_i – постоянные, и написать для него уравнения Эйлера.

Часть А

Найти экстремали функционалов:

111. $v[y, z] = \int_0^1 \left(y'^2 + z'^2 - 2zy'\right) dx$;

$y(0) = 2$, $y(1) = e$, $z(0) = 1$, $z(1) = 0$ при условии $y = z + e^x$.

112. $v[y, z] = \int_0^1 \left(2xy - z'^2\right) dx$;

$y(0) = 0$, $y(1) = 1/5$, $z(0) = 2$, $z(1) = 3$ при условии $y' - z + 2 = 0$.

113. $v[y, z] = \int_0^1 \left(y'^2 + z'^2 + x^3\right) dx$;

$y(0) = 2$, $y(1) = 1$, $z(0) = 1$, $z(1) = 2$ при условии $y - 2z + 3x = 0$.

114. $v[y, z] = \int_0^1 \left(y'^2 + z^2\right) dx$;

$y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $z(0) = 1$, $z(1) = 0$ при условии $y' - z = 0$.

115. $v[y, z] = \int_0^{p/2} \left(y'^2 + z'^2 - 2z \sin x - 2y^2\right) dx$;

$y(0) = 1$, $y(p/2) = 0$, $z(0) = 1$, $z(p/2) = 2$ при условии $y = z - 2\sin x$.

Найти экстремали следующих изопериметрических задач

116. $v[y]=\int_0^1(2xy+y'^2)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=3$ при условии $\int_0^1 xydx=1$.

117. $v[y]=\int_0^1(y^2+y'^2)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=4e$ при условии $\int_0^1 ye^x dx=1+e^2$.

118. $v[y]=\int_0^1 y'^2 dx$; $y(0)=0$, $y(1)=5$ при условии $\int_0^1 xydx=1$.

119. $v[y]=\int_0^1(2yy'+y'^2)dx$; $y(0)=y(1)=0$ при условиях $\int_0^1(4xy'+yy')dx=4$.

Часть Б

120. $v[y,z]=\int_0^1(y^2+z^2+1)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=2$, $z(0)=0$, $z(1)=0$ при условии $y+z-2x^2=0$.

121. $v[y,z]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2+z'^2}dx$; $y(0)=1$, $y(1)=2$, $z(0)=2$, $z(1)=1$ при условии $2y-z-3x=0$.

122. $v[y,z]=\int_0^1(y^2+z^2)dx$; $y(0)=0$, $y(1)=1$, $z(0)=1$, $z(1)=1$ при условии $y'-z=0$.

123. $v[y,z]=\int_0^{p/2}(y'^2-z'^2)dx$; $y(0)=0$, $y\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{p}{4}$, $z(0)=0$, $z\left(\frac{p}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ при условии $y'-z-\sin x=0$.

Найти экстремали следующих изопериметрических задач

124. $v[y]=\frac{1}{2}\int_0^1 y'^2 dx$; $y(0)=y(1)=0$ при условии $\int_0^1 xydx=2$.

125. $v[y]=\int_0^1 y'^2 dx$; $y(0)=y(1)=0$ при условии $\int_0^1 y dx=-1$.

126. $v[y]=\int_0^1 \left(yy'+2y'^2\right)dx$; $y(0)=y(1)=0$ при условии $\int_0^1 (yy'-8xy')\,dx=8$.

Ответы

1. Первый. **2.** Второй. **3.** $e-1$. **4.** $\frac{4}{27}$. **5.** 2. **8.** $\int_0^1 3xy^2\partial y dx$.

9. $\int_a^b (y'\partial y + y\partial y')\,dx$. **10.** $\int_0^1 (x\partial y + 2y'\partial y')\,dx$. **11.** $\int_0^2 \frac{x^2 y\partial y dx}{\sqrt{1+y^2}}$.

13. $\int_a^b \left(\left(-2y'e^{-2y} - 3xy^2\right)\partial y + e^{-2y}\partial y'\right)dx$. **14.** $\int_0^1 (2(x+y)y\,\partial y + 2xy'\partial y')\,dx$.

15. Любого порядка. **16.** Любого порядка. **17.** 1. **18.** 1.

19. Непрерывный. **20.** Непрерывный. **21.** $\int_1^2 (y'\,\partial y + (y+2xy')\partial y')\,dx$.

22. $\int_0^1 \left(\left(x^2 - 2y'^2\right)\partial y + 4yy'\partial y'\right)dx$. **23.** $\int_0^2 ((-y'\sin y - 4xy)\,\partial y + \cos y\partial y')\,dx$.

24. $\int_1^3 \left(\left(3y^2y' + 2xy\right)\partial y + y^3\partial y'\right)dx$. **25.** $2yy'' + y'^2 - 2xy = 0$. **26.** $y = arctg\frac{1}{x}$.

27. Нет решения. **28.** $y = 1{,}5x$ при $a = 3$, нет решения при $a \neq 3$.

29. Вариационная задача не имеет смысла. **30.** $y = 1{,}5x + 1$. **31.** $y = 7 - \frac{4}{x}$.

32. $y = \sin 2x$. **33.** $y = \frac{1-\ln x}{x}$. **34.** $y = -\frac{1}{14}e^{2x} + \frac{4}{7}e^{-x} - \frac{1}{2}$. **35.** $y = 1 - \frac{1}{x}$.

36. $y = 0{,}5(\sin x - \cos x + 1)$. **37.** $y = 2\sin 4x$. **38.** $y = -4x$.

39. Нет решения. **40.** Вариационная задача не имеет смысла.

41. $y = -\frac{x}{2} - \frac{6}{x} + 6$. **42.** $y = \ln x$. **43.** $y = 0{,}5xe^x$. **44.** $y = (1-x)e^{-x} + 0{,}5x^2$.

45. $y = x\sqrt{x}$. **46.** $y = -16\sin\frac{4}{3}x + 9$. **47.** $y = 4x$. **48.** $y = \sqrt{4-x^2}$.

49. $y = x^2$, $z = x$. **50.** $y = \frac{1}{x}$, $z = \frac{2}{x^3} - 1$. **51.** $y = \frac{\sin\sqrt{1{,}5}x}{\sin(\sqrt{1{,}5}\cdot 0{,}5p)}$,

$z = -\frac{\sin\sqrt{1{,}5}x}{\sin(\sqrt{1{,}5}\cdot 0{,}5p)}$. **52.** $y = \frac{x^2}{2}$, $z = e^{-x}$. **53.** $y = e^x + e\left(x^2 - x^3\right)$.

54. $y = (1-x)shx$. **55.** $y = \frac{x^3}{6}\left(x^3 + 6x + 1\right)$. **56.** $y = -x^2 + x^3$.

57. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y)$. **58.** $y = \frac{4}{3x^3} - \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{x}$.

59. $y=\dfrac{x^2}{2}+1,\ z=x$. **60.** $y=e^x,\ \ z=e^x$.

61. $y=\dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{5}x^5+x^3+x^2\right)$. **62.** $y=x\sin x$. **63.** $y=shx$.

64. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)=0$.**65.** $y=\left(x-1-\dfrac{p}{4}\right)$.

66. $y'(x)=-\dfrac{1}{\varphi'(x)}$, т.е. условие трансверсальности сводится к условию ортогональности. **67.** $y=x+1$. **68.** $y=-2x$. **69.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$.**70.** $\dfrac{19\sqrt{2}}{8}$. **71.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

72. $y=0$ при $x\le 0$; $y=x$ при $x>0$.

73. $y=\pm\sqrt{6x-x^2}$. **74.** $\left.\dfrac{\varphi'-y'}{1+\varphi'y'}\right|_{x=x_1}=-1$. **75.** $y=1-2x^2$.

76. $y=2x^2-x$. **77.** $y=-\dfrac{x^2}{2}$. **78.** $y=-x$. **79.** $\sqrt{20}$.

80. $2\sqrt{2}-1$. **81.** Решение с угловой точкой не существует.
82. а) собственное поле; б) центральное поле; в) поля не образуют.
83. а) центральное поле; б) поля не образуют; в) собственное поле.
84. а) центральное поле; б) собственное поле; в) поля не образуют.
85. Поля не образуют, так как семейство кривых покрывает не всю область D.

86. Экстремаль $y=x^2+\dfrac{x}{4}-\dfrac{3}{4}$ включается в собственное поле экстремалей $y=x^2+\dfrac{x}{4}+C_1$. **87.** Экстремаль $y=\dfrac{x}{6}(1-x^2)$ включается в центральное поле экстремалей $y=Cx-\dfrac{x^3}{6}$.. **88.** $y=-\dfrac{x^2}{4}$. **89.** $y=1$.

90. На функции $y=e^x$ достигается сильный минимум.

91. На функции $y=-\dfrac{4}{x}+7$ достигается сильный минимум.

92. На функции $y=x^2-x$ достигается сильный минимум.

93. На функции $y=x^2$ достигается слабый минимум.

94. На функции $y=0$ достигается сильный минимум.

95. На функции $y=-2x$ достигается слабый максимум.

96. На функции $y=x-1$ достигается слабый минимум.

97. На функции $y=\frac{1}{3}e^{2x}$ достигается сильный минимум.

98. На функции $y=1+0{,}5x^2$ достигается сильный минимум.

99. На функции $y=3x-\frac{2}{x}$ достигается сильный минимум.

100. Собственное поле. **101.** $y=C\cos x$ образует собственное поле экстремалей; $y=C\sin x$ образует центральное поле экстремалей.

102. Экстремаль $y=e^x$ можно включить в собственное поле экстремалей $y=e^x+C$. **103.** $y=0$, $y=4x^2$.

104. На функции $y=2x$ достигается слабый максимум.

105. На функции $y=2x+1$ достигается слабый минимум.

106. На функции $y=x+\frac{3}{x}$ достигается сильный минимум.

107. На функции $y=e^x$ достигается слабый минимум.

108. На функции $y=2\sqrt{x}$ достигается слабый минимум.

109. На функции $y=\frac{1}{x^2}$ достигается сильный максимум.

110. На функции $y=\sqrt{4-x^2}$ достигается сильный минимум.

111. $y=(e-2)x+2$. $z=-e^x+(e-2)x+2$.

112. $y=\frac{x^5}{120}+\frac{23}{40}x^3-\frac{23}{60}x^2$, $z=\frac{x^4}{24}+\frac{69}{40}x^2-\frac{23}{30}x+2$.

113. $y=2-x$, $z=x+1$. **114.** $y=x$, $z=1$.

115. $y=\cos x-\frac{1}{4}x\cos x$, $z=2\sin x+\cos x-\frac{1}{4}x\cos x$. **116.** $y=3x$.

117. $y=4xe^x$. **118.** $y=5x^3$. **119.** $y=6x(x-1)$.

120. $y=x^2+x$, $z=x^2-x$. **121.** $y=x+1$, $z=-x+2$. **122.** $y=x$, $z=1$.

123. $y=0{,}5x\sin x$, $z=0{,}5(x\cos x-\sin x)$. **124.** $y=12x(x-1)$.

125. $y=6x(x-1)$. **126.** $y=6(x-x^2)$.

Библиографический список

1. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ, 1999.
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. 2. М.: ОНИКС 21 век, 2003.
3. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление: задачи и примеры. М.: Едиториал УРСС, 2002.
4. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. М.: Вычшая школа, 2006.
5. Романко В.К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
6. Сборник задач по математики для втузов. Специальные разделы математического анализа/ Под ред. А.В. Ефимова. М.: Наука, 1984.
7. Эльсгольц А.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Н.: Наука, 1969.

Содержание

Курилова Ольга Евгеньевна

Попов Николай Николаевич

Вариационное исчисление

Редактор
Технический редактор

Подписано в печать
Формат 60x841/16. Бумага типогр. №1.
Печать офсетная.
Усл.п.л. . Усл.кр.-отт. Уч.-изд.л.
Тираж 300 экз. С-

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
Главный корпус.

Отпечатано в типографии
Самарского государственного технического университета
443100 г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
Главный корпус