А. А. ЗАУСАЕВ, С. Н. КУБЫШКИНА, Е. А. ТАРАСОВА

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Лабораторный практикум для студентов заочного факультета

Самара
Самарский государственный технический университет
2017

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Лабораторный практикум для студентов заочного факультета

Самара
Самарский государственный технический университет
2017

Печатается по решению ученого совета СамГТУ (протокол № 9 от 31.03.2017 г.)

УДК 519.6 (076.5)
ББК 22.19Я73

Вычислительная математика: практикум для студентов заочного факультета / Сост. А. А. Заусаев, С. Н. Кубышкина, Е. А. Тарасова. – Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 64 с.

Лабораторный практикум содержит краткие теоретические сведения и необходимые формулы по темам «Элементы теории погрешностей», «Численные методы решения нелинейных уравнений», «Численное интегрирование», «Численное решение дифференциальных уравнений», а также примеры и методические указания к выполнению каждой лабораторной работы.

Предназначен для студентов заочного факультета инженерных направлений СамГТУ.

УДК 519.6 (076.5)
ББК 22.19Я73

Составители: канд. физ.-мат. наук А. А. Заусаев,
канд. физ.-мат. наук С. Н. Кубышкина,
канд. физ.-мат. наук Е. А. Тарасова

Рецензент: канд. физ.-мат. наук Е. В. Башкинова

© А. А. Заусаев, С. Н. Кубышкина, Е. А. Тарасова, 2017
© Самарский государственный технический университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый лабораторный практикум поможет студентам заочного факультета в освоении курса «Вычислительная математика».

Целью выполнения лабораторных работ является формирование систематических знаний, умений и навыков, необходимых для проведения математических расчетов и моделирования задач исследовательского и прикладного характера, формирование математической культуры, необходимой студенту в будущей профессиональной деятельности, способности осуществлять хранение и обработку информации, полученной из различных источников.

Информационные технологии стали в настоящее время неотъемлемой частью научной и практической деятельности. Разработанный лабораторный практикум рассматривает применение аналитических и численных методов при решении прикладных задач.

Данное пособие состоит из четырех разделов, которые содержат теоретическую и практическую часть, семи лабораторных работ и заданий для самостоятельной работы студентов. Каждая лабораторная работа заканчивается контрольными вопросами для самопроверки.

Первый раздел посвящен теории погрешностей, в котором рассмотрены такие понятия, как абсолютная и относительная погрешности, точность, погрешность функции.

Во втором разделе рассмотрены численные методы решения нелинейных уравнений, а именно, метод бисекций, хорд, метод Ньютона и метод итераций, а также рассмотрен способ отделения корней нелинейного уравнения графическим методом.

В третьем разделе приведены формулы левых, правых и центральных прямоугольников, формула трапеций и формула Симпсона, которые используются для приближенного вычисления определенных интегралов.

В разделе четыре рассмотрены методы решения дифференциальных уравнений, начиная с метода Эйлера и заканчивая более точными численными методами, такими как метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

В результате изучения предлагаемых численных методов студенты приобретут навыки практической работы с современной вычислительной техникой, базовые представления об общей теории численных методов, освоят основные подходы для выбора и применения численных методов при решении практических задач.

Т е м а 1. **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ**

Пусть X — точное значение, x — приближенное значение некоторого числа.

Абсолютная погрешность приближенного числа равна модулю разности между его точным и приближенным значениями:

$$\Delta x = \left| X - x \right|.$$

Однако точное значение X зачастую неизвестно, поэтому вместо абсолютной погрешности используют понятие границы абсолютной погрешности:

$$\left| X - x \right| \le \Delta x^* .$$

Число Δx^* заведомо равно или превышает значение абсолютной погрешности Δx и называется предельной абсолютной погрешностью. Часто применяется запись: $X = x \pm \Delta x^*$.

Следует отметить, что абсолютная погрешность не полностью характеризует результат. Например, абсолютная погрешность в 1 мм никчемна при оценке расстояния от Москвы до Рио-де-Жанейро и абсурдна при поиске расстояний между молекулами твердого вещества. Поэтому основной характеристикой точности является относительная погрешность.

Относительная погрешность — это абсолютной погрешности к модулю того значения, которое принимается за истинное:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\left| X \right|}.$$

Относительная погрешность иногда измеряется в процентах, тогда

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\left| X \right|} \cdot 100\,\% .$$

Действия над приближенными числами. Результат действий над приближенными числами также представляет собой приближенное число. Погрешность результата может быть выражена через погрешности первоначальных данных по следующим правилам:

1. При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются: $\Delta\left(a \pm b \right) = \Delta a + \Delta b$.

2. Относительная погрешность разности или суммы двух чисел вычисляется по формулам:

$$\delta\left(a+b\right)=\frac{\Delta\left(a+b\right)}{\left|a+b\right|}=\frac{\Delta a+\Delta b}{\left|a+b\right|}; \quad \delta\left(a-b\right)=\frac{\Delta\left(a-b\right)}{\left|a-b\right|}=\frac{\Delta a+\Delta b}{\left|a-b\right|}, \ (a\neq b).$$

3. При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются:

$$\delta\left(a\cdot b\right)=\delta a+\delta b,\ \delta\left(\frac{a}{b}\right)=\delta a+\delta b.$$

4. При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени: $\delta\left(a^k\right)=k\delta a$.

Погрешность функции. Общая формула для оценки предельной абсолютной погрешности функции нескольких переменных $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет вид:

$$\Delta u^* \approx \left|df(x_1,x_2,...,x_n)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i^*\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\left|\Delta x_i^*\right|,$$

где Δx_i^* — предельная абсолютная погрешность числа x_i ($i=1, 2, ..., n$).

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Пример* 1.** Найти предельную абсолютную погрешность функции $y=a-b$ при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение. $\Delta y^*=\Delta(a-b)^*=\Delta a^*+\Delta b^*=0{,}01+0{,}04=0{,}05$.

***Пример* 2.** Найти предельную абсолютную погрешность функции $y=b\sqrt{a}$ при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение.

$$\Delta y^* \approx \left(b\sqrt{a}\right)_a'\Delta a^*+\left(b\sqrt{a}\right)_b'\Delta b^*=b\frac{1}{2\sqrt{a}}\Delta a^*+\sqrt{a}\Delta b^*=$$

$$=7\frac{1}{2\sqrt{4}}0{,}01+\sqrt{4}\cdot 0{,}04=0{,}0175+0{,}08=0{,}0975.$$

***Пример* 3.** Найти предельную относительную погрешность функции $y=\dfrac{a}{a-b}$ при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение.

$$\delta y^* = \delta\left(\frac{a}{a-b}\right)^* = \delta a^* + \delta(a-b)^* = \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{\Delta(a-b)^*}{|a-b|} =$$

$$= \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{\Delta a^* + \Delta b^*}{|a-b|} = \frac{0{,}01}{4} + \frac{0{,}01+0{,}04}{|4-7|} \approx 0{,}0025 + 0{,}0167 = 0{,}0192.$$

***Пример* 4.** Найти предельную относительную погрешность функции $y=\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ при заданных значениях A=4±0,01; B=7±0,04.

Решение.

$$\delta y^* = \delta\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^* = \delta a^* + \delta(\sqrt{b})^* = \delta a^* + \frac{1}{2}\delta b^* = \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta b^*}{|b|} =$$

$$= \frac{0{,}01}{4} + \frac{1}{2}\frac{0{,}04}{7} \approx 0{,}0025 + 0{,}0029 = 0{,}0054$$

Задание. Известно, что A=4±0,01; B=8±0,04; C=5±0,1. Найти предельную абсолютную погрешность Δy^* для функций:

1) $y=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{c}$, 2) $y=3ac$; 3) $y=a(c-b)$;

найти предельную относительную погрешность δy^* следующих функций:

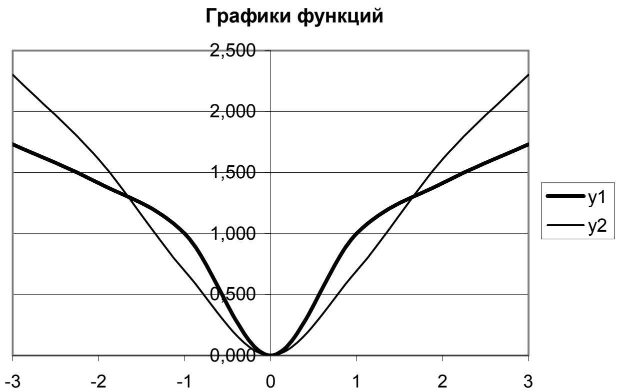
4) $y=a\cdot\sqrt[3]{b}$, 5) $y=c-a$, 6) $y=\dfrac{a}{c+a}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

АБСОЛЮТНАЯ И ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТИ

***Задание* 1.** Пользуясь мастером функций $\boxed{f_x}$, вспомнить основные функции Microsoft Excel и особенности их вычисления. Протабулировать функции $y1 = \sqrt{|x|}$ и $y2 = \ln\left(x^2 + 1\right)$ на отрезке [–3; 3] с шагом $h = 1$, построить графики данных функций.

	A	B	C	D	E	F	G	H
2	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3	y1	1,732	1,414	1,000	0,000	1,000	1,414	1,732
4	y2	2,303	1,609	0,693	0,000	0,693	1,609	2,303



Р и с. 1.1. Значения и графики функций $y1 = \sqrt{|x|}$, $y2 = \ln(x^2 + 1)$ на отрезке [–3; 3]

При выполнении задания 1 вводится только левый конец отрезка — значение $x = -3$ (ячейка **B2**), затем в ячейки **C2, B3**, **B4** записываются соответствующие формулы и распространяются вправо. Значения функций y1, y2 выведены с тремя знаками после запятой (**Формат/Ячейки/Число**).

При построении графика выбирается тип диаграммы **«точечный»**, затем готовый график редактируется по образцу (см. рис. 1.1) с помощью команд: **Формат оси** (установить по оси *Ox min*= 3, *max*=3, цену основных делений=1), **Формат области построения**, **Параметры диаграммы**.

***Задание* 2.** В ходе вычислений получены приближенные значения некоторых величин: $a = 5{,}256$, $b = 2{,}892$. Установить, какой из результатов более точен, если известны их истинные значения: $A = 5{,}158$ и $B = 2{,}814$.

Для решения задачи использовать табличный процессор Microsoft Excel, рекомендуемый вид экрана приведен на рис. 1.2.

	A	B	C	D	E	F
2	Л. р. №1 Оценка точности вычислений Студента ___________________, группы_____________					
3						
4	Прибл. знач.:	a=	5,256	b=	2,892	
5	Точное знач.:	A=	5,158	B=	2,814	
6	Абсолют. погр.:	Δa=	0,098	Δb=	0,078	
7	Относит. погр.:	δa=	0,018645	δb=	0,026971	
8		δa=	1,86%	δb=	2,70%	
9						
10	Вывод:	а вычислено точнее b				

Р и с. 1.2. Сравнение относительных погрешностей приближенных величин

При решении задания 2 вводятся начальные значения в ячейках **C4:C5**; **E4:E5**. Остальные значения рассчитываются средствами Microsoft Excel по формулам, приведенным в теоретической справке. Для отображения относительной погрешности в процентах, установите соответствующий формат ячейки.

***Задание* 3.** Известно, что $x = \dfrac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c - a}$, где A=1,34±0,02; B=7,98±0,05; C=52,74±0,1.

1. Найти предельную абсолютную погрешность Δx^* функции x .

Исходная функция x является функцией трех переменных a, b, c. Для оценки предельной абсолютной погрешности воспользуемся формулой:

$$\Delta x^* \approx \left|\frac{\partial x}{\partial a}\right| \Delta a^* + \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right| \Delta b^* + \left|\frac{\partial x}{\partial c}\right| \Delta c^* .$$

Найдем частные производные функции $x = \dfrac{a \cdot \sqrt[3]{b}}{c - a}$:

$$\frac{\partial x}{\partial a}[b,c=const]=\frac{(a)_a'\cdot\sqrt[3]{b}(c-a)-a\cdot\sqrt[3]{b}(c-a)_a'}{(c-a)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{b}(c-a)+a\cdot\sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}=\frac{c\cdot\sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial b}[a,c=const]=\frac{a}{c-a}\left(\sqrt[3]{b}\right)_b'=\frac{a}{(c-a)}\frac{1}{3\sqrt[3]{b^2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial c}[a,b=const]=a\cdot\sqrt[3]{b}\left(\frac{1}{c-a}\right)_c'=a\cdot\sqrt[3]{b}\,\frac{-1}{(c-a)^2}=\frac{-a\cdot\sqrt[3]{b}}{(c-a)^2}$$

	A	B	C	D	E	F
2	Л. р. №1 Оценка относительной и абсолютной погрешностей Студента ____________________, группы______________					
3	a	Δa*	|∂x/∂a|			
4	1,34	0,02	0,03989			
5	b	Δb*	|∂x/∂b|			
6	7,98	0,05	0,00218			
7	c	Δc*	|∂x/∂c|			
8	52,74	0,1	0,00101			
9						
10			Пред. абсолют. погр.		Δx*=	0,0010
11			Пред. относит. погр.		δx*=	0,0193

Р и с. 1.3. Типовой экран для вычисления абсолютной и относительной погрешностей функции $x(a, b, c)$

Введем исходные данные в блок **A3:B8** (см. рис. 1.3). В ячейках **C3:C8** вычислим значения $\left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial c}\right|$. В ячейку **F10** запишем формулу $=\left|\frac{\partial x}{\partial a}\right|\Delta a^*+\left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|\Delta b^*+\left|\frac{\partial x}{\partial c}\right|\Delta c^*$ для вычисления предельной абсолютной погрешности.

2. Оценить предельную относительную погрешность δx^* функции x.

Предельная относительная погрешность заданной функции, согласно рассмотренным выше формулам, представима в виде

$$\delta x^* = \delta\left(\frac{a\cdot\sqrt[3]{b}}{c-a}\right)^* = \delta\left(a\cdot\sqrt[3]{b}\right)^* + \delta(c-a)^* = \delta a^* + \frac{1}{3}\delta b^* + \delta(c-a)^* =$$

$$= \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{3}\frac{\Delta b^*}{|b|} + \frac{\Delta(c-a)^*}{|c-a|} = \frac{\Delta a^*}{|a|} + \frac{1}{3}\frac{\Delta b^*}{|b|} + \frac{\Delta c^* + \Delta a^*}{|c-a|}.$$

Запишем полученную формулу в ячейку **F11**.

***Задание* 4**. Скопировать задание 3 на новый лист. Ввести данные своего варианта в ячейки **A3:B8** (см. рис. 1.3) из таблицы 1.1. Вычислить частные производные и заполнить формулами ячейки **C4**, **C6**, **C8**. Изменить формулу вычисления предельной относительной погрешности δx^* в ячейке **F11**, пользуясь основными правилами. Оформить отчет для своего варианта.

Таблица 1.1

Варианты заданий к лабораторной работе № 1

№ п/п	Выражение	Значения параметров		
		A	*B*	*C*
1.	$x=\frac{a\cdot b}{\sqrt[3]{c}}$	3,85±0,04	2,043±0,004	96,6±0,2
2.	$x=\frac{\sqrt{a}\cdot b}{c}$	2,28±0,6	84,6±0,02	68,7±0,05
3.	$x=\frac{\sqrt{a\cdot b}}{c}$	4,632±0,03	23,3±0,04	11,3±0,6
4.	$x=\frac{a^2b}{c}$	0,323±0,005	3,147±0,008	1,78±0,05
5.	$x=\frac{ab^3}{\sqrt{c}}$	0,323±0,005	3,147±0,008	1,78±0,05
6.	$x=\frac{ab}{c^2}$	0,258±0,01	3,45±0,004	1,374±0,007
7.	$x=\frac{a^2b}{c-b}$	2,712±0,005	0,37±0,02	13,21±0,08
8.	$x=\frac{a^2b}{c^3}$	3,804±0,003	4,05±0,005	2,18±0,01

Продолжение таблицы 1.1

№ п/п	Выражение	Значения параметров		
		A	*B*	*C*
9.	$x=\sqrt{\frac{a\cdot c}{b}}$	0,834±0,004	138±0,03	1,84±0,01
10.	$x=\frac{a-b}{b\cdot c}$	54,8±0,02	2,45±0,01	0,68±0,04
11.	$x=\frac{\sqrt{a\cdot b}}{c^2}$	13,28±0,02	2,37±0,007	5,13±0,01
12.	$x=\frac{a\sqrt{b}}{c^2}$	0,231±0,008	2,13±0,01	5,91±0,05
13.	$x=\frac{a}{\sqrt{c}+b}$	1,182±0,005	2,18±0,009	0,19±0,01
14.	$x=\frac{a+\sqrt{c}}{b^2}$	0,95±0,01	2,3±0,03	1,195±0,005
15.	$x=\frac{a+b}{\sqrt{c}}$	1,19±0,05	2,3±0,1	5,191±0,08
16.	$x=\frac{a}{b+\sqrt{c}}$	13,52±0,02	5,1±0,03	9,273±0,008
17.	$x=\frac{a}{\sqrt{c+b}}$	1,18±0,01	2,75±0,05	3,62±0,007
18.	$x=a+\frac{b}{\sqrt{c}}$	1,95±0,03	2,18±0,01	9,193±0,008
19.	$x=a+b+c^2$	0,193±0,006	1,19±0,01	2,276±0,009
20.	$x=a+\frac{\sqrt{c}}{b}$	2,56±0,04	1,785±0,09	3,4±0,1
21.	$x=\frac{a}{b+\sqrt{c}}$	0,171±0,004	0,91±0,007	1,1±0,01
22.	$x=\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{c}}$	1,65±0,06	0,09±0,04	13,5±0,08
23.	$x=\sqrt{a}+\frac{b^2}{c}$	1,18±0,05	5,1±0,01	0,9±0,005
24.	$x=\sqrt{ac}+\frac{b}{a}$	13,7±0,05	6,2±0,01	0,721±0,008

Окончание таблицы 1.1

№ п/п	Выражение	Значения параметров		
		A	*B*	*C*
25.	$x=\dfrac{b}{c+\sqrt{a}}$	0,18±0,005	1,231±0,008	7,3±0,01
26.	$x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$	13±0,08	7,1±0,02	0,831±0,007
27.	$x=\dfrac{a}{b}+\sqrt{c}$	15,76±0,03	7,3±0,05	1,141±0,009
28.	$x=1+\sqrt{a}+\dfrac{b}{c}$	0,841±0,008	1,13±0,01	5,21±0,04
29.	$x=\dfrac{a+\sqrt{c}}{b}$	1,692±0,005	2,13±0,008	13,1±0,02
30.	$x=\dfrac{a\cdot c}{\sqrt[3]{b}}$	3,85±0,02	2,043±0,005	9,61±0,04

Контрольные вопросы

1. Запись основных математических функций в MS Excel.
2. Определение абсолютной и относительной погрешности.
3. Основные правила вычисления абсолютной и относительной погрешностей.

Тема 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача решения нелинейных уравнений часто возникает на практике, однако для многих уравнений вида

$$y(x)=0\,, \tag{2.1}$$

где $y=y(x)$ — нелинейная функция одной переменной, не существует аналитических выражений (формул) для вычисления их корней, либо это решение слишком трудоемко. В этих случаях приходится применять различные численные методы отыскания корней уравнения.

Задача нахождения корней уравнения (2.1) состоит из двух этапов:

— отделение корня, т.е. установление промежутка, в котором находится корень, причем единственный.

— уточнение корня, т.е. вычисление приближенного значения корня с заданной точностью.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Пример* 1.** Дано уравнение $28x^2 - 13x - 5 = 0$.

1) отделить корни уравнения аналитическим и графическим методами на отрезке $[-1, 1]$, шаг табулирования взять равным $0{,}2$;

2) найти положительный корень уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$, используя:

— метод бисекций,

— метод хорд,

— метод Ньютона,

— метод итераций;

3) сравнить полученные результаты с точным значением положительного корня (найти его самостоятельно), определить абсолютную и относительную погрешности для каждого метода.

1. Отделение корней нелинейного уравнения аналитическим и графическими методами.

Аналитическое отделение корней основано на следующих теоремах.

***Теорема* 1.** Если непрерывная функция $y = y(x)$ принимает на концах отрезка $[a;b]$ значения разных знаков, т.е. $y(a) \cdot y(b) < 0$, то на этом отрезке содержится, по крайней мере, один корень уравнения.

***Теорема* 2.** Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $y(x)$ принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная $y'(x)$ сохраняет знак внутри указанного отрезка, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения $y(x) = 0$.

По условию задачи необходимо выполнить отделение корней нелинейного уравнения $28x^2 - 13x - 5 = 0$ аналитическом методом на заданном отрезке $[-1;1]$ с шагом табулирования 0,2. Для этого протабулируем функцию $y = 28x^2 - 13x - 5$ на заданном отрезке и найдем «соседние» точки a и b, в которых функция $y = y(x)$ принимает значения разных знаков.

<u>На первом шаге</u> подставляя вместо x значения

$$\{-1; -0{,}8; -0{,}6; -0{,}4; -0{,}2; 0; 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8; 1\}$$

в функцию $y = 28x^2 - 13x - 5$, получаем

$y(-1) = 28 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) - 5 = 28 + 13 - 5 = 36,$

$y(-0{,}8) = 28 \cdot (-0{,}8)^2 - 13 \cdot (-0{,}8) - 5 = 17{,}92 + 10{,}4 - 5 = 23{,}32,$

и так далее для всех значений x из отрезка [-1;1].

Полученный результат сведен в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

Табулирование функции $y = 28\,x^2 - 13x - 5$ на отрезке [-1;1]

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	36	23,32	12,88	4,68	-1,28	-5	-6,48	-5,72	-2,72	2,52	10

Из таблицы 2.1 видно, что функция изменяет свой знак на отрезках $[-0{,}4; -0{,}2]$ и $[0{,}6; 0{,}8]$ следовательно, на этих отрезках содержится, по крайней мере, один корень уравнения, исходя из условия теоремы 1.

Для уточнения количества корней уравнения на этом отрезке воспользуемся условием теоремы 2, для чего необходимо исследовать поведение производной $y'(x)$ на данном отрезке.

<u>На втором шаге</u> вычислим первую производную функции $y(x)$:

$$y'(x) = 56x - 13\,.$$

$y'(x = -0{,}4) = 56 \cdot (-0{,}4) - 13 = -35{,}4$,

$y'(x = -0{,}2) = 56 \cdot (-0{,}2) - 13 = -24{,}2$,

кроме того, $y'(x) < 0$ всюду на отрезке $[-0{,}4; -0{,}2]$.

Тогда, согласно теореме 2, делаем вывод, что уравнение $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$ содержит на отрезке $[-0{,}4; -0{,}2]$ единственный корень.

Аналогично исследуем второй найденный отрезок $[0{,}6; 0{,}8]$.

$y'(x = 0{,}6) = 56 \cdot 0{,}6 - 13 = 20{,}6$,

$y'(x = 0{,}8) = 56 \cdot 0{,}8 - 13 = 31{,}8$.

кроме того, $y'(x) > 0$ всюду на отрезке $[0{,}6; 0{,}8]$.

Тогда, согласно теореме 2, делаем вывод, что уравнение $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$ содержит на отрезке $[0{,}6; 0{,}8]$ единственный корень.

Графический метод 1. Для того, чтобы графически отделить корни уравнения, необходимо построить график функции $y = y(x)$. Абсциссы точек его пересечения с осью OX являются действительными корнями уравнения.

Для нахождения корня уравнения $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$ графическим методом 1, представим его в виде функции $y = 28\,x^2 - 13x - 5$. Протабулируем функцию на отрезке $[-1;\,1]$ с шагом 0,2. Полученные значения представлены в таблице 2.1. Используя эти данные, построим график функции $y = 28\,x^2 - 13x - 5$ (рис. 2.1.)

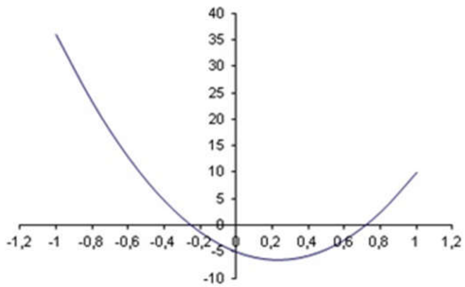


Рис. 2.1. Графическое отделение корней уравнения $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$

Полученный график подтверждает аналитическое решение. На рисунке 2.1 видно, что точки пересечения графика функции $y = 28\,x^2 - 13x - 5$ с осью OX попадают в найденные аналитическим методом отрезки $[-0{,}4;-0{,}2]$ и $[0{,}6;0{,}8]$.

Графический метод 2. Построение графика функции зачастую можно упростить, разбив функцию на две более простых функции. Тогда корень уравнения будет находиться в точке пересечения графиков этих функций.

В нашем примере разобьем функцию $y = 28\,x^2 - 13x - 5$ на две более простых, а именно: $y_1 = 28\,x^2$ и $y_2 = 13x + 5$. Протабулируем полученные функции на отрезке $[-1;\,1]$ с шагом 0,2. Полученные значения представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Табулирование функций $y_1 = 28\,x^2$ и $y_2 = 13x + 5$ на отрезке [-1;1]

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_1	28	17,92	10,08	4,48	1,12	0	1,12	4,48	10,08	17,92	28
y_2	-8	-5,4	-2,8	-0,2	2,4	5	7,6	10,2	12,8	15,4	18

Используя эти данные, построим графики функций. Результат приведен на рисунке 2.2.

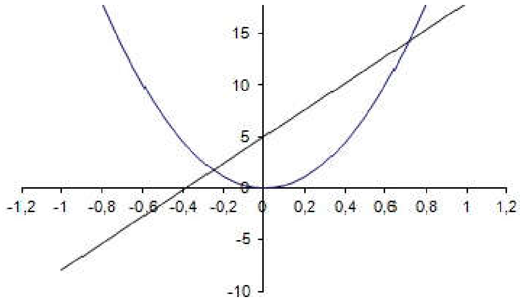


Рис. 2.2. Графическое отделение корней уравнения $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$

Из рисунка 2.2 видно, что графики функций $y_1 = 28\,x^2$ и $y_2 = 13x + 5$ имеют две точки пересечения на отрезках $[-0{,}4; -0{,}2]$ и $[0{,}6;\ 0{,}8]$, что совпадает с результатом, полученным при использовании аналитического метода и графического метода 1.

2. Найти положительный корень уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$, используя метод бисекций.

Для нахождения корня уравнения, принадлежащего отрезку $[a;b]$, делим этот отрезок пополам точкой $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Если $y(c) = 0$, то $c = \dfrac{a+b}{2}$ является корнем уравнения.

Если $y(c) \neq 0$ (что наиболее вероятно), то выбираем тот из отрезков $[a;c]$ или $[c;b]$, на концах которого функция $y(x)$ имеет противоположные знаки, т.е. $y(a) \cdot y(c) < 0$, либо $y(c) \cdot y(b) < 0$.

Новый суженный отрезок для удобства переобозначим как $[a,b]$, затем снова делим его пополам и производим те же самые действия до достижения требуемой точности. Таким образом, мы постепенно сузим область, где находится корень уравнения, а, следовательно, с определенной степенью точности определим его. Корень считается найденным, когда длина отрезка станет меньше заданной точности, а именно $|b-a| \le \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается середина последнего отрезка.

Метод бисекций (метод половинного деления) довольно прост в реализации, но является наименее эффективным, т.е. для достижения требуемой точности приходится выполнять довольно большое количество шагов.

Ранее мы выяснили, что уравнение $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[-0{,}4; -0{,}2]$ и единственный корень на отрезке $[0{,}6; 0{,}8]$, т.к. необходимо найти значение положительного корня, то рассмотрим отрезок $[0{,}6; 0{,}8]$.

<u>На первом шаге</u> вычислим значение $c = \dfrac{a+b}{2}$ середины отрезка $[0{,}6; 0{,}8]$: $c = \dfrac{0{,}6 + 0{,}8}{2} = 0{,}7$.

Вычислим значение функции $y = 28\,x^2 - 13x - 5$ в точках $a = 0{,}6;\ b = 0{,}8;\ c = 0{,}7.$

$y(0{,}6) = 28 \cdot 0{,}6^2 - 13 \cdot 0{,}6 - 5 = 10{,}08 - 7{,}8 - 5 = -2{,}72,$

$y(0{,}7) = 28 \cdot 0{,}7^2 - 13 \cdot 0{,}7 - 5 = 13{,}72 - 9{,}1 - 5 = -0{,}38,$

$y(0{,}8) = 28 \cdot 0{,}8^2 - 13 \cdot 0{,}8 - 5 = 17{,}92 - 10{,}4 - 5 = 2{,}52.$

Критерием останова в данном методе служит условие $|b - a| \le \varepsilon$.

Проверка: $|0{,}8 - 0{,}6| = 0{,}2 > \varepsilon = 0{,}01$, следовательно, вычисления продолжаем.

Так как $y(0{,}6) \cdot y(0{,}7) > 0,$ а $y(0{,}7) \cdot y(0{,}8) < 0,$ в дальнейшем решении участвует отрезок $\left[0{,}7; 0{,}8\right]$.

<u>На втором шаге</u> вычисляем середину данного отрезка $c = \dfrac{0{,}7 + 0{,}8}{2} = 0{,}75$.

Вычислим значение функции $y = 28\,x^2 - 13x - 5$ в точках $a = 0{,}7; b = 0{,}8; c = 0{,}75.$

$y(0{,}7) = 28 \cdot 0{,}7^2 - 13 \cdot 0{,}7 - 5 = 13{,}72 - 9{,}1 - 5 = -0{,}38,$

$y(0{,}75) = 28 \cdot 0{,}75^2 - 13 \cdot 0{,}75 - 5 = 15{,}75 - 9{,}75 - 5 = 1,$

$y(0{,}8) = 28 \cdot 0{,}8^2 - 13 \cdot 0{,}8 - 5 = 17{,}92 - 10{,}4 - 5 = 2{,}52.$

Проверка: $|0{,}8 - 0{,}7| = 0{,}1 > \varepsilon$, критерий останова не выполнился, продолжаем нахождение корня.

Так как $y(0{,}7)\cdot y(0{,}75)<0$, а $y(0{,}75)\cdot y(0{,}8)>0$, значит, в дальнейшем решении участвует отрезок $[0{,}7;0{,}75]$.

Результаты последующих вычислений сведены в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

Численное решение уравнения $28\,x^2-13x-5=0$ методом бисекций с точностью $\varepsilon=0{,}01$

a	b	c	$y(a)$	$y(b)$	$y(c)$	Точность	Число итераций
0,6	0,8	0,7	-2,72	2,52	-0,38	0,2	1
0,7	0,8	0,75	-0,38	2,52	1	0,1	2
0,7	0,75	0,725	-0,38	1	0,2925	0,05	3
0,7	0,725	0,7125	-0,38	0,2925	-0,0481	0,025	4
0,7125	0,725	0,7188	-0,0481	0,2925	0,1211	0,0125	5
0,7125	0,7188	0,7156	-0,0481	0,1211	0,0362	0,006	6

Из таблицы видно, что на шестом шаге заданная точность была достигнута $|0{,}7188-0{,}7125|=0{,}006<\varepsilon$, следовательно, корнем уравнения $28\,x^2-13x-5=0$ является $x\approx 0{,}7156$.

3. Найти положительный корень уравнения с точностью $\varepsilon=0{,}01$, используя метод хорд.

Данный метод также предназначен для уточнения корня на отрезке $[a;b]$, на концах которого функция $y=y(x)$ принимает значения разных знаков. Очередное приближение, в отличие от метода половинного деления, берем не в середине отрезка, а в точке x_0, где пересекает ось абсцисс прямая линия (хорда), проведенная через точки A и B (рис. 2.3).

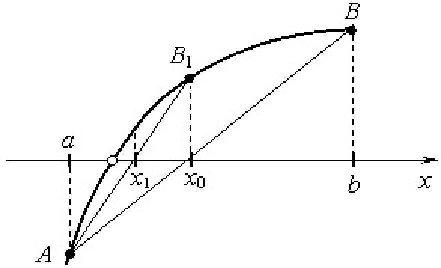


Рис. 2.3. Геометрическая интерпретация метода хорд

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{y - y(a)}{y(b) - y(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Для точки пересечения прямой с осью абсцисс $(x = x_0, y = 0)$ получим уравнение

$$x_0 = \frac{a \cdot y(b) - b \cdot y(a)}{y(b) - y(a)}$$

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбираем тот из двух отрезков $[a; x_0]$ и $[x_0; b]$, на концах которого функция $y(x)$ принимает значения разных знаков. Следующая итерация состоит в определении нового приближения x_1, как точки пересечения хорды AB_1 с осью абсцисс и т.д.

Заканчиваем процесс уточнения корня, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше заданной точности, т.е. $\left| x_{k+1} - x_k \right| < \varepsilon$.

<u>На первом шаге</u> вычислим значение $x_0 = \dfrac{a \cdot y(b) - b \cdot y(a)}{y(b) - y(a)}$, зная, что $y(0{,}6) = -2{,}72$ и $y(0{,}8) = 2{,}52$ получаем

$$x_0 = \frac{0{,}6 \cdot 2{,}52 - 0{,}8 \cdot (-2{,}72)}{2{,}52 - (-2{,}72)} = \frac{3{,}688}{5{,}24} = 0{,}7038.$$

Вычислим значение функции в точке $x_0 = 0{,}7038$:

$$y(0{,}7038) = 28 \cdot 0{,}7038^2 - 13 \cdot 0{,}7038 - 5 = 13{,}8694 - 9{,}1494 - 5 = -0{,}28.$$

Так как $y(0{,}6) \cdot y(0{,}7038) > 0$, а $y(0{,}7038) \cdot y(0{,}8) < 0$, то для рассматриваемого случая выбираем отрезок $[x_0; b]$, то есть отрезок $[0{,}7038;\ 0{,}8]$.

<u>На втором шаге</u> вычислим значение $x_0 = \dfrac{a \cdot y(b) - b \cdot y(a)}{y(b) - y(a)}$, зная, что $a = 0{,}7038, b = 0{,}8,\ y(0{,}7038) = -0{,}28,\ y(0{,}8) = 2{,}52$.

$$x_0 = \frac{0{,}7038 \cdot 2{,}52 - 0{,}8 \cdot (-0{,}28)}{2{,}52 - (-0{,}28)} = \frac{1{,}9976}{2{,}8} = 0{,}7134.$$

Выполним проверку критерия $\left| x_{k+1} - x_k \right| < \varepsilon$:

$|0{,}7134-0{,}7038|=0{,}0096<\varepsilon=0{,}01$, следовательно, $x_0=0{,}7134$ можно с допустимой точностью считать корнем уравнения $28\,x^2-13x-5=0$. Корень уравнения по методу хорд был найден на втором шаге выполнения итерационного процесса.

4. Найти положительный корень уравнения с точностью $\varepsilon=0{,}01$, используя метод Ньютона.

Пусть $[a;b]$ — отрезок, содержащий только один корень уравнения $y(x)=0$. В качестве начального приближения к корню выберем $x_0\in[a;b]$, которое удовлетворяет условию $y(x_0)\cdot y''(x_0)>0$. В качестве x_0 выбирают левый или правый конец отрезка $[a;b]$.

Расчетная формула метода Ньютона имеет вид:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{y(x_k)}{y'(x_{k+1})},k=0,1,2...$$

Геометрически метод Ньютона означает, что следующее приближение к корню x_{k+1} — есть точка пересечения с осью OX касательной, проведенной к графику функции $y=y(x)$ в точке $\left(x_k,y(x_k)\right)$.

Теорема о сходимости метода Ньютона. Пусть $\bar{x}$ — простой корень уравнения $y(x)=0$, в некоторой окрестности которого функция дважды непрерывно дифференцируема. Тогда найдется такая малая σ-окрестность корня $\bar{x}$, что при произвольном выборе начального приближения x_0 из этой окрестности итерационная последовательность метода Ньютона не выходит за пределы окрестности и справедлива оценка $|x_{k+1}-\bar{x}|\le C|x_k-\bar{x}|^2$, где $n\ge 0,\ C=\sigma^{-1}$.

Критерий окончания итерационного процесса. При заданной точности $\varepsilon>0$ вычисления следует вести до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение x_{k+1}.

Для решения поставленной задачи рассмотрим отрезок $[0{,}6;0{,}8]$.

<u>На первом шаге</u> определим значение x_0 и x_1.

Проверим выполнение условия $y(x_0)\cdot y''(x_0)>0$ для концов данного отрезка.

$y=28\,x^2-13x-5$, $y'=56\,x-13$, $y''=56$.

$y(0{,}6) = \text{-}2{,}72,\ y(0{,}8) = 2{,}52$ — значение функции в этих точках мы находили ранее, в методе бисекций, а $y''(0{,}6) = y''(0{,}8) = 56$, следовательно, $y(0{,}6) \cdot y''(0{,}6) < 0$, а $y(0{,}8) \cdot y''(0{,}8) > 0$. Таким образом, условие метода выполняется для правого конца отрезка, значит, в качестве начального приближения примем $x_0 = 0{,}8$.

Исходя из расчетной формулы метода Ньютона $x_1 = x_0 - \dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)} = 0{,}8 - \dfrac{2{,}52}{56 \cdot 0{,}8 - 13} = 0{,}8 - \dfrac{2{,}52}{31{,}8} = 0{,}8 - 0{,}0792 = 0{,}7208.$

Проверяем критерий окончания процесса: $|0{,}7208 - 0{,}8| = 0{,}0792 > \varepsilon = 0{,}01$. Так как критерий не выполнился, продолжаем вычисления дальше.

<u>На втором шаге</u> $x_1 = 0{,}7208$, тогда x_2 определим в соответствии с расчетной формулой Ньютона:

$$x_2 = x_1 - \frac{y(x_1)}{y'(x_1)} = 0{,}7208 - \frac{28 \cdot 0{,}7208^2 - 13 \cdot 0{,}7208 - 5}{56 \cdot 0{,}7208 - 13} =$$

$$= 0{,}7208 - \frac{0{,}1771}{27{,}3648} = 0{,}7208 - 0{,}0065 = 0{,}7143.$$

Проверяем критерий окончания процесса: $|0{,}7143 - 0{,}7208| = 0{,}0065 < \varepsilon = 0{,}01$. Критерий останова был выполнен, значит $x_2 = 0{,}7143$ — корень уравнения, был найден на втором шаге.

5. Найти положительный корень уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}01$, используя метод итераций.

При нахождении корня нелинейного уравнения с задачной точностью будем использовать итерационную формулу $x_{k+1} = x_k + c \cdot y(x_k)$. За начальное приближение x_0 примем середину отрезка $[a;b]$, на котором содержится единственный корень уравнения. Коэффициент c вычисляется следующим образом:

$$c = \pm \frac{1}{\max_{[a;b]} |y'(x)|} = \pm \frac{1}{\max_{[a;b]} \left[|y'(a), y'(b)| \right]},$$

где знак перед дробью берется обратным к знаку производной.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение x_{k+1}.

<u>На первом шаге</u> за x_0 принимаем середину отрезка $[0{,}6; 0{,}8]$: $x_0 = \dfrac{0{,}6 + 0{,}8}{2} = 0{,}7$.

Для вычисления параметра c необходимо знать значение производной функции на концах отрезка:

$$y'(0{,}6) = 56 \cdot 0{,}6 - 13 = 33{,}6 - 13 = 20{,}6;$$

$$y'(0{,}8) = 56 \cdot 0{,}8 - 13 = 44{,}8 - 13 = 31{,}8;$$

$$\max_{[a;b]}[\left|y'(0{,}6), y'(0{,}8)\right|] = \left|y'(0{,}8)\right| = 31{,}8 \Rightarrow c = -\frac{1}{31{,}8} = -0{,}0314.$$

Тогда $x_1 = x_0 + c \cdot y(x_0) = 0{,}7 - 0{,}0314 \cdot (28 \cdot 0{,}7^2 - 13 \cdot 0{,}7 - 5) =$
$= 0{,}7 - 0{,}0314 \cdot (-0{,}38) = 0{,}7119.$

Проверим, выполняется ли требуемая точность: $\left|x_1 - x_0\right| = \left|0{,}7119 - 0{,}7\right| = 0{,}0119 > \varepsilon$, таким образом, продолжаем процесс уточнения корня.

<u>На втором шаге</u> $x_1 = 0{,}7119$, $c = -0{,}0314$, тогда

$$x_2 = x_1 + c \cdot y(x_1) = 0{,}7119 - 0{,}0314 \cdot (28 \cdot 0{,}7119^2 - 13 \cdot 0{,}7119 - 5) =$$
$$= 0{,}7119 - 0{,}0314 \cdot (-0{,}0643) = 0{,}7139.$$

Проверка критерия останова итерационного процесса: $\left|x_2 - x_1\right| = \left|0{,}7139 - 0{,}7119\right| = 0{,}002 < \varepsilon$, таким образом, заданная точность достигнута и $x_2 = 0{,}7139$ с некоторым допущением является корнем уравнения $28x^2 - 13x - 5 = 0$. Корень уравнения по методу итераций был найден на втором шаге итерационного процесса.

6. Вычисление абсолютной и относительной погрешности для каждого метода.

Напомним, что абсолютной погрешностью приближенного числа называется число, равное модулю разности между его точным и приближенным значениями: $\Delta x = \left|X - x\right|$.

Так как абсолютная погрешность не полностью характеризует результат, поэтому основной характеристикой точности является относительная погрешность.

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к модулю того значения, которое принимается за истинное:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|X|}.$$

Относительная погрешность часто измеряется в процентах:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|X|} \cdot 100\%.$$

Для нахождения абсолютной и относительной погрешности найденного корня вычислим точное значение корня уравнения $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$, так как в данном случае это не представляет никакого труда.

$D = b^2 - 4 \cdot ac = (-13)^2 - 4 \cdot 28 \cdot (-5) = 169 + 560 = 729 > 0 \Rightarrow$ существуют два различных корня уравнения, которые вычисляются по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a},$$

$$x_1 = \frac{13 - \sqrt{729}}{2 \cdot 28} = \frac{13 - 27}{56} = -0{,}25,$$

$$x_2 = \frac{13 + \sqrt{729}}{2 \cdot 28} = \frac{13 + 27}{56} = 0{,}7143.$$

Так как мы находили приближенное значение положительного корня, то за точное значение примем $X = 0{,}7143$.

Воспользовавшись приведенными формулами, были вычислены значения абсолютной и относительной погрешности. Полученные результаты сведены в таблицу 2.4.

Таблица 2.4

Погрешности численного решения уравнения $28\,x^2 - 13x - 5 = 0$.

Численный метод	Точное значение, X	Приближенное значение, x	Абсолютная погрешность, Δx	Относительная погрешность, δx	Число итераций
Метод бисекций	0,7143	0,7156	0,0013	0,18%	6
Метод Ньютона	0,7143	0,7143	0	0,00%	2
Метод хорд	0,7143	0,7134	0,0009	0,13%	2
Метод итераций	0,7143	0,7139	0,0004	0,06%	2

Как видно из таблицы 2.4, наименее эффективным из рассмотренных методов является метод бисекций, при использовании остальных методов, необходимая точность достигается на втором шаге.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
СПОСОБЫ ОТДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ

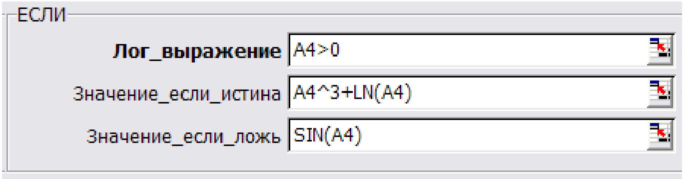
***Задание* 1.** С помощью логической функцию «ЕСЛИ», пользуясь мастером функций $\boxed{f_x}$, вычислить значения составной функции $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0; \\ x^3 + \ln x, & x > 0 \end{cases}$ в точках $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$.

Логическая функция «ЕСЛИ» позволяет организовать ветвление и задается следующим образом: **=ЕСЛИ(лог. выражение; первое значение, если лог. выражение — истина; второе значение, если лог. выражение — ложь)**. Типовой экран для вычисления ветвящейся функции представлен на рис. 2.4.

	A	B	C	D	E	F
2	Лабораторная работа №2. Логическая функция «ЕСЛИ» студента ________________, группы_____________					
3	x	y				
4	-2	-0,909				
5	0	0,000				
6	3	28,099				

Р и с. 2.4. Типовой экран для вычисления ветвящийся функции *y*

При вычислении функции y в ячейке **B4** окно мастера функций имеет вид, представленный на рис. 2.5.



Р и с. 2.5. Типовой экран для логической функции «ЕСЛИ»

Задание 2. Выполнить отделение корней нелинейного уравнения $x^2 = \sqrt{x+4}$ аналитическим методом.

Протабулируем функцию $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ на некотором отрезке [Хнач, Хкон] и определим «соседние» точки a и b, в которых функция $y = y(x)$ принимает значения разных знаков.

<u>На первом шаге</u> выбираем отрезок табулирования функции [Хнач, Хкон]. Для заданной функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ область допустимых значений имеет вид $[-4;+\infty)$, для табулирования выберем отрезок $[-4;6]$. Таким образом, Хнач=–4, Хкон=6.

Отметим, что точки Хнач, Хкон и шаг табулирования выбираются произвольно и их значения можно изменять в процессе решения задачи.

<u>На втором шаге</u> оформим заголовок лабораторной работы, введем исходные данные — ячейки **A8:C8** (см. рис. 2.6).

	A	B	C	D	E	F
5	Лабораторная работа №2. Расчетно-графическое отделение корней студента __________, группы ________________					
6	Исходные данные					
7	Хнач	Хкон	Шаг			
8	-4	6	1			
9						

Р и с. 2.6. Типовой экран расчетно-графического отделения корней нелинейного уравнения. Ввод исходных данных

<u>На третьем шаге</u> введем основные формулы. В ячейку **B11** устанавливается ссылка на ячейку **A8** (т.е. формула **=A8**), чтобы вычисления начались от точки Хнач (см. рис. 2.7).

	A	B	C	D	E	F
10	№	x	y	Комментарий	y'	y''
11	1	-4	16,000			
12	2	-3	8,000	---	-6,500	2,250
13	3	-2	2,586	---	-4,354	2,088
14	4	-1	-0,732	Корень на отрезке -2..-1	-2,289	2,048
15	5	0	-2,000	---	-0,250	2,031
16	6	1	-1,236	---	1,776	2,022
17	7	2	1,551	Корень на отрезке 1..2	3,796	2,017
18	8	3	6,354	---	5,811	2,013
19	9	4	13,172	---	7,823	2,011
20	10	5	22,000	---	9,833	2,009
21	11	6	32,838	---	11,842	2,008
22		Стоп				

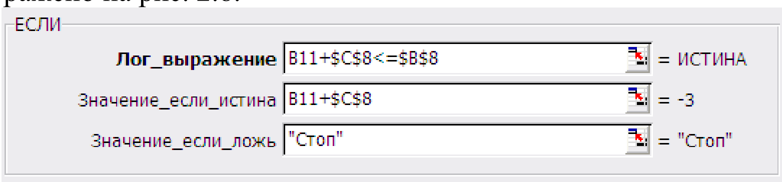
Р и с. 2.7. Типовой экран для расчетно-графического отделения корней нелинейного уравнения. Область решения задачи

В ячейку **B12** вводится формула

$$x = \begin{cases} x + h, & x \le x_{\text{кон}} \\ \text{Стоп}, & x > x_{\text{кон}}, \end{cases}$$

с помощью которой будет найдено следующее значение X, а в случае выхода за переделы отрезка — появится надпись «Стоп».

Составление данной формулы с использованием мастера функций изображено на рис. 2.8.



Р и с. 2.8. Создание формулы для прерывания вычислений

Полученная формула распространяется вниз по появления слова «Стоп».

В последней формуле использован **$** — знак абсолютной адресации ячеек (устанавливается с помощью клавиши F4). Указанный знак позволяет зафиксировать ссылку в формуле при распространении ее на соседние ячейки.

<u>На четвертом шаге</u> в ячейку **C11** вводится формула вычисления функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ при значении аргумента x, записанном в ячейке **B11**, и распространяется вниз.

На пятом шаге вводится комментарий. Комментарий поможет определить отрезки, на концах которых функция принимает значения разных знаков: $y(x) \cdot y(x+h) < 0$.

Так как для проверки данного условия требуется два значения *y*, то формула

=ЕСЛИ(C11*C12<=0;"Корень на отрезке "&B11&".."&B12;"----")
вводится на строку ниже, в ячейку **D12**, и распространяется вниз.

Следует обратить особое внимание на знак амперсанда «**&**», который позволяет вывести в надписи «Корень на отрезке» значения *x* из соответствующего столбца.

На шестом шаге в столбцах **E** и **F** записываются формулы вычисления значений первой и второй производных:

$$y' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x+4}}\,, \quad y'' = 2 + \frac{1}{4\sqrt{(x+4)^3}} = 2 + \frac{1}{4}(x+4)^{-3/2}\,.$$

Заметим, что в точке $x = -4$ не существуют ни первая, ни вторая производные, поэтому для данной функции формулы записываются, начиная с $x = -3$.

Вывод. Таким образом, в результате решения задачи найден отрезок [*a*, *b*]=[1, 2], который содержит ровно один корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

Вычислены значения первой производной $y'\left(x=1\right) = 1{,}776$ и $y'\left(x=2\right) = 3{,}796$, проверено условие $y'\left(1\right) \cdot y'\left(2\right) > 0$, которое с некоторыми допущениями показывает, что отрезок [*a*, *b*]=[1, 2] содержит единственный корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

Убедитесь в том, что на отрезке [1, 2] функция $y = y(x)$ монотонно возрастает, т.е. $y'(x) > 0$. Для этого задайте значения Хнач=1, Хкон=2, Шаг=0,1, проконтролируйте знак первой производной в ячейках **E11:E21**.

Также найдены значения второй производной $y''(x=1) = 2{,}022$, $y''(x=2) = 2{,}017$, необходимые в дальнейшем.

Второй найденный отрезок [*a*, *b*]= [−2, −1] также содержит единственный корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$.

***Задание* 3.** Выполнить отделение корней уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ графическим методом 1.

Для решения данной задачи требуется построить график функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ (см. рис. 2.9). Полученный график подтверждает аналитическое решение (см. задание 2). На рисунке видно, что точки пересечения графика функции $y = x^2 - \sqrt{x+4}$ с осью Ox попадают в ранее найденные отрезки [–2, –1] и [1, 2].

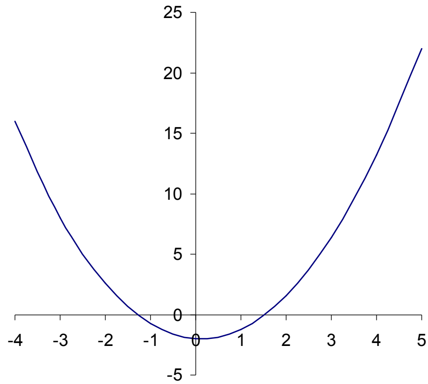


Рис. 2.9. Графическое отделение корней уравнения $x^2 = \sqrt{x+4}$

***Задание* 4.** Выполнить отделение корней для функции своего варианта (см. таблицу 2.5). Начальные данные: Хнач, Хкон и шаг подобрать в зависимости от вида уравнения, области допустимых значений. Значения начальных данных можно изменять в процессе решения.

В столбце **E** вычислить значения первой производной y', а в столбце **F** — значения второй производной y''. Проверить, сохраняется ли на найденном отрезке $[a,b]$ знак производной: $y'(a) \cdot y'(b) > 0$. Если в найденных точках a и b производные имеют разные знаки, то следует уменьшить шаг и найти новый отрезок.

Таблица 2.5

Варианты заданий к лабораторным работам № 2—5

№ п/п	Уравнение	№ п/п	Уравнение
1.	$x^3-3x^2+3=0$	16.	$2-x=\ln(x)$
2.	$x+2=e^{2x}$	17.	$x+\lg(x)=0,5$
3.	$x^3+3x^2-2=0$	18.	$(x+1)^2=\frac{1}{2}e^{-x}$
4.	$3x+\cos(x)+1=0$	19.	$(2-x)e^x=1$
5.	$x^3-12x-5=0$	20.	$x^2+4\sin(x)+1=0$
6.	$(x+1)^3+\ln(x)=0$	21.	$4\cos(x)-2x^3=0$
7.	$x\cdot 2^x=1$	22.	$x^3+6x^2-5=0$
8.	$\sqrt{x+1}=x$	23.	$2\cos 2x-3x=0$
9.	$x-\cos(x)=0$	24.	$x^3+3e^{2x}=0$
10.	$x+\ln\frac{x}{2}=0$	25.	$\sqrt{x+1}=2x$
11.	$2x^3+9x^2-4=0$	26.	$x^2-3e^{-2x}=0$
12.	$x^3+3x^2-1=0$	27.	$x^3+2\sin(3x)+2=0$
13.	$x^3+\cos(x)=0$	28.	$\cos(x)-x+2=0$
14.	$x^3-3x^2+3,5=0$	29.	$(x-1)^2-e^{-(x+1)}=0$
15.	$x^3+12x^2-10=0$	30.	$(x-1)^2=\frac{1}{2}e^x$

Контрольные вопросы

1. Расчетно-графическое отделение корней средствами Excel.
2. Графический метод 2 отделения корней уравнения.
3. Аналитический метод отделения корней уравнения.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ БИСЕКЦИЙ (ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ) И ХОРД

В лабораторной работе № 2 выполнено отделение корней уравнения $y(x)=0$. Пусть $[a,b]$ — один из полученных отрезков, содержащий только один корень данного уравнения. Тогда любую точку отрезка $[a,b]$ можно принять за приближенное значение корня, при этом предельная абсолютная погрешность такого приближения определяется неравенством: $\Delta x^* \le |b-a|$.

Если задана допустимая погрешность ε, то задача отыскания приближенного решения с указанной точностью ε сводится к нахождению отрезка $[a,b]$, содержащего только один корень уравнения и удовлетворяющего условию: $|b-a|<\varepsilon$.

Рассмотрим наиболее распространенные методы уточнения корня.

Метод бисекций. Согласно методу бисекций, найденный отрезок $[a,b]$ делится пополам точкой $c=(a+b)/2$ (точка c_1 на рис. 2.10) и далее рассматриваются два отрезка: $[a,c]$ и $[c,b]$. Затем определяется, в каком из полученных отрезков находится корень уравнения. Если $y(a)\cdot y(c)<0$, то в дальнейшем решении участвует отрезок $[a,c]$, если $y(c)\cdot y(b)<0$, то отрезок $[c,b]$. Для удобства полученный отрезок переобозначается снова как $[a,b]$ и процесс деления повторяется.

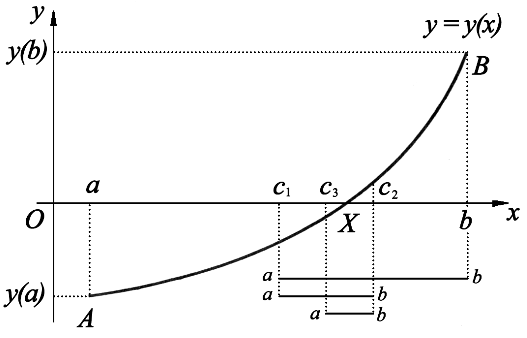


Рис. 2.10. Геометрическая интерпретация метода бисекций

В результате получим систему вложенных отрезков (см. рис. 2.10).

Корень считается найденным, когда длина отрезка станет меньше заданной погрешности, то есть $|b-a|<\varepsilon$. За приближенное значение корня принимается середина последнего отрезка.

***Задание* 1.** Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод бисекций.

Оформить этикетку лабораторной работы. Ввести исходные данные: отрезок [*a, b*]=[1, 2], полученный в лабораторной работе № 2, и требуемую точность $\varepsilon = 0{,}001$ (**A8:C8**, рис.3.2). Заполнить шапку таблицы (**A10:H10**).

	A	B	C	D	E	F	G	H
5								
6	Исходные данные							
7	*a*	*b*	*погрешность*					
8	1	2	0,001					
9								
10	*a*	*b*	*c*	*y*(*a*)	*y*(*b*)	*y*(*c*)	Оценка погр.	Коммент.
11	1,000	2,000	1,500	-1,236	1,551	-0,095	1,0000	
12	1,500	2,000	1,750	-0,095	1,551	0,665	0,5000	
13	1,500	1,750	1,625	-0,095	0,665	0,269	0,2500	
14	1,500	1,625	1,563	-0,095	0,269	0,083	0,1250	
1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
17	1,531	1,547	1,539	-0,007	0,038	0,015	0,0156	
18	1,531	1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
19	1,531	1[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
20	1,533	1,535	1,534	-0,002	0,004	0,001	0,0020	
21	1,533	1,534	1,534	-0,002	0,001	0,000	Корень=1,5337	

=ЕСЛИ(ABS(B11-A11)<$C$8;"Корень="&C11; ABS(B11-A11))

=ЕСЛИ(D11*E11>0;"Корни не отделены";"   ")

Р и с. 2.11. Решение нелинейных уравнений методом бисекций

В ячейки **A11** и **B11** поместите ссылки на исходные данные. В ячейке **C11** рассчитывается значение середины отрезка [*a*, *b*] — точки *c,* в ячейках **D11:F11** вычисляются значения функции в указанных точках.

В ячейке **G11** записывается формула оценки погрешности, с помощью которой проверяется выполнение условия $|b-a| < \varepsilon$. В том случае, есть последнее неравенство верно, то корень считается найденным и выдается ответ, иначе вычисляется значение $|b-a|$. В ячейку **H11** вводится комментарий, выдающий сообщение об ошибочности начальных данных.

В ячейках **A12:B12** (см. рис. 2.12) из отрезков [*a*, *c*] и [*c*, *b*] выбирается тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Полученный отрезок обозначается снова как [*a*, *b*].

Затем формулы распространяются вниз до появления ответа.

	A	B
10	*a*	*b*
11	=A8	=B8
12	=ЕСЛИ(D11*F11<0; A11; C11)	=ЕСЛИ(D11*F11<0; C11; B11)

Р и с. 2.12. Формулы для уточнения корней по методу бисекций

***Задание* 2.** Ввести такие значения $[a,b]$, чтобы данный отрезок не содержал корней. Например [8, 10]. Убедится, что в ячейке **H12** появляется предупреждение «Корни не отделены». Вернуть $[a,b]$ в исходное состояние.

***Задание* 3.** Решить контрольный пример для отрезка $[-2, -1]$, найти второй корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$. Ответ: $x = -1{,}2837$.

***Задание* 4.** Видоизменить формулу в ячейке **G12** так, чтобы значение корня округлялось до 4-х десятичных разрядов после запятой, используя функцию ОКРУГЛ( ). Убедиться, что округление выполняется.

***Задание* 5.** Выполнить свой вариант из таблицы 2.5. Для этого скопировать контрольный пример на отдельный лист, заменить исходные данные и ввести свою функцию для вычисления $y(a)$, $y(b)$, $y(c)$. Если в колонке «Комментарий» появится сообщение «Корни не отделены», то отрезок $[a,b]$ не содержит корня. В этом случае следует вернуться к лабораторной работе № 2 и проверить вычисления.

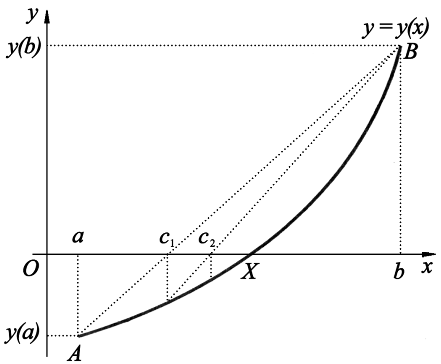


Рис. 2.13. Геометрическая интерпретация метода хорд

Метод хорд. Согласно методу хорд, найденный отрезок делится точкой c, которая находится по формуле

$$c = \frac{a \cdot y(b) - b \cdot y(a)}{y(b) - y(a)}.$$

Геометрически, c – это точка пересечения хорды, проходящей через точки $A(a, y(a))$ и $B(b, y(b))$, с осью Ox (точка c_1 на рис. 2.13).

Далее рассматриваются два отрезка: $[a,c]$ и $[c,b]$. В дальней-

шем решении участвует тот из них, на концах которого функция $y(x)$ принимает значения разных знаков:
$y(a)\cdot y(c)<0$ или $y(c)\cdot y(b)<0$.

Полученный отрезок переобозначается как $\left[a,b\right]$ и снова находится c. В результате каждый новый отрезок будет все ближе к искомому корню. Корень будем считать найденным, когда выполнится условие $\left|c_{i+1}-c_i\right|<\varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение c_{i+1}.

Обратите внимание на то, что при использовании метода хорд один из концов отрезка закреплен и используется на каждой итерации.

***Задание* 6.** Найти корень уравнения $x^2-\sqrt{x+4}=0$ с точностью ε=0,001, используя метод хорд.

Скопируйте лист задания 1 лабораторной работы № 3 и измените формулу для вычисления точки c (ячейка **C11**). Распространите формулу вниз. В ячейке **G12** измените условие вывода корня: $\left|c_{i+1}-c_i\right|<\varepsilon$ и распространите формулу вниз. Сравните полученные значения корня и количество итераций в методе бисекций и в методе хорд. Допускается расхождение в значениях корня не более 0,001.

***Задание* 7.** Выполнить свой вариант из таблицы 2.5.

Контрольные вопросы

1. Решение нелинейных уравнений методом бисекций в Excel.
2. Графическое представление метода бисекций.
3. Решение нелинейных уравнений методом хорд в Excel.
4. Графическое представление метода хорд.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НЬЮТОНА (КАСАТЕЛЬНЫХ)

Метод Ньютона (касательных). Данный метод, так же как метод бисекций и метод хорд, позволяет определить корень уравнения $y\left(x\right)=0$ с заданной точностью ε.

Пусть $\left[a,b\right]$ — один из отрезков, полученных в лабораторной работе № 2, содержащий только один корень уравнения $y(x)=0$.

В качестве начального приближения к корню выберем $x_0\in[a,\,b]$, для которого выполняется условие $y\left(x_0\right)\cdot y''\left(x_0\right)>0$. Как правило, в качестве x_0 выбирают $x_0 = a$ или $x_0 = b$, т.е. левый или правый конец отрезка.

Следующее приближение x_1 находится по формуле Ньютона $x_1 = x_0 - \dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}$. Общая формула метода имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{y(x_k)}{y'(x_k)},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Каждое следующее приближение x_{k+1} будет расположено все ближе и ближе к точке, соответствующей искомому корню.

На практике в качестве условия остановки итерационного процесса можно использовать следующий критерий. Вычисления прекращаются тогда, когда для найденного значения x_{k+1} выполняется условие $\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение x_{k+1}.

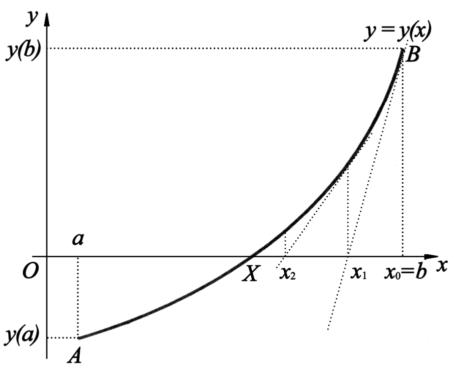


Рис. 2.14. Геометрическая интерпретация метода Ньютона

Геометрическая интерпретация метода (см. рис. 2.14) заключается в следующем: задается начальное приближение x_0, после чего строится касательная к функции $y = y(x)$ в точке x_0. Следующее приближение x_1 — это точка пересечения касательной с осью абсцисс. Далее строится новая касательная и получается приближение x_2, и т.д.

***Задание* 1.** Найти корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ с точностью ε=0,001, используя метод касательных.

В лабораторной работе № 2 был найден отрезок [a, b]=[1, 2]. Проверим выполнение условия $y(x_0)\cdot y''(x_0) > 0$ для левого и правого концов данного отрезка, т.е. для a=1, b=2. Значения функции и второй производной в указанных точках нам уже известны: $y(x=1) = -1{,}236$; $y''(x=1) = 2{,}022$; $y(x=2) = 1{,}551$; $y''(x=2) = 2{,}017$. Как видим,

$y(1)\cdot y''(1)<0$, а $y(2)\cdot y''(2)>0$. Таким образом, условие метода выполняется для правого конца отрезка, а значит в качестве начального приближения к решению выберем x_0=2.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные, шапку таблицы (см. рис. 2.15).

В ячейку **A8** установить ссылку на ячейку **A4**. Ввести формулу метода касательных в ячейку **B8**: $x_1 = x_0 - \dfrac{x_0^2 - \sqrt{x_0+4}}{2x_0 - 1/(2\sqrt{x_0+4})}$, значение x_0 берется из ячейки **A8**. Заполнить остальные ячейки строки **8**. В ячейке **A9** установить ссылку на найденное значение x_1, т.е. ячейку **B8**.

	A	B	C	D	E
2	Л.р.№4 Решение нелинейных уравнений методом касательных Студента _________ группа________				
3	X_0	погрешность			
4	2	0,001			
5					
6					
7	X_n	X_{n+1}	Оценка погрешности	Контроль нуля $y(x_{n+1})$	Число итераций
8	2,0000	1,5915	0,4085	0,1683	1
9	1,5915	1,5349	0,0566	0,0032	2
10	1,5349	1,5338	0,0011	0,0000	3
	1,5338	1,5338	Корень=1,5338	0,0000	4

=ЕСЛИ(ABS(B8-A8)<$B$4;"Корень="&ОКРУГЛ(B8;4);ABS(B8-A8))

Р и с. 2.15. Решение нелинейных уравнений методом касательных

Корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ равен 1,5338 и найден на 4 шаге. Сравним его с корнем, полученным в лабораторной работе № 3, который равен 1,5337. Как видим, найденные решения отличаются на 0,0001.

***Задание* 2.** Найти второй корень уравнения $x^2 - \sqrt{x+4} = 0$ на отрезке $[-2, -1]$ с точностью ε=0,001, используя метод касательных.

***Задание* 3.** Выполнить индивидуальный вариант (см. таблицу 2.5) на отдельном листе. Скопировать контрольный пример, внести изменения в исходные данные, изменить формулу в ячейке **B8**, распространить ее вниз. Сравнить результаты расчетов с предыдущей лабораторной работой № 3. Допускается расхождение не более 0,001. В противном случае следует найти и устранить ошибку.

Контрольные вопросы

1. Решение нелинейных уравнений методом касательных в Excel.
2. Графическое представление метода касательных при решении нелинейных уравнений.
3. Сравнение метода касательных и метода бисекций применительно к решению нелинейных уравнений.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Метод итераций, так же как и рассмотренные выше методы, позволяет определить корень уравнения $y(x)=0$ с заданной точностью ε. Формула метода итераций имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k + c \cdot y(x_k).$$

В случае, если известен отрезок $[a, b]$, содержащий только один корень уравнения, за начальное приближение x_0 можно взять середину отрезка $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

Важную роль в рассматриваемой формуле играет коэффициент c, который ищется следующим образом:

$$c = \pm\frac{1}{\max_{[a,b]}|y'(x)|} = \pm\frac{1}{\max_{[a,b]}\left[|y'(a)|,|y'(b)|\right]}.$$

Знак перед дробью берется обратным к знаку производной.

Уточнение корня заканчивается при выполнении условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$. За приближенное значение корня принимается значение x_{k+1}.

Существует другой вариант применения метода итераций, который состоит в представлении уравнения $y(x)=0$ в виде $x=\varphi(x)$. В этом случае формула метода имеет вид

$$x_{k+1} = \varphi(x_k).$$

Итерации также продолжаются до выполнения условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Сложность последнего способа заключается в том, что на отрезке $[a, b]$ функция $x=\varphi(x)$ должна удовлетворять условию $\left|\varphi'(x)\right|<1$, тогда процесс итераций будет сходиться к корню уравнения $y(x)=0$.

***Задание* 1.** Найти корень уравнения $x^2-\sqrt{x+4}=0$ с точностью ε=0,001, используя метод итераций.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные (см. рис. 2.16). В ячейках **C3** и **D3** ввести формулу вычисления первой производной функции $y(x)$ в точках a и b (см. лабораторную работу № 2).

	A	B	C	D	E
1	Л.р.№5 Решение нелинейных уравнений методом итераций Студента ________ группы_________				
2	*a*	*b*	*y'*(*a*)	*y'*(*b*)	max(|*y'*(*a*)|;|*y'*(*b*)|)
3	1	2	1,7764	3,7959	3,7959
4					
5	X_0	погрешность	коэффиц *c*		
6	1,5	0,001	-0,2634		
7					
8					
9	X_n	X_{n+1}	Оценка погрешности	Контроль нуля $y(x_{n+1})$	Число итераций
10	1,5000	1,5251	0,0251	-0,0247	1
11	1,5251	1,5316	0,0065	-0,0062	2
12	1,5316	1,5332	0,0016	-0,0015	3
13	1,5332	1,5336	корень=1,5336	-0,0004	4

=ЕСЛИ(C3>0;-1/E3;1/E3)

Р и с. 2.16. Решение нелинейных уравнений методом итераций

Используя функцию «МАКС», определить максимальную из них по модулю. Ввести формулы расчета начального приближения x_0 и коэффициента c в строке **6**. В ячейке **B10** набрать формулу метода итераций $=x_n+c\cdot\left(x_n^2-\sqrt{x_n+4}\right)$. В ячейке **A11** установить ссылку на ячейку **B10**.

***Задание* 2.** Найти второй корень уравнения $x^2-\sqrt{x+4}=0$ на отрезке $[-2,-1]$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$, используя метод итераций.

***Задание* 3.** Решить свой вариант (см. таблицу 2.5), найти коэффициент c. Сравнить результаты расчетов с предыдущими лабораторными работами. Допускается расхождение не более 0,001. В противном случае следует найти и устранить ошибку.

Контрольные вопросы

1. Решение нелинейных уравнений методом простых итераций.
2. Сравнение пройденных методов решения нелинейных уравнений.

Т е м а 3. **ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

В тех случаях, когда при вычислении определенного интеграла $\int_a^b y(x)dx$ невозможно найти первообразную или она очень сложна для вычислений, прибегают к формулам численного интегрирования.

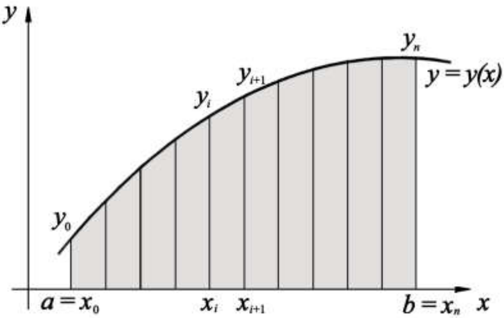


Рис. 3.1. Геометрический смысл определённого интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, кривой $y = y(x)$ ($y(x) \geq 0$) и прямыми $x=a$, $x=b$ (см. рис. 3.1). Разобьем отрезок $[a, b]$ точками x_0, x_1, ..., x_n на n равных частей — элементарных отрезков. Получим n элементарных криволинейных трапеций.

Формулы прямоугольников. Площадь i-той элементарной криволинейной трапеции можно приближенно вычислить как площадь прямоугольника со сторонами $x_{i+1} - x_i = h$ и y_i (см. рис. 3.2). Тогда $S_i \approx y_i \cdot h$ и значение интеграла:

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y(x_0 = a) = y_0$, $y(x_n = b) = y_n$, $y(x_i = a + ih) = y_i$, $i = 0, 1, ..., n$. Данная формула называется первой формулой прямоугольников или формулой левых прямоугольников.

Незаштрихованная область криволинейной трапеции на рис. 3.2 – погрешность вычисления неопределенного интеграла на i-том элементарном отрезке. Очевидно, что чем больше количество отрезков разбиения n, тем точнее будет найдено значение интеграла.

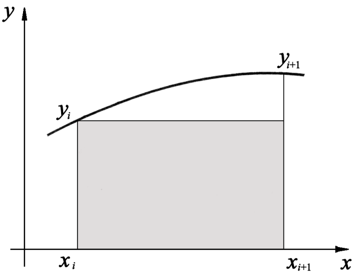


Рис. 3.2. Геометрический смысл первой формулы прямоугольников

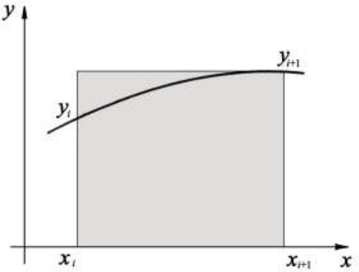


Рис. 3.3. Геометрический смысл второй формулы прямоугольников

Если же построить прямоугольник, используя правую границу элементарной трапеции (рис. 3.3), получим вторую формулу прямоугольников (формулу правых прямоугольников):

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_1 + y_2 + ... + y_n).$$

Следует отметить, что данные формулы не находят широкого применения, так как имеют большую погрешность, пропорциональную величине шага $\delta \approx O(h)$.

Для повышения точности вычисления интеграла значение площади S_i можно оценить, используя прямоугольник со стороной, равной значению подынтегральной функции в середине $x_{i+1/2}$ элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ (см. рис. 3.4). Тогда $S_i \approx y_{i+1/2} \cdot h$ и интеграл:

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-1/2}).$$

Указанная формула называется усложненной формулой прямоугольников (формулой центральных прямоугольников), она имеет второй порядок точности относительно h, т.е. $\delta \approx O(h^2)$.

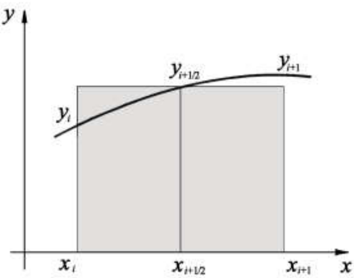


Рис. 3.4. Геометрический смысл усложненной формулы прямоугольников

Формула трапеций. В случае если величина S_i вычисляется как площадь трапеции (см. рис. 3.5), значение интеграла можно приближенно получить по формуле

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2(y_1 + \ldots + y_{n-1})\right),$$

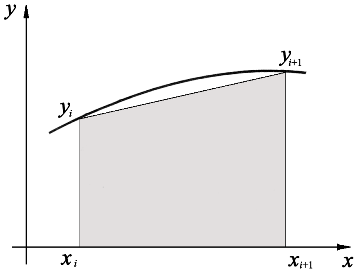


Рис. 3.5. Геометрический смысл формулы трапеций

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y\left(x_0 = a\right) = y_0$, $y\left(x_n = b\right) = y_n$, $y(x_i = a + ih) = y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Указанная формула называется <u>формулой трапеций</u> и имеет второй порядок точности относительно h, т.е. $\delta \approx O(h^2)$.

Формула Симпсона. Разобьем отрезок интегрирования $\left[a, b\right]$ на четное число элементарных отрезков.

В основе формулы Симпсона лежит интерполяция подынтегральной функции $y = y(x)$ многочленом второй степени, т.е. подынтегральная функция на каждом элементарном отрезке двойной длины заменяется параболой, построенной по трем точкам — (x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}) и (x_{2i+2}, y_{2i+2}). Тогда значение интеграла можно приближенно получить по формуле

$$\int_a^b y\left(x\right)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right)\right),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y\left(x_0 = a\right) = y_0$, $y\left(x_n = b\right) = y_n$, $y(x_i = a + ih) = y_i$.

Указанная формула называется <u>формулой Симпсона</u> и имеет четвертый порядок точности относительно h, т.е. $\delta \approx O(h^4)$.

На практике при вычислении определенного интеграла численными методами часто требуется обеспечить точность вычислений ε.

Для оценки точности решения выполняются два расчета: с числом разбиений n и $2n$. Вычисления заканчивают, если $\left|I_n - I_{2n}\right| \le e$. В случае, если полученные результаты отличаются более чем на требуемую точность, число разбиений удваивается и вновь производится сравнение результатов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

***Пример* 1.** Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 (4x^2 - x)dx$ с помощью:

— формул левых, правых и центральных прямоугольников;

— формулы трапеций;

— формулы Симпсона.

Принять шаг интегрирования $h = 0{,}1$. Сравнить полученные результаты с точным решением интеграла (найти его самостоятельно), определить абсолютную и относительную погрешности для каждого метода.

Решение. Выполним табулирование подынтегральной функции на отрезке интегрирования [0; 1] с шагом $h = 0{,}1$. Дискретные значения аргумента x_i и подынтегральной функции $y_i = 4x_i^2 - x_i$ представлены в таблицах 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1

Значения, используемые при численном интегрировании по формулам левых и правых прямоугольников, формулам трапеций и Симпсона

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	-0,06	-0,04	0,06	0,24	0,5	0,84	1,26	1,76	2,34	3

Применяя формулу левых прямоугольников

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$$

при количестве разбиений $n = 10$ и шаге $h = 0{,}1$, получим:

$$\int_0^1 (4x^2 - x)dx \approx 0{,}1(0 - 0{,}06 - 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}24 + 0{,}5 + 0{,}84 + 1{,}26 + 1{,}76 +$$

$$+ 2{,}34) = 0{,}63.$$

Применяя формулу правых прямоугольников

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_1 + y_2 + ... + y_n)$$

при количестве разбиений $n = 10$ и шаге $h = 0{,}1$, получим:

$$\int_0^1 (4x^2 - x)dx \approx 0{,}1(-0{,}06 - 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}24 + 0{,}5 + 0{,}84 + 1{,}26 + 1{,}76 +$$

$$+ 2{,}34 + 3) = 0{,}99.$$

Для формулы центральных прямоугольников

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-1/2})$$

значения подынтегральной функции $y(x) = 4x^2 - x$ вычисляются в точках $x_{i+1/2} = 0 + h\left(i + \frac{1}{2}\right)$, $i = \overline{0, n-1}$. Дискретные значения аргумента $x_{i+1/2}$ и функции $y_{i+1/2}$ представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Значения, используемые при численном интегрировании по формуле центральных прямоугольников

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_{i+1/2}$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$y_{i+1/2}$	-0,04	-0,06	0	0,14	0,36	0,66	1,04	1,5	2,04	2,66

Используя данные из таблицы 3.2, выполняем вычисления по формуле центральных прямоугольников:

$$\int_0^1 (4x^2 - x)dx \approx 0{,}1(-0{,}04 - 0{,}06 + 0 + 0{,}14 + 0{,}36 + 0{,}66 + 1{,}04 + 1{,}5 +$$

$$+ 2{,}04 + 2{,}66) = 0{,}83.$$

Для вычисления погрешностей, найдем точное значение интеграла

$$\int_0^1 (4x^2 - x)dx = \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = 0{,}833.$$

Вычислим значения относительных и абсолютных погрешностей. Для формулы левых прямоугольников:

$$\Delta = \left|0{,}833 - 0{,}69\right| = 0{,}143; \qquad \delta = \frac{0{,}143}{0{,}833} \cdot 100\% = 17{,}16\%.$$

Для формулы правых прямоугольников:

$$\Delta = \left|0{,}833 - 0{,}99\right| = 0{,}157; \qquad \delta = \frac{0{,}157}{0{,}833} \cdot 100\% = 18{,}84\%.$$

Для формулы центральных прямоугольников:

$$\Delta = \left|0{,}833 - 0{,}83\right| = 0{,}0033; \qquad \delta = \frac{0{,}0033}{0{,}833} \cdot 100\% = 0{,}39\%.$$

Формула трапеций, применяемая при численном интегрировании, имеет вид:

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2(y_1 + ... + y_{n-1})\right).$$

Используя данные из таблицы 3.1, вычисляем интеграл по формуле трапеций при количестве разбиений $n = 10$ и шаге $h = 0{,}1$:

$$\int_0^1 (4x^2 - x)dx \approx \frac{0{,}1}{2}(0 + 3 + 2(-0{,}06 - 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}24 + 0{,}5 + 0{,}84 + 1{,}26 +$$

$$+ 1{,}76 + 2{,}34) = 0{,}837.$$

Формула Симпсона:

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right)\right).$$

Вычисляя интеграл по формуле Симпсона, получаем:

$$\int_0^1 (4x^2 - x)dx \approx \frac{0{,}1}{3}(0 + 3 + 4(-0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}5 + 1{,}26 + 2{,}34) +$$

$$2(-0{,}04 + 0{,}24 + 0{,}84 + 1{,}76)) = 0{,}833.$$

Вычислим значения относительных и абсолютных погрешностей. Для формулы трапеций:

$$\Delta = \left|0{,}833 - 0{,}837\right| = 0{,}004; \qquad \delta = \frac{0{,}004}{0{,}833} \cdot 100\% = 0{,}48\%.$$

Для формулы Симпсона:

$$\Delta = \left|0{,}833 - 0{,}833\right| = 0; \qquad \delta = \frac{0}{0{,}833} \cdot 100\% = 0\%.$$

Составим таблицу 3.3, в которую внесем полученные значения погрешностей.

Таблица 3.3

Погрешности численного интегрирования

Формула численного интегрирования	Погрешности	
	Абсолютная	Относительная
Левых прямоугольников	0,143	17,16 %
Правых прямоугольников	0,157	18,84 %
Центральных прямоугольников	0,003	0,39%
Трапеций	0,004	0,48 %
Симпсона	0	0 %

Из таблицы 3.3 видно, что среди рассмотренных методов, наибольшей точностью обладает формула Симпсона.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

***Задание* 1.** Вычислить определенный интеграл $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^4+5}} dx$, используя формулы левых, правых и центральных прямоугольников. Обеспечить точность решения $\varepsilon = 0{,}001$.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); количество отрезков разбиения (**C4**); формулу расчета шага интегрирования *h* (**D4**) (см. рис. 3.6).

В ячейках **B6:C6** вычислить значения подынтегральной функции в точках начала и конца отрезка интегрирования. Таким образом, получим $y_0 = y(a)$, $y_n = y(b)$.

Заполнить блок **A8:B19**, используя формулы Microsoft Excel самостоятельно (в ячейке **B8** дать ссылку на точку *a* — начало отрезка интегрирования; в ячейке **B9** при расчете $x_{i+1} = x_i + h$, воспользоваться функцией **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки *b*). Ввести подынтегральную функцию $y(x) = 1/\sqrt{x^4+5}$ в ячейку **C8** и выполнить заполнение блока **C8:C18**.

=ЕСЛИ(B8>=$B$4;"Интеграл="&ОКРУГЛ(D8-$D$4*$C$6;5);"…")

=ЕСЛИ(B8>=$B$4;"Интеграл="&ОКРУГЛ(D8-$D$4*$B$6;5);"…")

=ЕСЛИ(G8>=$B$4-$D$4/2;"Интеграл="&ОКРУГЛ(I8;5);"…")

=$D$4*C8

=$D$4*C9+D8

=$D$4*H8

=$D$4*H9+I8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3	a	b	n	h						
4	1	4	10	0,3						
5		*y*(*a*)	*y*(*b*)							
6		0,4082	0,0619							
7	№	Xi	Yi	част суммы	Лев. прямоуг.	Прав. прямоуг.	Xi+1/2	Yi+1/2	част суммы	Центр. прямоуг.
8	0	1	0,40825	0,12247	…	…	1,15	0,38493	0,11548	…
9	1	1,3	0,35678	0,22951	…	…	1,45	0,32581	0,21322	…
10	2	1,6	0,29420	0,31777		…	1,75	0,26372	0,29234	
11	3	1,9	0,23549	0,38841	…	…	2,05	0,21007	0,35536	
12	4	2,2	0,18756	0,44468		…	2,35	0,16784	0,40571	
13	5	2,5	0,15065	0,48988		…	2,65	0,13569	0,44641	…
14	6	2,8	0,12266	0,52668	…	…	2,95	0,11129	0,47980	…
15	7	3,1	0,10135	0,55708	…	…	3,25	0,09262	0,50759	…
16	8	3,4	0,08493	0,58256	…	…	3,55	0,07813	0,53103	…
17	9	3,7	0,07209	0,60419	…	…	3,85	0,06671	0,55104	Интеграл=0,55104
18	10	4	0,06190	0,62276	Интегр=0,60419	Интегр=0,50028	стоп			
19	11	стоп								
20										

Рис. 3.6. Численное интегрирование по формулам прямоугольников

В столбце **D** накапливается сумма $h(y_0 + y_1 + ... + y_n)$. В силу того, что в первой формуле прямоугольников не используется значение y_n, а во второй — y_0, запишем формулы в виде:

Формула левых прямоугольников: $\int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_n) - hy_n$,

Формула правых прямоугольников: $\int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_n) - hy_0$.

Указанные формулы реализованы в столбцах **E** и **F** соответственно, значение интеграла выведено с пятью десятичными знаками.

В столбцах **G—J** реализована формула центральных прямоугольников.

В частности, в блоке **G8:G17** рассчитываются значения середин $x_{i+1/2}$ элементарных отрезков; надпись «Стоп» выдается после получения $x_{n-1/2}$. В блоке **H8:H17** вычисляются значения подынтегральной функции $y_{i+1/2}$ при соответствующих значениях $x_{i+1/2}$.

В столбце **I** накапливается сумма $h(y_{1/2} + y_{3/2} + ... + y_{n-1/2})$, значение интеграла выдается в столбце **J** с пятью десятичными знаками.

Скопировать полученное решение на тот же лист, выполнить вычисление интеграла по формулам прямоугольников при *n*=20. Для этого изменить значение *n*, распространить формулы строки **17** до появления надписей «Стоп».

Оценку точности вычислений рассмотрим на примере формулы центральных прямоугольников. Нами было получено, что $I_{\text{усл}}^{10} = 0{,}55104$, $I_{\text{усл}}^{20} = 0{,}55134$. Как видим, $\left|I_{\text{усл}}^{10} - I_{\text{усл}}^{20}\right| = 0{,}0003 < 0{,}001$, что соответствует допустимой погрешности $\varepsilon = 0{,}001$.

В противном случае следовало бы удвоить количество разбиений отрезка интегрирования и установить значение n, при котором выполняется условие $\left|I_{\text{усл}}^{n} - I_{\text{усл}}^{2n}\right| \le \varepsilon$.

***Задание* 2.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 3.4). Для формулы центральных прямоугольников установить, обеспечена ли точность решения $\varepsilon = 0{,}001$.

Таблица 3.4

Варианты заданий к лабораторной работе № 6

№ п/п	$y(x)$	a	b	№ п/п	$y(x)$	a	b
1.	$\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+3}}$	0,4	1,2	14.	$\dfrac{x^2}{\cos(x)}$	0,3	0,8
2.	$\dfrac{\cos(x)}{x+2}$	0,2	1,2	15.	$\dfrac{tg(x^2)}{x+1}$	0,2	0,7
3.	$\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+2x^2}}$	0,6	1,5	16.	$\dfrac{2x+0,5}{\sin(x)}$	0,5	1,2
4.	$\dfrac{tg(x^2+0,5)}{1+2x^2}$	0,4	0,8	17.	$\dfrac{\lg(x^2+3)}{2x}$	0,2	2,2
5.	$\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2x^2+3}}$	0,8	1,4	18.	$\dfrac{x^2}{\sin(x)}$	0,8	1,6
6.	$\sqrt{x}\cos(x^2)$	0,4	1,2	19.	$\lg(x+3)\sqrt{x+1}$	1,2	2,8
7.	$\sqrt{x+1}\cos(x^2)$	0,02	0,2	20.	$tg(2x)\sqrt{x+1}$	0,06	0,36
8.	$x^2\lg(x)$	1,4	3	21.	$e^{-\sqrt{x}}$	0	0,16
9.	$\dfrac{1}{\sqrt{1+2x^3}}$	2,2	3	22.	$\dfrac{\sin(2x)}{x}$	1,5	2,7
10.	$\dfrac{\sqrt{1+x}}{\ln(x)}$	1,5	2,7	23.	$\sqrt{4-x^3}$	0	0,8
11.	$\dfrac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}}$	1,3	2,1	24.	$\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$	0,2	1,8
12.	$\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{0,2x^2+1}}$	1,3	2,5	25.	$\dfrac{e^{-x}}{\sin(x)+1}$	0,6	1,6
13.	$\sqrt{x}\sin(x^2)$	3,2	4	26.	e^{-5x^2}	0,02	0,4

№ п/п	$y(x)$	a	b	№ п/п	$y(x)$	a	b
27.	$tg\left(x^2\right)\sqrt{x+1}$	0,6	0,9	34.	$\dfrac{x}{\sqrt{2\cos(x)+1}}$	0,4	1,8
28.	$e^x\sqrt{x+1}$	1,4	2,6	35.	$\sqrt{1-4x^3}$	0	0,06
29.	$\dfrac{tg(x^2)}{x+3}$	0,5	1,0	36.	$\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+3}}$	1,8	3
30.	$\ln\left(x^2\right)\sqrt{x+1}$	1,3	2,1	37.	$\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x+1}}$	0,8	1,6
31.	$\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x}}$	1,2	2,5	38.	$\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+2x^2}}$	0,4	2,2
32.	$\dfrac{\lg(1+x)}{2x-1}$	0,15	0,33	39.	$\dfrac{tg(x+3)}{1+2x^2}$	0,4	1
33.	$\dfrac{\cos(x)}{x^2+1}$	1,2	2,8	40.	$\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^3+1}}$	0	1

Задание **3.** Вычислить определенный интеграл $I=\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^4+5}}dx$, используя формулу трапеций.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); количество отрезков разбиения (**C4**); формулу расчета шага интегрирования *h* (**D4**) (см. рис. 3.7).

В ячейках **B6:C6** вычислить значения $y_0=y(a)$, $y_n=y(b)$; в ячейке **D6** — значение $h(y_0+y_n)$.

Заполнить блок **A8:B19**, используя формулы Microsoft Excel самостоятельно (в ячейке **B9** воспользоваться функцией **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки *b*). Ввести подынтегральную функцию $y(x)=1/\sqrt{x^4+5}$ в ячейку **C8** и выполнить заполнение блока **C8:C18**.

В столбце **D** накапливается сумма $h(y_0+y_1+...+y_n)$.

Представим формулу трапеций в виде:

$$\int_a^b y(x)dx = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)=h(y_0+y_1+\ldots+y_n)-\frac{h(y_0+y_n)}{2}.$$

Данная формула реализуется в столбце **E** и выдается значение интеграла с пятью знаками после запятой.

=ЕСЛИ(B8>=$B$4;"Интеграл="&ОКРУГЛ(D8-$D$6/2;5);"…")

	A	B	C	D	E
3	*a*	*b*	*n*	*h*	
4	1	4	10	0,3	
5		*y*(*a*)	*y*(*b*)	*h**(*y*(*a*)+*y*(*b*))	
6		0,4082	0,0619	0,1410	
7	№	Xi	Yi	частичные суммы	Интеграл
8	0	1	0,40825	0,12247	...
9	1	1,3	0,35678	0,22951	...
10	2	1,6	0,29420	0,31777	...
11	3	1,9	0,23549	0,38841	...
12	4	2,2	0,18756	0,44468	...
13	5	2,5	0,15065	0,48988	...
14	6	2,8	0,12266	0,52668	...
15	7	3,1	0,10135	0,55708	...
16	8	3,4	0,08493	0,58256	...
17	9	3,7	0,07209	0,60419	...
18	10	4	0,06190	0,62276	Интеграл=0,55224
19	11	стоп			

=$D$4*C8

=$D$4*C9+D8

Рис. 3.7. Численное интегрирование по методу трапеций

Скопировать полученное решение на тот же лист, выполнить вычисление интеграла по формуле трапеций при n=20.

***Задание* 4.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 3.4).

***Задание* 5.** Вычислить определенный интеграл $I=\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^4+5}}dx$, используя формулу Симпсона.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); количество отрезков разбиения (**C4**); формулу в ячейку **D4** (см. рис. 3.8), которая предупредит об ошибке при задании нечетного *n*.

=ЕСЛИ(ОСТАТ(C4;2)=0; (B4-A4)/C4;"нечетное *n* не допускается")

	A	B	C	D	E
3	*a*	*b*	*n*	*h*	
4	1	4	10	0,3	
5		*y*(*b*)			
6		0,0619			
7	№	Xi	Yi	частичные суммы	Интеграл
8	0	1	0,40825	0,40825	
9	1	1,3	0,35678	1,83536	...
10	2	1,6	0,29420	2,42375	...
11	3	1,9	0,23549	3,36572	...
12	4	2,2	0,18756	3,74085	...
13	5	2,5	0,15065	4,34344	...
14	6	2,8	0,12266	4,58876	...
15	7	3,1	0,10135	4,99416	...
16	8	3,4	0,08493	5,16403	...
17	9	3,7	0,07209	5,45239	...
18	10	4	0,06190	5,57619	Интеграл=0,55143
19	11	стоп			

Рис. 3.8. Численное интегрирование по методу Симпсона

Вычислить значение $y_n = y(b)$ в ячейке **B6**. Заполнить блок **A8:B19** (в ячейке **B9** воспользоваться функцией **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки *b*). Ввести подынтегральную функцию $y(x) = 1/\sqrt{x^4+5}$ в ячейку **C8** и выполнить заполнение блока **C8:C18**.

Преобразуем формулу Симпсона с учетом того, что последнее значение $y_n = y(b)$ всегда будет иметь четный индекс, к виду:

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2} + y_n\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) - y_n\right)$$

При вычислении частичных сумм в столбце **D** необходимо учесть, что значения подынтегральной функции при четном *n* умножаются на 2, а при нечетном n — на 4, поэтому для определения нечетности или четности индекса, используем формулу **ОСТАТ(n; 2)** (указанная формула выдает значение остатка при делении на 2). Очевидно, что для четных n остаток при делении на 2 будет равен нулю, а при нечетных n — отличен от нуля (см. рис. 3.9). В столбце **E** вывести значение интеграла с пятью знаками после запятой.

	D	E
7	частичные суммы	Интеграл
8	=C8	
9	=ЕСЛИ(ОСТАТ(A9;2)=0;D8+2*C9; D8+4*C9)	=ЕСЛИ(B9>=$B$4;"Интеграл=" &ОКРУГЛ((D9-$B$6)*$D$4/3;5);"..")

Рис. 3.9. Формулы метода Симпсона

Скопировать полученное решение на тот же лист, выполнить вычисление интеграла по формуле Симпсона при n=20.

***Задание* 6.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 3.4).

***Задание* 7.** Составить сравнительную таблицу результатов численного решения определенного интеграла, полученных рассмотренными методами (см. табл. 3.5). Найти абсолютную и относительную погрешности вычислений, приняв в качестве истинного значения интеграла результат, полученный с помощью формулы Симпсона при $n = 20$.

Обозначим приближенное значение интеграла буквой I, тогда

$$\Delta(I) = \left| I - I^{20}_{\text{Симп.}} \right|, \quad \delta(I) = \frac{\Delta(I)}{I^{20}_{\text{Симп.}}}.$$

Указанная таблица составляется средствами Microsoft Excel. Для этого значения интегралов, полученные рассмотренными методами при $n = 10$ и $n = 20$, переписываются вручную. Значения погрешностей вычисляются по вышеприведенным формулам.

Таблица 3.5

Численное интегрирование. Оценка погрешности

	I_{10}	(I)	$\delta(I)$	I_{20}	(I)	$\delta(I)$
1-я ф-ла прямоуг.	0,60419	0,05275	9,57%	0,57761	0,02617	4,53%
2-я ф-ла прямоуг.	0,50028	0,05116	9,28%	0,52566	0,02578	4,46%
усл. ф-ла прямоуг.	0,55104	0,00040	0,07%	0,55134	0,00010	0,02%
ф-ла трапеций	0,55224	0,00080	0,15%	0,55164	0,00020	0,03%
ф-ла Симпсона	0,55143	0,00001	0,00%	0,55144	—	—

***Задание* 8.** Скопировать таблицу, полученную в задании 7, на новый лист. Составить сравнительную таблицу результатов численного решения определенного интеграла рассмотренными методами для индивидуального варианта (см. таблицу 3.4).

Контрольные вопросы

1. Формулы прямоугольников, погрешность формул прямоугольников.
2. Формула трапеций, погрешность метода трапеций.
3. Формула Симпсона, погрешность метода Симпсона.

Т е м а 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть требуется найти на отрезке $[a, b]$ решение обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при заданном начальном условии $y(a) = y_0$. Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Рассмотрим численные методы решения этой задачи. Отметим, что численные методы дают искомое приближенное решение в виде таблицы значений.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей — элементарных отрезков точками $x_0, x_1, ..., x_n$, причем, $x_0 = a$, $x_n = b$. Величину $h = (b - a)/n$ будем называть шагом интегрирования. Тогда $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, ..., n$.

Метод Эйлера. Согласно методу Эйлера, зная значение искомой функции в начале отрезка $[a, b]$: $y(a) = y_0$, приближенное значение решения уравнения в точке y_1, можно определить по формуле

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Затем в качестве y_0 выступает значение y_1, находится y_2 и т.д.

Общая итерационная формула метода Эйлера имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, ..., n-1.$$

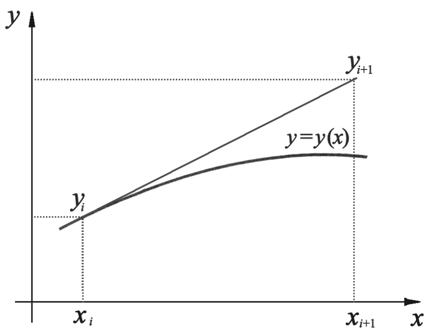


Рис. 4.1. Один шаг метода Эйлера

Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации решения на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ отрезком касательной, проведенной к графику решения в точке x_i (рис. 4.1). Затем строится касательная к кривой $y = y(x)$ в точке x_{i+1} и переносится параллельно самой себе до совмещения с концом касательной, полученной на предыдущей итерации.

Полученная ломаная и будет представлять собой приближенное решение, полученное методом Эйлера.

Формула Эйлера имеет погрешность метода $\delta \approx O(h^2)$.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Данный метод используется чаще остальных при решении практических задач.

Общая итерационная формула метода имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

где $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$, $k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$,

$k_4 = f(x_i + h,\, y_i + hk_3)$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

Метод Рунге-Кутта является более точным, по сравнение с методом Эйлера, его погрешность составляет $\delta \approx O(h^4)$.

Строго говоря, существует не один, а группа методов Рунге-Кутта, отличающихся друг от друга порядком, т.е. количеством параметров k_j. В данном случае мы имеем метод 4-го порядка, который является одним из наиболее применяемых на практике, так как обеспечивает высокую точность и в то же время отличается сравнительной простотой. Поэтому в большинстве случаев он упоминается в литературе просто как «метод Рунге-Кутта» без указания его порядка.

Часто при решении дифференциального уравнения численными методами требуется обеспечить точность вычислений *ε*. Для практического выбора шага *h* с целью обеспечения заданной точности *ε* применяется следующий прием.

Выполняются два расчета: с числом разбиений n и $2n$. Вычисления заканчивают, если $\max\limits_{i=\overline{1,n}}\left|y_i^n - y_i^{2n}\right| \le \varepsilon$. В случае, если полученные результаты отличаются более чем на требуемую точность, число разбиений удваивается и вновь производится сравнение результатов.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Пример. Дано дифференциальное уравнение $y' = 7 - 5x$, $y(0) = 2$.

Приняв шаг интегрирования $h = 0{,}1$, выполнить две итерации с помощью:

— метода Эйлера;

— метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

Сравнить результаты, полученные в точке $x = 0{,}2$, с точным решением (найти его самостоятельно), определить абсолютную и относительную погрешности для каждого метода.

Решение. При численном решении обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера воспользуемся итерационной формулой

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k),$$

где $f(x, y) = 7 - 5x, \quad x_k = x_0 + h \cdot k, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2.$

Записывая данную формулу для различных значений k, получаем

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0{,}1(7 - 5 \cdot 0) = 2{,}7;$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 2{,}7 + 0{,}1(7 - 5 \cdot 0{,}1) = 3{,}35.$$

Найдем точное решение заданного дифференциального уравнения первого порядка.

$$y' = 7 - 5x, \qquad y = \int (7 - 5x)dx = 7x - \frac{5x^2}{2} + C.$$

Подставляя заданные начальные условия, находим соответствующее значение произвольной постоянной C:

$$2 = 7 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{0^2}{2} + C, \qquad C = 2.$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y = 7x - \frac{5x^2}{2} + 2.$$

Найдем точное решение для $x_1 = 0{,}1$ и $x_2 = 0{,}2$.

$$y_1 = 7x_1 - \frac{5x_1^2}{2} + 2 = 7\cdot 0{,}1 - \frac{5\cdot 0{,}1^2}{2} + 2 = 2{,}675,$$

$$y_2 = 7x_2 - \frac{5x_2^2}{2} + 2 = 7\cdot 0{,}2 - \frac{5\cdot 0{,}2^2}{2} + 2 = 3{,}3.$$

Найдем абсолютную и относительную погрешности приближенного решения методом Эйлера в точке $x = 0{,}2$.

$$\Delta_{Эйл.} = |3{,}3 - 3{,}35| = 0{,}05; \qquad \delta_{Эйл.} = \frac{0{,}05}{3{,}3}\cdot 100\,\% = 1{,}515\,\%.$$

Решим то же уравнение, используя метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Данный метод описывается следующей системой пяти равенств:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$, $k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$,

$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_3)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

<u>На первом шаге</u>, зная, что $f(x, y) = 7 - 5x$, $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$ и $y_0 = 2$, вычислим y_1. Для этого сначала последовательно вычисляем k_j:

$$k_1 = f(x_0, y_0) = 7 - 5\cdot 0 = 7,$$

$$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_1}{2}) = 7 - 5\cdot(0 + \frac{0{,}1}{2}) = 7 - 5\cdot 0{,}05 = 6{,}75,$$

$$k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_2}{2}) = 7 - 5\cdot(0 + \frac{0{,}1}{2}) = 7 - 5\cdot 0{,}05 = 6{,}75,$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) = 7 - 5\cdot(0 + 0{,}1) = 6{,}5.$$

Тогда

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2 + \frac{0{,}1}{6}\cdot(7 + 2\cdot 6{,}75 + 2\cdot 6{,}75 + 6{,}5) =$$

$$= 2{,}675.$$

<u>На втором шаге</u>, зная, что $f(x, y) = 7 - 5x$, $h = 0{,}1$, $x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$ и $y_1 = 2{,}675$, вычислим y_2.

$$k_1 = f(x_1, y_1) = 7 - 5 \cdot 0{,}1 = 7 - 0{,}5 = 6{,}5,$$

$$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}) = 7 - 5 \cdot (0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}) = 7 - 5 \cdot 0{,}15 = 6{,}25,$$

$$k_3 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}) = 7 - 5 \cdot (0{,}1 + \frac{0{,}1}{2}) = 7 - 5 \cdot 0{,}15 = 6{,}25,$$

$$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + hk_3) = 7 - 5 \cdot (0{,}1 + 0{,}1) = 6.$$

Вычисляем

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2{,}675 + \frac{0{,}1}{6} \cdot (6{,}5 + 2 \cdot 6{,}25 + 2 \cdot 6{,}25 + 6) =$$
$$= 3{,}3.$$

Найдем абсолютную и относительную погрешности приближенного решения методом Рунге-Кутта в точке $x = 0{,}2$.

$$\Delta_{Р.-К.} = |3{,}3 - 3{,}3| = 0; \qquad \delta_{Р.-К.} = \frac{0}{3{,}3} \cdot 100\,\% = 0\,\%.$$

Таким образом, решение методом Рунге-Кутта в точке $x = 0{,}2$ совпало с точным решением дифференциального уравнения.

Результаты вычислений внесем в таблицу 4.1.

Таблица 4.1

Оценка погрешности численного решения
обыкновенного дифференциального уравнения

x	Точное решение	Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта
0	2	2	2
0,1	2,675	2,7	2,675
0,2	3,3	3,35	3,3
Абсолютная погрешность при *x*=0.2		0,05	0
Относительная погрешность при *x*=0.2		1,515 %	0 %

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Задание* 1.** Используя метод Эйлера, найти решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$ при заданном начальном условии $y(0) = -1$ на отрезке $[0, 1]$. Обеспечить точность решения $\varepsilon = 0{,}001$.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); начальное значение y_0 (**C4**); количество отрезков разбиения (**D4**); формулу расчета шага интегрирования h (**E4**) (см. рис. 4.2).

	A	B	C	D	E
3	a	b	y0	n	h
4	0	1	-1	10	0,1
5					
6	i	xi	yi	комментарий	
7	0	0	-1,0000	…	
8	1	0,1	-0,9000	…	
9	2	0,2	-0,8180	…	
10	3	0,3	-0,7471	…	
11	4	0,4	-0,6823	…	
12	5	0,5	-0,6197	…	
13	6	0,6	-0,5563	…	
14	7	0,7	-0,4894	…	
15	8	0,8	-0,4164	…	
16	9	0,9	-0,3351	…	
17	10	1	-0,2429	Стоп	

Рис. 4.2. Численное решение дифференциального уравнения методом Эйлера

В блоке (**A7:A17**) указываются номера итераций; в блоке (**B7:B17**) рассчитываются точки разбиения отрезка интегрирования; в ячейках (**C7:C17**) реализуется формула метода Эйлера $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, ..., n-1$.

В столбце комментария используйте функцию **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки b.

Изобразить полученные значения приближенного решения на графике, используя точечный тип диаграммы (см. рис. 4.3). Это и есть ломаная, дающая приближенный вид интегральной кривой — графика точного решения дифференциального уравнения при заданном начальном условии.

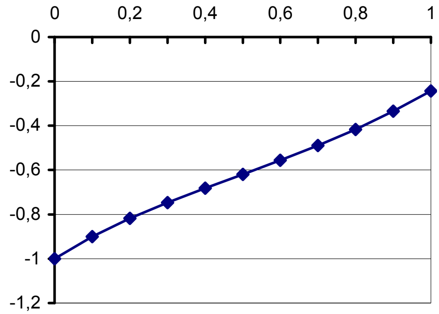


Рис. 4.3. Приближенное решение, полученное методом Эйлера

Скопировать полученный результат на тот же лист, выполнить решение дифференциального уравнения методом Эйлера при n=20. Для этого изменить значение n, распространить формулы строки **17** до появления надписей «Стоп».

Получим $y_n^{20} = -0{,}2380$. Ранее было вычислено $y_n^{10} = -0{,}2429$. Как видим, $\left|y_n^{10} - y_n^{20}\right| = 0{,}049$, что превосходит допустимую погрешность ε.

Путем удвоения количества разбиений отрезка интегрирования установите, при каком n выполняется условие $\left|y_n^{n} - y_n^{2n}\right| \le 0{,}001$.

***Задание* 2.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 4.2).

Таблица 4.2

Варианты заданий к лабораторной работе № 7

№ п/п	$f(x,y)$	a	b	y_0	№ п/п	$f(x,y)$	a	b	y_0
1.	$0,5xy$	0	1	1	7.	$1+0,8y\cdot\cos(x)-2y^2$	0	1	0
2.	x^2+y^2	0	1	0	8.	$1+0,2y\cdot\cos(x)-y^2$	0	1	0
3.	$1+xy^2$	0	1	0	9.	$-y^2+x^{-2}$	1	2	1
4.	$\frac{y}{x+1}-y^2$	0	1	1	10.	$\frac{2}{x}-\frac{y}{x+1}-y^2$	1	2	1
5.	$0,4x^{-1}-y^2$	1	2	1	11.	$0,2x^{-2}-yx^{-1}-6y^2$	1	2	1
6.	$(0,2-y)x^{-1}-0,8y^2$	1	2	0,5	12.	$0,5x^{-2}-2y^2$	1	2	1

№ п/п	$f(x, y)$	a	b	y_0	№ п/п	$f(x, y)$	a	b	y_0
13.	$-0,5y^2+0,1x^{-2}$	1	2	1	27.	$\dfrac{0,5y}{x+2}-0,2y^2$	0	1	0,5
14.	$yx^{-1}-2y^2$	1	2	2	28.	$2+0,1x^2y^2$	0	1	0,6
15.	$1+0,2y\cdot\sin(x)-y^2$	0	1	0	29.	x^2+2y^2	0	1	0,7
16.	$1+0,8y\cdot\sin(x)-2y^2$	0	1	0	30.	$2xy$	0	1	0,8
17.	$x+y^2$	0	1	0,5	31.	$(1-x)^4\,tg(xy)$	-1	1	0
18.	$2x+y^2$	0	1	0,3	32.	$1x^3+\cos(4x)$	0	2	0
19.	$2x+0,1y^2$	0	1	0,2	33.	$y\sqrt{\ln(2x)}-3\cos^2(3x)$	1	3	0
20.	x^2+xy	0	1	0,2	34.	$e^{\frac{8x}{3}}\cos(xy)$	-1	1	-1
21.	$0,2x+y^2$	0	1	0,1	35.	$(\cos(3x)+\ln(4x))^2-y^2$	0,5	2,5	0
22.	$0,1x+0,5y^2$	0	1	0,2	36.	$4(x+2y)^2+(x-2y)^2$	-1	1	1
23.	$x^2+0,5xy$	0	1	0,3	37.	$y^2\sqrt{x^2+1}-3x$	-1	1	1
24.	$x+0,2y^2$	0	1	0,4	38.	$\dfrac{\cos y}{2\cos x}+yx$	-1	1	0
25.	$0,5x+2y^2$	0	1	0,5	39.	$\dfrac{3\sin^2(xy)}{x}-y$	-2	0	-2
26.	x^2+2y	0	1	0,6	40.	$2e^{x+2y}-x^y$	1	3	-1

***Задание* 3.** Используя метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности, найти решение дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$ при заданном начальном условии $y(0) = -1$ на отрезке $[0, 1]$. Обеспечить точность решения $\varepsilon = 0{,}001$.

Оформить этикетку лабораторной работы, ввести исходные данные: отрезок интегрирования (**A4:B4**); начальное значение y_0 (**C4**);

количество отрезков разбиения (**D4**); формулу расчета шага интегрирования h (**E4**) (см. рис. 4.4).

В блоке (**A7:A17**) указываются номера итераций; в блоке (**B7:B17**) рассчитываются точки разбиения отрезка интегрирования; в ячейках (**C7:C17**) реализуется формула метода Рунге-Кутта.

Значения коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_4 вычисляются в блоке **D7:L17**. В частности, в столбце **D** вычисляется $k_1 = f(x_i, y_i)$; в столбце **E** — $x_i + \frac{h}{2}$; в столбце **F** — $y_i + \frac{h}{2}k_1$; в столбце **G** — $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$ и т.д.

Напомним, что $f(x, y) = x^2 + y^2$. Обратите также внимание на то, что ссылки на значение шага интегрирования h, должны иметь абсолютную адресацию (**$E$4**).

Например, формула в ячейке **D7** будет иметь вид **=B7^2+C7^2**, а в ячейке **E7**: **=B7+$E$4/2**.

В столбце комментария используйте функцию **ЕСЛИ** для вывода надписи «Стоп» при достижении точки b.

Изобразить полученные значения приближенного решения на графике, используя точечный тип диаграммы.

Скопировать полученное результат на тот же лист, выполнить решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности при n=20. Установить, обеспечена ли требуемая точность ε на конце интервала интегрирования.

***Задание* 4.** Скопировать контрольный пример на новый лист. Решить индивидуальный вариант (см. таблицу 4.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
3	a	b	y_0	n	h								
4	0	1	-1	10	0,1								
5													
6	i	x_i	y_i	k1	x_i+h/2	y				+h	y_i+k3*h	k4	комм.
7	0	0	-1,0000	1,0000	0,05	-0,9500	0,9050	-0,9548	0,9140	0,1	-0,9086	0,8355	…
8	1	0,1	-0,9088	0,8359	0,15	-0,8670	0,7742	-0,8701	0,7795	0,2	-0,8308	0,7303	…
9	2	0,2	-0,8309	0,7304	0,25	-0,7944	0,6935	-0,7962	0,6964	0,3	-0,7612	0,6695	…
10	3	0,3	-0,7612	0,6695	0,35	-0,7277	0,6521	-0,7286	0,6534	0,4	-0,6959	0,6443	…
11	4	0,4	-0,6958	0,6441	0,45	-0,6636	0,6429	-0,6637	0,6430	0,5	-0,6315	0,6488	…
12	5	0,5	-0,6314	0,6487	0,55	-0,5990	0,6613	-0,5983	0,6605	0,6	-0,5653	0,6796	…
13	6	0,6	-0,5652	0,6795	0,65	-0,5312	0,7047	-0,5300	0,7034	0,7	-0,4949	0,7349	…
14	7	0,7	-0,4947	0,7347	0,75	-0,4580	0,7722	-0,4561	0,7705	0,8	-0,4176	0,8144	…
15	8	0,8	-0,4174	0,8143	0,85	-0,3767	0,8644	-0,3742	0,8625	0,9	-0,3312	0,9197	…
16	9	0,9	-0,3310	0,9196	0,95	-0,2850	0,9837	-0,2818	0,9819	1	-0,2328	1,0542	…
17	10	1	-0,2326	1,0541	1,05	-0,1799	1,1349	-0,1758	1,1334	1,1	-0,1192	1,2242	Стоп
18													

=C7+$E$4*(D7+2*G7+2*I7+L7)/6

Рис. 4.4. Численное решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности

***Задание* 5.** Составить средствами Microsoft Excel сравнительную таблицу результатов численного решения дифференциального уравнения, полученных рассмотренными методами.

Оценим погрешность на конце интервала интегрирования для каждого метода (см. табл. 4.3). За истинное значение примем результат, полученный методом Рунге-Кутта в точке $x = 1$ при $n = 20$.

Таблица 4.3

Оценка погрешности численного решения обыкновенного дифференциального уравнения

	y_n^{10}	$\Delta(y_n^{10})$	$\delta(y_n^{10})$	y_n^{20}	$\Delta(y_n^{20})$	$\delta(y_n^{20})$
мет. Эйлера	-0,2429	0,0103	4,428%	-0,238	0,0054	2,322%
метод Рунге-Кутта	-0,2326	0	0,000%	-0,2326	—	—

***Задание* 6.** Скопировать таблицу, полученную в задании 5, на новый лист. Составить сравнительную таблицу результатов численного решения обыкновенного дифференциального уравнения рассмотренными методами для индивидуального варианта (см. таблицу 4.2).

Контрольные вопросы

1. Итерационная формула метода Эйлера.
2. Итерационная формула исправленного метода Эйлера.
3. Итерационная формула метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Изд-во «Лань», 2014. 672 с.
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 636 с.
3. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 243 с.
4. *Башкинова Е.В., Егорова Г.Ф., Заусаев А.А.* Численные методы и их реализация в Microsoft Excel. Ч.1. Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 44 с.
5. *Башкинова Е.В., Егорова Г.Ф., Заусаев А.А.* Численные методы и их реализация в Microsoft Excel. Ч.2. Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 44 с.
6. *Волков Е.А.* Численные методы. СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2007. 248 с.
7. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах задачах. М.: Высш.шк., 2006. 480 с.
8. *Пирумов У.Г.* Численные методы. М.: Дрофа, 2004. 221 с.
9. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: Физматлит, 2006. 400 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Вычислительная математика

ЗАУСАЕВ Артем Анатольевич
КУБЫШКИНА Светлана Николаевна
ТАРАСОВА Елена Анатольевна

Печатается в авторской редакции

Лицензия ИД № 02651 от 28.08.2000
Подписано в печать 27.06.2017
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная.
Усл. п. л. 3,95. Уч.-изд.л. 3,92. Тираж 50 экз.
Рег. № 120/17. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отдел типографии и оперативной полиграфии
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8