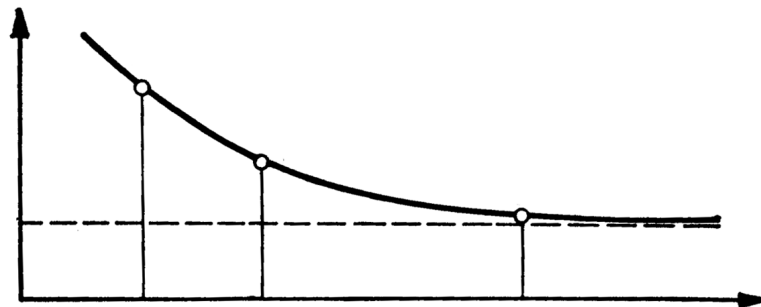


А. Ф. ЗАУСАЕВ

Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений





ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

А.Ф. Заусаев

**РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Учебное пособие

Самара 2010

УДК 517.9; 518.6
3 12

Заусаев А.Ф. Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений:
3 12 Учеб. пособ. Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2010. 100 с.

ISBN 978-5-7964-1324-1

В данном учебном пособии рассмотрены дискретные разностные методы решения задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Проанализированы источники погрешностей, которые могут возникнуть при решении дифференциальных уравнений; исследованы вопросы устойчивости и сходимости численных методов. Изложен материал по дисциплине «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений».

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика», а также студентов инженерных специальностей с углубленным изучением курса «Высшая математика».

Ил. 5. Библиогр.: 11 назв.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП.2.1.1/745)

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

ISBN 978-5-7964-1324-1

© А.Ф. Заусаев, 2010
© Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет», 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
1. Обзор дискретных разностных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений	7
1.1. Методы разложения в ряд Тейлора	7
1.2. Методы Рунге-Кутты	9
1.3. Линейные многошаговые методы	13
1.4. Блочные методы	14
1.5. Гибридные методы	14
1.6. Методы Обрешкова	15
2. Численное решение дифференциальных уравнений одношаговыми и многошаговыми методами	16
2.1. Методы Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона	16
2.2. Форма записи метода Адамса при изменении шага интегрирования	35
2.3. Методы Адамса для уравнений более высокого порядка	38
2.4. Метод Коуэлла	39
2.5. Квадратурный метод Коуэлла	47
2.6. Метод Эверхарта	53
2.6. Методы экстраполяции	
2.6.1. Экстраполяция Ричардсона	60
2.6.2. Метод Грэгга - Булирша - Штера	63
3. Сходимость и устойчивость численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений	65
3.1. Понятие о сходимости и устойчивости численных методов	65
3.2. Нуль-устойчивость	70
3.3. Области абсолютной и относительной устойчивости ..	75
4. Оценка погрешности численных методов для задачи Коши	81
4.1. Источники погрешностей	81
4.2. Оценка погрешности методом экстраполяции	84
4.3. Оценка локальной погрешности дискретизации одношаговых методов	87

5. Введение в теорию жестких задач	89
5.1. Жесткая задача Коши	90
5.2. Устойчивость для жестких задач.....	79
5.3. Применение неявных методов для решения жестких задач.....	94
Заключение.....	98
Библиографический список	99

Введение

Создание быстродействующих электронных вычислительных машин привело к бурному развитию математики, а также отдельных ее разделов, которые посвящены методам решения дискретных задач. Большое значение приобрели разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Многие явления в природе в макро- и микромире описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями. При этом в большинстве случаев общее решение этих уравнений не выражается в квадратурах, т.е. не имеет аналитического решения. Для подобного класса задач возникает необходимость в применении численных методов, дающих приближенное решение задачи. Среди всевозможных методов важную роль играют разностные методы решения задачи Коши. Их существенным достоинством является простая алгоритмизация и реализация на ЭВМ.

Решение дифференциальных уравнений на ЭВМ играет большую и важную роль при проведении исследований во многих областях знаний как теоретического, так и прикладного характера.

Характерной особенностью современных численных методов решения задачи Коши является высокий порядок аппроксимирующих формул. Алгоритмы должны обеспечивать получение большого количества верных значащих цифр с целью уменьшения ошибок округления. Таким образом, разработка методов более высокого порядка, по сравнению с существующими методами, позволяет увеличить точность и эффективность вычислений.

Развитие численных методов решения дифференциальных уравнений достигло в настоящее время такого уровня, когда существует эффективное и удобное для пользователя математическое и программное обеспечение решения многих основных задач. Данное учебное пособие ставит своей целью дать студентам и аспирантам инженерной специальности достаточно полное представление о практиче-

ском применении численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данном учебном пособии дается подробный анализ одношаговых и многошаговых методов. Рассмотрены наиболее эффективные разностные методы решения основных задач, описываемых дифференциальными уравнениями. Основное внимание уделено практическим рекомендациям по использованию конкретных методов. Проанализированы источники погрешностей, которые могут возникать при решении дифференциальных уравнений. Приведены практические способы оценки приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованы вопросы устойчивости и сходимости численных методов.

1. Обзор дискретных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Основной целью данного учебного пособия является рассмотрение и практическое применение численных методов к решению задачи Коши.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0, \quad (1.1)$$

где $y = [y^1(x), y^2(x), \dots, y^s(x)]^T$ – вектор с s компонентами, T – транспонирование, y_0 – задано. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|, \quad (1.2)$$

для всех $x \in [a, b]$ и s компонент векторов y_1 и y_2 , L – константа Липшица. Можно доказать, что при выполнении условия (1.2), задача (1.1) имеет единственное решение.

Обсуждаемые в дальнейшем численные методы известны как дискретные методы, с помощью которых вычисляется последовательность приближений $y_n \approx y(x_n)$, где y_n – приближенное значение, $y(x_n)$ – точное значение решения в точке x_n на множестве точек $x_{n+1} = x_n + h$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $x_0 = a$, $x_N = b$, $h > 0$ – шаг сетки.

Рассмотрим основные методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на примере решения задачи Коши (1.1). Одним из наиболее известных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений является метод разложения в ряд Тейлора. Для простоты разложения будем рассматривать решение уравнения (1.1) для скалярного случая.

1.1. Методы разложения в ряд Тейлора

Наиболее простым способом построения решения в точке x_{n+1} , если оно известно в точке x_n , является способ, основанный на представлении решения в виде ряда Тейлора

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Delta(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

где $\Delta(x_n, y_n, h) = y'(x_n) + \frac{h}{2!} y''(x_n) + \frac{h^2}{3!} y'''(x_n) + \dots$.

Если этот ряд ограничить p членами и заменить $y(x_n)$ приближенным значением y_n , получим следующую приближенную формулу для определения y_{n+1} :

$$y_{n+1} = y_n + hj(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

$$\text{где } j(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2!} f'(x, y) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x, y).$$

Для $p=1$ имеем формулу метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (1.5)$$

Формулы (1.4) и (1.5) не требуют вычисления дополнительных начальных условий и позволяют легко менять шаг интегрирования и порядок аппроксимирующей формулы. Практическое применение этих формул ограничено теми задачами, для которых легко вычисляются полные производные высших порядков для функции $f(x, y)$.

Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации решения на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ отрезком касательной, проведенной к графику решения в точке x_k (рис. 1.1).

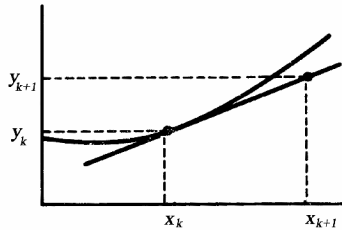


Рис. 1.1. Один шаг метода Эйлера

Пример 1.1. Приведем простой пример использования данного метода. Рассмотрим задачу

$$y'(x) = y^2(x) + 2x - x^4, \quad y(0) = 0.$$

Легко проверить, что точным решением этой задачи является функция $y(x) = x^2$. Здесь $f(x, y) = y^2 + 2x - x^4$ и, следовательно, формулы метода Эйлера с учетом того, что $x_k = kh$, принимают вид

$$y_{k+1} = y_k + h(y_k^2 + 2kh - k^4 h^4), \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 = 0.$$

В таблице 1.1 приведены некоторые значения, вычисленные по полученной формуле при $h=0,1$, и соответствующие значения точного решения.

Таблица 1.1

Решение по методу Эйлера и точное решение задачи

x	y		x	y	
	Численное решение	Точное решение		Численное решение	Точное решение
0,1	0,00	0,01	0,4	0,12	0,16
0,2	0,02	0,04	0,5	0,20	0,25
0,3	0,06	0,09	0,6	0,30	0,36

Как видно из таблицы 1.1, полученное численное решение существенно отличается от точного решения. Основной причиной возникающей погрешности является учет лишь двух членов разложения в ряде Тейлора. ■*

В настоящее время методы тейлоровских разложений широко используются при решении различного типа задач. Однако следует отметить, что по затратам машинного времени методы тейлоровских разложений, как правило, значительно уступают методам Рунге-Кутты.

1.2. Методы Рунге-Кутты

Методы Рунге-Кутты основаны на построении формул для функции j , которая максимально близка к Δ и не содержит производных от функции f . Для двухэтапного метода этот процесс замены рядов Тейлора функцией $j(x, y, h)$ можно представить следующим образом. Положим

$$j(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ha_2, y + b_{21}hf(x, y)), \quad (1.6)$$

где c_1, c_2, a_2, b_{21} – неизвестные постоянные, подлежащие определению. Для нахождения этих постоянных представим функции j и Δ в виде разложения по степеням h . В результате получим

$$j(x, y, h) = (c_1 + c_2)f(x, y) + hc_2 [a_2 f'_x(x, y) + b_{21} f'_y(x, y) f(x, y)] + O(h^2), \quad (1.7)$$

$$\Delta(x, y, h) = f(x, y) + \frac{1}{2}h [f'_x(x, y) + f'_y(x, y) f(x, y)] + O(h^2). \quad (1.8)$$

* При оформлении работы символом ■ авторы обозначали завершение доказательств, теорем, примеров и т.д.

Из (1.7) и (1.8) для определения c_1, c_2, a_2, b_{21} получим уравнения

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 a_2 = \frac{1}{2}, \quad c_2 b_{21} = \frac{1}{2}. \quad (1.9)$$

Таким образом, получены три уравнения для четырех неизвестных. Так как в общем случае нельзя найти соотношений для членов порядка $O(h^2)$, то один из параметров можно положить свободным. Пусть $c_2 = a$, где $a \neq 0$. Тогда

$$c_1 = 1 - a, \quad a_2 = b_{21} = \frac{1}{2a}.$$

При значении $a = \frac{1}{2}$ имеем формулу

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)) \right]. \quad (1.10)$$

Для двухэтапного метода Рунге-Кутты формулу (1.6) можно обобщить, используя m вычислений функции $f(x, y)$ на каждом шаге интегрирования. В этом случае получается явный m -этапный метод Рунге-Кутты:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hj(x_n, y_n, h), \\ j(x, y, h) &= \sum_{r=1}^m c_r k_r, \quad k_1 = f(x, y), \\ k_r &= f(x + ha_r, y + h \sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s), \quad r = 2, 3, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Формула (1.11) удобна для практического использования при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, так как она не требует вычисления дополнительных начальных данных и позволяет легко менять шаг интегрирования.

Наиболее известной является формула четырехэтапного метода:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Методы (1.11) можно усложнить, полагая, что коэффициенты $\{k_r\}$ определяются из системы m нелинейных уравнений. При этом получается более точный неявный m -этапный метод Рунге-Кутты:

$$y_{n+1} = y_n + hj(x_n, y_n, h),$$

$$j(x, y, h) = \sum_{r=1}^m c_r k_r,$$

$$k_r = f\left(x + ha_r, y + h \sum_{s=1}^m b_{rs} k_s\right) \quad r = 1, 2, \dots, m. \quad (1.13)$$

Методы (1.13) являются более точными, чем соответствующие явные m -этапные методы (1.11), так как они содержат больше параметров. Однако вычислительный алгоритм при этом значительно усложняется, поскольку приходится для нахождения коэффициентов a_r, b_{rs}, k_r использовать итерационные методы.

Пример 1.2. Приведем пример на применение формул Рунге-Кутты. Будем искать решение уравнения

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

на отрезке $[0, 1]$ при значении $h = 0,1$.

Точное решение имеет вид $y = e^x$. Применяя формулы (1.12), и обозначая $\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, получим численное решение задачи. Ход вычислений приведен в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Численное решение задачи $y' = y, y(0) = 1$ методом Рунге-Кутты

x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	k_i		
x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$			
$x_i + h/2$	$y_i + 1/2 k_1$	$f(x_i + h/2, y_i + 1/2 k_1)$	$hf_1 = k_1$	k_1	
$x_i + h/2$	$y_i + 1/2 k_2$	$f(x_i + h/2, y_i + 1/2 k_2)$	$hf_2 = k_2$	$2k_2$	
$x_i + h/2$	$y_i + 1/2 k_3$	$f(x_i + h/2, y_i + 1/2 k_3)$	$hf_3 = k_3$	$2k_3$	
$x_i + h$	$y_i + k_3$	$f(x_i + h, y_i + k_3)$	$hf_4 = k_4$	k_4	
0,0	1,000000			$6\Delta y_i$	Δy_i
0,00	1,000000	1,000000	0,100000	0,100000	
0,05	1,050000	1,050000	0,105000	0,210000	
0,05	1,052500	1,052500	0,105250	0,210500	
0,10	1,105250	1,105250	0,110525	0,110525	
0,1	1,10517			0,631025	0,105174

Таблица 1.2 (продолжение)

x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	k_i	$\delta\Delta y_i$	Δy_i
0,10	1,105170	1,105170	0,110517	0,110517	
0,15	1,160429	1,160429	0,116043	0,232086	
0,15	1,163191	1,163191	0,116319	0,232638	
0,20	1,221489	1,221489	0,122149	0,122149	
0,2	1,22140			0,697390	0,116231
0,20	1,221400	1,221400	0,122140	0,122140	
0,25	1,282470	1,282470	0,128247	0,256494	
0,25	1,285524	1,285524	0,128552	0,257104	
0,30	1,349952	1,349952	0,134995	0,134995	
0,3	1,34986			0,770733	0,128456
0,30	1,349860	1,349860	0,134986	0,134986	
0,35	1,417353	1,417353	0,141735	0,283470	
0,35	1,420727	1,420727	0,142073	0,284146	
0,40	1,491933	1,491933	0,149193	0,149193	
0,4	1,49183			0,851795	0,141966
0,40	1,491830	1,491830	0,149183	0,149183	
0,45	1,566421	1,566421	0,156642	0,313284	
0,45	1,570151	1,570151	0,157015	0,314030	
0,50	1,648845	1,648845	0,164884	0,164884	
0,5	1,64873			0,941381	0,156897
0,50	1,648730	1,648730	0,164873	0,164873	
0,55	1,731166	1,731166	0,173117	0,346234	
0,55	1,735288	1,735288	0,173529	0,347058	
0,60	1,822259	1,822259	0,182226	0,182226	
0,6	1,82213			1,040391	0,173398
0,60	1,822130	1,822130	0,182213	0,182213	
0,65	1,913236	1,913236	0,191324	0,382648	
0,65	1,917792	1,917792	0,191779	0,383558	
0,70	2,013909	2,013909	0,201391	0,201391	
0,7	2,01377			1,149810	0,191635
0,70	2,013770	2,013770	0,201377	0,201377	
0,75	2,114458	2,114458	0,211446	0,422892	
0,75	2,119493	2,119493	0,211949	0,423898	
0,80	2,225719	2,225719	0,222572	0,222572	
0,8	2,22556			1,270739	0,211790
0,80	2,225560	2,225560	0,222556	0,222556	
0,85	2,336838	2,336838	0,233684	0,467368	
0,85	2,342402	2,342402	0,234240	0,468480	
0,90	2,459800	2,459800	0,245980	0,245980	
0,9	2,45962			1,404384	0,234064
0,90	2,459620	2,459620	0,245962	0,245962	
0,95	2,582601	2,582601	0,258260	0,516520	
0,95	2,588750	2,588750	0,258875	0,517750	
1,00	2,718495	2,718495	0,271850	0,271850	
1,0	2,71830			1,552082	0,258680

В таблице 1.3 приведены значения точного решения $y = e^x$ с пятью верными десятичными знаками.

Таблица 1.3

Точное решение задачи $y' = y, y(0) = 1$

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
e^x	1,10517	1,22140	1,34986	1,49182	1,64872	1,82212

x	0,7	0,8	0,9	1,0
e^x	2,01375	2,22554	2,45960	2,71828

Как мы видим, результаты численных расчетов отличаются от точного решения незначительно. Так при выбранном шаге интегрирования $h=0,1$ абсолютная погрешность метода на конце интервала интегрирования в точке $x=1$ составляет $2 \cdot 10^{-5}$, что соответствует относительной погрешности $0,0007\%$. ■

1.3. Линейные многошаговые методы

В рассматриваемых выше одношаговых методах, после того как y_{n+1} получено, приближение y_n уже не используется в дальнейших расчетах. Идея многошаговых методов состоит в использовании некоторых предварительно вычисленных значений $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$. Способ построения многошаговых методов заключается в следующем.

Интегрируя (1.1) в пределах от x до $x+h$, получаем

$$y(x+h) - y(x) = \int_x^{x+h} f(t, y(t)) dt, \quad (1.14)$$

где x и $x+h$ – некоторые точки отрезка $[a, b]$. Функцию $f(t, y(t))$ заменим интерполяционным полиномом, принимающим значения $f_n = f(x_n, y_n)$ на множестве точек x_n , в которых y_n ранее вычислены.

Если $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$ являются узлами интерполяции, то интерполяционный полином для функции $f(x, y)$ в форме Ньютона можно записать в виде

$$P(t) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{-s}{r} \nabla^r f_n, \quad s = \frac{t - x_n}{h}, \quad (1.15)$$

где $\binom{s}{r} = \frac{s(s-1)\dots(s-r+1)}{r!}$, $\nabla^r f_n - r$ -тая разность функции $f(x_n, y_n)$.

Подставляя интерполяционный полином вместо подынтегральной функции в выражение (1.14) и проинтегрировав его, получим различные формулы, которые определяются положением точек x и $x+h$ относительно узлов интерполяции. Например, при $x = x_n$, $x = h$ получаем формулу

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(t) dt = h \sum_{r=0}^k g_r \nabla^r f_n, \quad (1.16)$$

соответствующую методу Адамса-Бэшфорда.

Полагая $x = x_{n-1}$, $x = h$, получаем формулу

$$y_n - y_{n-1} = h \sum_{r=0}^k g_r^* \nabla^r f_n, \quad (1.17)$$

соответствующую методу Адамса-Мултона. Формулы Адамса (1.16) и (1.17) представляют собой соответственно класс явных и неявных методов.

1.4. Блочные методы

Блочные методы основаны на принципе одновременного вычисления блока приближений $y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+N}$.

Например, при значении $N = 2$ имеем неявный блочный метод:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - \frac{1}{2} y_{n+2} &= \frac{1}{2} y_n + \frac{h}{4} (f_n - f_{n+2}), \\ y_{n+2} &= y_n + \frac{h}{3} (f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из формул (1.18) определяется блок (y_{n+1}, y_{n+2}) по известному блоку (y_{n-1}, y_n) .

1.5. Гибридные методы

В гибридных методах объединяются свойства линейных многошаговых и одношаговых методов. Как известно, в линейных многошаговых методах используется информация лишь в точках

$x_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а в методах Рунге-Кутты значения функции $f(x, y)$ вычисляют в промежуточных точках, например, в точках $x_n + \frac{h}{2}$.

Формулы k -шагового гибридного метода имеют следующий вид:

$$\sum_{j=0}^k a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k b_j f_{n+j} + hb_g f_{n+g}, \quad (1.19)$$

где $a_k \neq 0$, $|a_0| + |b_0| \neq 0$, $g \neq 0, 1, 2, \dots, k$, $f_{n+g} = f(x_{n+g}, y_{n+g})$.

Путем выбора параметров g и b_g в формуле (1.19) можно получить методы с лучшими свойствами, чем у обычных линейных многошаговых методов.

1.6. Методы Обрешкова

Это разностные методы, в которых используются производные высших порядков. Эти методы являются многошаговым обобщением с использованием разложения в ряд Тейлора. В k -шаговом методе Обрешкова, который имеет представление

$$\sum_{j=0}^k a_j y_{n+j} = \sum_{i=1}^l h^i \left(\sum_{j=0}^k b_{ij} y_{n+j}^{(i)} \right), \quad (1.20)$$

используются первые l производных от y .

Очевидно, что для эффективного применения этих методов существенно, чтобы было легко вычислять полную производную $y^{(i)}$.

2. Численное решение дифференциальных уравнений одношаговыми и многошаговыми методами

2.1. Методы Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона

В настоящее время методы Адамса являются одними из перспективных численных методов интегрирования для решения задачи Коши. Доказано, что при применении многошаговых численных методов Адамса для решения задачи Коши до 12 порядка область устойчивости уменьшается. При дальнейшем увеличении порядка область устойчивости, а также точность метода возрастает. Кроме того, при одинаковой точности для многошаговых методов на одном шаге интегрирования требуется меньше вычислений правых частей дифференциальных уравнений, чем в методах Рунге-Кутты. К достоинствам методов Адамса относится и то обстоятельство, что в них легко меняется шаг интегрирования и порядок метода.

На практике широко используются два типа методов Адамса – явные и неявные. Явные методы известны как методы Адамса-Бэшфорта, неявные – как методы Адамса-Мултона.

Рассмотрим применение численных методов для решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0. \quad (2.1)$$

При решении задачи (2.1) с помощью одношаговых методов значение y_{n+1} зависит только от информации в предыдущей точке x_n . Можно предположить, что можно добиться большей точности, если использовать информацию о нескольких предыдущих точках $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. На этой идее основаны многошаговые методы.

Большинство многошаговых методов возникает на основе следующего подхода. Если подставить в уравнение (2.1) точное решение $y(x)$ и проинтегрировать уравнение на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$, то получим

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (2.2)$$

Заменяя в формуле (2.2) функцию $f(x, y(x))$ интерполяционным полиномом $P(x)$, получим приближенный метод

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x) dx. \quad (2.3)$$

Для того, чтобы построить полином $P(x)$, предположим, что $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$ – приближения к решению в точках $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Полагаем, что узлы x_i расположены равномерно с шагом h . Тогда $f_i = f(x_i, y_i)$, ($i = n, n-1, \dots, n-k$) – есть приближения к $f(x, y(x))$ в точках $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$.

В качестве $P(x)$ возьмем интерполяционный полином степени k , удовлетворяющий условиям

$$P(x_i) = f_i, \quad (i = n, n-1, \dots, n-k).$$

Если проинтегрировать этот полином явно, то получим следующий метод:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x) dx. \quad (2.4)$$

При $k = 0$ полином $P(x)$ – есть константа, равная f_n , и формула (2.4) превращается в обычный метод Эйлера.

При $k = 1$, $P(x)$ является линейной функцией, проходящей через точки (x_{n-1}, f_{n-1}) и (x_n, f_n) , т.е.

$$P(x) = -\frac{x - x_n}{h} f_{n-1} + \frac{x - x_{n-1}}{h} f_n. \quad (2.5)$$

Интегрируя этот полином от x_n до x_{n+1} , получим двухшаговый метод

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (3f_n - f_{n-1}), \quad (2.6)$$

который использует информацию в двух точках x_n и x_{n-1} .

Если $k = 2$, то $P(x)$ представляет собой квадратичный полином, интерполирующий данные (x_{n-2}, f_{n-2}) , (x_{n-1}, f_{n-1}) и (x_n, f_n) . Можно показать, что соответствующий метод имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}). \quad (2.7)$$

Если $k = 3$, то соответствующий метод определяется формулой

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \quad (2.8)$$

При $k = 4$ имеем

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}). \quad (2.9)$$

Отметим, что метод (2.7) является трехшаговым, (2.8) – четырехшаговым и (2.9) – пятишаговым. Формулы (2.6)–(2.9) известны как методы Адамса-Бэшфорта. Метод (2.6) имеет второй порядок точности, поэтому его называют методом Адамса-Бэшфорта второго порядка. Аналогично, методы (2.7), (2.8) и (2.9) называются соответственно методами Адамса-Бэшфорта третьего, четвертого и пятого порядков.

Продолжая этот процесс, используя все большее число предыдущих точек, а также интерполяционный полином более высокой степени, получим методы Адамса-Бэшфорта сколь угодно высокого порядка.

Многошаговые методы порождают трудности, которых не возникает при использовании одношаговых методов. Эти трудности становятся понятными, если, например, обратиться к методам Адамса-Бэшфорта пятого порядка (2.9).

В задаче (2.1) задано начальное значение y_0 , но при $n=0$ для счета по формуле (2.9) необходима информация в точках $x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, x_{-4}$, которая естественно отсутствует. Обычный выход из данной ситуации заключается в использовании какого-либо одношагового метода того же порядка точности, например метода Рунге-Кутты, до тех пор, пока не будет получено достаточно значений для работы многошагового метода. Или же можно на первом шаге использовать одношаговый метод, на втором – двухшаговый и так далее, пока не будут получены все стартовые значения. При этом существенно, чтобы эти стартовые значения были вычислены с той же степенью точности, с какой будет работать окончательный метод. Поскольку стартовые методы имеют более низкий порядок точности, вначале приходится считать с меньшим шагом и использовать больше промежуточных точек.

Вывод методов (2.6)–(2.9) основан на замене функции $f(x, y)$ интерполяционным полиномом $P(x)$. Известно, что имеет место теорема, доказывающая существование и единственность интерполяционного полинома. Если узлы x_0, x_1, \dots, x_n различны, то для любых f_0, f_1, \dots, f_n существует единственный полином $P(x)$ степени не выше n такой, что $P(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Хотя интерполяционный полином является единственным, имеется несколько способов представления этого полинома. Чаще всего используются полиномы Лагранжа, но и они оказываются неудобными, если к набору данных нужно добавить (или удалить из него) какой-либо узел. В этом случае имеется другое представление интерполяционного полинома. Это представление Ньютона

$$P_n(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \nabla f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2} \nabla^2 f_0 + \dots \quad (2.10)$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n!h^n} \nabla^n f_0,$$

где

$$\nabla f_i = f_{i+1} - f_i,$$

$$\nabla^2 f_0 = \nabla f_1 - \nabla f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0,$$

$$\nabla^3 f_0 = \nabla^2 f_1 - \nabla^2 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0,$$

.....

$$\nabla^n f_0 = f_n - \binom{n}{1} f_{n-1} + \binom{n}{2} f_{n-2} - \dots + (-1)^n f_0,$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}.$$

Полином $P_{n+1}(x)$ можно записать в виде

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!h^{n+1}} \nabla^{n+1} f_0. \quad (2.11)$$

Представление интерполяционного полинома в виде (2.11) в ряде случаев бывает особенно полезным для практики.

Рассмотрим пример построения таблицы начальных значений для решения дифференциальных уравнений методом Адамса при различных значениях шага интегрирования: $h=0,1$; $0,01$; $0,001$.

Пример 2.1. Требуется определить пять начальных значений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2y; \end{cases} \quad x(0)=2, \quad y(0)=2,$$

методом Адамса-Бэшфорда.

Аналитическое решение данной системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^{2t} + 1, \\ y = 2e^{2t}. \end{cases}$$

Пять первых значений функций $x_T(t)$ и $y_T(t)$ – точных значений решения заданной системы – представлены в пятом и шестом столбцах таблиц 2.1-2.3 при различных значениях шага интегрирования h .

Для закладки таблицы начальных значений используем разложение решения заданной системы в ряды Маклорена:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k, \quad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Вычисляем коэффициенты рядов:

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 4, \quad x''(0) = 8, \quad x^{(IV)}(0) = 16, \quad x^{(IV)}(0) = 32,$$

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 8, \quad y''(0) = 16, \quad y^{(IV)}(0) = 32, \quad y^{(IV)}(0) = 64.$$

Ограничиваясь в разложении шестью первыми членами, получаем формулы для приближенного вычисления x_n и y_n с шагом интегрирования h ($t=nh$, $n=0, 1, 2, 3, 4$)

$$x_n = 2 + \frac{2}{1!}nh + \frac{4}{2!}(nh)^2 + \frac{8}{3!}(nh)^3 + \frac{16}{4!}(nh)^4 + \frac{32}{5!}(nh)^5,$$

$$y_n = 4 + \frac{4}{1!}nh + \frac{8}{2!}(nh)^2 + \frac{16}{3!}(nh)^3 + \frac{32}{4!}(nh)^4 + \frac{64}{5!}(nh)^5,$$

где $n=0, 1, 2, 3, 4$.

Результаты вычислений представлены во втором и третьем столбцах таблиц 2.1-2.3 соответственно для значений $h=0,1; 0,01$ и $0,001$. В двух последних столбцах этих таблиц представлены разности между приближенным и точным значениями $\Delta x_n(t), \Delta y_n(t)$.

Таблица 2.1

Результаты вычислений при шаге интегрирования $h=0,1$

n	t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	0.0	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	0.00000	0.00000
1	0.1	2.22140	2.44281	2.22140	2.44280	$-9.15 \cdot 10^{-8}$	$-1.83 \cdot 10^{-7}$
2	0.2	2.49182	2.98364	2.49182	2.98365	$-6.03 \cdot 10^{-6}$	$-1.21 \cdot 10^{-5}$
3	0.3	2.82205	3.64410	2.82205	3.64424	$-7.08 \cdot 10^{-5}$	$-1.42 \cdot 10^{-4}$
4	0.4	3.22513	4.45026	3.22554	4.45108	$-4.10 \cdot 10^{-4}$	$-8.21 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2.2

Результаты вычислений при шаге интегрирования $h=0,01$

n	t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	0.00	2.00000	2.0000	2.00000	2.0000	0.00000	0.00000
1	0.01	2.02020	2.04040	2.02020	2.04040	$-8.88 \cdot 10^{-14}$	$-1.78 \cdot 10^{-13}$
2	0.02	2.04081	2.08162	2.04081	2.08162	$-5.72 \cdot 10^{-12}$	$-1.14 \cdot 10^{-11}$
3	0.03	2.06184	2.12367	2.06184	2.12367	$-6.54 \cdot 10^{-11}$	$-1.31 \cdot 10^{-10}$
4	0.04	2.08329	2.16657	2.08329	2.16657	$-3.68 \cdot 10^{-10}$	$-7.37 \cdot 10^{-10}$

Таблица 2.3

Результаты вычислений при шаге интегрирования $h=0,001$

n	t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	0.000	2.00000	2.00000	2.00000	2.00000	0.00000	0.00000
1	0.001	2.02020	2.00400	2.02020	2.00400	0.00000	0.00000
2	0.002	2.00401	2.00802	2.00401	2.00802	0.00000	0.00000
3	0.003	2.00602	2.01204	2.00602	2.01204	0.00000	0.00000
4	0.004	2.00803	2.01606	2.00803	2.01606	0.00000	0.00000

Решим теперь методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков ту же систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2y; \end{cases} \quad x(0)=2, \quad y(0)=2,$$

на интервале времени $[0;2]$ с шагом интегрирования $h=0,1; 0,01; 0,001$. При решении задачи методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков, соответственно используем формулы (2.6), (2.7), (2.8), (2.9).

В таблицах 2.4-2.7 представлены результаты вычислений точного решения $x_T(t), y_T(t)$, решений, полученных методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков $x(t), y(t)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta x(t), \Delta y(t)$ на конце интервала интегрирования в точке, соответствующей моменту времени $t=2$, для различных шагов интегрирования.

Таблица 2.4
Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Бэшфорта
второго порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0.1	55.598	109.196	52.702	103.404	-2.896	-5.792
0.01	55.598	109.196	55.562	109.125	-0.0357	-0.0715
0.001	55.598	109.196	55.598	109.196	-0.0004	-0.0007

Таблица 2.5
Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Бэшфорта
третьего порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0.1	55.598	109.196	55.127	108.254	-0.471	-0.942
0.01	55.598	109.196	55.598	109.195	-0.0006	-0.0013
0.001	55.598	109.196	55.598	109.196	$-6.53 \cdot 10^{-7}$	$-1.31 \cdot 10^{-6}$

Таблица 2.6
Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Бэшфорта
четвертого порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0.1	55.598	109.196	55.519	109.040	-0.0782	-0.156
0.01	55.598	109.196	55.598	109.196	$-1.16 \cdot 10^{-5}$	$-1.16 \cdot 10^{-5}$
0.001	55.598	109.196	55.598	109.196	$-1.20 \cdot 10^{-9}$	$-2.40 \cdot 10^{-9}$

Таблица 2.7
Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Бэшфорта
пятого порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0.1	55.598	109.196	55.575	109.151	-0.0229	-0.0458
0.01	55.598	109.196	55.598	109.196	$-2.36 \cdot 10^{-7}$	$-4.71 \cdot 10^{-7}$
0.001	55.598	109.196	55.598	109.196	$9.73 \cdot 10^{-12}$	$1.95 \cdot 10^{-11}$

Как видно из таблиц 2.4-2.7 точность полученных результатов при использовании методов различных порядков зависит от величины шага интегрирования. Следует отметить, что уменьшение шага в 10 раз приводит к существенному уменьшению погрешности метода, однако это влечет 10-ти кратное увеличение вычислительной работы. Поэтому при решении конкретной задачи важно выбрать оптимальное соотношение шага интегрирования и порядка метода. ■

Методы Адамса-Бэшфорта используют уже известные значения в точках $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. При построении интерполяционного полинома

можно использовать и точки $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. При этом возникает класс неявных m -шаговых методов, известных как методы Адамса-Мултона.

Если $k = 0$, то $P(x)$ – линейная функция, проходящая через точки (x_n, f_n) и (x_{n+1}, f_{n+1}) , и соответствующий метод

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \quad (2.12)$$

является методом Адамса-Мултона второго порядка.

При $k = 1, 2, 3$ получаем соответствующие методы

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \quad (2.13)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}), \quad (2.14)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \quad (2.15)$$

третьего, четвертого и пятого порядков аппроксимации. Соотношения (2.12)–(2.15) содержат искомые значения y_{n+1} неявно, поэтому для их реализации необходимо применять итерационные методы.

На практике обычно не решают непосредственно уравнений (2.12)–(2.15), а используют совместно явную и неявную формы, что приводит к методу прогноза и коррекции.

Например, для метода Адамса второго порядка, используя обозначения $f_n^{(g)} = f(x_n, y_n^{(g)})$, где g – номер итерации, имеем для $g = 1$ следующую схему вычислений:

$$P: y_{n+1}^{(0)} = y_n^{(1)} + \frac{h}{2}(3f_n^{(1)} - f_{n-1}^{(1)}),$$

$$E: f_{n+1}^{(0)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}),$$

$$C: y_{n+1}^{(1)} = y_n^{(1)} + \frac{h}{2}(f_n^{(1)} + f_{n+1}^{(0)}),$$

$$E: f_{n+1}^{(1)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(1)}). \quad (2.16)$$

Этот процесс называют методом РЕСЕ (Р означает применение предсказывающей формулы, С – применение исправляющей формулы, Е – вычисление функции f). Можно сократить процесс вычисления, отбросив последнюю формулу. Это приводит к так называемому методу РЕС.

Рассмотрим второй метод решения уравнений (2.12)–(2.15). Формулы (2.12)–(2.15) можно переписать в виде

$$y_{n+1} = \frac{hb_1}{a_1} f(x_{n+1}, y_{n+1}) + g_n, \quad b_1 \neq 0, \quad (2.17)$$

где g_n содержит известные величины. Доказано, что если $h < \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{1}{L}$, где L – константа Липшица, то существует единственное решение уравнения (2.17), которое можно получить с помощью итерационного процесса

$$y_{n+1}^{(g+1)} = \frac{hb_1}{a_1} f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(g)}) + g_n, \quad (2.18)$$

где $y_{n+1}^{(0)}$ – произвольно.

Итерации в выражении (2.18) продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. При этом число вычислений функции f меняется от точки к точке и может быть достаточно велико.

С другой стороны, если уменьшить величину h , то сходимость может быть достигнута за фиксированное число итераций. Этот метод называется исправлением до сходимости.

На первый взгляд может показаться, что явный многошаговый метод является самым простым методом с точки зрения вычислений. Однако на практике явные методы используются очень редко. Неявный метод Адамса-Мултона является более точным, чем явный метод Адамса-Бэшфорта. Например, вычислительная схема для метода Адамса-Мултона 5-го порядка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{P: } y_{n+1}^{(p)} &= y_n + \frac{h}{720}(1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}), \\ \text{E: } f_{n+1}^{(p)} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(p)}), \\ \text{C: } y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{720}(251f_{n+1}^{(p)} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}), \\ \text{E: } f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Методы Адамса до пятого порядка включительно могут быть использованы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, не требующих высокой степени точности.

Пример 2.2. В качестве примера построим таблицу пяти начальных значений с шагом $h=0,1; 0,01; 0,001$ для дальнейшего решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = xy' + y + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

методом Адамса-Мултона.

Аналитическое решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, \quad y'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

Пять первых значений функций $x_T(t)$ и $y_T(t)$ – точных значений решения заданной системы – представлены в пятом и шестом столбцах таблиц 2.8-2.10 при различных значениях шага интегрирования h .

Для закладки таблицы начальных значений используем разложение решения в ряд Маклорена:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Для вычисления коэффициентов ряда находим производные высших порядков и вычисляем их значения при $x=0$:

$$y''(0) = 2,$$

$$y'''(x) = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \quad y'''(0) = 0,$$

$$y^{(IV)}(x) = 3y'' + xy''', \quad y^{(IV)}(0) = 6,$$

$$y^{(V)}(x) = 4y''' + xy^{(IV)}, \quad y^{(V)}(0) = 0,$$

$$y^{(VI)}(x) = 5y^{(IV)} + xy^{(V)}, \quad y^{(VI)}(0) = 30.$$

Ограничиваясь в разложении членами, получаем формулы для приближенного вычисления y_n и y'_n с шагом интегрирования h ($t=nh, n=0, 1, 2, 3, 4$)

$$y_n = 1 + \frac{0}{1!}nh + \frac{2}{2!}(nh)^2 + \frac{0}{3!}(nh)^3 + \frac{6}{4!}(nh)^4 + \frac{0}{5!}(nh)^5,$$

$$y'_n = \frac{2}{1!}nh + \frac{6}{3!}(nh)^3 + \frac{30}{5!}(nh)^5,$$

где $n=0, 1, 2, 3, 4$.

Результаты вычислений представлены во втором и третьем столбцах таблиц 2.8-2.10 соответственно для значений $h=0,1; 0,01$ и $0,001$. В двух последних столбцах этих таблиц представлены разность между приближенным и точным значениями $\Delta y, \Delta y'$.

Таблица 2.8

Результаты вычислений при шаге интегрирования $h=0,1$

n	x	$y(x)$	$y'(x)$	$y_T(x)$	$y'_T(x)$	Δy	$\Delta y'$
0	0.0	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.1	1.01003	0.20100	1.01003	0.20100	$-4.17 \cdot 10^{-8}$	$-4.17 \cdot 10^{-9}$
2	0.2	1.04040	0.40808	1.04040	0.40808	$-2.68 \cdot 10^{-6}$	$-5.36 \cdot 10^{-7}$
3	0.3	1.09203	0.62761	1.09206	0.62762	$-3.07 \cdot 10^{-7}$	$-9.22 \cdot 10^{-6}$
4	0.4	1.16640	0.86656	1.16657	0.86663	$-1.74 \cdot 10^{-4}$	$-6.97 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2.9

Результаты вычислений при шаге интегрирования $h=0,01$

n	x	$y(x)$	$y'(x)$	$y_T(x)$	$y'_T(x)$	Δy	$\Delta y'$
0	0.00	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.01	1.00010	0.02000	1.00010	0.02000	$-4.17 \cdot 10^{-14}$	$-4.16 \cdot 10^{-16}$
2	0.02	1.00040	0.04001	1.00040	0.04001	$-2.67 \cdot 10^{-12}$	$-5.33 \cdot 10^{-14}$
3	0.03	1.00090	0.06003	1.00090	0.06003	$-3.04 \cdot 10^{-11}$	$-9.11 \cdot 10^{-13}$
4	0.04	1.00160	0.08006	1.00160	0.08006	$-1.71 \cdot 10^{-10}$	$-6.83 \cdot 10^{-12}$

Таблица 2.10

Результаты вычислений при шаге интегрирования $h=0,01$

n	x	$y(x)$	$y'(x)$	$y_T(x)$	$y'_T(x)$	Δy	$\Delta y'$
0	0.000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.001	1.00000	0.00200	1.00000	0.00200	0.00000	0.00000
2	0.002	1.00000	0.00400	1.00000	0.00400	0.00000	0.00000
3	0.003	1.00001	0.00600	1.00001	0.00600	0.00000	0.00000
4	0.004	1.00002	0.00800	1.00002	0.00800	0.00000	0.00000

Решим теперь методами Адамса-Мултона 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков то же дифференциальное уравнение

$$y'' = xy' + y + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

на интервале $[0;2]$.

Аналитическое решение данного обыкновенного дифференциального уравнения и производная от решения имеют вид:

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, \quad y'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

При решении задачи методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков, соответственно используем формулы аналогичные формулам (2.13), (2.14), (2.15), рассматривая вектор решений как вектор с координатами $y(x)$ и $y'(x)$, а также алгоритм PEC.

В таблицах 2.11-2.13 представлены результаты вычислений точного решения $y_T(x)$, $y'_T(x)$, решений, полученных методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков $y(x)$, $y'(x)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta y(x)$, $\Delta y'(x)$ на конце интервала интегрирования в точке, соответствующей моменту времени $t=2$, для различных шагов интегрирования.

Таблица 2.11
Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона третьего порядка

h	$y_T(x)$	$y'_T(x)$	$y(x)$	$y'(x)$	Δy	$\Delta y'$
0.1	29.556	13.778	29.578	13.785	-0.0218	0.0070
0.01	29.556	13.778	29.556	13.778	$5.84 \cdot 10^{-5}$	$2.35 \cdot 10^{-5}$
0.001	29.556	13.778	29.556	13.778	$6.35 \cdot 10^{-8}$	$2.58 \cdot 10^{-8}$

Таблица 2.12
Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона четвертого порядка

h	$y_T(x)$	$y'_T(x)$	$y(x)$	$y'(x)$	Δy	$\Delta y'$
0.1	29.556	13.778	29.554	13.778	0.0021	0.0003
0.01	29.556	13.778	29.556	13.778	$1.13 \cdot 10^{-6}$	$4.38 \cdot 10^{-7}$
0.001	29.556	13.778	29.556	13.778	$1.34 \cdot 10^{-10}$	$5.32 \cdot 10^{-11}$

Таблица 2.13
Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона пятого порядка

h	$y_T(x)$	$y'_T(x)$	$y(x)$	$y'(x)$	Δy	$\Delta y'$
0.1	29.556	13.778	29.555	13.777	-0.0008	-0.0005
0.01	29.556	13.778	29.556	13.778	$2.51 \cdot 10^{-8}$	$9.28 \cdot 10^{-9}$
0.001	29.556	13.778	29.556	13.778	$7.06 \cdot 10^{-12}$	$7.06 \cdot 10^{-12}$

Как и в случае с методом Адамса-Бэшфорта, при использовании метода Адамса-Мултона важным вопросом является вопрос выбора оптимального соотношения шага интегрирования и порядка метода. Следует отметить, что при создании эффективных алгоритмов и программ увеличение порядка метода является более предпочтительным по сравнению с уменьшением шага интегрирования. ■

Для решения более сложных задач необходимо применять методы Адамса более высокого порядка. В таблице 2.14 приведены значения коэффициентов для методов Адамса. В первой строке указан порядок

метода; во второй – значения коэффициентов C_k для соответствующего порядка k ; в последующих строках – пары коэффициентов B_{kj} и M_{kj} для методов Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона соответственно. Тогда, с учетом данных таблицы 2.14, коэффициенты b_j в выражении

$$\sum_{j=0}^k a_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k b_j f(x_{n+j}, y_{n+j}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

для метода Адамса-Бэшфорта k -го порядка могут быть найдены из соотношения

$$b_j = \frac{B_{kj}}{C_k},$$

а для метода Адамса-Мултона k -го порядка по аналогичной формуле

$$b_j = \frac{M_{kj}}{C_k}.$$

Таблица 2.14

Значения коэффициентов для методов Адамса

2	3	4	5	6	7						
2	12	24	720	1 440	60 480						
3	1	23	5	55	9	1 901	251	4 277	475	198 721	19 087
-1	1	-16	8	-59	19	-2 774	646	-7 923	1 427	-447 288	65 112
		5	-1	37	-5	2 616	-264	9 982	-798	705 549	-46 461
				-9	1	-1 274	106	-7 298	482	-688 256	37 504
						251	-19	2 877	-173	407 139	-20 211
								-475	27	-134 472	6 312
										19 087	-863
8			9				10				
120 960			3 628 800				7 257 600				
434 241	36 799		14 097 247		1 070 017		30 277 247		2 082 753		
-1 152 169	139 849		-43 125 206		4 467 094		-104 995 189		9 449 717		
2 183 877	-121 797		95 476 786		-4 604 594		265 932 680		-11 271 304		
-2 664 477	123 133		-139 855 262		5 595 358		-454 661 776		16 002 320		
2 102 243	-88 547		137 968 480		-5 033 120		538 363 838		-17 283 646		
-1 041 723	41 499		-91 172 642		3 146 338		-444 772 162		13 510 082		
295 767	-11 351		38 833 486		-1 291 214		252 618 224		-7 394 032		
-36 799	1 375		-9 664 106		312 874		-94 307 320		2 687 864		
			1 070 017		-33 953		20 884 811		-583 435		
							-2 082 753		57 281		

Таблица 2.14 (продолжение)

11		12	
479 001 600		958 003 200	
2 132 509 567	134 211 265	4 527 766 399	262 747 265
-8 271 795 124	656 185 652	-19 433 810 163	1 374 799 219
23 591 063 805	-890 175 549	61 633 227 185	-2 092 490 673
-46 113 029 016	1 446 205 080	-135 579 356 757	3 828 828 885
63 716 378 958	-1 823 311 566	214 139 355 366	-5 519 460 582
-63 176 201 472	1 710 774 528	-247 741 639 374	6 043 521 486
44 857 168 434	-1 170 597 042	211 103 573 298	-4 963 166 514
-22 329 634 920	567 450 984	-131 365 867 290	3 007 739 418
7 417 904 451	-184 776 195	58 189 107 627	-1 305 971 115
-1 479 574 348	36 284 876	-17 410 248 271	384 709 327
134 211 265	-3 250 433	3 158 642 445	-68 928 781
		-262 747 265	5 675 265

13		14	
2 615 348 736 000		5 230 697 472 000	
13 064 406 523 627	703 604 254 357	27 511 554 976 875	1 382 741 929 621
-61 497 552 797 274	3 917 551 216 986	-140 970 750 679 621	8 153 167 962 181
214 696 591 002 612	-6 616 420 957 428	537 247 052 515 662	-15 141 235 084 110
-524 924 579 905 150	13 465 774 256 510	-1 445 313 351 681 906	33 928 990 133 618
932 884 546 055 895	-21 847 538 039 895	2 854 429 571 790 805	-61 188 680 131 285
-1 233 589 244 941 764	27 345 870 698 436	-4 246 767 353 305 755	86 180 228 689 563
1 226 443 086 129 408	-26 204 344 465 152	4 825 671 323 488 452	-94 393 338 653 892
-915 883 387 152 444	19 058 185 652 796	-4 204 551 925 534 524	80 101 021 029 180
507 140 369 728 425	-10 344 711 794 985	2 793 869 602 879 077	-52 177 910 882 661
-202 322 913 738 370	4 063 327 863 170	-1 393 306 307 155 755	25 620 259 777 835
55 060 974 662 412	-1 092 096 992 268	505 586 141 196 430	-9 181 635 605 134
-9 160 551 085 734	179 842 822 566	-126 174 972 681 906	2 268 078 814 386
703 604 254 357	-13 695 779 093	19 382 853 593 787	-345 457 086 395
		-1 382 741 929 621	24 466 579 093

15		16	
31 384 184 832 000		62 708 369 664 000	
173 233 498 598 849	8 164 168 737 599	362 555 126 427 073	16 088 129 229 375
-960 122 866 404 112	50 770 967 534 864	-2 161 567 671 248 849	105 145 058 757 073
3 966 421 670 215 481	-102 885 148 956 217	9 622 096 909 515 337	-230 992 163 723 849
-11 643 637 530 577 472	251 724 894 607 936	-30 607 373 860 520 569	612 744 541 065 337
25 298 910 337 081 429	-499 547 203 754 837	72 558 117 072 259 733	-1 326 978 663 058 069
-41 825 269 932 507 728	781 911 618 071 632	-131 963 191 940 828 581	2 285 168 598 349 733
53 471 026 659 940 509	-963 605 400 824 733	187 463 140 112 902 893	-3 129 453 071 993 581
-53 246 738 660 646 912	934 600 833 490 944	-210 020 588 912 321 949	3 414 941 728 852 893
41 280 216 336 284 259	-710 312 834 197 347	186 087 544 263 596 643	-2 966 365 730 265 699
-24 704 503 655 607 728	418 551 804 601 264	-129 930 094 104 237 331	2 039 345 879 546 643
11 205 849 753 515 179	-187 504 936 597 931	70 724 351 582 843 483	-1 096 355 235 402 331
-3 728 807 256 577 472	61 759 426 692 544	-29 417 910 911 251 819	451 403 108 933 483
859 236 476 684 231	-14 110 480 969 927	9 038 571 752 734 087	-137 515 713 789 319
-122 594 813 904 112	1 998 759 236 336	-1 934 443 196 892 599	29 219 384 284 087
8 164 168 737 599	-132 282 840 127	257 650 275 915 823	-3 867 689 367 599
		-16 088 129 229 375	240 208 245 823

Формулы для предикторно-корректорных методов Адамса с 6-го по 14-ый порядок имеют следующий вид:

6 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{1440}(4277 \cdot f_n - 7923 \cdot f_{n-1} + 9982 \cdot f_{n-2} - 7298 \cdot f_{n-3} + 2877 \cdot f_{n-4} - 475 \cdot f_{n-5}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{1440}(475 \cdot f_{n+1} + 1427 \cdot f_n - 798 \cdot f_{n-1} + 482 \cdot f_{n-2} - 173 \cdot f_{n-3} + 27 \cdot f_{n-4});$$

7 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{60480}(198721 \cdot f_n - 447288 \cdot f_{n-1} + 705549 \cdot f_{n-2} - 688256 \cdot f_{n-3} + 407139 \cdot f_{n-4} - 134472 \cdot f_{n-5} - 19087 \cdot f_{n-6}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{60480}(19087 \cdot f_{n+1} + 65112 \cdot f_n - 46461 \cdot f_{n-1} + 37504 \cdot f_{n-2} - 20211 \cdot f_{n-3} + 6312 \cdot f_{n-4} - 863 \cdot f_{n-5});$$

8 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{120960}(434241 \cdot f_n - 1152169 \cdot f_{n-1} + 2183877 \cdot f_{n-2} - 2664477 \cdot f_{n-3} + 2102243 \cdot f_{n-4} - 1041723 \cdot f_{n-5} + 295767 \cdot f_{n-6} - 36799 \cdot f_{n-7}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{120960}(36799 \cdot f_{n+1} + 139849 \cdot f_n - 121797 \cdot f_{n-1} + 123133 \cdot f_{n-2} - 88547 \cdot f_{n-3} + 41499 \cdot f_{n-4} - 11351 \cdot f_{n-5} + 1375 \cdot f_{n-6});$$

9 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3628800}(14097247 \cdot f_n - 43125206 \cdot f_{n-1} +$$

$$+ 95476786 \cdot f_{n-2} - 139855262 \cdot f_{n-3} + 137968480 \cdot f_{n-4} - \\ - 91172642 \cdot f_{n-5} + 38833486 \cdot f_{n-6} - 9664106 \cdot f_{n-7} + 1070017 \cdot f_{n-8}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3628800} (1070017 \cdot f_{n+1} + 4467094 \cdot f_n - 4604594 \cdot f_{n-1} + \\ + 5595358 \cdot f_{n-2} - 5033120 \cdot f_{n-3} + 3146338 \cdot f_{n-4} - 1291214 \cdot f_{n-5} + \\ + 312874 \cdot f_{n-6} - 33953 \cdot f_{n-7});$$

10 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{7257600} (30277247 \cdot f_n - 104995189 \cdot f_{n-1} + 265932680 \cdot f_{n-2} - \\ - 454661776 \cdot f_{n-3} + 538363838 \cdot f_{n-4} - 444772162 \cdot f_{n-5} + \\ + 252618224 \cdot f_{n-6} - 94307320 \cdot f_{n-7} + 20884811 \cdot f_{n-8} + 2082753 \cdot f_{n-9}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{7257600} (2082753 \cdot f_{n+1} + 9449717 \cdot f_n - 11271304 \cdot f_{n-1} + \\ + 16002320 \cdot f_{n-2} - 17283646 \cdot f_{n-3} + 13510082 \cdot f_{n-4} - 7394032 \cdot f_{n-5} + \\ + 2687864 \cdot f_{n-6} - 583435 \cdot f_{n-7} + 57281 \cdot f_{n-8});$$

11 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{479001600} (2132509567 \cdot f_n - 8271795124 \cdot f_{n-1} + \\ + 23591063805 \cdot f_{n-2} - 46113029016 \cdot f_{n-3} + 63716378958 \cdot f_{n-4} - \\ - 63176201472 \cdot f_{n-5} + 448571684342 \cdot f_{n-6} - 22329634920 \cdot f_{n-7} + \\ + 7417904451 \cdot f_{n-8} - 1479574348 \cdot f_{n-9} + 134211265 \cdot f_{n-10}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{479001600} (134211265 \cdot f_{n+1} + 656185652 \cdot f_n - \\ - 890175549 \cdot f_{n-1} + 1446205080 \cdot f_{n-2} - 1823311566 \cdot f_{n-3} + \\ + 1710774528 \cdot f_{n-4} - 1170597042 \cdot f_{n-5} + 567450984 \cdot f_{n-6} - \\ - 184776195 \cdot f_{n-7} + 36284876 \cdot f_{n-8} - 3250433 \cdot f_{n-9});$$

12 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{958003200} (4527766399 \cdot f_n - 19433810163 \cdot f_{n-1} + 61633227185 \cdot f_{n-2} - 135579356757 \cdot f_{n-3} + 214139355366 \cdot f_{n-4} - 247741639374 \cdot f_{n-5} + 211103573298 \cdot f_{n-6} - 131365867290 \cdot f_{n-7} + 43738008052 \cdot f_{n-8} - 2959148696 \cdot f_{n-9} + 3158642445 \cdot f_{n-10} - 262747265 \cdot f_{n-11}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{958003200} (262747265 \cdot f_{n+1} + 1374799219 \cdot f_n - 2092490673 \cdot f_{n-1} + 3828828885 \cdot f_{n-2} - 5519460582 \cdot f_{n-3} + 6043521486 \cdot f_{n-4} - 4963166514 \cdot f_{n-5} + 3007739418 \cdot f_{n-6} - 993831540 \cdot f_{n-7} + 72569752 \cdot f_{n-8} - 68928781 \cdot f_{n-9} + 5675265 \cdot f_{n-10});$$

13 порядок:

$$P: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2615348736000} (13064406523627 \cdot f_n - 61497552797274 \cdot f_{n-1} + 214696591002612 \cdot f_{n-2} - 524924579905150 \cdot f_{n-3} + 932884546055895 \cdot f_{n-4} - 1233589244941764 \cdot f_{n-5} + 1226443086129408 \cdot f_{n-6} - 915883387152444 \cdot f_{n-7} + 467688867888675 \cdot f_{n-8} - 162871411898620 \cdot f_{n-9} + 55060974662412 \cdot f_{n-10} - 9160551085734 \cdot f_{n-11} + 703604254357 \cdot f_{n-12}),$$

$$E: f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$C: y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2615348736000} (703604254357 \cdot f_{n+1} + 3917551216986 \cdot f_n - 6616420957428 \cdot f_{n-1} + 13465774256510 \cdot f_{n-2} - 21847538039895 \cdot f_{n-3} + 27345870698436 \cdot f_{n-4} - 26204344465152 \cdot f_{n-5} + 19058185652796 \cdot f_{n-6} - 9492570755235 \cdot f_{n-7} + 3211186823420 \cdot f_{n-8} - 1092096992268 \cdot f_{n-9} + 2268078814386 \cdot f_{n-10} - 13695779093 \cdot f_{n-11});$$

14 порядок:

$$\begin{aligned}
 \text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{5230697472000} & (27511554976875 \cdot f_n - \\
 & -140970750679621 \cdot f_{n-1} + 537247052515662 \cdot f_{n-2} - \\
 & -1445313351681906 \cdot f_{n-3} + 2854429571790805 \cdot f_{n-4} - \\
 & -4246767353305755 \cdot f_{n-5} + 4825671323488452 \cdot f_{n-6} - \\
 & -4204551925534524 \cdot f_{n-7} + 2714966599199577 \cdot f_{n-8} - \\
 & -1314403303476255 \cdot f_{n-9} + 505586141196430 \cdot f_{n-10} - \\
 & -126174972681906 \cdot f_{n-11} + 19382853593787 \cdot f_{n-12} - \\
 & -1382741929621 \cdot f_{n-13}),
 \end{aligned}$$

$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$\begin{aligned}
 \text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{5230697472000} & (1382741929621 \cdot f_{n+1} + \\
 & + 8153167962181 \cdot f_n - 15141235084110 \cdot f_{n-1} + \\
 & + 33928990133618 \cdot f_{n-2} - 61188680131285 \cdot f_{n-3} + \\
 & + 86180228689563 \cdot f_{n-4} - 94393338653892 \cdot f_{n-5} + \\
 & + 80101021029180 \cdot f_{n-6} - 50473628803161 \cdot f_{n-7} + \\
 & + 23915977698335 \cdot f_{n-8} - 9181635605134 \cdot f_{n-9} + \\
 & + 2268078814386 \cdot f_{n-10} - 345457086395 \cdot f_{n-11} + \\
 & 24466579093 \cdot f_{n-12}).
 \end{aligned}$$

15 порядок:

$$\begin{aligned}
 \text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{31384184832000} & (173233498598849 \cdot f_n - \\
 & -960122866404112 \cdot f_{n-1} + \\
 & + 3966421670215481 \cdot f_{n-2} - 11643637530577472 \cdot f_{n-3} + \\
 & + 25298910337081429 \cdot f_{n-4} - 41825269932507728 \cdot f_{n-5} + \\
 & + 53471026659940509 \cdot f_{n-6} - 53246738660646912 \cdot f_{n-7} + \\
 & + 41280216336284259 \cdot f_{n-8} - 24704503655607728 \cdot f_{n-9} + \\
 & + 11205849753515179 \cdot f_{n-10} - 3728807256577472 \cdot f_{n-11} + \\
 & + 859236476684231 \cdot f_{n-12} - 122594813904112 \cdot f_{n-13} + \\
 & + 8164168737599 \cdot f_{n-14})
 \end{aligned}$$

$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$\begin{aligned}
\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{31\,384\,184\,832\,000} & (8\,164\,168\,737\,599 \cdot f_{n+1} + \\
& + 50\,770\,967\,534\,864 \cdot f_n - 102\,885\,148\,956\,217 \cdot f_{n-1} + \\
& + 251\,724\,894\,607\,936 \cdot f_{n-2} - 499\,547\,203\,754\,837 \cdot f_{n-3} + \\
& + 781\,911\,618\,071\,632 \cdot f_{n-4} - 963\,605\,400\,824\,733 \cdot f_{n-5} + \\
& + 934\,600\,833\,490\,944 \cdot f_{n-6} - 710\,312\,834\,197\,347 \cdot f_{n-7} + \\
& + 418\,551\,804\,601\,264 \cdot f_{n-8} - 187\,504\,936\,597\,931 \cdot f_{n-9} + \\
& + 61\,759\,426\,692\,544 \cdot f_{n-10} - 14\,110\,480\,969\,927 \cdot f_{n-11} + \\
& + 1\,998\,759\,236\,336 \cdot f_{n-12} - 132\,282\,840\,127 \cdot f_{n-13}).
\end{aligned}$$

16 порядок:

$$\begin{aligned}
\text{P: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{62\,768\,369\,664\,000} & (362\,555\,126\,427\,073 \cdot f_n - \\
& - 2\,161\,567\,671\,248\,849 \cdot f_{n-1} + 9\,622\,096\,909\,515\,337 \cdot f_{n-2} - \\
& - 30\,607\,373\,860\,520\,569 \cdot f_{n-3} + 72\,558\,117\,072\,259\,733 \cdot f_{n-4} - \\
& - 131\,963\,191\,940\,828\,581 \cdot f_{n-5} + 187\,463\,140\,112\,902\,893 \cdot f_{n-6} - \\
& - 210\,020\,588\,912\,321\,949 \cdot f_{n-7} + 186\,087\,544\,263\,596\,643 \cdot f_{n-8} - \\
& - 129\,930\,094\,104\,237\,331 \cdot f_{n-9} + 70\,724\,351\,582\,843\,483 \cdot f_{n-10} - \\
& - 29\,417\,910\,911\,251\,819 \cdot f_{n-11} + 9\,038\,571\,752\,734\,087 \cdot f_{n-12} - \\
& - 1\,934\,443\,196\,892\,599 \cdot f_{n-13} + 257\,650\,275\,915\,823 \cdot f_{n-14} - \\
& - 16\,088\,129\,229\,375 \cdot f_{n-15}),
\end{aligned}$$

$$\text{E: } f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$$\begin{aligned}
\text{C: } y_{n+1} = y_n + \frac{1}{62\,768\,369\,664\,000} & (16\,088\,129\,229\,375 \cdot f_{n+1} + \\
& + 105\,145\,058\,757\,073 \cdot f_n - 230\,992\,163\,723\,849 \cdot f_{n-1} + \\
& + 612\,744\,541\,065\,337 \cdot f_{n-2} - 1\,326\,978\,663\,058\,069 \cdot f_{n-3} + \\
& + 2\,285\,168\,598\,349\,733 \cdot f_{n-4} - 3\,129\,453\,071\,993\,581 \cdot f_{n-5} + \\
& + 3\,414\,941\,728\,852\,893 \cdot f_{n-6} - 2\,966\,365\,730\,265\,699 \cdot f_{n-7} + \\
& + 2\,039\,345\,879\,546\,643 \cdot f_{n-8} - 1\,096\,355\,235\,402\,331 \cdot f_{n-9} + \\
& + 451\,403\,108\,933\,483 \cdot f_{n-10} - 137\,515\,713\,789\,319 \cdot f_{n-11} + \\
& + 29\,219\,384\,284\,087 \cdot f_{n-12} - 3\,867\,689\,367\,599 \cdot f_{n-13} + \\
& + 240\,208\,245\,823 \cdot f_{n-14}).
\end{aligned}$$

Формулы, приведенные выше, предпочтительнее использовать для практического применения решения обыкновенных дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянным шагом интегрирования. Если в процессе реше-

ния уравнения шаг интегрирования переменный, то для методов Адамса существуют специальные приемы для закладки новых начальных данных при смене шага интегрирования.

2.2. Форма записи метода Адамса при изменении шага интегрирования

Эффективность реализации методов Адамса зависит от того, с какой степенью точности можно предсказать поведение функции по ее предыдущим значениям $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-k+1}$. Эта информация имеет существенное значение для выбора шага и порядка.

Рассмотрим вариант формул Адамса с постоянным шагом. Получим разности по формулам

$$\nabla^0 f_n = f_n, \quad \nabla^i f_n = \nabla^{i-1} f_n - \nabla^{i-1} f_{n-1}.$$

В этом случае предсказывающая формула принимает вид

$$y_{n+1}^p = y_n + h \sum_{i=0}^k g_i \nabla^i f_n, \quad (2.20)$$

где g_i не зависит от k .

В алгоритме $P_k EC_{k+1} E$ исправляющая формула может быть записана в виде

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=0}^k g_i^* \nabla_p^i f_{n+1}, \quad (2.21)$$

причем ∇_p^i обозначает i -тую разностью назад, в которой за f_{n+1} принимается $f(x_{n+1}, y_{n+1}^p)$. Принимая во внимание, что имеет место равенство

$$g_0^* = g_0 = 1, \quad \sum_{i=0}^k g_i^* = g_k,$$

выражение (2.21) можно упростить до вида

$$y_{n+1} = y_{n+1}^p + h g_k \nabla_p^k f_{n+1}. \quad (2.22)$$

В случае алгоритма $P_k EC_k E$ в (2.22) g_k заменяется, на g_{k-1} , что соответствует отбрасыванию одного члена в формуле (2.21).

Для оценки погрешности можно использовать разности между этими двумя выражениями, т.е. оцениваемая погрешность задается соотношением

$$e = hg_k^* \nabla_k^p f_{n+1}.$$

Эта же оценка может быть использована для алгоритма $P_k EC_{k+1} E$. Если требование точности выполняется, то вычисляется $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ и шаг завершается образованием исправленных разностей $\nabla^i f_{n+1}$.

Если требуется изменить длину шага h на h' , то перед тем как завершить шаг, обычно получают значения $\bar{f}_n, \bar{f}_{n-1}, \dots, \bar{f}_{n-k+1}$ с помощью полинома $P_{k,n}(x)$, построенного по точкам $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-k+1}$. Таким образом,

$$\bar{f}_{n-i} = P_{k,n}(x_n - ih'), \quad i = 0, 1, \dots, k-1. \quad (2.23)$$

Имеется и другая возможность. В этом случае предыдущие значения запоминаются в виде

$$y_n, hy'_n, \dots, h^k y_n^{(k)} / k!, \quad (2.24)$$

а коэффициенты разложения вычисляются по формуле

$$y_n^{(i)} = \left. \frac{d^{i-1} P_{k,n}(x)}{dx^{i-1}} \right|_{x=x_n}. \quad (2.25)$$

Достоинством формулы (2.25) является упрощение процесса интерполяции при изменении шага, достигающееся умножением i -го коэффициента разложения (2.24) на a^i , причем $a = \frac{h'}{h}$.

Приведем формулы записи методов Адамса с переменным шагом. Пусть $f_{n,n-1,\dots,n-i}$ обозначает i -тую разделенную разность f , определяемую следующей рекуррентной формулой:

$$f_{n,n-1,\dots,n-i} = \frac{f_{n,n-1,\dots,n-i+1} - f_{n-1,n-2,\dots,n-i}}{x_n - x_{n-i}}. \quad (2.26)$$

Интерполяционный полином, выраженный через разделенные разности, имеет вид

$$P_{k,n}(x) = f_n + (x - x_n) f_{n,n-1} + \dots + (x - x_n) \dots (x - x_{n-k+2}) f_{n,n-1,\dots,n-k+1}. \quad (2.27)$$

Пусть g_{ij} есть j -кратный интеграл

$$g_{ij} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^x \dots \int_{x_n}^x (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_{n-i+1}) dx \dots dx, \quad (2.28)$$

тогда алгоритм $P_k EC_{k+1} E$ запишется так:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^p &= y_n + \sum_{i=0}^{k-1} g_{i1} f_{n,n-1,\dots,n-i}, \\
f_{n+1}^p &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^p), \\
y_{n+1} &= y_{n+1}^p + g_{k1} f_{n+1,\dots,n-k+1}^p, \\
f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Обозначение $f_{n+1,\dots,n-k+1}^p$ относится к разделенным разностям, образованным с помощью f_{n+1}^p .

Если значение $f_{n+1}^* = P_{k,n}(x_{n+1})$ находится экстраполяцией по формуле

$$f_{n+1}^* = \sum_{i=0}^{k-1} g_{i0} f_{n,n-1,\dots,n-i}, \tag{2.30}$$

то полагая $x = x_{n+1}$, из (2.27) получаем

$$f_{n+1}^p = f_{n+1}^* + g_{k,0} f_{n+1,n,\dots,n-k+1}^p. \tag{2.31}$$

Выразив $f_{n+1,n,\dots,n-k+1}^p$ через $(f_{n+1}^p - f_{n+1}^*)/g_{k,0}$, исправленное значение в (2.29) можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_{n+1}^p + \frac{g_{k1}}{g_{k0}} (f_{n+1}^p - f_{n+1}^*). \tag{2.32}$$

Чтобы использовать РЕС_кЕ в (2.32), следует заменить k на $k-1$. Разность между этими выражениями может быть использована для оценки погрешности

$$e = (1/g_{k,0})(g_{k1} - (x_{n+1} - x_{n-k+1})g_{k-1,1})(f_{n+1}^p - f_{n+1}^*). \tag{2.33}$$

Этот алгоритм зависит от эффективности метода вычисления переменных коэффициентов g_{ij} .

Интегрируя по частям (2.28), получим равенство

$$g_{ij} = (x_{n+1} - x_{n-i+1})g_{i-1,j} - ig_{i-1,j+1}. \tag{2.34}$$

Так как $g_{0i} = (x_{n+1} - x_n)^i / i!$, то формулу (2.34) можно использовать для вычисления искомых коэффициентов с помощью следующей треугольной таблицы.

$i \backslash j$	0	1	2	3
0	g_{00}	g_{01}	g_{02}	g_{03}
1	g_{10}	g_{11}	g_{12}	
2	g_{20}	g_{21}		
3	g_{30}			

Согласно (2.34), каждый элемент этой матрицы получается из двух элементов предыдущей строки.

Следует отметить, что если длина шага остается постоянной на протяжении s шагов, то коэффициенты g_{ij} при $i < s$ будут постоянными. С учетом этого свойства можно утверждать, что дополнительные затраты времени на вычисление переменных коэффициентов становятся незначительными при интегрировании большого числа уравнений, так как коэффициенты при постоянном шаге остаются неизменными.

2.3. Методы Адамса для уравнений более высокого порядка

Системы дифференциальных уравнений различных порядков можно интегрировать непосредственно без сведения к эквивалентной системе первого порядка.

Рассмотрим уравнение d -го порядка

$$y^{(d)} = f(x, y, y', \dots, y^{(d-1)}). \quad (2.35)$$

Интегрируя (2.35) $(d - s)$ раз, получаем

$$y^{(s)}(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{d-1-s} \frac{h^i}{i!} y^{(s+i)}(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^x \dots \int_{x_n}^x f(x, y(x), \dots, y^{(d-1)}(x)) dx \dots dx.$$

Заменяя функцию $f(x, y(x), \dots, y^{(d-1)}(x))$ интерполяционным полиномом, получим явную формулу Адамса:

$$y_{n+1}^{(s)} = \sum_{i=0}^{d-1-s} \frac{h^i}{i!} y_n^{(s+i)} + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{x_n}^x \dots \int_{x_n}^x P_{k,n}(x) dx \dots dx. \quad (2.36)$$

Рассмотрим алгоритм $P_k EC_{k+1} E$, пользуясь разделенными разностями. Это наиболее распространенная форма использования методов Адамса

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{(s)p}(x_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{d-1-s} \frac{h^i}{i!} y_n^{(s+i)} + \sum_{i=0}^{k-1} g_{i,d-s} f_{n,n-1,\dots,n-i}, \quad s=0, 1, \dots, d-1, \\
f_{n+1}^p &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^p, \dots, y_{n+1}^{(d-1)p}), \\
y_{n+1}^{(s)} &= y_{n+1}^{(s)p} + g_{k,d-s} f_{n+1,\dots,n-k+1}^p, \quad s=0, 1, \dots, d-1, \\
f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}, \dots, y_{n+1}^{(d-1)}).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Следует отметить, что коэффициенты $g_{i,j}$ совпадают с коэффициентами первого порядка, так как вычисляются одинаково.

В настоящее время отсутствуют теоретические аргументы в пользу сведения уравнений высокого порядка к системе уравнений первого порядка или, наоборот, в пользу непосредственного их интегрирования.

Вычислительное преимущество формул (2.37) заключается в том, что требуется сформировать и обновлять на каждом шаге только одну таблицу разделенных разностей. Сведения к d уравнениям первого порядка потребовало бы d таблиц разностей.

2.4 Метод Коуэлла

Большинство численных методов интегрирования дифференциальных уравнений можно разделить на две группы, основанные на двух различных принципах.

Методы первой группы основаны на разложении в ряд Тейлора, причем производные высших порядков определяются путем дифференцирования правой части данного уравнения аналитически или численно. К этой группе относятся методы Эйлера, Адамса, Штермера, Коуэлла и др.

Методы второй группы также основаны на разложении в ряды, но без использования в процессе вычисления производных высших порядков. Вместо этого на данном шаге вычисляют правую часть уравнения для различных значений входящих туда переменных. Эти методы называются методами Рунге-Кутты.

Для методов второй группы, в отличие от методов первой группы, не требуются какие-либо другие методы для начала интегрирования, так как для продвижения вперед на один шаг используются лишь значения искомых функций в последней точке. Кроме того, величина шага может быть в любое время изменена в процессе интегрирования.

При этом в качестве критерия изменения шага могут служить результаты просчетов с нормальным и половинчатым шагами.

Однако эти методы не свободны от недостатков, поскольку процесс интегрирования лишен простых средств контроля правильности выбора шага и обнаружения арифметических ошибок. Метод требует большого количества вычислений правых частей дифференциального уравнения, что связано с большой вычислительной работой, в особенности, когда правые части дифференциальных уравнений имеют сложную структуру. Увеличение точности метода связано с большими трудностями, так как при этом возрастает сложность рабочих формул.

Однако при использовании ЭВМ эти недостатки не имеют принципиального значения.

Методы первой группы лишены указанных недостатков, поэтому они нашли широкое применение для решения задач, требующих высокой степени точности. Наиболее распространенным является метод Коуэлла, который идентичен методу «механических квадратур» Гаусса. В частности, метод Коуэлла наиболее часто используется при решении задач небесной механики.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = R(r, t). \quad (2.38)$$

Особенность уравнения (2.38) заключается в том, что в его правой части отсутствует первая производная и потому можно избежать двух интегрирований – одного для получения \dot{r} , а другого для нахождения r . Основная идея метода Коуэлла состоит в том, чтобы непосредственно вычислять искомую функцию r от второй производной \ddot{r} , по формуле двойного интегрирования, используя при этом интерполяционную формулу Стирлинга. Изложим вывод основных соотношений метода Коуэлла с точностью до членов двенадцатого порядка включительно относительно шага интегрирования h .

Согласно формуле Тейлора:

$$r(t_k - h) = r_{k-1} = r_k + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n!} \left(\frac{d^n r}{dt^n} \right)_k,$$

$$r(t_k + h) = r_{k+1} = r_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left(\frac{d^n r}{dt^n} \right)_k.$$

Из этих соотношений находим вторые разности

$$\Delta^2 r_k = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{d^{2n} r}{dt^{2n}} \right)_k,$$

так как

$$\Delta^2 r_k = r(t_k + h) - 2r(t_k) + r(t_k - h).$$

Полагая

$$f = h^2 \frac{d^2 r}{dt^2} = h^2 R(r, t), \quad (2.39)$$

получим

$$\Delta^2 r_k = f_k + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(2n+2)!} \left(\frac{d^{2n} r}{dt^{2n}} \right)_k. \quad (2.40)$$

Используя интерполяционную формулу Стирлинга, выразим производные через разности функции, используя для этой цели. Разности и суммы значений функции представлены в таблице 2.15.

Таблица 2.15

Система обозначений разностей и сумм

Аргумент	2-я сумма	1-я сумма	Функция	1-я разность	2-я разность	3-я разность	4-я разность
$t_0 - 3h$	f_{-3}^{-2}		f_{-3}				
		$f_{-5/2}^{-1}$		$f_{-5/2}^1$			
$t_0 - 2h$	f_{-2}^{-2}	$f_{-3/2}^{-1}$	f_{-2}	$f_{-3/2}^1$	f_{-2}^2	$f_{-3/2}^3$	
		$f_{-1/2}^{-1}$		$f_{-1/2}^1$	f_{-1}^2		f_{-1}^4
$t_0 - h$	f_{-1}^{-2}	$f_{-1/2}^{-1}$	f_{-1}	$f_{-1/2}^1$	f_0^2	$f_{-1/2}^3$	
		$f_{1/2}^{-1}$		$f_{1/2}^1$	f_1^2	$f_{1/2}^3$	f_0^4
t_0	f_0^{-2}	$f_{1/2}^{-1}$	f_0	$f_{1/2}^1$	f_1^2	$f_{1/2}^3$	f_0^4
		$f_{3/2}^{-1}$		$f_{3/2}^1$	f_2^2	$f_{3/2}^3$	f_1^4
$t_0 + h$	f_1^{-2}	$f_{3/2}^{-1}$	f_1	$f_{3/2}^1$	f_2^2	$f_{3/2}^3$	f_1^4
		$f_{5/2}^{-1}$		$f_{5/2}^1$	f_3^2	$f_{5/2}^3$	f_2^4
$t_0 + 2h$	f_2^{-2}	$f_{5/2}^{-1}$	f_2	$f_{5/2}^1$	f_3^2	$f_{5/2}^3$	f_2^4
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Если вместо радиус-вектора используются его координаты, то после перехода от векторов к их составляющим по координатам, таблица 2.15 преобразуется в три отдельные таблицы.

Кроме того, вводятся обозначения:

$$\begin{aligned} f_k^{2n-1} &= \frac{1}{2} [f_{k-\frac{1}{2}}^{2n-1} + f_{k+\frac{1}{2}}^{2n-1}] = f_{k-\frac{1}{2}}^{2n-1} + \frac{1}{2} f_k^{2n}, \\ f_{k+\frac{1}{2}}^{2n} &= \frac{1}{2} [f_k^{2n} + f_{k+1}^{2n}] = f_k^{2n} + \frac{1}{2} f_{k+\frac{1}{2}}^{2n+1}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $f_{k+1} - f_k = f_{k+1/2}^1$, $f_{k+1/2}^1 - f_{k-1/2}^1 = f_k^2$.

Запишем интерполяционную формулу в следующем виде:

$$f(t_k + zh) = f_k + \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_k^i, \quad (2.42)$$

где f_k^i – разность i -го порядка для k -ой строки, а коэффициенты A_i определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} A_{2j+1} &= \frac{z^2 - j^2}{2j(2j+1)} A_{2j-1}, \\ A_{2j+2} &= \frac{z}{2j+2} A_{2j+1}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где

$$A_1 = z. \quad (2.44)$$

Из соотношений (2.43) и (2.44) следует, что коэффициенты A_i являются полиномами i -ой степени относительно z .

Из формулы (2.42) находим

$$h^n \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right)_k = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{d^n A_i}{dz^n} \right)_k f_k^i. \quad (2.45)$$

Дифференцируя выражения (2.43) n раз, получим

$$A_{2j+1}^{(n)} = \frac{1}{2j(2j+1)} [n(n-1)A_{2j-1}^{(n-2)} + 2nzA_{2j-1}^{(n-1)} + (z^2 - j^2)A_{2j-1}^{(n)}],$$

$$A_{2j+2}^{(n)} = \frac{1}{2j+2} [nA_{2j+1}^{(n-1)} + zA_{2j+1}^{(n)}].$$

При $z=0$ имеем

$$A_{2j+1}^{(n)} = \frac{1}{2j(2j+1)} [n(n-1)A_{2j-1}^{(n-2)} - j^2 A_{2j-1}^{(n)}],$$

$$A_{2j+2}^{(n)} = \frac{n}{2j+2} A_{2j+1}^{(n-1)}. \quad (2.46)$$

Формулы (2.45) и (2.46) позволяют выразить производные любого порядка через разности.

Так как A_i являются полиномами i -ой степени относительно z , то при $n > i$ имеем

$$A_i^{(n)} = 0.$$

Полагая в соотношениях (2.46) $n = 2j+1$ и $n = 2j+2$, найдем

$$A_{2j+2}^{(2j+2)} = A_{2j+1}^{(2j+1)} = A_{2j-1}^{(2j-1)}.$$

Так как из равенства (2.44) имеем $A_1^{(1)} = 1$, то для любых значений i имеет место равенство

$$A_i^{(i)} = 1.$$

Первое из соотношений (2.46) показывает, что если для какого-либо индекса j_0 четные или нечетные производные равны нулю, то и для любых индексов $j > j_0$ указанные производные будут также равны нулю. Так как для A_1 все четные производные равны нулю, то из соотношений (2.46) для любых значений j следует

$$A_{2j+1}^{(2n)} = 0, \quad A_{2j+2}^{(2n+1)} = 0.$$

Таким образом, если нижние и верхние индексы разной четности, то имеет место равенство

$$A_i^{(n)} = 0.$$

Отсюда следует, что нечетные производные, определяемые соотношениями (2.45), выражаются только через нечетные разности, а четные производные – только через четные.

Из соотношений (2.46), с учётом указанных свойств, легко находим

$$A_{2j+1}^{(1)} = (-1)^j \frac{(j!)^2}{(2j+1)!}, \quad A_{2j+2}^{(1)} = 0,$$

и, следовательно,

$$h \left(\frac{df}{dt} \right)_k = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(j!)^2}{(2j+1)!} f_k^{2j+1}. \quad (2.47)$$

Производные высших порядков, легко находятся непосредственно по рекуррентным формулам (2.46).

Найдём производные, определяемые соотношением (2.45):

$$\begin{aligned}
 h\left(\frac{df}{dt}\right)_k &= f_k^1 - \frac{1}{6}f_k^3 + \frac{1}{30}f_k^5 - \frac{1}{140}f_k^7 + \frac{1}{630}f_k^9 - \frac{1}{2772}f_k^{11} + \mathbf{K}, \\
 h^2\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_k &= f_k^2 - \frac{1}{12}f_k^4 + \frac{1}{90}f_k^6 - \frac{1}{560}f_k^8 + \frac{1}{3150}f_k^{10} - \frac{1}{16632}f_k^{12} + \mathbf{K}, \\
 h^3\left(\frac{d^3f}{dt^3}\right)_k &= f_k^3 - \frac{1}{4}f_k^5 + \frac{7}{120}f_k^7 - \frac{41}{3024}f_k^9 + \frac{479}{151200}f_k^{11} - \mathbf{K}, \\
 h^4\left(\frac{d^4f}{dt^4}\right)_k &= f_k^4 - \frac{1}{6}f_k^6 + \frac{7}{240}f_k^8 - \frac{41}{7560}f_k^{10} + \frac{479}{453600}f_k^{12} - \mathbf{K}, \\
 h^5\left(\frac{d^5f}{dt^5}\right)_k &= f_k^5 - \frac{1}{3}f_k^7 + \frac{13}{144}f_k^9 - \frac{139}{6048}f_k^{11} + \mathbf{K}, \\
 h^6\left(\frac{d^6f}{dt^6}\right)_k &= f_k^6 - \frac{1}{4}f_k^8 + \frac{13}{240}f_k^{10} - \frac{139}{12096}f_k^{12} + \mathbf{K}, \\
 h^7\left(\frac{d^7f}{dt^7}\right)_k &= f_k^7 - \frac{5}{12}f_k^9 + \frac{31}{240}f_k^{11} - \mathbf{K}, \\
 h^8\left(\frac{d^8f}{dt^8}\right)_k &= f_k^8 - \frac{1}{3}f_k^{10} + \frac{31}{360}f_k^{12} - \mathbf{K}, \\
 h^9\left(\frac{d^9f}{dt^9}\right)_k &= f_k^9 - \frac{1}{2}f_k^{11} + \mathbf{K}, \\
 h^{10}\left(\frac{d^{10}f}{dt^{10}}\right)_k &= f_k^{10} - \frac{5}{12}f_k^{12} + \mathbf{K}, \\
 h^{11}\left(\frac{d^{11}f}{dt^{11}}\right)_k &= f_k^{11} - \mathbf{K}, \\
 h^{12}\left(\frac{d^{12}f}{dt^{12}}\right)_k &= f_k^{12} - \mathbf{K}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Подставляя найденные выражения для производных в соотношение (2.40), получим основную формулу разностного метода Коуэлла:

$$\Delta^2 r_k = f_k + \frac{1}{12}f_k^2 - \frac{1}{240}f_k^4 + \frac{31}{60480}f_k^6 - \frac{289}{3628800}f_k^8 +$$

$$+ \frac{317}{22809600} f_k^{10} - \frac{6803477}{2615348736000} f_k^{12} + \mathbf{K} . \quad (2.49)$$

Искомый радиус-вектор r_{k+1} находится при помощи двойного суммирования

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1/2} &= \Delta_{k-1/2} + \Delta_k^2, \\ r_{k+1} &= r_k + \Delta_{k+1/2}. \end{aligned}$$

Вычисления по методу Коуэлла начинаются следующим образом. Зная r_0 и r_{-1} , можем вычислить

$$r_0 - r_{-1} = \Delta_{-1/2}.$$

Затем, отбрасывая в формуле (2.49) неизвестные пока члены с разностями f_0^2 , f_0^4 , находим в первом приближении

$$\Delta_0^2 = f_0 = h^2 F_0 = h^2 F(r_0, t_0).$$

После того, как стала известна вторая разность Δ_0^2 , может вычислить $\Delta_{1/2}$ и r_1 по формулам

$$\begin{aligned} \Delta_{1/2} &= \Delta_{-1/2} + \Delta_0^2, \\ r_1 &= r_0 + \Delta_{1/2}. \end{aligned}$$

Имея теперь r_{-1} , r_0 , r_1 , можем вычислить f_0^2 и, следовательно, найти по формуле (2.49) более точное значение для Δ_0^2 , а именно

$$\Delta_0^2 = f_0 + \frac{1}{12} f_0^2.$$

Чтобы получить формулы метода квадратур, просуммируем написанный ряд два раза: сначала от нуля до i , а затем от нуля до $k-1$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} r_k &= f_k^{-2} + \frac{1}{12} f_k - \frac{1}{240} f_k^2 + \frac{31}{60480} f_k^4 - \frac{289}{3628800} f_k^6 + \\ &+ \frac{317}{22809600} f_k^8 - \frac{6803477}{2615348736000} f_k^{10} + \mathbf{K}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где

$$\begin{aligned} f_k^{-2} &= f_0^{-2} + \sum_{i=0}^{k-1} f_{i+1/2}^{-1}, \\ f_{i+1/2}^{-1} &= f_{-1/2}^{-1} + \sum_{j=0}^i f_j. \end{aligned} \quad (2.51)$$

При произвольном выборе начальных значений сумм f_0^{-2} и $f_{-1/2}^{-1}$ мы исходили из того, что выполнялись равенства

$$f_0^{-2} = r_0 - \frac{1}{12}f_0 + \frac{1}{240}f_0^2 - \frac{31}{60480}f_0^4 + \frac{289}{3628800}f_0^6 - \frac{317}{22809600}f_0^8 + \frac{6803477}{2615348736000}f_0^{10} - \mathbf{K}, \quad (2.52)$$

$$f_{-1/2}^{-1} = \Delta r_{-1/2} - \frac{1}{12}f_{-1/2}^1 + \frac{1}{240}f_{-1/2}^3 - \frac{31}{60480}f_{-1/2}^5 + \frac{289}{3628800}f_{-1/2}^7 - \frac{317}{22809600}f_{-1/2}^9 + \frac{6803477}{2615348736000}f_{-1/2}^{11} - \mathbf{K}. \quad (2.53)$$

Соотношения (2.50), (2.51) с учётом выражений (2.52), (2.53) представляют собой метод квадратур, соответствующий методу Коуэлла.

Отметим, что формула (2.53), определяющая начальное значение первой суммы, употребляется тогда, когда начальные условия движения заданы координатами для двух соседних моментов $(t_0 - h, t_0)$. В том случае, когда начальные условия движения заданы положением и скоростью для момента t_0 , формулу (2.53) необходимо преобразовать с тем, чтобы исключить неизвестную величину $\Delta r_{-1/2}$.

Разлагая $\Delta r_{-1/2}$ в ряд Тейлора, и принимая во внимание на основании (2.40) и (2.49), что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n}}{(2n+2)!} \left(\frac{d^{2n}f}{dt^{2n}} \right)_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12}f_0^2 - \frac{1}{240}f_0^4 + \frac{31}{60480}f_0^6 - \mathbf{K} \right],$$

а также учитывая равенства (2.41), будем иметь

$$f_{-1/2}^{-1} = h \mathbf{K} - \frac{1}{2}f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{2n-1}}{(2n+1)!} \left(\frac{d^{2n-1}f}{dt^{2n-1}} \right)_0 - \left[\frac{1}{12}f_0^1 - \frac{1}{240}f_0^3 + \frac{31}{60480}f_0^5 - \mathbf{K} \right].$$

Выражая производные через разности, согласно соотношениям (2.48), окончательно найдём

$$f_{-1/2}^{-1} = h \mathbf{K} - \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{12}f_0^1 - \frac{11}{720}f_0^3 + \frac{191}{60480}f_0^5 - \frac{2497}{3628800}f_0^7 + \frac{14797}{95800320}f_0^9 - \frac{92427157}{2615348736000}f_0^{11} + \mathbf{K}. \quad (2.54)$$

Таким образом, соотношения (2.52) и (2.54) позволяют определить начальные значения столбцов сумм, когда начальные условия движения заданы координатами и компонентами скорости.

Вычисления по формуле (2.50) ведутся так же как и в случае первого метода Коуэлла. Исходя из заданных r_0 и $\Delta_{-1/2} = r_0 - r_1$, определяются несколько смежных значений x_1, x_{-2}, x_2, \dots . Затем находят нужные разности f_n^2 и f_n^4 в первом приближении, экстраполируя шестые разности.

2.5 Квадратурный метод Коуэлла с переменным шагом интегрирования

Рассмотрим вопрос об изменении шага интегрирования в методе Коуэлла. Пусть w – новый шаг интегрирования. Тогда, полагая

$$F = w^2 R(r, T)$$

и учитывая равенство (2.39), получим

$$F = I^2 f, \quad (2.55)$$

где

$$I = wh^{-1}. \quad (2.56)$$

Для нахождения столбцов сумм F_0^{-2} и $F_{-1/2}^{-1}$, запишем соотношения (2.52) и (2.53) в следующей форме:

$$\begin{aligned} f_0^{-2} &= r_0 - B_0 f_0 - \sum_{i=1}^5 B_{2i} f_0^{2i} - \dots, \\ f_{-1/2}^{-1} &= h \frac{1}{2} f_0 - \sum_{i=0}^5 B_{2i+1} f_0^{2i+1} - \dots, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= +\frac{1}{12}, & B_1 &= -\frac{1}{12}, \\ B_2 &= -\frac{1}{240}, & B_3 &= +\frac{11}{720}, \\ B_4 &= +\frac{31}{60480}, & B_5 &= -\frac{191}{60480}, \\ B_6 &= -\frac{289}{3628800}, & B_7 &= +\frac{2497}{3628800}, \\ B_8 &= +\frac{317}{22809600}, & B_9 &= -\frac{14797}{95800320}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$B_{10} = -\frac{6803477}{2615348736000}, \quad B_{11} = +\frac{92427157}{2615348736000},$$

Значение коэффициентов B_k от шага интегрирования не зависят. Используя эти соотношения к функции F и исключая r_0 и $\&$ при помощи равенств (2.58) с учетом (2.56) и (2.57) получим

$$F_0^{-2} = f_0^{-2} - \frac{1}{12}(I^2 - 1)f_0 + \sum_{i=1}^5 B_{2i}(f_0^{2i}) + \dots,$$

$$F_{-1/2}^{-1} = If_{0-1/2}^{-1} - \frac{1}{2}I(I - 1)f_0 + \sum_{i=0}^5 B_{2i+1}(If_0^{2i+1} - F_0^{2i+1}) + \dots, \quad (2.59)$$

Найдем разности функции F через разности известной функции f . Эту зависимость при помощи производных можно выразить в таком виде:

$$h^n \left(\frac{d^n f}{dt^n} \right)_k = \sum_{i=n}^{12} A_i^n f_k^i, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, 12),$$

где коэффициенты A_i^n от шага интегрирования не зависят.

Для функции F имеем

$$w \left(\frac{d^n F}{dt^n} \right)_k = \sum_{i=n}^{12} A_i^{(n)} F_k^i.$$

Из этих соотношений и выражений (2.55) и (2.56) получим систему уравнений для определения F_k^i

$$\sum_{i=n}^{12} A_i^{(n)} F_k^i = I^{n+2} \sum_{i=n}^{12} A_i^{(n)} f_k^i. \quad (2.60)$$

Так как $A_n^n = 1$, - то уравнение (2.60) запишем в виде:

$$F_k^n = I^{n+2} f_k^n + \sum_{i=n+1}^{12} A_i^{(n)} (I^{n+2} f_k^i - F_k^i). \quad (2.61)$$

Полагая в равенстве (2.61) $n = 1, 2, \dots, 12$, найдем искомые неизвестные F_k^i :

$$F_k^1 = I^2 f_k^1 - \frac{1}{6} I^3 (1 - I^2) f_k^3 + \frac{1}{120} I^3 (4 - 5I^2 + I^4) f_k^5 -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{5040} I^3 (36 - 49I^2 + 14I^4 - I^6) f_k^7 + \\
& + \frac{1}{362880} I^3 (576 - 820I^2 + 273I^4 - 30I^6 + I^8) f_k^9 - \\
& - \frac{1}{39916800} I^3 (14400 - 21076I^2 + 7645I^4 - 1023I^6 + \\
& + 55I^8 - I^{10}) f_k^{11} + \dots; \\
F_k^2 = & I^4 f_k^2 - \frac{1}{12} I^4 (1 - I^2) f_k^4 + \frac{1}{360} I^4 (4 - 5I^2 + I^4) f_k^6 - \\
& - \frac{1}{20160} I^4 (36 - 49I^2 + 14I^4 - I^6) f_k^8 + \\
& + \frac{1}{1814400} I^4 (576 - 820I^2 + 273I^4 - 30I^6 + I^8) f_k^{10} - \\
& - \frac{1}{239500800} I^4 (14400 - 21076I^2 + 7645I^4 - 1023I^6 + \\
& + 55I^8 - I^{10}) f_k^{12} + \dots; \\
F_k^3 = & I^5 f_k^3 - \frac{1}{4} I^5 (1 - I^2) f_k^5 + \frac{1}{120} I^5 (4 - 5I^2 + I^4) f_k^7 - \\
& - \frac{1}{12096} I^5 (164 - 273I^2 + 126I^4 - 17I^6) f_k^9 + \\
& + \frac{1}{604800} I^5 (1916 - 3475I^2 + 1953I^4 - 425I^6 + 31I^8) f_k^{11} - \dots; \\
F_k^4 = & I^6 f_k^4 - \frac{1}{6} I^6 (1 - I^2) f_k^6 + \frac{1}{120} I^6 (7 - 10I^2 + 3I^4) f_k^8 - \\
& - \frac{1}{30240} I^6 (164 - 273I^2 + 126I^4 - 17I^6) f_k^{10} + \\
& + \frac{1}{1814400} I^6 (1916 - 3475I^2 + 1953I^4 - 425I^6 + 31I^8) f_k^{12} - \dots; \\
F_k^5 = & I^7 f_k^5 - \frac{1}{3} I^7 (1 - I^2) f_k^7 + \frac{1}{144} I^7 (13 - 20I^2 + 7I^4) f_k^9 - \\
& - \frac{1}{30240} I^7 (695 - 1302I^2 + 735I^4 - 128I^6) f_k^{11} + \dots;
\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}
F_k^6 &= I^8 f_k^6 - \frac{1}{4} I^8 (1 - I^2) f_k^8 + \frac{1}{144} I^8 (13 - 20I^2 + 7I^4) f_k^{10} - \\
&\quad - \frac{1}{60480} I^{78} (695 - 1302I^2 + 735I^4 - 128I^6) f_k^{12} + \dots; \\
F_k^7 &= I^9 f_k^7 - \frac{5}{12} I^9 (1 - I^2) f_k^9 + \frac{1}{240} I^9 (31 - 50I^2 + 19I^4) f_k^{11} - \dots; \\
F_k^8 &= I^{10} f_k^8 - \frac{5}{3} I^{10} (1 - I^2) f_k^{10} + \frac{1}{360} I^{10} (31 - 50I^2 + 19I^4) f_k^{12} - \dots; \\
F_k^9 &= I^{11} f_k^9 - \frac{1}{2} I^{11} (1 - I^2) f_k^{11} + \dots; \\
F_k^{10} &= I^{12} f_k^{10} - \frac{5}{12} I^{12} (1 - I^2) f_k^{12} + \dots; \\
F_k^{11} &= I^{13} f_k^{11} + \dots; \\
F_k^{12} &= I^{14} f_k^{12} + \dots;
\end{aligned}$$

Подставляя в формулы (2.59) найденные соотношения, получим значения начальных сумм для измененного шага.

$$\begin{aligned}
F_0^{-2} &= f_0^{-2} - \frac{1}{12} (I^2 - 1) f_0 + \frac{1}{240} (I^4 - 1) f_0^2 - \\
&\quad - \frac{1}{60480} (10I^6 + 21I^4 - 31) f_0^4 + \frac{1}{3628800} (21I^2 + \\
&\quad 100I^6 + 168I^4 - 289) f_0^6 - \frac{1}{159667200} (30I^{10} + 231I^8 + 770I^6 + \\
&\quad 1188I^4 - 2219) f_0^8 + \frac{1}{2615348736000} (15202I^{12} + 163800I^{10} + \\
&\quad + 819819I^8 + 2345200I^6 + 3459456I^4 - 6803477) f_0^{10} - \dots; \\
F_{-1/2}^{-1} &= I f_{-1/2}^{-1} - \frac{1}{2} I (I - 1) f_0 + \frac{1}{12} I (I^2 - 1) f_0^1 -
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{720}I(I^4+10I^2-11)f_0^3 + \frac{1}{60480}I(2I^6+21I^4+168I^2-191)f_0^5 - \\
& -\frac{1}{3628800}I(3I^8+40I^6+294I^4+2160I^2-2497)f_0^7 + \\
& +\frac{1}{95800320}I(2I^{10}+33I^8+286I^6+1804I^4+12672I^2-14797)f_0^9 - \\
& -\frac{1}{2615348736000}I(1382I^{12}+27300I^{10}+279279I^8+ \\
& +1987700I^6+11507496I^4+78624000I^2-92427157))f_0^{11} + \dots
\end{aligned}$$

С помощью формул (2.55), (2.56) и (2.63) можно преобразовать таблицу интегрирования для любого шага $w = Ih$.

Формулы существенно упрощаются если шаг требуется изменять в два раза как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения. Обозначая правые части для увеличенного шага через F , а для уменьшенного шага через H , получим следующие соотношения.

Увеличение шага в два раза ($I = 2$)

$$\begin{aligned}
F_0^{-2} &= f_0^{-2} - \frac{1}{2^2} f_0 + \frac{1}{2^4} f_0^2 - \frac{1}{2^6} f_0^4 + \frac{1}{2^8} f_0^6 - \frac{1}{2^{10}} f_0^8 + \frac{1}{2^{12}} f_0^{10} - \dots, \\
F_{-1/2}^{-1} &= 2f_{-1/2}^{-1} - f_0 + \frac{1}{2} f_0^1 - \frac{1}{2^3} f_0^3 + \frac{1}{2^5} f_0^5 - \frac{1}{2^7} f_0^7 + \\
& + \frac{1}{2^9} f_0^9 - \frac{1}{2^{11}} f_0^{11} + \dots,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$F_i = 4f_{2i}.$$

Уменьшение шага в два раза ($I = 1/2$)

$$\begin{aligned}
H_0^{-2} &= f_0^{-2} + \frac{1}{2^4} f_0 - \frac{1}{2^8} f_0^2 + \frac{1}{2^{11}} f_0^4 - \frac{5}{2^{16}} f_0^6 + \frac{7}{2^{19}} f_0^8 - \frac{21}{2^{23}} f_0^{10} + \dots, \\
H_{-1/2}^{-1} &= \frac{1}{2} f_{-1/2}^{-1} + \frac{1}{2^3} f_0 - \frac{1}{2^5} f_0^1 + \frac{3}{2^9} f_0^3 - \frac{5}{2^{12}} f_0^5 + \frac{35}{2^{17}} f_0^7 - \\
& - \frac{63}{2^{20}} f_0^9 + \frac{231}{2^{24}} f_0^{11} - \dots,
\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$H_i = \frac{1}{4} f_{i/2}.$$

Формулы (2.64) и (2.65) значительно проще формул (2.62), (2.63). Однако при уменьшении шага вдвое, удваивается вычислительная работа. Кроме того, возникает необходимость в разработке алгоритмов для принятия решения об увеличении или уменьшении шага вдвое. Формулы (2.62) и (2.63) свободны от этих недостатков, если шаг интегрирования меняется незначительно в ту или другую сторону.

При использовании этих формул для интегрирования дифференциальных уравнений, необходимо точность этих формул согласовать с заданной степенью точности окончательного результата. В связи с этим возникает необходимость в оценке накопления погрешностей при численном интегрировании по квадратурному методу Коуэлла. Принципиальным недостатком данного метода является быстрое накопление ошибок округления. После того как сделано n шагов численного интегрирования, ошибки в полученном решении оказываются пропорциональными $n^{3/2}$.

2.6. Метод Эверхарта

Практика показала, что при решении многих прикладных задач (например, в небесной механике) явные многошаговые методы Коуэлла не позволяли существенно расширить интервал интегрирования. Разработанный Эверхартом метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет снять это ограничение, что особенно важно при решении задач динамики.

Метод Эверхарта является одной из разновидностей методов Рунге-Кутты. Он относится к числу неявных одношаговых методов, что обеспечивает его сходимость и устойчивость. Основным достоинством одношаговых методов является то обстоятельство, что для них разработаны надежные оценки локальной погрешности дискретизации. Кроме того, метод Эверхарта показал себя как самый эффективный по точности и быстродействию в эксперименте по исследованию алгоритмов и программ численного прогнозирования движения небесных тел, проведенном в СССР в 1986 году.

Вследствие того, что повышение порядка аппроксимирующей формулы в большинстве случаев улучшает основные свойства методов, разработка группы методов Эверхарта более высокого порядка, по сравнению с существующими, является актуальной задачей с це-

лю создания более точного и эффективного алгоритма численного интегрирования.

Алгоритм и программа численного интегрирования методом Эверхарта ранее были разработаны до 27 порядка, однако использование этих алгоритмов свыше 19-го порядка не приводило к повышению точности вычислений. В данном параграфе рассматриваются разработанные нами модифицированные алгоритмы для метода Эверхарта до 31 порядка включительно, позволяющие повысить эффективность программного продукта при увеличении порядка метода.

Рассмотрим основную идею построения метода Эверхарта на примере решения уравнения вида

$$\dot{x} = F(x, t). \quad (2.66)$$

Представим правую часть в виде временного ряда

$$\dot{x} = F(x, t) = F_1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n. \quad (2.67)$$

Интегрируя (2.67), получим выражения для определения координат и скоростей:

$$x = x_1 + \dot{x}_1 t + F_1 \frac{t^2}{2} + A_1 \frac{t^3}{6} + \dots + A_n \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}, \quad (2.68)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + F_1 t + A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 \frac{t^3}{3} + \dots + A_n \frac{t^{n+1}}{n+1}. \quad (2.69)$$

Полиномы (2.68) и (2.69) не являются рядами Тейлора, а коэффициенты A_i вычисляются из условия наилучшего приближения x и \dot{x} с помощью конечных разложений (2.68) и (2.69). Для связи A -значений с F -значениями воспользуемся вспомогательным выражением

$$F = F_1 + a_1 t + a_2 t(t - t_2) + a_3 t(t - t_2)(t - t_3) + \dots \quad (2.70)$$

Уравнение (2.70) усечено по времени t_n . В каждый фиксированный момент времени t_i имеем

$$\begin{aligned} F_2 &= F_1 + a_1 t_2, \\ F_3 &= F_1 + a_1 t_3 + a_2 t_3(t_3 - t_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.71)$$

Принимая $t_{nj} = t_n - t_j$, найдем a_i через разделенные разности:

$$x_4 = x_1 + \mathfrak{R}t_4 + \frac{F_1 t_4^2}{2} + \frac{A_1 t_4^3}{6} + \frac{A_2 t_4^4}{12} + \left[\frac{A_3 t_4^5}{20} \right], \quad (2.79)$$

и двух исправляющих уравнений для нахождения положения и скорости на конце шага h :

$$x(T) = x_1 + \mathfrak{R}T + \frac{F_1 T^2}{2} + \frac{A_1 T^3}{6} + \frac{A_2 T^4}{12} + \frac{A_3 T^5}{20}, \quad (2.80)$$

$$\mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R} + F_1 T + \frac{A_1 T^2}{2} + \frac{A_2 T^3}{3} + \frac{A_3 T^4}{4}. \quad (2.81)$$

Эта схема является неявной, так как коэффициенты, стоящие в квадратных скобках (2.77) – (2.79), неизвестны при первой итерации.

Уравнения (2.77) – (2.81) обеспечивают пятый порядок точности относительно t . Можно увеличить порядок точности в вычислении x и \mathfrak{R} до седьмого порядка путем специального выбора подшагов t_2, t_3, t_4 . С этой целью увеличим количество разбиений интервала интегрирования, добавив два дополнительных времени t_5, t_6 . Затем вычислим для t_5 и t_6 значения a_4 и a_5 , а также новые значения A'_4, A'_5 и A'_1, A'_2, A'_3 .

Из уравнения (2.80) можно найти поправки Δx , улучшающие значения координат:

$$\Delta x = \frac{(A'_1 - A_1)T^3}{6} + \frac{(A'_2 - A_2)T^4}{12} + \frac{(A'_3 - A_3)T^5}{20} + \frac{A'_4 T^6}{30} + \frac{A'_5 T^7}{42}. \quad (2.82)$$

Выражая в уравнении (2.74) c_{51}, \dots, c_{54} через c_{41}, c_{42}, c_{43} , а также полагая

$$h_2 = \frac{t_2}{T}, \quad h_3 = \frac{t_3}{T} \quad \text{и} \quad h_4 = \frac{t_4}{T}, \quad (2.83)$$

выражение (2.82) может быть записано в виде

$$\Delta x = (a_4 - t_3 a_5) T^6 \left[\frac{c'_{41}}{6} + \frac{c'_{42}}{12} + \frac{c'_{43}}{20} + \frac{1}{30} \right] + a_5 T^7 \left[\frac{c'_{41}}{12} + \frac{c'_{42}}{20} + \frac{c'_{43}}{30} + \frac{1}{42} \right].$$

Значение Δx в последнем выражении можно обратить в ноль при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} \frac{c'_{41}}{6} + \frac{c'_{42}}{12} + \frac{c'_{43}}{20} + \frac{1}{30} &= 0, \\ \frac{c'_{41}}{12} + \frac{c'_{42}}{20} + \frac{c'_{43}}{30} + \frac{1}{42} &= 0. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Проводя подобные рассуждения для скорости, приравнивая к нулю $\Delta \mathfrak{K}$, получим третье условие для определения $c'_{41}, c'_{42}, c'_{43}$. Тогда соответствующие данным разбиениям коэффициенты c'_{ij} будут определяться из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{c'_{41}}{2} + \frac{c'_{42}}{3} + \frac{c'_{43}}{4} + \frac{1}{5} = 0, \\ \frac{c'_{41}}{3} + \frac{c'_{42}}{4} + \frac{c'_{43}}{5} + \frac{1}{6} = 0, \\ \frac{c'_{41}}{4} + \frac{c'_{42}}{5} + \frac{c'_{43}}{6} + \frac{1}{7} = 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Из решения этой системы

$$\begin{aligned} c'_{41} &= -\frac{4}{35} = -h_2 h_3 h_4, \\ c'_{42} &= \frac{6}{7} = h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_2 h_4, \\ c'_{43} &= -\frac{12}{7} = -h_2 - h_3 - h_4, \end{aligned} \quad (2.86)$$

следует, что значения величин h_2, h_3, h_4 являются корнями следующего полинома третьей степени

$$h^3 + \left(-\frac{12}{7}\right)h^2 + \left(\frac{6}{7}\right)h - \frac{4}{35} = 0. \quad (2.87)$$

которые имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{t_2}{T} = 0.212340538239\dots, \\ h_3 &= \frac{t_3}{T} = 0.590533135559\dots, \\ h_4 &= \frac{t_4}{T} = 0.91141240488\dots \end{aligned} \quad (2.88)$$

Использование этих узлов позволяет получить решение уравнения (2.66) с точностью до седьмого порядка для обеих компонент x и \mathfrak{K} . Полученные по формуле (2.87) узлы разбиения h совпадают с узлами квадратурной формулы Гаусса-Радо. Область изменения h заключена в пределах $0 \leq h \leq 1$.

Таким образом, порядок метода, определяющий точность интегрирования, зависит от количества разбиений основного шага h на подшаги h_i .

В работе Э. Эверхарта [11] приведены узлы разбиения основного шага интегрирования на подшаги, обеспечивающие точность до 15 порядка включительно. Для использования метода Эверхарта более высокого порядка, необходимо знать узлы разбиения отрезка $[0,1]$ на подшаги $h_i = \frac{t_i}{T}$ для соответствующих порядков. В табл. 2.16 приведены узлы разбиения отрезка $[0,1]$ на подшаги, вычисленные с помощью алгоритма, основанного на формулах (2.85)-(2.87), для порядков метода с 9-го по 33-ый. Здесь в первой строке указан порядок метода, в последующих – узлы разбиения.

Таблица 2.16

Разбиение интервала $[0,1]$ на подшаги Гаусса-Радо

9	11	13	15
0.139759864	0.09853508580	0.0730543286803	0.056262560536922
0.416409568	0.30453572665	0.2307661379699	0.180240691736892
0.723156986	0.56202518975	0.4413284812284	0.352624717113170
0.942895804	0.80198658213	0.6630153097188	0.547153626330555
	0.96019014295	0.8519214003315	0.734210177215411
		0.9706835728402	0.885320946839096
			0.977520613561288

17	19	21
0.04463395528996985	0.0362578128832094609	0.030029032161486497026
0.14436625704214557	0.1180789787899987002	0.098289012209853229604
0.28682475714443052	0.2371769848149603853	0.199021078963101154785
0.45481331519657335	0.3818827653047059754	0.324055538323334892548
0.62806783541672770	0.5380295989189890651	0.463261234284339367031
0.78569152060436924	0.6903324200723621829	0.605360153114213156955
0.90867639210020604	0.8238833438370047181	0.738840323991543759673
0.98222008485263655	0.9256126102908039554	0.852888550356929759536
	0.9855875903511234514	0.938267928122851874461
		0.988082386567584403087

Таблица 2.16 (продолжение)

23	25
0.02527362039752034941993	0.0215620631658503515234611
0.08304161344740514574192	0.0710578987355889540705097
0.16917510037718142434322	0.1454474562350640695304277
0.27779671510903207234495	0.2404011104747728783810741
0.40150272023286081451917	0.3503993497227449288358693
0.53186238691041595580407	0.4690491506871822497693027
0.65999184208533481002277	0.5894549187985422453534699
0.77715939295616214324170	0.7046191157374197200278922
0.87538077485555692552065	0.8078489454701459176919704
0.94796454887281944709314	0.8931455091165233179796975
0.98998171953831959409340	0.9555535368445922664302963
	0.9914609450115725785632052

27	29
0.018610365010987535263230969	0.01622476590139167414310799742
0.061475540899268024533652269	0.05369729993969986802431196674
0.126305178693308833126712299	0.11065719118043923299356726188
0.209842971726560051768065159	0.18461026055646098074870009879
0.307898998280395393931984335	0.27232354711065713765525681593
0.415556035978656418948844903	0.36996331162951154064068014147
0.527415613995879286682017724	0.47326213866004387091045788713
0.637868602717758606993360096	0.57770534269235464626387836437
0.741376459294235453698649455	0.67872825601100140071262091552
0.832748988608440864994019577	0.77191572935069469913724751277
0.907404775300996550185631181	0.85319513231875434029195542186
0.961601861260321301310345231	0.91901450031802660505385251724
0.992635348973910610437410549	0.96649859546797916195110030221
	0.99358323920718005159554204745

31
0.0142694547367133927011941734111
0.0472995900938262916977923492531
0.0977132993200092011141719409873
0.1635690393935335166576254337113
0.2423352609676374968646941964594
0.3309848049689575332179303128583
0.4261108390922635511664194728915
0.5240576915358200350181523098574
0.6210613113522289838116762729681
0.7133939137418532178146455865041
0.7975072449494494270819206499923
0.8701689744461194350939109164064
0.9285870468846809709241413720609
0.9705177013519911908276014409011
0.9943593110274755861767728109331

Однако при применении метода Эверхарта, например, к решению уравнений движения небесных объектов, увеличение порядка метода свыше 19-го, не приводило к повышению точности и эффективности вычислений. Нами показано, что главная причина заключалась в способе нахождения значений A_i .

Добиться сходимости и увеличения точности метода при повышении его порядка нам удалось с помощью нижеследующей модификации алгоритма.

Как известно, необходимым условием сходимости степенного ряда является стремление n -го члена ряда к нулю при $n \rightarrow \infty$. Однако при практической реализации в данном алгоритме это условие не выполняется (при $n > 19$) из-за различного рода ошибок, основную из которых дает способ вычисления коэффициентов A_i разностным методом.

Добиться сходимости временных рядов (2.68) и (2.69) удалось с помощью введения дополнительного условия, приравняв A_n к нулю, когда порядок метода выше 19-го, что влекло выполнение необходимого условия сходимости степенных рядов. С учетом сделанного допущения производится пересчет коэффициентов A_i при $i < n$, которые находятся по формулам (2.73).

Использование данного приема позволило разработать алгоритм и программное обеспечение численного интегрирования для решения уравнений движения небесных объектов методом Эверхарта до 31 порядка включительно, эффективность и точность которых возрастает. Модифицированный нами метод Эверхарта позволяет учитывать в аппроксимирующей формуле различное количество членов в зависимости от требуемой точности.

Применение данного алгоритма к решению систем дифференциальных уравнений движения небесных объектов выявило преимущество увеличения порядка аппроксимирующих формул в алгоритме по сравнению со способами, основанными на процедуре уменьшения шага интегрирования. В частности, уменьшение шага интегрирования вдвое, увеличивает время вычислений в 2 раза, а увеличение порядка метода при сохранении величины шага, увеличивает время вычислений лишь в 1,2 раза.

2.7. Методы экстраполяции

В настоящее время методы экстраполяции широко применяются для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, требующих высокой точности решения. Достоинство методов экстраполяции заключается прежде всего в том, что при их использовании не требуется многократного перевычисления правых частей дифференциальных уравнений. Это особенно важно, когда правые части уравнений достаточно сложны. Разработкой методов экстраполяции занимались такие известные специалисты, как Л. Ричардсон, Р. Булирш, Дж. Штер и др.

2.7.1. Экстраполяция Ричардсона

Рассмотрим задачу Коши

$$y'(x) - f(x, y(x)) = 0 \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0. \quad (2.89)$$

Для нахождения решения задачи (2.89) с помощью экстраполяции Ричардсона решение ищется не на всем интервале интегрирования, а на последовательных его подынтервалах (x_n, x_{n+1}) .

Основная идея экстраполяции Ричардсона состоит в рассмотрении решения y_{n+1} сходящейся дискретной задачи, как функции от N вычислений нескольких значений $y_{n+1}^1, y_{n+1}^2, \dots, y_{n+1}^N$ и их интерполяции подходящей функцией $y(N)$ от аргумента N . Значения $y_{n+1}^1, y_{n+1}^2, \dots, y_{n+1}^N$ могут быть получены с различным шагом интегрирования. Предельный переход при $N \rightarrow \infty$ приводит к точному решению $y(x_{n+1})$ исходной задачи (см. рис. 2.1).

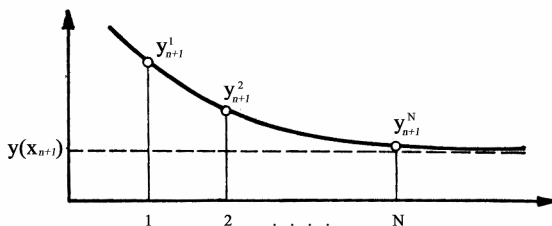


Рис. 2.1 Интерполяция значений $y_{n+1}^1, y_{n+1}^2, \dots, y_{n+1}^N$

где $x_i^{(j)}$ содержится в интервале $(0, \max(h_1, \dots, h_{i+j}))$.

Целесообразно представить последовательность $\{h_i\}$ в виде

$$\left\{ h_0, \frac{h_0}{2}, \frac{h_0}{3}, \frac{h_0}{4}, \frac{h_0}{6}, \frac{h_0}{8}, \frac{h_0}{12} \dots \right\}, \quad (2.94)$$

так как эта последовательность приводит к устойчивому алгоритму и экономична в смысле объема вычислений.

Следует отметить, что эффективность алгоритма экстраполяции зависит от способа разложения функции $F(h)$ в ряд (2.90). Если известно, что разложение имеет вид

$$F(h) = F_0 + b_1 h^g + b_2 h^{2g} + b_3 h^{3g} + \dots, \quad (2.95)$$

тогда формулы (2.92) запишутся следующим образом

$$P_i^{[0]} = F(h_i), \quad i = 0, 1, \dots, m;$$

$$P_i^{[j]} = P_{i+1}^{[j-1]} + \frac{P_{i+1}^{[j-1]} - P_i^{[j-1]}}{(h_i/h_{i+j})^g - 1}, \quad i = 0, 1, \dots, m-j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.96)$$

В численном анализе показано [7], что если F дается формулами (2.96), то более точные приближения достигаются при интерполяции рациональными функциями.

Алгоритм рациональной экстраполяции, основанный на интерполяции рациональными функциями, разработан Булиршем и Штёрером и имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & R_0^{[0]} \\
 & & & & & & R_1^{[-1]} \quad R_1^{[0]} \quad R_0^{[1]} \\
 & & & & & & R_2^{[-1]} \quad R_2^{[0]} \quad R_1^{[1]} \quad R_0^{[2]} \\
 & & & & & & \mathbf{M} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{O} \quad R_1^{[m]} \\
 & & & & & & R_m^{[-1]} \quad R_{m-1}^{[0]} \quad R_{m-1}^{[1]} \quad R_{m-2}^{[2]} \quad \mathbf{N} \\
 & & & & & & R_m^{[0]}
 \end{array} \quad (2.97)$$

Элементы данной таблицы при $g = 2$ вычисляются следующим образом:

$$R_i^{[-1]} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$R_i^{[0]} = F(h_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m;$$

$$R_i^{[j]} = R_{i+1}^{[j-1]} + \frac{R_{i+1}^{[j-1]} - R_i^{[j-1]}}{(h_i/h_{i+j})^2 [1 - (R_{i+1}^{[j-1]} - R_i^{[j-1]}) / (R_{i+1}^{[j-1]} - R_i^{[j-2]})] - 1}, \quad (2.98)$$

$j = 1, 2, \dots, m, \quad i = 0, 1, \dots, m - j.$

Величины $R_i^{[j]}$ можно представить с помощью рациональных функций следующего вида:

$$R_i^{[j]} = \begin{cases} \frac{a_0 + a_2 h^2 + \dots + a_j h^j}{b_0 + b_2 h^2 + \dots + b_j h^j}, & (j - \text{четное}), \\ \frac{a_0 + a_2 h^2 + \dots + a_{j-1} h^{j-1}}{b_0 + b_2 h^2 + \dots + b_{j+1} h^{j+1}}, & (j - \text{нечетное}), \end{cases} \quad (2.99)$$

то есть функциями $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_0}{b_0 + b_2 h^2}, \frac{a_0 + a_2 h^2}{b_0 + b_2 h^2}, \dots$

2.7.2. Метод Грэгга - Булирша - Штера

Для того чтобы применять локальную экстраполяцию к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимо использовать в качестве основы интерполяции численный метод, для которого справедливо асимптотическое разложение вида

$$y(x, h) = y(x) + b_1 h^2 + b_2 h^4 + b_3 h^6 + \dots \quad (2.100)$$

Грэгг показал [7], что метод экстраполяции разложений вида (2.100) нельзя основывать, например, на методе трапеций, так как разложение вида (2.100) справедливо только тогда, когда разностные уравнения решаются точно. По этой же причине метод нельзя также основывать на неявных симметричных методах.

В методе рациональной экстраполяции Булирш и Штер [7] используют модифицированный метод прямоугольников. Наиболее распространенный алгоритм экстраполяции Булирша - Штера основан на простейшем симметричном многошаговом методе прямоугольников

$$y_{n+2} = y_n + 2hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (2.101)$$

При этом симметрия сохраняется, если в качестве приближения к $y(x)$ берется $y(X; h) = y_N$, или

$$y(X; h) = 1/2\{y_N + y_{N-1} + hf(X, y_N)\}. \quad (2.102)$$

Дополнительное начальное значение y_1 задается формулой приближения

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0). \quad (2.103)$$

В качестве $\{h_i\}$ рекомендуется выбирать последовательность чисел вида (2.94).

Этот модифицированный метод прямоугольников называется методом экстраполяции Грэгга - Булирша - Штера (или методом GBS).

Метод GBS эквивалентен методу Рунге Кутты, если основная длина шага Nh и порядок экстраполяции фиксированы.

3. Сходимость и устойчивость численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений

3.1. Понятие о сходимости и устойчивости численных методов

Понятию «решение дифференциальных уравнений» в разное время придавалось разное содержание. Лагранж и Лаплас полагали, что задача считается интегрируемой, если она решается в квадратурах.

Позднее считали, что задачу можно отнести к интегрируемым задачам, если возможно найти решение дифференциальных уравнений в виде рядов, сходящихся для любых заданных параметров системы. В задачах небесной механики этими параметрами могут быть массы тел, элементы орбит и т.д.

Пуанкаре ввел понятие практической интегрируемости задач небесной механики. Под этим понятием он понимал нахождение приближенного решения, удовлетворительно представляющего наблюдения и охватывающего приемлемый промежуток времени. В этом смысле все задачи небесной механики – интегрируемые, особенно в связи с использованием современных средств вычислительной техники.

Понятие устойчивости решения в разное время трактовалось по-разному. Первым, по-видимому, появилось понятие устойчивости по Лагранжу, затем, устойчивости по Пуассону, устойчивости по Хиллу, устойчивости по Ляпунову.

Формулировка устойчивости решения дифференциальных уравнений, данная Ляпуновым, получила наибольшее признание, а методы исследования, созданные им, оказались самыми удачными и эффективными.

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (3.1)$$

где $f(x, t)$ – n -мерная вектор-функция, которая определена в $(n+1)$ -мерной области $G_{n+1} = G_n \times I_t$, $t \in I_t = (a, \infty)$, $x \in G_n$, G_n – область в n -мерном пространстве R^n .

Пусть уравнение (3.1) имеет частное решение $x = \bar{x}(t)$, которое будем называть невозмущенным.

Определение 3.1. Частное решение $x = \bar{x}(t)$ называется устойчивым по Ляпунову по отношению к вектору x , если для любого $\epsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ существует $d = d(\epsilon, t_0) > 0$ такое, что выполняются следующие условия:

1) все решения $x(t)$ (в том числе и $\bar{x}(t)$), удовлетворяющие условию $\|x(t) - \bar{x}(t_0)\| < d$ определены в бесконечном интервале $t_0 \leq t < \infty$;

2) для этих решений справедливо неравенство $\|x(t) - \bar{x}(t_0)\| < \epsilon$ при всех $t_0 \leq t < \infty$ (здесь норма вектора $x(t)$ понимается как сумма модулей компонент $\|x(t)\| = \sum_{k=1}^n |x_k(t)|$);

Определение 3.2. Если $d \equiv d(\epsilon)$ (не зависит от $t_0 \in T$) и выполняются остальные условия определения 3.1, то решение $\bar{x}(t)$ называется равномерно устойчивым в области T .

Определение 3.3. Решение $\bar{x}(t)$ называется асимптотически устойчивым при $t \rightarrow \infty$, если оно устойчиво и к тому же для любого $t_0 \in (a, \infty)$ существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такое, что все решения $x(t)$, удовлетворяющие начальному условию $\|x(t) - \bar{x}(t_0)\| < \Delta$, обладают свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \bar{x}(t)\| = 0.$$

Определение 3.4. Решение $\bar{x}(t)$ уравнения (3.1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях $F(t, y)$, если для любых $\epsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ существует $d = d(\epsilon, t_0) > 0$ такое, что при $\|F(y, t)\| < d$ все решения $y(t)$ векторного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) + F(y, t),$$

удовлетворяющие условию $\|y(t_0)\| < d$, определены в бесконечном интервале $t \in [t_0, \infty)$ и к тому же $\|y(t) - \bar{x}(t)\| < \epsilon$ при $t \in [t_0, \infty)$.

Аналогичные определения можно дать и для $-\infty < t \leq t_0$

Определение устойчивости по Лагранжу дается следующим образом. Пусть G_n – область конечных размеров, принадлежащая n -

мерному евклидову пространству R^n . Будем считать, что G_n имеет конечные размеры, если для любых $x \in G_n, y \in G_n: \|x - y\| < c$, где c – некоторая постоянная.

Частное решение уравнения (3.1) называется устойчивым по Лагранжу, если выполняются условия:

$$\bar{x}(t_0) \in G_n, \bar{x}(t) \in G_n, t \geq t_0. \quad (3.2)$$

Условие (3.2) означает ограниченность решения $\bar{x}(t)$ для всех значений $t \geq t_0$.

Пусть теперь необходимо численно решить следующую задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b]; \quad y(a) = y_0; \quad y, f \in R^S. \quad (3.3)$$

Рассмотрим следующий класс общих k -шаговых методов:

$$\sum_{i=0}^k a_i y_{n+i} = h j_f(x_n, y_{n+k}, \dots, y_n, h), \quad (3.4)$$

$0 \leq n \leq N - k, \quad y_r = S_r(h), \quad 0 \leq r < k$ (начальные значения).

Метод (3.4) порождает последовательность приближенных решений $(y_n | n = 0, 1, \dots, N)$, где y_n – приближение к $y(x_n)$ – точному решению, $x_n = a + nh$ и $Nh = b - a$.

Формула (3.4) включает в себя достаточно широкий набор методов, таких как линейные многошаговые методы; предсказывающе-исправляющие методы; методы Рунге-Кутты, как явные, так и неявные.

Введем два характеристических полинома $r(q)$ и $s(q)$ посредством формул

$$r(q) = \sum_{i=0}^k a_i q^i, \quad s(q) = \sum_{i=0}^k b_i q^i.$$

Полная погрешность метода (3.4) при применении его к задаче (3.3) определяется как $|y_n - y(x_n)|, 0 \leq n \leq N$.

Определение 3.5. Метод из класса (3.4) сходится, если для каждой задачи из класса (3.3) выполняется

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(x_n)| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Рассмотрим, каким условиям должен удовлетворять метод из класса (3.4) для того, чтобы он сходился.

Определение 3.6. Локальная погрешность дискретизации d_n метода (3.4) в точке x_n определяется следующим образом:

$$d_r = y(x_r) - S_r(h), \quad 0 \leq r \leq k,$$

$$d_{n+k} = \frac{1}{r'(1)h} \left\{ \sum_{i=0}^k a_i y(x_{n+i}) - h j_f(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) \right\}, \quad (3.5)$$

где $y(x)$ – точное решение задачи (3.3), d_{n+k} – невязка, получаемая при подстановке точного решения в формулу (3.4). Теперь определим допустимый уровень локальной точности.

Определение 3.7. Метод из класса (3.4) является согласованным, если

$$\max_{0 \leq n \leq N} |d_n| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

и имеет порядок согласованности (аппроксимации) p , если $\max_{0 \leq n \leq N} |d_n| = O(h^p)$.

Докажем теперь необходимые и достаточные условия согласованности метода из класса (3.4).

Теорема 3.1. Метод из класса (3.4) согласован тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$y_r \rightarrow y_0 \text{ при } h \rightarrow 0, \quad 0 \leq r \leq k, \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=0}^k a_i \equiv r(1) = 0, \quad (3.8)$$

$$j_f(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) \rightarrow r'(1)f(x_n, y(x_n)) \text{ при } h \rightarrow 0, \quad x_n = a + nh.$$

Доказательство. Так как $y(x) \in C^1[a, b]$, то, применяя теорему Лагранжа, соотношение (3.5) можно записать в виде

$$d_{n+k} = \frac{1}{r'(1)h} \left\{ \sum_{i=0}^k a_i [y(x_n) + ihy'(x_n + I_i ih)] - h j_f(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) \right\} =$$

$$= \frac{1}{r'(1)h} \left\{ y(x_n) \sum_{i=0}^k a_i + h \left[\sum_{i=0}^k i a_i f(x_n + I_i ih, y(x_n + I_i ih)) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - j_f(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) \right] \right\}, \quad 0 \leq n \leq N - k. \blacksquare \quad (3.9)$$

Из выражения (3.9) следует, что $d_{n+k} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, когда выполняются условия теоремы 3.1. Согласованность допускает минимальный уровень локальной точности и является необходимым условием для сходимости.

Теорема 3.2. Сходящийся метод из класса (3.4) с необходимостью является согласованным. ■

Однако согласованность недостаточна для сходимости методов из класса (3.4), т.е. обратная теорема неверна.

Пример 3.1. Пусть линейный многошаговый метод численного решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ описывается разностным уравнением вида

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= h(f_{n+1} - 2f_n), \\ y_0 &= s_0(h), \quad y_1 = s_1(h). \end{aligned}$$

Исследуем сходимость и устойчивость данного разностного уравнения.

Для обеспечения согласованности метода, начальные значения будем выбирать таким образом, чтобы выполнялось условие

$$s_0(h) \rightarrow 0, \quad s_1(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Применим этот метод к задаче Коши

$$y' = 2x, \quad y(0) = 0,$$

точное решение которой, описывается функцией $y(x) = x^2$.

Тогда последовательность $\{y_n\}$ будет описываться формулами

$$\begin{aligned} x_n &= nh, \quad y_0 = s_0(h), \quad y_1 = s_1(h), \\ y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n &= 2h(x_{n+1} - 2x_n) = 2h^2(1 - 2n), \\ n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Общее решение данного разностного уравнения представляет собой сумму общего решения y_n соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения \bar{y}_n .

Общее решение однородного уравнения

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

имеет вид

$$y_n^0 = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $q_1 = 1$ и $q_2 = 2$ – корни характеристического уравнения $q^2 - 3q + 2 = 0$.

Таким образом, получаем

$$y_n^0 = C_1 + C_2 2^n.$$

Легко убедиться, что частное решение разностного уравнения имеет вид

$$\bar{y}_n = n(n-1)h^2.$$

Тогда его общее решение имеет вид

$$y_n = C_1 + C_2 2^n + n(n-1)h^2.$$

Частное решение разностного уравнения получаем с учетом начальных значений в следующем виде

$$y_0 = C_1 + C_2 2^0 = s_0(h), \quad y_1 = C_1 + C_2 2^1 = s_1(h).$$

Отсюда

$$C_1 = 2s_0(h) - s_1(h), \quad C_2 = s_1(h) - s_0(h).$$

Следовательно, частное решение имеет вид

$$y_n = [2s_0(h) - s_1(h)] + [s_1(h) - s_0(h)]2^n + n(n-1)h^2.$$

Метод сходится, если для любого $x \in [a, b]$ выполняется условие

$$y_n \rightarrow y(x) \text{ при } h \rightarrow 0, \quad \text{где } n = \frac{x-a}{h}.$$

Если в качестве начальных значений выбрать значения $y_0 = s_0(h) = 0$, $y_1 = s_1(h) = 0$, что в данном случае не совпадает с точными начальными значениями $y(0) = 0$, $y(h) = h^2$, то

$$y_n = n(n-1)h^2 = (nh)^2 - (nh)h \rightarrow x^2 \text{ при } h \rightarrow 0, \quad n = \frac{x}{h}.$$

Если, однако, $s_0(h) \rightarrow 0$, $s_1(h) \rightarrow 0$, при $h \rightarrow 0$ так что $s_1(h) - s_0(h) = O(h^p)$, $p > 0$, то второй член в частном решении стремится к бесконечности, так как при $|q| > 1$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=x}} h^p q^n = x^p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^p} = \infty.$$

Следовательно, метод неустойчив, а его согласованность не достаточна для его сходимости. ■

3.2. Нуль-устойчивость

Одним из важных вопросов при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений является проблема устойчивости как самих дифференциальных уравнений, так и численных методов.

Рассмотрим класс возмущенных задач

$$z' = f(x, z) + d(x), \quad z(a) = y_0 + d, \quad x \in [a, b],$$

где $(d(x), d)$ – возмущение, а $z(x)$ – возмущенное решение.

Определение 3.8. Пусть $(d(x), d)$, $(d^*(x), d^*)$ – некоторые возмущения, и пусть $z(x)$, $z^*(x)$ – возмущенные решения. Тогда, если существует положительная постоянная S такая, что для любого $x \in [a, b]$ выполняется

$$|z(x) - z^*(x)| \leq Se \quad (3.10)$$

при $|d(x) - d^*(x)| \leq e$ и $|d - d^*| \leq e$, то мы говорим, что задача Коши (3.3) абсолютно устойчива.

Класс задач, для которых условие (3.10) не выполняется являются неустойчивыми.

Пример 3.2. В качестве примера абсолютно неустойчивой задачи Коши рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида

$$y'' - 10y' - 11y = 0 \quad (3.11)$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \quad (3.12)$$

Решением задачи (3.11) является функция

$$y(x) = e^{-x}. \quad (3.13)$$

Предположим, что мы изменили начальное условие (3.12) на малую величину e , т.е.

$$y(0) = 1 + e, \quad y'(0) = -1. \quad (3.14)$$

Тогда решение уравнения (3.11) с начальными условиями (3.13) примет следующий вид

$$y(x) = \left(1 + \frac{11}{12}e\right)e^{-x} + \frac{e}{12}e^{11x}. \quad (3.15)$$

Из выражения (3.14) следует, что при любом $e > 0$, его второй член стремится к бесконечности при $x \rightarrow \infty$.

Решения уравнения (3.11) при начальных условиях (3.12) и (3.14) показаны на рис. 3.1.

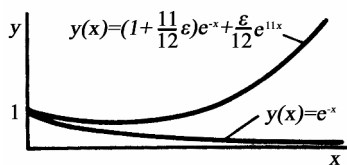


Рис. 3.1. Решения задачи при мало отличающихся начальных условиях

Как видно из (3.13), (3.15) и рис. 3.1, решение $y(x) = e^{-x}$ задачи (3.11)–(3.12) является неустойчивым. В этом случае, сколь угодно малые изменения начальных условий приводят к сколь угодно большим изменениям решения при $x \rightarrow \infty$. Подобные изменения начальных условий могут вызвать ошибки округления или ошибки дискретизации. ■

Очевидно, что если задача Коши не является абсолютно устойчивой, то нет возможности получить приемлемое решение каким-либо разностным методом, если при этом сам этот метод не является устойчивым.

Рассмотрим теперь класс возмущенных методов (3.4):

$$z_r = S_r(h) + d_r, \quad 0 \leq r < k,$$

$$\sum_{i=0}^k a_i z_{n+i} = h j_f(x_n, z_{n+k}, \dots, z_n, h) + d_{n+k}, \quad 0 \leq n \leq N - k,$$

где $(d_n \mid n = 0, 1, \dots, N)$ – возмущение, а $(z_n \mid n = 0, 1, \dots, N)$ – возмущенное решение.

Определение 3.9. Пусть $(d_n \mid n = 0, 1, \dots, N)$, $(d_n^* \mid n = 0, 1, \dots, N)$ – некоторые возмущения, и пусть $(z_n \mid n = 0, 1, \dots, N)$ и $(z_n^* \mid n = 0, 1, \dots, N)$ – возмущенные решения. Тогда, если существуют постоянные h_0 и S такие, что для любого $h \in (0, h_0]$ выполняется

$$|z_n - z_n^*| \leq S e, \quad 0 \leq n \leq N,$$

при $|d_n - d_n^*| \leq e$, $0 \leq n \leq N$, то метод (3.4) нуль-устойчив.

Определение 3.10. Считается, что метод (3.4) удовлетворяет корневому условию, если все корни характеристического полинома $r(q)$ лежат внутри единичной окружности или на самой этой окружности, причем те корни, которые лежат на единичной окружности, являются простыми.

Следует заметить, что если метод (3.4) согласованный, то полином $r(q)$ обязательно имеет корень $q_1 = +1$.

Определение 3.11. Метод (3.4) удовлетворяет сильному корневому условию, если его характеристический полином $r(q)$ имеет простой корень $+1$, а все остальные корни лежат строго внутри единичного круга.

Теорема 3.3. Метод из класса (3.4) нуль-устойчив тогда и только тогда, когда он удовлетворяет корневому условию. ■

Сформулируем основную теорему сходимости.

Теорема 3.4. Метод из класса (3.4) сходится тогда и только тогда, когда он является и согласованным, и нуль-устойчивым. ■

Следует отметить, что любой согласованный метод является и нуль-устойчивым, так как единственным корнем полинома $r(q)$ является $q = 1$.

Теорема 3.5. Одношаговый метод из класса (3.4) сходится тогда и только тогда, когда он является согласованным. ■

Подводя итоги вышесказанному подчеркнем, что согласованность определяет величину погрешности аппроксимации, в то время как нуль-устойчивость определяет характер развития этой и других погрешностей в пределе при $h \rightarrow 0$, $Nh = b - a$.

Методы, не являющиеся сходящимися, нельзя рекомендовать для практического использования. С другой стороны, не все сходящиеся методы одинаково эффективны для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как показывает следующий пример, сходимость сама по себе не гарантирует того, что метод будет давать приемлемые численные результаты.

Пример 3.3. Рассмотрим задачу

$$y' = -10(y-1)^2, \quad y(0) = 2,$$

имеющую решение $y(x) = 1 + \frac{1}{1+10x}$.

Используем явный гибридный алгоритм Грегга и Штеттера в виде $P_n EP_n E$:

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 1 + \frac{1}{1+10h},$$

$$P_n : y_{n+2,7} - 2,267025y_{n+2} - 3,5721y_{n+1} + 4,839125y_n = h(f_{n+2} - 4,6751f_{n+1} + 1/73105f_n),$$

$$P_H = y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{714}(221f_{n+2} - 7f_{n+1} + 500f_{n+2,7}).$$

Характеристический полином будет иметь вид $r(q) = q^3 - q^2$, и, очевидно, метод является нуль-устойчивым; он является также согласованным и имеет четвертый порядок. Численные результаты, представленные в таблице 3.1, получены с величиной шага $h = 0,1$ и $h = 0,01$.

Таблица 3.1

Результаты численного решения с использованием гибридного алгоритма Грэга и Штеттера

x_n	$y_n - y(x_n)$	
	$h = 0,1$	$h = 0,01$
0,03	—	$-567 \cdot 10^{-8}$
0,04	—	$-723 \cdot 10^{-8}$
0,05	—	$-491 \cdot 10^{-8}$
0,10	—	$-379 \cdot 10^{-8}$

x_n	$y_n - y(x_n)$	
	$h = 0,1$	$h = 0,01$
0,20	—	$-186 \cdot 10^{-8}$
0,30	-0,118	$-106 \cdot 10^{-8}$
0,40	-0,072	$-68 \cdot 10^{-8}$
0,50	-0,287	$-48 \cdot 10^{-8}$
0,60	-0,361	$-34 \cdot 10^{-8}$
0,70	-1,929	$-27 \cdot 10^{-8}$
0,80	-40,131	$-21 \cdot 10^{-8}$
0,90	$-2 \cdot 10^6$	$-17 \cdot 10^{-8}$

В этих результатах существенно то, что при $h = 0,01$ полная погрешность уменьшается с увеличением n , тогда как при $h = 0,1$ она катастрофически возрастает. ■

Очевидная несостоятельность этого метода при $h = 0,1$ представляется весьма серьезной, так как оценка локальной погрешности дискретизации при $h = 0,1$ свидетельствует о приемлемом уровне локальной точности. В действительности происходит следующее: малые погрешности (как дискретизации, так и округления) развиваются устойчиво при $h = 0,01$, но неустойчиво при $h = 0,1$. Очевидно, необходимо оценить максимальный шаг, для которого погрешность метода приме-

нительно к решаемой задаче будет вести себя устойчиво.

Нуль-устойчивость гарантирует устойчивое развитие погрешности в пределе при $h \rightarrow 0$. Рассмотренные выше численные результаты подсказывают, что для рассматриваемого метода применительно к данной задаче существует некоторое положительное число h_0 , такое, что при $h \in (0, h_0)$ погрешность будет развиваться устойчиво. Однако так бывает не всегда. Существуют сходящиеся методы из класса (1.2), такие, как метод Симпсона:

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n),$$

для которых погрешность будет развиваться неустойчиво при всех положительных h , сколь бы малыми они ни были. Это несовместимо со сходимостью. Если бы для нашего решения мы использовали метод Симпсона, то оказалось бы, что при последовательном уменьшении шага точка x^* , в которой полная погрешность впервые превосходит некоторую заданную фиксированную границу, смещается вправо. В пределе при $h \rightarrow 0$ сходимость достигается на некотором конечном интервале $[a, b]$, однако для любого фиксированного положительного h можно найти точку x^* , в которой полная погрешность превосходит эту заданную границу.

Очевидно, что требуется новое определение устойчивости, в котором шаг интегрирования должен рассматриваться как фиксированная величина и требуется, чтобы погрешность развивалась устойчивым образом при $n \rightarrow \infty$.

3.3. Области абсолютной и относительной устойчивости

Многочисленные примеры показывают, что сходимость не гарантирует того, что метод дает верные результаты. Следовательно, требуется дать такое определение устойчивости, в котором шаг интегрирования рассматривается как фиксированная величина и требуется, чтобы погрешность развивалась устойчивым образом при $n \rightarrow \infty$.

В общем случае для абсолютной устойчивости можно было бы дать следующее определение.

Определение 3.12. Метод из класса (3.4) называется абсолютно устойчивым для заданного фиксированного шага и для заданной задачи

Коши, если полная погрешность $e_n = y_n - y(x_n)$ остается ограниченной при $n \rightarrow \infty$.

Существенным недостатком данного определения является зависимость от задачи Коши. Для того чтобы сравнивать свойства абсолютной устойчивости различных методов, необходимо найти определение, которое не зависит от конкретной задачи Коши.

Для устранения этого недостатка рассматривается задача Коши частного вида:

$$y' = Iy, \quad (3.16)$$

где I – комплексная постоянная.

В дальнейшем понятия абсолютной устойчивости и исследование областей абсолютной устойчивости численных методов рассматриваются для задачи (3.16).

Для обоснования данного подхода предположим, что функция $f(x, y(x))$ дифференцируема по y . Тогда локальное поведение решения задачи Коши общего вида:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0, \quad (3.17)$$

где $y = [y^1(x), y^2(x), \dots, y^s(x)]^T$, в первом приближении будет определяться решением линеаризованного уравнения

$$y' = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} y,$$

где $\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y}$ – матрица Якоби.

В качестве модели этого уравнения возьмем

$$y' = Ay, \quad (3.18)$$

где A – постоянная матрица $s \times s$.

Если предположить, что A имеет s различных собственных значений $I_t, t = 0, 1, \dots, s$, то существует невырожденная матрица H такая, что

$$H^{-1}AH = \Lambda = \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_s).$$

Применяя преобразование

$$y = Hz,$$

уравнение (3.18) примет вид

$$z' = H^{-1}AHz = \Lambda z,$$

которое является системой дифференциальных уравнений вида (3.18). Таким образом, (3.16) является приемлемой моделью общего дифференциального уравнения, если полагать I любым собственным значением матрицы Якоби, в том числе и комплексным.

Теперь мы предположим, что в методе (3.4) функция j_f является линейной относительно y_{n+i} , $i = 0, 1, \dots, k$, т.е.

$$j_{f=Iy}(x_n, y_{n+k}, \dots, y_n, h) = I \sum_{i=0}^k g_i(hI) y_{n+i}. \quad (3.19)$$

Рассмотрим применение метода (3.4) к задаче Коши

$$y' = Iy, \quad y(a) = y_0$$

для комплексного I .

Подставляя в метод из класса (3.4) точное решение, с учетом определения локальной погрешности получим

$$\begin{aligned} y(x_r) &= S_r(h) + d_r, \quad 0 \leq r < k, \\ \sum_{i=0}^k a_i y(x_{n+i}) &= h j_{f=Iy}(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) + hr'(1) d_{n+k} = \\ &= hI \sum_{i=0}^k y_i(hI) y(x_{n+i}) + hr'(1) d_{n+k}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Однако численные решения, полученные методом (3.4), удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} y_r &= S_r(h) + t_r, \quad 0 \leq r < k, \\ \sum_{i=0}^k a_i y_{n+i} &= hI \sum_{i=0}^k g_i(hI) y_{n+i} + t_{n+k}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где t_k – локальная погрешность округления.

Вычитая из (3.21), (3.20), получим уравнение для полной погрешности $e_n = y_n - y(x_n)$ в виде

$$\begin{aligned} e_r &= t_r - d_r, \quad 0 \leq r \leq k, \\ \sum_{i=0}^k [a_i - hI g_i(hI)] e_{n+i} &= t_{n+k} - hr'(1) d_{n+k}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

решение которого выражается в виде суммы общего решения и частного решения.

Для исследования решения уравнения (3.22) определим полином устойчивости метода (3.4) как

$$p(r, hl) = \sum_{i=0}^k [a_i - hl g_i(hl)] r^i. \quad (3.23)$$

Обозначим его корни через r_j , $j = 0, 1, 2, \dots, k$. Если корни полинома различны, то общее решение уравнения (3.22) имеет вид

$$\sum_{j=1}^k A_j r_j^n. \quad (3.24)$$

Частное решение уравнения (3.22) можно сделать малым, при условии, что погрешности дискретизации и округления являются достаточно малыми.

На основании определения абсолютной устойчивости ясно, что если корни полинома устойчивости (3.23) удовлетворяют неравенствам $|r_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, k$, то полная погрешность будет развиваться устойчиво при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном h .

Определение 3.13. Метод из класса (3.4) называется абсолютно устойчивым для данного hl , если все корни полинома устойчивости лежат внутри единичного круга. Область R_A комплексной плоскости hl называется областью абсолютной устойчивости метода (3.4), если метод (3.4) абсолютно устойчив при всех $hl \in R_A$.

Корни полинома устойчивости (3.23) являются непрерывными функциями его коэффициентов. В силу (3.23), корни r_j , $j = 0, 1, \dots, k$ полинома устойчивости $p(r, hl)$ стремятся к корням q_j , $j = 0, 1, \dots, k$ характеристического полинома $r(q)$ при $h \rightarrow 0$. В частности, $r_1 \rightarrow q_1 = +1$ при $h \rightarrow 0$.

Для методов, имеющих порядок точности p , можно определить область абсолютной устойчивости следующим образом:

Пусть

$$f = ly, \text{ следовательно } y(x_n) = y_0 e^{l(x_n - a)}. \quad (3.25)$$

Тогда

$$\max_{k \leq n \leq N} \left| \sum_{i=0}^k a_i y_0 e^{l(x_n + ih - a)} - hl \sum_{i=0}^k g_i(hl) y_0 e^{l(x_n + ih - a)} \right| = O(h^{p+1})$$

или

$$\left| \sum_{i=0}^k [a_i - hl g_i(hl)] e^{ihl} \right| \max_{k \leq n \leq N} \left| e^{l(x_n - a)} y_0 \right| = O(h^{p+1}),$$

откуда

$$p(e^{hl}, hl) = c(e^{hl} - r_1)(e^{hl} - r_2) \dots (e^{hl} - r_k).$$

В силу того, что r_1 – единственный корень из r_j , который может стремиться к $(+1)$ при $h \rightarrow 0$, то имеем, что $e^{hl} - r_1 = O(h^{p+1})$ или

$$r_1 = e^{hl} + O(h^{p+1}). \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что если $hl = 0$, то $|r_1| = 1$, и если величина $\operatorname{Re} hl$ мала и положительна, то $|r_1| > 1$. Таким образом, граница области R_A абсолютной устойчивости всегда проходит через начало координат комплексной плоскости hl , и внутренность R_A всегда лежит слева от начала координат.

Одним из распространенных методов нахождения области абсолютной устойчивости является метод геометрического места точек границы.

Решается уравнение вида

$$p(e^{iy}, hl) = 0, \quad i^2 = -1. \quad (3.27)$$

Точка hl уравнения (3.27) будет лежать на границе области устойчивости, если при этом hl полином устойчивости имеет корень, по модулю равный единице. Для простых методов часто удается решить (3.27) аналитически.

Область абсолютной устойчивости можно следующим образом использовать для выбора шага интегрирования: определяются собственные значения матрицы Якоби и h изменяется так, чтобы произведение h на любое собственное значение лежало внутри R_A .

Определение 3.14. Метод из класса (3.4) называется сильно устойчивым, если он согласован и удовлетворяет сильному корневому условию.

Определение 3.15. Метод (3.4) называется относительно устойчивым для каждого hl , если при этом hl все корни полинома устойчивости по модулю меньше $|e^{hl}|$.

Область R_r комплексной плоскости называется областью относительной устойчивости метода (3.4), если он относительно устойчив при всех $hl \in R_r$.

В таблице 3.2 приведен список интервалов абсолютной устойчивости для некоторых наиболее распространенных методов.

Таблица 3.2

Список интервалов абсолютной устойчивости для различных методов

Метод		Порядок	Интервал
Эйлера	Явный	1	$(-2; 0)$
Эйлера с разностями назад	Неявный	1	$(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$
Трапеций	Неявный	2	$(-\infty; 0)$
Четырехэтапный Рунге-Кутта	Явный	4	$(-2,78; 0)$
Двухэтапный Рунге-Кутта	Неявный	4	$(-\infty; 0)$
Адамса-Бэшфорта	Явный	4	$(-0,3; 0)$
Адамса-Мултона	Неявный	4	$(-3,0; 0)$
Адамса-Бэшфорта-Мултона	РЕС	4	$(-0,16; 0)$
Адамса-Бэшфорта-Мултона	РЕСЕ	4	$(-1,25; 0)$
Адамса-Бэшфорта-Мултона	$P(EC)^2$	4	$(-0,9; 0)$
Адамса-Мултона	Неявный	8	$(-0,5; 0)$
Адамса-Бэшфорта-Мултона	РЕСЕ	8	$(-0,4; 0)$

Как видно из таблицы 3.2 с увеличением порядка метода область абсолютной устойчивости сокращается. Однако, это не является общей закономерностью для всех методов, например, для метода Адамса-Мултона до 12 порядка происходит уменьшение абсолютной области устойчивости, затем, происходит некоторое увеличение с повышением порядка метода.

4. Оценка погрешности численных методов для задачи Коши

4.1. Источники погрешностей

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами с помощью ЭВМ на конечные результаты расчетов могут влиять ошибки различных типов. Основными из них являются ошибки округления, дискретизации и аппроксимации.

Охарактеризуем каждый из этих типов погрешностей в предположении, что исходные данные допускают точное численное представление в ЭВМ.

В результате выполнения арифметических операций, например, деления, может потребоваться бесконечное число цифр. Очевидно, что мы не в состоянии выполнять арифметические действия на ЭВМ абсолютно точно. Ошибки, возникающие при выполнении арифметических операций при использовании конечного числа разрядов на ЭВМ, называются ошибками округления. Ошибки округления могут существенно влиять на конечный результат вычислений. Так, при выполнении миллионов операций, каждая из которых вносит некоторую ошибку, существует опасность, что суммарная ошибка поглотит значительную часть точности в окончательном результате.

Кроме накопления ошибок, связанных с выполнением большого числа операций, существует опасность катастрофической потери знаков. Например, если два числа a и b отличаются друг от друга лишь в последнем знаке, то $c = a - b$ будет иметь только одну значащую цифру. Дальнейшие вычисления с использованием величины c приводят к тому, что результат имеет только один верный знак.

Другой тип погрешности связан с необходимостью замены непрерывных задач дискретными. При решении дифференциальных уравнений различными численными методами для вычисления интегралов от правой части уравнения используются вместо бесконечного множества точек, в которых вычисляются значения функции, лишь конечное их число. Ошибки такого типа называют ошибками дискретизации.

Наряду с ошибками дискретизации следует учитывать погрешности при использовании различных итерационных методов. В основе многих численных методов при решении дифференциальных уравнений используются итерационные процессы. В ходе итерационного процесса находятся последовательные приближения к решению. При

использовании ЭВМ можно реализовать только конечное число таких приближений. Ошибку, вносимую конечным завершением итерационного процесса, называют ошибкой сходимости.

Кроме того, для конкретных методов возникают ошибки аппроксимации, связанные с точностью используемой формулы применяемых методов.

В дальнейшем при оценке различного типа погрешностей, основное внимание будем уделять погрешностям дискретизации и аппроксимации.

Источники погрешностей, которые могут возникать при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрим на примере системы s уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0, \quad (4.1)$$

где

$$y = [y^1(x), y^2(x), \dots, y^s(x)]^T, \quad f(x, y) = [f^1(x, y), f^2(x, y), \dots, f^s(x, y)]^T.$$

Пусть общий класс методов в векторной форме представляется формулой

$$\sum_{i=0}^k a_i y_{n+i} = h j_f(x_n, y_{n+k}, \dots, y_n, h) \quad (4.2)$$

для $0 \leq n \leq N - k$, $b - a = Nh$, где $\{a_i\}$ – постоянные, $a_k \neq 0$, с заданными начальными значениями y_0, y_1, \dots, y_{k-1} , j_f – заданная вектор-функция, которая зависит от f . Метод (4.2) является явным, если j не зависит от y_{n+k} , в противном случае – неявным.

Рассмотрим задачу (4.1) и предположим, что приближенное решение y_0, y_1, \dots, y_N , $Nh = b - a$ вычисляется по формуле (4.2).

Определение 4.1. Величина $y_n - y(x_n)$ называется полной погрешностью дискретизации (полная погрешность метода) в точке $x = x_n$, $0 \leq n \leq N$.

Одной из основных задач в численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений является получение надежных оценок полной погрешности дискретизации. При решении уравнений (4.1) основным требованием является сделать эту погрешность сколь угодно малой, выбирая достаточно малый шаг h .

Определение 4.2. Погрешность аппроксимации t_{n+k} формулы (4.2) в точке $x_{n+k} \in [a, b]$ определяется по формуле

$$t_{n+k} = \sum_{i=0}^k a_i y(x_{n+i}) - h j_f(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h), \quad (4.3)$$

где t_{n+k} представляет собой количество, которого недостает для того, чтобы точное решение (4.1) удовлетворяло (4.2), и может рассматриваться в качестве предварительной оценки точности формулы.

Если метод (4.2) явный, то из (4.2) и (4.3) следует

$$|y_{n+k} - y(x_{n+k})| = \frac{1}{|a_k|} |t_{n+k}|. \quad (4.4)$$

Для линейного многошагового метода

$$\sum_{i=0}^k a_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k b_i f_{n+i} \quad (4.5)$$

выражение для t_{n+k} имеет вид

$$t_{n+k} = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}), \quad p \geq 1. \quad (4.6)$$

Величину главного члена погрешности аппроксимации (4.6) часто используют в качестве оценки полной погрешности.

Рассмотрим, как связана полная погрешность дискретизации с полной погрешностью аппроксимации и погрешностью предыдущих значений в y_{n+i} , $0 \leq i \leq k-1$.

Для упрощения выражений рассмотрим скалярный случай, полагая $e_n = y_n - y(x_n)$, $0 \leq n \leq N$, вычитая из (4.2) выражение (4.3), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i e_{n+i} &= h [j_f(x_n, y_{n+k}, \dots, y_n, h) - j_f(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) - t_{n+k}] = \\ &= h \sum_{i=0}^k \frac{\partial j_f}{\partial y_{n+i}}(x_n, \bar{y}_{n+k}, \dots, \bar{y}_n, h) e_{n+i} - t_{n+k}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

В выражении (4.7) допускается предположение, что к j_f применима теорема о среднем относительно переменных y_{n+i} , $0 \leq i \leq k$.

Из выражения (4.7) следует, что при начальных погрешностях e_0, e_1, \dots, e_{k-1} погрешность e_k зависит только от погрешности аппроксимации t_k и от преобразованных начальных погрешностей.

При решении практических задач требуется, чтобы погрешность аппроксимации была достаточно мала. При этом метод, определяемый выбором функции j_f и коэффициентами $\{a_i\}$, должен быть таким,

чтобы преобразованные погрешности росли не слишком быстро. При рассмотрении источников погрешностей не учитывались погрешности округления.

На практике получают приближенные вычисленные решения $\tilde{y}_n, \tilde{y}_{n+1}, \dots, \tilde{y}_{n+k}, \dots$, которые удовлетворяют возмущенному уравнению

$$\sum_{i=0}^k a_i \tilde{y}_{n+i} = h j_f(x_n, \tilde{y}_{n+k}, \dots, \tilde{y}_n, h) + R_{n+k}. \quad (4.9)$$

Следует отметить, что величину $R_{n+k} - t_{n+k}$ нельзя сделать сколь угодно малой при $h \rightarrow 0$.

При исследовании алгоритмов важно иметь возможность вычислить погрешность аппроксимации точно. Это требование существенно сужает круг модельных задач, для которых известно точное аналитическое решение. Для устранения этого затруднения вводится иной вид погрешности, так называемой локальной погрешности.

Определение 4.3. Локальной погрешностью метода (4.2) в точке $x_{n+k} \in [a, b]$ называется величина $|y_{n+k} - u(x_{n+k}, x_{n+k-1})|$, где $u(x_{n+k}, x_{n+k-1})$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} u' &= f(x, u), \quad x \in [x_{n+k-1}, b], \\ u(x_{n+k-1}, x_{n+k-1}) &= y_{n+k-1}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Исходя из этого определения, можно сравнивать алгоритмы различных методов на основе оценок погрешности, так как на каждом шаге тестовой программы можно вычислить локальную погрешность, численно решая задачу Коши на отрезке $[x_{n+k}, x_{n+k-1}]$ с достаточно высокой точностью.

4.2. Оценка погрешности методом экстраполяции

Рассмотрим k -шаговый метод в виде

$$y_n = S_n(h), \quad 0 \leq n < k,$$

$$\sum_{i=0}^k a_i y_{n+i} / h - j(x_n, y_{n+k}, \dots, y_n, h) = 0, \quad 0 \leq n \leq N - k. \quad (4.11)$$

Сформулируем для него ряд простейших теорем.

Теорема 4.1. Если метод (4.1) нуль-устойчив и имеет порядок согласованности p , то он сходится и имеет порядок сходимости p .

Доказательство. Подставляя вместо y_n точное решение $y(x_n)$ запишем уравнение (4.11) в следующем виде:

$$y(x_r) - S_r(h) = d_r, \quad 0 \leq r - k, \quad (4.12)$$

$$\sum_{i=0}^k \{a_i y(x_{n+i}) / h\} - j(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) = r'(1) d_{n+k}, \quad 0 \leq n \leq N - k.$$

Используя определение нуль-устойчивости, получаем, что существуют такие постоянные h_0 и S , что для всех $h \in (0, h_0]$ и $0 \leq n \leq N$,

$$|y_n - y(x_n)| \leq S d_n, \quad 0 \leq n \leq N - k.$$

Так как по условию теоремы порядок согласованности равен p , то $\max |d_n| = O(h^p)$, и тогда существуют k и h_1 такие, что

$$|d_n| \leq kh^p, \quad 0 < h \leq h_1.$$

Полагая $d_n = kh^p$, получим

$$|y_n - y(x_n)| \leq S kh^p$$

всякий раз, когда $0 < h \leq \min(h_0, h_1)$. Откуда следует, что порядок сходимости метода равен p . ■

Важность этой теоремы состоит в том, что с помощью разложения в ряд Тейлора можно найти порядок согласованности метода, а устойчивость проверить с помощью корневого условия, доказав при этом сходимость метода.

Теорема 4.2. Если

$$d_n = S_n(h) - y(x_n) = O(h^{p+1}), \quad 0 \leq n < k, \quad (4.13)$$

и

$$d_{n+k} = h^p \mathcal{Y}(x_{n+k}) + O(h^{p+1}), \quad 0 \leq n \leq N - k, \quad (4.14)$$

то

$$y_n = y(x_n) + h^p e(x_n) + O(h^{p+1}), \quad 0 \leq n \leq N, \quad (4.15)$$

где

$$e'(x) - f_y(x, y(x))e(x) = -\mathcal{Y}(x), \quad e(a) = 0. \quad (4.16)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы подставим $y(x_n) + h^p e(x_n)$ в левую часть (4.11), полагая $y(x)$ достаточно гладкой, получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^k a_i (y(x_{n+i}) + h^p e(x_{n+i})) / h - j(x_n, y(x_{n+k}) + h^p e(x_{n+k}), \dots, h) = \\
& = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i y(x_n) / h - j(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) \right\} + \\
& + h^p \sum_{i=0}^k a_i e(x_{n+i}) / h - h^p \sum_{i=0}^k \frac{\partial j(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h)}{\partial y(x_{n+i})} e(x_{n+i}) + O(h^{2p}) = \\
& = r'(1) h^p \{ y'(x_{n+k}) + e'(x_{n+k}) - f_y(x_{n+k}, y(x_{n+k})) e(x_n) \} + \\
& + O(h^{p+1}) = O(h^{p+1}). \tag{4.17}
\end{aligned}$$

При выводе этих выражений для первого члена (4.17) использовалось определение погрешности дискретизации и соотношение (4.14), для второго члена (4.17) использовались также разложение функции $e(x_{n+i})$ в окрестности точки x_{n+k} и соотношение

$$r'(1) = \sum i a_i,$$

а для третьего члена использовалось соотношение

$$j(x_n, y(x_{n+k}), \dots, y(x_n), h) = r'(1) f(x_n, y(x_n)).$$

Таким образом, y_n и $y(x_n) + h^p e(x_n)$ удовлетворяют системам уравнений, правые части которых отличаются на величину порядка $O(h^{p+1})$. ■

Из полученного результата следует, что метод, для которого локальная погрешность дискретизации в точке x_n равна $h^p y'(x_n)$, имеет полную погрешность с главной частью $h^p e(x_n)$. Точное решение отличается от приближенного на такую же величину, как в случае появления в дифференциальном уравнении возмущения $h^p y'(x_n)$ при условии, что начальные значения заданы с точностью порядка $p+1$. Локальная погрешность дискретизации в одной точке влияет на погрешность решения так же, как возмущение в правой части в дифференциальной задаче.

Принимая во внимание (4.15), полную погрешность в фиксированной точке c можно оценить, используя приближенные решения, вычисленные с шагом h и $h/2$, причем $Mh = c - a$.

На основании (4.15) имеем

$$y_M(h) = y(c) + h^p e(c) + O(h^{p+1}), \tag{4.18}$$

$$y_{2M}(h/2) = y(c) + (h/2)^p e(c) + O(h^{p+1}). \quad (4.19)$$

Из соотношений (4.18) и (4.19) следует

$$y_{2M}(h/2) - y(c) = [y_M(h) - y_{2M}(h/2)]/[2^p - 1] + O(h^{p+1}).$$

Погрешность при шаге $h/2$ приближенно равна разности решений с шагом h и $h/2$ умноженной на 2^{-p} . Это дает наиболее удобный способ выбора подходящего шага интегрирования. Шаг интегрирования уменьшается до тех пор, пока два решения не совпадут с требуемой точностью.

4.3. Оценка локальной погрешности дискретизации одношаговых методов

Для оценки ошибок дискретизации одношаговых методов наиболее часто применяются следующие три основных метода.

1. Метод экстраполяции. Интегрирование от точки x_n до точки x_{n+1} выполняется дважды: один раз с шагом h и другой раз с шагом $h/2$. Тогда $d_{n+1} = [1/(h(1-2^{-p}))][\bar{y}_{n+1} - y_{n+1}]$, где \bar{y}_{n+1} получено с шагом $h/2$, а y_{n+1} — с шагом h .

2. Вложенные методы. На каждом шаге интегрирование выполняется дважды: методом порядка p и методом порядка $p+1$. Разность полученных значений дает оценку $d_{n+1} = (\bar{y}_{n+1} - y_{n+1})/h$, где \bar{y}_{n+1} получено с порядком $p+1$, а y_{n+1} — с порядком p .

3. Многошаговые оценки погрешности. Многошаговая формула порядка $p+1$ преобразуется так, чтобы дать требуемую оценку

$$d_{n+1} = \left\{ \sum_{i=k+1}^1 a_i y_{n+i} / h - b_i f(y_{n+i}) \right\} / r'(1).$$

Сравнение оценок погрешности для одношаговых методов указывает на то, что многошаговые методы требуют наименьших непосредственных затрат, однако точность оценки невелика. Метод экстраполяции для оценки погрешности является более надежным и точным по сравнению с вложенным и многошаговым методами, однако требует больших затрат, чем вышеуказанные методы.

Одной из основных проблем в использовании численных методов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений является получение надежных оценок полной погрешности дискретизации.

Для метода Коуэлла этот вопрос детально изучался в Институте теоретической астрономии в работах В.Ф. Мячина [9]. Быстрый рост ошибок округления на каждом шаге интегрирования является принципиальным недостатком метода Коуэлла. После того как сделано n шагов численного интегрирования, ошибки в полученном решении оказываются пропорциональными $n^{3/2}$, иными словами, после 100 шагов интегрирования ошибки округления в 1000 раз, т.е. три последних вычислительных знака в результатах будут ошибочны. Систематическое накопление ошибки в процессе интегрирования существенно ограничивают возможности использования метода Коуэлла.

Построение метода Адамса-Бэшфорта основано на том же принципе, что и метода Коуэлла, поэтому накопление полной погрешности, можно ожидать, будет происходить подобным образом.

Метод Адамса - Мултона обладает лучшими свойствами как в отношении устойчивости, так и точности, по сравнению с методами Коуэлла и Адамса – Бэшфорта и может более эффективно использоваться для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Эверхарта по точности превосходит все перечисленные выше методы, однако по быстродействию уступает многошаговым методам.

5. Введение в теорию жестких задач

5.1. Жесткая задача Коши

Жесткость присуща самой математической задаче, а не численному методу.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' - f(x, y) = 0 \quad (5.1)$$

и обозначим через $y(x)$, $x \in [a, b]$, точное решение уравнения (6.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(a) = y_0$.

Для того чтобы определить, является ли задача (5.1) жесткой, необходима информация о поведении решения данного уравнения в окрестности частного решения $y(x)$. С этой целью уравнение (5.1) можно аппроксимировать линеаризованным уравнением вида

$$y' - J(x)\{y - y(x)\} - f(x, y(x)) = 0, \quad (5.2)$$

где $J(x)$ – матрица Якоби, составленная из частных производных $\frac{\partial f}{\partial y}$, вычисленных в точке $(x, y(x))$.

Известно, что фундаментальные решения (5.2) равны $e^{I_i x}$, где $I_i(x)$ локальные собственные значения матрицы Якоби $J(x)$, которые будем предполагать различными. Таким образом, приближенное решение y уравнения (5.1) в окрестности точного решения $y(x)$ можно представить в следующем виде

$$y \approx y(x) + \sum_{i=1}^s c_i e^{I_i x} x_i, \quad (5.3)$$

где c_i – постоянные, а x_i – собственные векторы матрицы $J(x)$.

Предположим, что система локально устойчива, при этом

$$\operatorname{Re}(I_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

и можно показать, что нестационарные фундаментальные решения затухают с увеличением x со скоростью, пропорциональной величине

$\frac{1}{\operatorname{Re}(-I_i)}$, которая называется локальной «временной постоянной» системы.

Интервал, в котором заключены локальные «временные постоянные», определяют меру жесткости задачи (6.1).

Определение 5.1. Задача Коши

$$y' - f(x, y) = 0, \quad y(a) = y_0, \quad x \in [a, b]$$

называется жесткой в некотором интервале $x \in [a, b]$, если для $x \in [a, b]$ выполняются:

$$1) \operatorname{Re}(I_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$2) S(x) = [\max \operatorname{Re}(-I_i) / \min \operatorname{Re}(-I_i)] \gg 1, \quad i = 1, \dots, s,$$

где I_i – собственные значения $\frac{\partial f}{\partial y}$, в которые подставлено решение $y(x)$ в точке x .

Отношение $S(x)$ называется локальным «коэффициентом жесткости». Задача Коши считается жесткой, если $S(x) \geq 10$.

В практических задачах коэффициент жесткости может значительно превосходить эту величину. Жесткую задачу можно определить как задачу с сильно различающимися «временными постоянными» или системой с большой константой Липшица. Константа Липшица определяется как

$$L = \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\| > r \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

при условии, что производные $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны и ограничены. Спектральный радиус r при этом равен:

$$r = \max |I_i|, \quad i = 1, \dots, s.$$

5.2. Устойчивость для жестких задач

Рассмотрим трудности, возникающие при решении жесткой задачи. Основная трудность связана с проблемой численной устойчивости. Для обеспечения численной устойчивости в решении необходимо выбирать такой шаг h , при котором каждое из комплексных значений $h_i = hI_i$, $i = 1, 2, \dots, s$, где I_i – собственные значения $J(x)$, лежало бы внутри области абсолютной устойчивости. Следовательно, для методов с ограниченной областью абсолютной устойчивости длина шага

должна быть сопоставима с порядком наименьшей «временной постоянной» системы.

Чтобы устранить данное ограничение на длину шага, необходимо рассматривать численные методы, для которых область устойчивости продолжается до бесконечности в полуплоскость $\text{Re}(hI) < 0$.

Для жестких систем предложено несколько определений устойчивости.

Определение 5.2. Численный метод называется A -устойчивым, если его область абсолютной устойчивости включает всю полуплоскость $\text{Re}(hI) < 0$.

Доказано, что явные линейные многошаговые методы не могут быть A -устойчивыми и что порядок неявного многошагового метода не может превосходить двух, причем наиболее точным из таких методов является метод трапеций.

Вследствие этого понятие A -устойчивости преимущественно используется при изучении неявных одношаговых методов. Для многошаговых методов вводится менее ограничительное требование к устойчивости.

Определение 5.3. Численный метод называется $A(a)$ -устойчивым $a \in (0, p/2)$, если его область абсолютной устойчивости включает бесконечный клин $|\arg(-I)| < a$ (рис. 5.1)

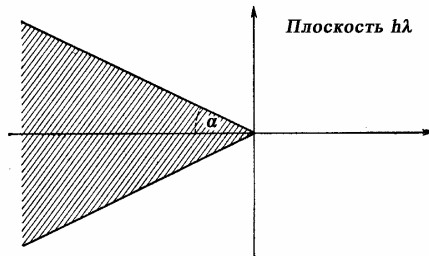


Рис. 5.1 $A(a)$ -устойчивость:

штриховкой выделена область абсолютной устойчивости.

Метод называется $A(0)$ -устойчивым, если он $A(a)$ -устойчив для некоторого достаточно малого $a \in (0, p/2)$.

Доказано, что явный линейный многошаговый метод не может быть $A(0)$ -устойчивым, однако существуют трех и четырех порядковые неявные методы, $A(a)$ -устойчивые для любого $a < p/2$.

Следующее определение включает в себя как устойчивость, так и точность приближений к фундаментальному решению.

Определение 5.4. Метод называется жестко устойчивым, если он абсолютно устойчив в области R_1 ($\text{Re}(hl) \leq D$) и точен в области R_2 ($D < \text{Re}(hl) < a, |\text{Im}(hl)| < q$) (рис. 5.2).

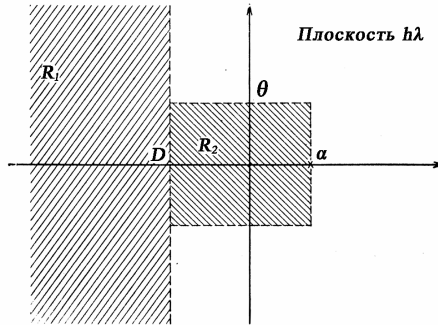


Рис. 5.2. Жесткая устойчивость

Поясним это определение. Если решение $y(x)$ содержит нестационарные фундаментальные решения, то те из них, которые имеют малые временные постоянные, быстро затухают и становятся пренебрежительно малыми, в то время как фундаментальные решения с большими временными постоянными вносят в решение существенный вклад.

При использовании жестко устойчивого метода длину шага h нужно выбирать так, чтобы для фундаментальных решений с малыми временными постоянными выполнялось условие $hl \in R_1$, в то время как для существенных фундаментальных решений с большими временными постоянными условие $hl \in R_2$ гарантирует точность решения.

Для устойчивых одношаговых методов вводится дополнительное понятие устойчивости. Одношаговый метод, применяемый к уравнению $y' - Iy = 0$, дает приближение $y_{n+1} = Q(hl)y_n$ к решению $y_{n+1} = e^{hl}y_n$, и A -устойчивость означает, что $|Q(hl)| < 1$ для всех $\text{Re}(hl) < 0$.

Определение 5.5. Одношаговый метод называется L -устойчивым, если он A -устойчив и если для уравнения $y' - Ly = 0$ с $\text{Re}(L) < 0$ он дает $y_{n+1} = Q(hL)y_n$, где $|Q(hL)| \rightarrow 0$ при $\text{Re}(hL) \rightarrow -\infty$.

Теория устойчивости, которую мы изучили, касается, по существу, устойчивости в пределе при $h \rightarrow 0$. Следует отметить, что даже строго устойчивые методы могут вести себя неустойчиво, если h слишком велико. И хотя эту трудность можно преодолеть за счет уменьшения величины h , это может привести к недопустимо большим затратам машинного времени. Такая ситуация возникает при решении дифференциальных уравнений, которые называют жесткими.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение

$$y' = -100y + 100, \quad y(0) = y_0. \quad (5.4)$$

Точным решением этой задачи является функция

$$y(x) = (y_0 - 1)e^{-100x} + 1. \quad (5.5)$$

Очевидно, что это решение устойчиво. Действительно, если мы заменим начальное условие на $y_0 + e$, то решение изменится на $e e^{-100x}$. Метод Эйлера в применении к данной задаче принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + h(-100y_n + 100) = (1 - 100h)y_n + 100h, \quad (5.6)$$

и точное решение этого разностного уравнения первого порядка выражается формулой

$$y_n = (y_0 - 1)(1 - 100h)^n + 1. \quad (5.7)$$

Предположим для конкретности, что $y_0 = 2$. Тогда точные решения (5.5) и (5.7) примут вид

$$y(x) = e^{-100x} + 1, \quad (5.8)$$

$$y_n = (1 - 100h)^n + 1. \quad (5.9)$$

Функция $y(x)$ очень быстро убывает от $y_0 = 2$ до своего предельного значения 1. Так, например, $y(0,1) \approx 1 + 5 \cdot 10^{-5}$. Поэтому на начальном этапе мы, естественно, ожидаем, что для точного вычисления решения потребуется считать с малым шагом h . Однако после, $x=0,1$ решение изменяется медленно и, по существу, равно 1, так что интуитивно кажется, что метод Эйлера должен дать достаточную точность при сравнительно большом шаге h . Однако если $h > 0,02$, то $|1 - 100h| > 1$ и значения y_n с увеличением номера шага начинают быстро расти, свидетельствуя о неустойчивости. Если сравнить точные

решения (5.8) и (5.9), то видно, что частные решения уравнений (5.4) и (5.6) тождественно совпадают (и равны 1). Величина $(1-100h)^n$ служит аппроксимацией экспоненциального члена e^{-100x} и действительно является хорошим приближением при малых h , но это приближение быстро становится неудовлетворительным, когда h достигает значения 0,02. И хотя этот экспоненциальный член после $x=0,1$ фактически не вносит никакого вклада в решение, для сохранения устойчивости метод Эйлера по-прежнему требует, чтобы этот член аппроксимировался достаточно точно. Эта ситуация характерна для жестких уравнений: решение содержит член, вклад которого очень мал, однако обычные методы для сохранения устойчивости требуют, чтобы этот член аппроксимировался достаточно точно. ■

5.3. Применение неявных методов для решения жестких задач

Следует отметить, что только неявный линейный многошаговый или одношаговый методы обладают свойствами A -устойчивости или жесткой устойчивости.

Применение неявного линейного многошагового метода

$$\sum_{j=0}^k a_j y_{n+j} - h \sum_{j=0}^k b_j f_{n+j} = 0, \quad a_k = 1, \quad b_k \neq 0 \quad (5.10)$$

к нелинейной системе (5.1) приводит к системе s нелинейных уравнений

$$y_{n+k} - h b_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) - g = 0, \quad (5.11)$$

(g – заданный вектор) относительно неизвестного вектора y_{n+k} , который необходимо определить на каждом шаге интегрирования. Решение системы (5.11) необходимо осуществлять итерационными методами.

Простая итерация вида

$$y_{n+k}^{(m+1)} = h b_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(m)}) - g, \quad m = 0, 1, \dots$$

в общем случае неприемлема, так как для сходимости требуется выполнение условия

$$h b_k L < 1,$$

где L – константа Липшица функции $f(x, y)$ относительно y , а для жестких систем это условие сходимости накладывает на величину ша-

га существенное ограничение, когда число шагов становится сравнимым с жесткостью системы.

Для решения нелинейных уравнений эффективно использовать метод Ньютона-Рафсона. В применении к уравнению (5.11) он имеет следующий вид:

$$\{I - h\mathbf{b}_k \mathbf{J}^{(m)}\} \{y_{n+k}^{(m+1)} - y_{n+k}^{(m)}\} = -y_{n+k}^{(m)} + h\mathbf{b}_k f(x_{n+k}, y_{n+k}^{(m)}) + g, \quad (5.6)$$

где $\mathbf{J}^{(m)} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+k}, y_{n+k}^{(m)})$, $m = 0, 1, \dots$

На практике этим методом можно добиться сходимости без ограничений на длину шага.

При решении жестких систем, чаще всего используются два способа выбора шага:

1) если влиянием на решение нестационарных фундаментальных решений с малыми временными постоянными можно пренебречь, то начальный шаг можно выбрать большим по сравнению с малыми временными постоянными, при этом применяемый метод должен быть L -устойчивым;

2) если в решении требуется точное представление быстро меняющихся фундаментальных решений, то величина начального шага должна быть сравнима с наименьшими временными постоянными.

Следует отметить, что алгоритмы для жестких задач разработаны не столь подробно, как для нежестких.

Одним из наиболее важных вопросов для жесткой задачи является степень ее нелинейности. Линейная задача, как правило, возникает на промежуточном этапе решения дифференциального уравнения. Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений может иметь большую размерность. В этом случае лучше всего рекомендовать метод, специально построенный для такой задачи [7].

В нелинейных задачах нужно на каждом шаге использовать итерационный метод решения, например метода Ньютона-Рафсона.

Другой причиной возможных трудностей для некоторых алгоритмов является то, что у матрицы Якоби $\partial f / \partial u$ имеются собственные значения I_i с большими мнимыми частями. Если $\arg(I_i) \approx p/2$ для некоторого собственного значения I_i , то это собственное значение может порождать сильно осциллирующую компоненту в решении. В этом случае алгоритм должен обладать способностью правильно и устойчиво воспроизводить эту компоненту. При использовании любо-

го метода это может быть достигнуто лишь за счет выбора достаточно малого шага. Если в решении отсутствуют осциллирующие компоненты, то имеет значение только устойчивость и метод, не являющийся A -устойчивым, может дать плохие результаты.

В ряде случаев можно использовать информацию о расположении собственных значений матрицы Якоби. Например, если собственные значения можно разбить на два множества, в которых содержатся собственные значения приблизительно равные по величине, то можно использовать специально разработанные для этого случая экстраполяционные методы [7].

Заключение

Рассмотрев различные разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, как универсальные (методы тейлоровских разложений, Рунге-Кутты, Адамса-Бэшфорта, Адамса-Мултона), так и специализированные (Эверхарта, Коуэлла), авторы пришли к следующим выводам.

Сравнение универсальных методов можно проводить на основе нескольких принципов: а) точности; б) надежности; в) непосредственных затрат и г) полных затрат.

При сопоставлении универсальных методов получены следующие характеристики:

а) метод Рунге-Кутты четвертого порядка наиболее эффективен в обычных расчетах со сравнительно невысокой точностью;

б) метод экстраполяции Грэгга-Булирша-Штера представляется достаточно перспективным при расчетах с высокой точностью;

в) методы Адамса переменного порядка требуют значительно меньшего количества вычислений правой части, чем другие методы, и их следует использовать в тех случаях, когда эти вычисления трудоемки. Методы Адамса реализуются наиболее эффективно при использовании разделенных разностей. Эти методы могут быть успешно использованы при решении как нежестких, так и жестких систем дифференциальных уравнений.

Специализированные методы Эверхарта и Коуэлла эффективно использовать при решении уравнений движения в задачах небесной механики.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы Т.1. М.: Бином.ЛЗ, 2003. 632 с.
2. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т. II. М.: Физматгиз, 1962. 640 с.
3. *Бордовицина Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
4. *Мысовских И.П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: СПбГУ, 1998. 472 с.
5. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы М.: Наука, 1989. 432 с.
7. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир, 1979. 312 с.
8. *Хемминг Р.В.* Численные методы. М.: Наука, 1972. 400 с.
9. *Чеботарев Г.А.* Аналитические и численные методы небесной механики. М.,Л.: Наука, 1965. 368 с.
10. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978. 464 с.
11. *Everhart E.* Implicit single methods for integrating orbits // *Celestial mechanics.* 1974. №.10. P.35-55.

Учебное издание

ЗАУСАЕВ Анатолий Федорович

**Разностные методы решения обыкновенных
дифференциальных уравнений**

Печатается в авторской редакции

Лицензия ИД №02651 от 08.02.10

Подписано в печать 08.02.10

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Усл. п. л. 5,81. Уч.-изд.л. 5,73.

Тираж 100 экз. Рег. № 24/10.

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отдел типографии и оперативной полиграфии
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8