А. Ф. Заусаев, В. Е. Зотеев

Применение разностных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Лабораторный практикум

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К а ф е д р а прикладной математики и информатики

Применение разностных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Лабораторный практикум

Самара
Самарский государственный технический университет
2010

Печатается по решению методического совета СамГТУ

УДК 519.6 (075.8)

Применение разностных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений: лабораторный практикум / Сост. А. Ф. Заусаев, В. Е. Зотеев. – Самара; Самар. гос. техн. ун-т, 2010. 34 с.

Предложены задания к лабораторным работам по темам «Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми методами», «Формирование таблицы начальных значений для многошаговых методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений», «Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений явным многошаговыми методом Адамса-Бэшфорта», «Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений неявным многошаговым методом Адамса-Мултона» и «Исследование устойчивости, сходимости и вычисление локальных и глобальных ошибок дискретизации одношаговых и многошаговых методов»

Предназначено для студентов специальности 01.05.01 «Прикладная математика и информатика».

УДК 519.6 (075.8)

Составители: доктор физ.-мат. наук А. Ф. Заусаев,
канд. физ.-мат. наук В. Е. Зотеев

Рецензент: канд. физ.-мат. наук В. Л. Спицын

Введение

Предлагаемый лабораторный практикум содержит учебные задания для лабораторных работ по курсу «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений» и предназначен для студентов, обучающихся специальности 01.05.01 «Прикладная математика и информатика». Целью выполнения лабораторных работ является приобретение и закрепление практических навыков при решении основных задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с применением вычислительной техники.

Лабораторный практикум по численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений включает в себя задания и методические указания к их выполнению по следующим темам:

1. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми методами.
2. Формирование таблицы начальных данных для многошаговых методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Численное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений явными многошаговыми методами Адамса-Бэшфорта.
4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений неявными методами Адамса-Мултона.
5. Исследование устойчивости и вычисление локальных и глобальных погрешностей дискретизации одношаговых и многошаговых методов.

Каждое учебное задание содержит 24 варианта. Вариант задания выбирается из приложений 1 или 2 в соответствии с порядковым номером студента в списке группы. При выполнении лабораторной работы необходимо:

— изучить теоретический материал;
— подготовить исходные данные к решению задачи на ЭВМ;
— разработать алгоритм решения задачи;
— разработать и отладить программу на алгоритмическом языке и решить задачу на ЭВМ;
— проанализировать полученное решение и сделать выводы;
— оформить отчет о лабораторной работе.

Отчет о лабораторной работе должен содержать:

— тему лабораторной работы, текст задания и исходные данные;
— необходимые расчеты, графические построения и т. п.;
— результаты вычислений на ЭВМ;
— выводы.

Тема 1. **Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений одношаговыми методами**

Лабораторная работа № 1
Решение задачи Коши методами Эйлера и Хойна

Цель работы: практическое применение простейших одношаговых методов Эйлера и Хойна к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее известным способом нахождения решения в точке x_{n+1}, если оно известно в точке x_n, является способ, основанный на представлении решения в виде ряда Тейлора

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Delta(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где

$$\Delta(x_n, y_n, h) = y'(x_n) + \frac{h}{2!} y''(x_n) + \frac{h^2}{3!} y'''(x_n) + \ldots .$$

Если ряд (1.1) ограничить p членами и заменить $y(x_n)$ приближенным значением y_n, получим следующую приближенную формулу для определения y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + hj(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

где $j(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2!} f'(x, y) + \ldots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(x, y)$.

Для значений $p = 1$ имеем формулу метода Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \tag{1.3}$$

Методы Рунге-Кутты основаны на построении формул для функции j, которая максимально близка к Δ и не содержит производных от функции f. Для двухэтапного метода этот процесс замены рядов Тейлора функцией $j(x, y, h)$ можно представить следующим образом. Положим

$$j(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ha_2,\ y + b_{21} hf(x, y)), \tag{1.4}$$

где c_1, c_2, a_2, b_{21} — неизвестные постоянные, подлежащие определению

Пусть $c_2 = a$, где $a \neq 0$. Тогда

$$c_1 = 1 - a, \quad a_2 = b_{21} = \frac{1}{2a}.$$

При значении $a = \dfrac{1}{2}$ имеем формулу метода Хойна:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right]. \qquad (1.5)$$

***Пример* 1.1.** Решить задачу Коши для системы уравнений

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$, $x(0)=2$; $y(0)=2$

методами Эйлера и Хойна с шагом h=0,1; 0,01; 0,001 на отрезке $[0, 2]$.

Оценить погрешность численных решений.

Решение. Аналитическое решение данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^{2t} + 1 \\ y = 2e^{2t} \end{cases}.$$

В табл.1.1—1.3 представлены результаты вычислений точного решения $x_T(t), y_T(t)$, решения, полученного методом Эйлера $x(t), y(t)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta x(t), \Delta y(t)$ в трех точках, соответствующих моментам времени t=0, t=1 и t=2, для различных шагов интегрирования.

В табл.1.4—1.6 представлены результаты вычислений точного решения $x_T(t), y_T(t)$, полученного методом Хойна $x_h(t), y_h(t)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta x(t), \Delta y(t)$ в трех точках, соответствующих моментам времени t=0, t=1 и t=2, для различных шагов интегрирования.

Таблица 1.1

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,1

t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	2,000	2,000	2,000	2,000	0,000	0,000
1	7,191	12,383	8,389	14,778	−1,197	−2,395
2	39,338	76,675	55,598	109,196	−16,260	−32,521

Таблица 1.2

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,01

t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	2,000	2,000	2,000	2,000	0,000	0,000
1	8,245	14,489	8,389	14,778	−0,144	−0,289
2	53,485	104,970	55,598	109,196	−2,113	−4,226

Таблица 1.3

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,001

t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	2,000	2,000	2,000	2,000	0,000	0,000
1	8,374	14,749	8,389	14,778	−0,015	−0,029
2	55,380	108,761	55,598	109,196	−0,218	−0,435

Таблица 1.4

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,1

t	$x_h(t)$	$y_h(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	2,000	2,000	2,000	2,000	0,000	0,000
1	7,191	13,822	8,389	14,778	−0,478	−0,955
2	45,660	89,319	55,598	109,196	−9,938	−19,877

Таблица 1.5

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,01

t	$x_h(t)$	$y_h(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	2,000	2,000	2,000	2,000	0,000	0,000
1	8,335	14,671	8,389	14,778	−0,054	−0,107
2	54,388	106,777	55,598	109,196	−1,210	−2,420

Таблица 1.6

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,001

t	$x_h(t)$	$y_h(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	2,000	2,000	2,000	2,000	0,000	0,000
1	8,384	14,767	8,389	14,778	−0,005	−0,011
2	55,474	108,949	55,598	109,196	−0,124	−0,247

Задания для самостоятельной работы

***Задание* 1.** Решить аналитически систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 1.

***Задание* 2.** Составить алгоритмы и программы для решения индивидуальных заданий методами Эйлера и Хойна.

***Задание* 3.** Используя простейшие одношаговые методы Эйлера и Хойна, решить систему на отрезке [0; 2] с шагом интегрирования h=0,1; 0,01; 0,001. Результаты вычислений представить с шагом h=0,1.

***Задание* 4.** Оценить погрешность численных решений.

Контрольные вопросы

1. Разновидностью каких методов являются методы Эйлера и Хойна?
2. Какому порядку точности соответствуют методы Эйлера и Хойна?
3. Какой из методов обладает большей областью устойчивости: метод Эйлера или метод Хойна?

Тема 2. **Закладка таблицы начальных данных**

Лабораторная работа № 2

Формирование таблицы начальных значений для многошаговых методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы: получение начальных данных с высокой степенью точности для выполнения последующих работ с использованием многошаговых методов.

Рассмотрим применение численных методов для решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0. \tag{2.1}$$

При решении задачи (2.1) с помощью одношаговых методов значение y_{n+1} зависит только от информации в предыдущей точке x_n. Можно добиться большей точности, если использовать информацию о нескольких предыдущих точках $x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}$. На этой идее основаны многошаговые методы.

Многошаговые методы порождают трудности, которые становятся понятными, если, например, обратиться к многошаговому методу пятого порядка.

В задаче (2.1) задано начальное значение y_0, но при $n=0$ для счета многошаговым методом 5-того порядка необходима информация, кроме того, в точках $x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, x_{-4}$, которая естественно отсутствует. Обычный выход из данной ситуации заключается в использовании какого-либо одношагового метода того же порядка точности, например метода Рунге-Кутты, до тех пор, пока не будет получено достаточно значений для работы многошагового метода. Или же можно на первом шаге использовать одношаговый метод, на втором — двухшаговый и так далее, пока не будут получены все стартовые значения. При этом существенно, чтобы эти стартовые значения были вычислены с той же степенью точности, с какой будет работать окончательный метод. Поскольку стартовые методы имеют более низкий порядок точности, вначале приходится считать с меньшим шагом и использовать больше промежуточных точек. Для закладки таблицы начальных значений можно также использовать разложение решения заданной системы в ряды Маклорена:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{(k)}(0)}{k!}t^k, \tag{2.2}$$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(0)}{k!}t^k. \tag{2.3}$$

Закладку начальных данных для 5 моментов с помощью формул (2.2) и (2.3) рассмотрим на примере двух задач.

***Пример* 2.1.** Построить таблицу пяти начальных значений с шагом h=0,1; 0,01; 0,001 для дальнейшего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=2y\end{cases}, \quad x(0)=2;\ y(0)=2$$

методами Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона. Оценить погрешность решения.

Решение. Аналитическое решение данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases}x=e^{2t}+1\\ y=2e^{2t}\end{cases}.$$

По формулам (2.2), (2.3) вычисляем коэффициенты рядов

$$\dot{x}(0)=2,\quad \ddot{x}(0)=4,\quad \dddot{x}(0)=8,\quad x^{IV}(0)=16,\quad x^{V}(0)=32,$$

$$\dot{y}(0)=4,\quad \ddot{y}(0)=8,\quad \dddot{y}(0)=16,\quad y^{IV}(0)=32,\quad y^{V}(0)=64.$$

Ограничиваясь в разложении шестью первыми членами, получаем формулы для приближенного вычисления x_n и y_n с шагом интегрирования h (t=nh, n=0, 1, 2, 3, 4):

$$x_n = 2+\frac{2}{1!}nh+\frac{4}{2!}(nh)^2+\frac{8}{3!}(nh)^3+\frac{16}{4!}(nh)^4+\frac{32}{5!}(nh)^5, \qquad (2.4)$$

$$y_n = 2+\frac{4}{1!}nh+\frac{8}{2!}(nh)^2+\frac{16}{3!}(nh)^3+\frac{32}{4!}(nh)^4+\frac{64}{5!}(nh)^5, \qquad (2.5)$$

где n=0,1,2,3,4.

Результаты вычислений представлены в третьем и четвертом столбцах таблиц 2.1—2.3 для значений h=0,1; 0,01 и 0.001, в пятом и шестом столбцах находятся точные решения. В двух последних столбцах этих таблиц представлены разности между приближенными и точными значениями $\Delta x_n(t), \Delta y_n(t)$

Таблица 2.1

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,1

n	t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	0,0	2,00000	2,00000	2,00000	2,00000	0,00000	0,00000
1	0,1	2,22140	2,44281	2,22140	2,44280	$-9{,}15\cdot10^{-8}$	$-1{,}83\cdot10^{-7}$
2	0,2	2,49182	2,98364	2,49182	2,98365	$-6{,}03\cdot10^{-6}$	$-1{,}21\cdot10^{-5}$
3	0,3	2,82205	3,64410	2,82205	3,64424	$-7{,}08\cdot10^{-5}$	$-1{,}42\cdot10^{-4}$
4	0,4	3,22513	4,45026	3,22554	4,45108	$-4{,}10\cdot10^{-4}$	$-8{,}21\cdot10^{-4}$

Таблица 2.2

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,01

n	t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	0,00	2,00000	2,0000	2,00000	2,0000	0,00000	0,00000
1	0,01	2,02020	2,04040	2,02020	2,04040	$-8{,}88\cdot10^{-14}$	$-1{,}78\cdot10^{-13}$
2	0,02	2,04081	2,08162	2,04081	2,08162	$-5{,}72\cdot10^{-12}$	$-1{,}14\cdot10^{-11}$
3	0,03	2,06184	2,12367	2,06184	2,12367	$-6{,}54\cdot10^{-11}$	$-1{,}31\cdot10^{-10}$
4	0,04	2,08329	2,16657	2,08329	2,16657	$-3{,}68\cdot10^{-10}$	$-7{,}37\cdot10^{-10}$

Таблица 2.3

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,001

n	t	$x(t)$	$y(t)$	$x_T(t)$	$y_T(t)$	Δx	Δy
0	0,000	2,00000	2,00000	2,00000	2,00000	0,00000	0,00000
1	0,001	2,02020	2,00400	2,02020	2,00400	0,00000	0,00000
2	0,002	2,00401	2,00802	2,00401	2,00802	0,00000	0,00000
3	0,003	2,00602	2,01204	2,00602	2,01204	0,00000	0,00000
4	0,004	2,00803	2,01606	2,00803	2,01606	0,00000	0,00000

***Пример* 2.2.** Построить таблицу пяти начальных значений с шагом h=0,1; 0,01; 0,001 для дальнейшего решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = xy' + y + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

методами Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона. Оценить погрешность решения.

Решение. Аналитическое решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, \quad y'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

Пять первых значений функций $x_T(t)$ и $y_T(t)$ — точных значений решения заданной системы — представлены в пятом и шестом столбцах таблиц 2.4—2.6 при различных значениях шага интегрирования h.

Для закладки таблицы начальных значений используем разложение решения в ряд Маклорена по формуле (2.3):

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Для вычисления коэффициентов ряда находим производные высших порядков и вычисляем их значения при x=0:

$$y''(0) = 2,$$

$$y'''(x) = y' + xy'' + y' = 2y' + xy'', \qquad y'''(0) = 0,$$

$$y^{IV}(x) = 3y'' + xy''', \qquad y^{IV} = 6,$$

$$y^{V} = 4y''' + xy^{IV}, \qquad y^{V} = 0,$$

$$y^{VI}(x) = 5y^{IV} + xy^{V}, \qquad y^{VI} = 30.$$

Ограничиваясь в разложении членами пятого порядка, получаем формулы для приближенного вычисления y_n и y'_n с шагом интегрирования h (t=nh, n=0, 1, 2, 3, 4):

$$y_n = 1 + \frac{0}{1!}nh + \frac{2}{2!}(nh)^2 + \frac{0}{3!}(nh)^3 + \frac{6}{4!}(nh)^4 + \frac{0}{5!}(nh)^5,$$

$$y_n' = \frac{2}{1!}nh + \frac{6}{3!}(nh)^3 + \frac{30}{5!}(nh)^5,$$

где n=0, 1, 2, 3, 4.

Результаты вычислений представлены в третьем и четвертом столбцах таблиц 2.4—2.6 для значений h=0,1; 0,01 и 0,001, в пятом и шестом столбцах находятся точные решения. В двух последних столбцах этих таблиц, представлены разности между приближенным и точным значениями Δy , $\Delta y'$.

Таблица 2.4

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,1

n	x	$y(x)$	$y'(x)$	$y_T(x)$	$y_T'(x)$	Δy	$\Delta y'$
0	0,0	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,1	1,01003	0,20100	1,01003	0,20100	$-4{,}17\cdot10^{-8}$	$-4{,}17\cdot10^{-9}$
2	0,2	1,04040	0,40808	1,04040	0,40808	$-2{,}68\cdot10^{-6}$	$-5{,}36\cdot10^{-7}$
3	0,3	1,09203	0,62761	1,09206	0,62762	$-3{,}07\cdot10^{-7}$	$-9{,}22\cdot10^{-6}$
4	0,4	1,16640	0,86656	1,16657	0,86663	$-1{,}74\cdot10^{-4}$	$-6{,}97\cdot10^{-5}$

Таблица 2.5

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,01

n	x	$y(x)$	$y'(x)$	$y_T(x)$	$y_T'(x)$	Δy	$\Delta y'$
0	0,00	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,01	1,00010	0,02000	1,00010	0,02000	$-4{,}17\cdot10^{-14}$	$-4{,}16\cdot10^{-16}$
2	0,02	1,00040	0,04001	1,00040	0,04001	$-2{,}67\cdot10^{-12}$	$-5{,}33\cdot10^{-14}$
3	0,03	1,00090	0,06003	1,00090	0,06003	$-3{,}04\cdot10^{-11}$	$-9{,}11\cdot10^{-13}$
4	0,04	1,00160	0,08006	1,00160	0,08006	$-1{,}71\cdot10^{-10}$	$-6{,}83\cdot10^{-12}$

Таблица 26

Результаты вычислений при шаге интегрирования h=0,001

n	x	$y(x)$	$y'(x)$	$y_T(x)$	$y_T'(x)$	Δy	$\Delta y'$
0	0,000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,001	1,00000	0,00200	1,00000	0,00200	0,00000	0,00000
2	0,002	1,00000	0,00400	1,00000	0,00400	0,00000	0,00000
3	0,003	1,00001	0,00600	1,00001	0,00600	0,00000	0,00000
4	0,004	1,00002	0,00800	1,00002	0,00800	0,00000	0,00000

Задания для самостоятельной работы

***Задание* 1.** Построить таблицу пяти начальных значений для дальнейшего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методами Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона. Задание выполнить для различных значений шага интегрирования h=0,1; 0,01; 0,001.

***Задание* 2.** Оценить погрешность между аналитическим и приближенным решениями. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 1.

***Задание* 3.** Построить таблицу пяти начальных значений для дальнейшего решения дифференциального уравнения второго порядка методами Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона. Задание выполнить для различных значений шага интегрирования h=0,1; 0,01; 0,001.

***Задание* 4.** Оценить погрешность между аналитическим и приближенным решениями. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 2.

Контрольные вопросы

1. Какие трудности возникают при использовании многошаговых методов?
2. Какие методы рекомендуется использовать для закладки начальных данных для многошаговых методов?
3. Какая зависимость между порядком многошагового метода и количеством неизвестных начальных данных.

Тема 3. **Многошаговые методы**

Лабораторная работа № 3
Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений явным многошаговым методом Адамса-Бэшфорта

Цель работы: использование явного многошагового метода Адамса-Бэшфорта к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении задачи методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков соответственно используются формулы (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})), \qquad n = 1,2,... \tag{3.1}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2})}{12},$$

$$n = 2,3,... \tag{3.2}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{55 f(x_n, y_n) - 59 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37 f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9 f(x_{n-3}, y_{n-3})}{24},$$

$$n = 3,4,... \qquad (3.3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \frac{1901 f(x_n, y_n) - 2774 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 2616 f(x_{n-2}, y_{n-2})}{720} -,$$

$$- \frac{1274 f(x_{n-3}, y_{n-3}) + 251 f(x_{n-4}, y_{n-4})}{720}, \quad n = 4,5,... \qquad (3.4)$$

где $y = \{y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), ..., y^{(k)}(x)\}$ — вектор решений системы уравнений, x — аргумент, $f(x, y) = \{f^{(1)}(x, y), f^{(2)}(x, y), ..., f^{(k)}(x, y)\}$ — вектор-функция правых частей системы уравнений, h — шаг интегрирования.

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений с использованием формул (3.1)—(3.5).

***Пример* 3.1.** Используя результаты лабораторной работы № 2, решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}, \quad x(0)=2; \quad y(0)=2$$

на интервале времени [0; 2], применяя методы Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков. Оценить погрешность численных решений.

Решение. Аналитическое решение данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^{2t} + 1 \\ y = 2e^{2t} \end{cases}.$$

В табл.3.1—3.4 представлены результаты вычислений точного решения $x_T(t), y_T(t)$, решений, полученных методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков $x(t), y(t)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta x(t), \Delta y(t)$ на конце интервала интегрирования в точке, соответствующей моменту времени t=2, для различных шагов интегрирования.

Таблица 3.1

Результаты вычислений при использовании метода
Адамса-Бэшфорта второго порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0,1	55,598	109,196	52,702	103,404	−2,896	−5,792
0,01	55,598	109,196	55,562	109,125	−0,0357	−0,0715
0,001	55,598	109,196	55,598	109,196	−0,0004	−0,0007

Таблица 3.2

Результаты вычислений при использовании метода
Адамса-Бэшфорта третьего порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0,1	55,598	109,196	55,127	108,254	−0,471	−0,942
0,01	55,598	109,196	55,598	109,195	−0,0006	−0,0013
0,001	55,598	109,196	55,598	109,196	$-6{,}53\cdot10^{-7}$	$-1{,}31\cdot10^{-6}$

Таблица 3.3

Результаты вычислений при использовании метода
Адамса-Бэшфорта четвертого порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0,1	55,598	109,196	55,519	109,040	−0,0782	−0,156
0,01	55,598	109,196	55,598	109,196	$-1{,}16\cdot10^{-5}$	$-1{,}16\cdot10^{-5}$
0,001	55,598	109,196	55,598	109,196	$-1{,}20\cdot10^{-9}$	$-2{,}40\cdot10^{-9}$

Таблица 3.4

Результаты вычислений при использовании метода
Адамса-Бэшфорта пятого порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0,1	55,598	109,196	55,575	109,151	−0,0229	−0,0458
0,01	55,598	109,196	55,598	109,196	$-2{,}36\cdot10^{-7}$	$-4{,}71\cdot10^{-7}$
0,001	55,598	109,196	55,598	109,196	$9{,}73\cdot10^{-12}$	$1{,}95\cdot10^{-11}$

***Пример* 3.2.** Используя результаты лабораторной работы № 2, решить дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = xy' + y + 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

на интервале времени [0; 2], применяя методы Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков. Оценить погрешность численных решений.

Решение. Аналитическое решение данного обыкновенного дифференциального уравнения и производная от решения имеют вид:

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, \qquad y'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}},$$

При решении задачи методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков соответственно используем формулы аналогичные формулам (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5), рассматривая вектор решений как вектор с координатами $y(x)$ и $y'(x)$.

В табл. 3.5—3.8 представлены результаты вычислений точного решения $y_T(x), y'_T(x)$, решений, полученных методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков $y(x), y'(x)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta y(t), \Delta y'(t)$ на конце интервала интегрирования в точке, соответствующей моменту времени t=2, для различных шагов интегрирования.

Таблица 3.5

Результаты вычислений при использовании метода
Адамса-Бэшфорта второго порядка

h	$y_T(t)$	$y'_T(t)$	$y(t)$	$y'(t)$	Δy	$\Delta y'$
0,1	29,556	13,778	27,727	13,006	−1,829	−0,773
0,01	29,556	13,778	29,533	13,768	−0,0229	−0,0097
0,001	29,556	13,778	29,556	13,778	−0,0002	$-9{,}83 \cdot 10^{-5}$

Таблица 3.6

Результаты вычислений при использовании метода
Адамса-Бэшфорта третьего порядка

h	$y_T(t)$	$y'_T(t)$	$y(t)$	$y'(t)$	Δy	$\Delta y'$
0,1	29,556	13,778	29,157	13,615	−0,399	−0,163
0,01	29,556	13,778	29,556	13,778	−0,0006	−0,0002
0,001	29,556	13,778	29,556	13,778	$-5{,}74 \cdot 10^{-7}$	$-2{,}34 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3.7

Результаты вычислений при использовании метода
Адамса-Бэшфорта четвертого порядка

h	$y_T(t)$	$y'_T(t)$	$y(t)$	$y'(t)$	Δy	$\Delta y'$
0,1	29,556	13,778	29,456	13,739	−0,0997	−0,0396
0,01	29,556	13,778	29,556	13,778	$-1{,}62 \cdot 10^{-5}$	$-6{,}38 \cdot 10^{-6}$
0,001	29,556	13,778	29,556	13,778	$-1{,}69 \cdot 10^{-9}$	$-6{,}67 \cdot 10^{-10}$

Таблица 3.8

Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Бэшфорта пятого порядка

h	$y_T(t)$	$y'_T(t)$	$y(t)$	$y'(t)$	Δy	$\Delta y'$
0,1	29,556	13,778	29,530	13,768	$-0{,}0263$	$-0{,}0102$
0,01	29,556	13,778	29,556	13,778	$-4{,}90\cdot10^{-7}$	$-1{,}87\cdot10^{-7}$
0,001	29,556	13,778	29,556	13,778	$1{,}53\cdot10^{-12}$	$-9{,}81\cdot10^{-13}$

Задания для самостоятельной работы

***Задание* 1.** Решить аналитически систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 1.

Используя результаты лабораторной работы №2, решить методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков систему обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале времени [0; 2] с шагом интегрирования h=0,1; 0,01; 0,001.

***Задание* 2.** Решить аналитически обыкновенное дифференциальное уравнение. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 2.

Используя результаты лабораторной работы № 2, решить методами Адамса-Бэшфорта 2-го, 3-го, 4-го и 5-го порядков обыкновенное дифференциальное уравнение на интервале времени [0; 2] с шагом интегрирования h=0,1; 0,01; 0,001.

***Задание* 3.** Оценить погрешность численных решений.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается отличие многошаговых методов от одношаговых?
2. Обладают ли методы Адамса-Бэшфорта сильной устойчивостью?
3. Какие трудности возникают при использовании многошаговых методов?

Лабораторная работа № 4

Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений неявным многошаговым методом Адамса-Мултона

Цель работы: использование неявного многошагового метода Адамса-Мултона при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении задачи методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков, соответственно используем формулы (4.1), (4.2), и (4.3):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f(x_{n+1} + 8f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})), \quad n = 1,2,\ldots \tag{4.1}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\cdot(9f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) +$$
$$+ f(x_{n-2}, y_{n-2})), \quad n = 2,3,\ldots \tag{4.2}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}\cdot(251f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 646f(x_n, y_n) - 264f(x_{n-1}, y_{n-1}) +$$
$$+106f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 19f(x_{n-3}, y_{n-3})), \quad n = 3,4,5,\ldots \tag{4.3}$$

где $y = \{y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \ldots, y^{(k)}(x)\}$ — вектор решений системы уравнений, x — аргумент, $f(x, y) = \{f^{(1)}(x, y), f^{(2)}(x, y), \ldots, f^{(k)}(x, y)\}$ — вектор-функция правых частей системы уравнений, h — шаг интегрирования.

Алгоритм решения задачи предполагает использование метода прогноза и коррекции PEC (predictor-evolution-corrector):

P: вычисление y_{n+1}^{P} явным методом Адамса-Бэшфорта по формулам (3.1)—(3.5);

E: вычисление $f_{n+1}^{P} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{P})$;

C: вычисление y_{n+1} неявным методом Адамса-Мултона по формулам (4.1)—(4.3).

Например, при решении задачи методом Адамса-Мултона четвертого порядка последовательно используются формулы:

$$y_{n+1}^{(P)} = y_n + h\cdot\frac{55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})}{24},$$
$$n = 3,4,\ldots$$

$$f_{n+1}^{(P)} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(P)}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\cdot(9f^{(P)}(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f(x_n, y_n) - 5f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})),$$
$$n = 2,3,...$$

Рассмотрим решение системы дифференциальных уравнений с использованием формул (4.1)—(4.3).

***Пример* 4.1.** Используя результаты лабораторной работы № 2, решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}, \quad x(0)=2; \quad y(0)=2$$

на интервале времени [0; 2], применяя методы Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков. Оценить погрешность численных решений.

Решение. Аналитическое решение данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^{2t} + 1 \\ y = 2e^{2t} \end{cases}.$$

В табл.4.1—4.3 представлены результаты вычислений точного решения $x_T(t), y_T(t)$, решений, полученных методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков $x(t), y(t)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta x(t), \Delta y(t)$ на конце интервала интегрирования в точке, соответствующей моменту времени t=2, для различных шагов интегрирования.

Таблица 4.1

Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона третьего порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0,1	55,598	109,196	55,617	109,235	0,0193	0,0386
0,01	55,598	109,196	55,598	109,196	$6{,}57\cdot10^{-5}$	0,0001
0,001	55,598	109,196	55,598	109,196	$7{,}21\cdot10^{-8}$	$1{,}44\cdot10^{-7}$

Таблица 4.2

Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона четвертого порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0,1	55,598	109,196	55,597	109,194	−0,0013	−0,0025
0,01	55,598	109,196	55,598	109,196	$7{,}97\cdot10^{-7}$	$1{,}60\cdot10^{-6}$
0,001	55,598	109,196	55,598	109,196	$5{,}37\cdot10^{-8}$	$1{,}07\cdot10^{-7}$

Таблица 4.3

Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона пятого порядка

h	$x_T(t)$	$y_T(t)$	$x(t)$	$y(t)$	Δx	Δy
0,1	55,598	109,196	55,597	109,194	−0,0010	−0,0021
0,01	55,598	109,196	55,598	109,196	$-7{,}66\cdot10^{-9}$	$-1{,}53\cdot10^{-8}$
0,001	55,598	109,196	55,598	109,196	$1{,}92\cdot10^{-11}$	$2{,}38\cdot10^{-11}$

***Пример* 4.2.** Используя результаты лабораторной работы №2, решить обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' = xy' + y + 1, \qquad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$$

на интервале времени [0; 2], применяя методы Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков. Оценить погрешность численных решений.

Решение. Аналитическое решение данного обыкновенного дифференциального уравнения и производная от решения имеют вид:

$$y(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1, \quad y'(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

При решении задачи методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков соответственно используем формулы аналогичные формулам (4.1), (4.2), (4.3), рассматривая вектор решений как вектор с координатами $y(x)$ и $y'(x)$, а также алгоритм PEC.

В табл.4.4—4.6 представлены результаты вычислений точного решения $y_T(x), y'_T(x)$, решений, полученных методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков $y(x), y'(x)$, а также разность между приближенным и точным решениями $\Delta y(t), \Delta y'(t)$ на конце интервала интегрирования в точке, соответствующей моменту времени t=2, для различных шагов интегрирования.

Таблица 4.4

Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона третьего порядка

h	$y_T(t)$	$y'_T(t)$	$y(t)$	$y'(t)$	Δy	$\Delta y'$
0,1	29,556	13,778	29,578	13,785	−0,0218	0,0070
0,01	29,556	13,778	29,556	13,778	$5{,}84\cdot10^{-5}$	$2{,}35\cdot10^{-5}$
0,001	29,556	13,778	29,556	13,778	$6{,}35\cdot10^{-8}$	$2{,}58\cdot10^{-8}$

Таблица 4.5

Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона четвертого порядка

h	$y_T(t)$	$y'_T(t)$	$y(t)$	$y'(t)$	Δy	$\Delta y'$
0,1	29,556	13,778	29,554	13,778	0,0021	0,0003
0,01	29,556	13,778	29,556	13,778	$1{,}13\cdot10^{-6}$	$4{,}38\cdot10^{-7}$
0,001	29,556	13,778	29,556	13,778	$1{,}34\cdot10^{-10}$	$5{,}32\cdot10^{-11}$

Таблица 4.6

Результаты вычислений при использовании метода Адамса-Мултона пятого порядка

h	$y_T(t)$	$y'_T(t)$	$y(t)$	$y'(t)$	Δy	$\Delta y'$
0,1	29,556	13,778	29,555	13,777	−0,0008	−0,0005
0,01	29,556	13,778	29,556	13,778	$2{,}51\cdot10^{-8}$	$9{,}28\cdot10^{-9}$
0,001	29,556	13,778	29,556	13,778	$7{,}06\cdot10^{-12}$	$7{,}06\cdot10^{-12}$

Задания для самостоятельной работы

***Задание* 1.** Решить аналитически систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 1.

Используя результаты лабораторной работы № 2, решить методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков систему обыкновенных дифференциальных уравнений на интервале времени [0; 2] с шагом интегрирования h=0,1; 0,01; 0,001.

Оценить погрешность численных решений.

***Задание* 2.** Решить аналитически обыкновенное дифференциальное уравнение. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 2.

Используя результаты лабораторной работы № 2, решить методами Адамса-Мултона 3-го, 4-го и 5-го порядков обыкновенное дифференциальное уравнение на интервале времени [0; 2] с шагом интегрирования h=0,1; 0,01; 0,001.

***Задание* 3.** Оценить погрешность численных решений.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается преимущество метода Адамса-Мултона по сравнению с методом Адамса-Бэшфорта?
2. Является ли метод Адамса-Мултона нуль устойчивым?
3. Какими способами можно производить численное решение дифференциального уравнения методом Адамса-Мултона?

Тема 4. Устойчивость и сходимость одношаговых и многошаговых методов

Лабораторная работа № 5

Исследование устойчивости, сходимости и вычисление локальных и глобальных ошибок дискретизации одношаговых и многошаговых методов

Цель работы: исследование устойчивости многошаговых методов Адамса-Мултона и Адамса-Бэшфорта, а также оценка погрешности данных методов на конце интервала интегрирования.

Исследование устойчивости и сходимости многошагового метода рассмотрим на конкретном примере.

***Пример* 5.1.** Пусть линейный многошаговый метод численного решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ описывается разностным уравнением вида

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = h(f_{n+1} - 2f_n), \qquad (5.1)$$

$$y_0 = s_0(h), \qquad y_1 = s_1(h).$$

Исследуем сходимость и устойчивость данного разностного уравнения.

Для обеспечения согласованности метода, начальные значения будем выбирать таким образом , чтобы выполнялось условие

$$s_0(h) \to 0, \quad s_1(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Применим этот метод к задаче Коши

$$y' = 2x, \quad y(0) = 0,$$

точное решение, которое описывается функцией

$$y(x) = x^2.$$

Тогда последовательность $\{y_n\}$ будет описываться формулами

$$x_n = nh,$$

$$y_0 = s_0(h), \qquad y_1 = s_1(h),$$

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2h(x_{n+1} - 2x_n) = 2h^2(1 - 2n). \qquad (5.2)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Общее решение разностного уравнения (5.2) представляет собой сумму общего решения $\tilde{y}_n$ соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения $\bar{y}_n$.

Общее решение однородного уравнения

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

имеет вид

$$\tilde{y}_n = C_1 q_1^n + C_2 q_2^n ,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; $q_1 = 1$ и $q_2 = 2$ — корни характеристического уравнения

$$q^2 - 3q + 2 = 0 .$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{y}_n = C_1 + C_2 2^n .$$

Легко убедится, что частное решение уравнения (5.2) имеет вид

$$\bar{y}_n = n(n-1)h^2 .$$

Тогда общее решение разностного уравнения (5.2) имеет вид

$$y_n = C_1 + C_2 2^n + n(n-1)h^2 . \qquad (5.3)$$

Частное решение разностного уравнения (5.2) получаем из (5.3) с учетом начальных значений

$$y_0 = C_1 + C_2 2^0 = s_0(h), \quad y_1 = C_1 + C_2 2^1 = s_1(h) .$$

Отсюда

$$C_1 = 2s_0(h) - s_1(h), \qquad C_2 = s_1(h) - s_0(h).$$

Следовательно, частное решение, удовлетворяющее задаче (5.2), имеет вид

$$y_n = [2s_0(h) - s_1(h)] + [s_1(h) - s_0(h)]2^n + n(n-1)h^2 . \qquad (5.4)$$

Метод сходится, если для любого $x \in [a,b]$ выполняется условие

$y_n \to y(x)$ при $h \to 0$, где $n = \dfrac{x-a}{h}$.

Если в качестве начальных значений выбрать значения

$$y_0 = s_0(h) = 0, \quad y_1 = s_1(h) = 0 ,$$

что в данном случае не совпадает с точными начальными значениями

$$y(0) = 0, \quad y(h) = h^2 ,$$

то

$$y_n = n(n-1)h^2 = (nh)^2 - (nh)h \to x^2$$

при

$$h \to 0, \quad n = \frac{x}{h}.$$

Если, однако,

$$s_0(h) \to 0,\ s_1(h) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

так что

$$s_1(h) - s_0(h) = \mathrm{O}(h^p),\ \ p > 0,$$

то второй член в (5.4) стремится к бесконечности, так как при $|q| > 1$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=x}} h^p q^n = x^p \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^p} = \infty.$$

Следовательно, метод неустойчив, а его согласованность не достаточна для его сходимости.

При исследовании разностных методов на сходимость можно использовать следующие необходимые условия согласованности:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{k} b_i = 1, \tag{5.5}$$

где a_i, $i = \overline{0,k}$, b_j, $j = \overline{0,l}$ — коэффициенты в разностном уравнении

$$\sum_{i=0}^{k} a_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} b_i f(x_{n+i}, y_{n+i}).$$

Так, например, для метода Адамса-Бэшфорта 5-го порядка имеем:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i = -1 + 1 = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{l} b_i = \frac{1}{720}(1901 - 2774 + 2616 - 1274 + 251) = 1,$$

следовательно, метод согласованный.

Для доказательства устойчивости разностного метода следует найти корни характеристического уравнения

$$\sum_{i=0}^{k} a_i q^i = 0.$$

Метод будет устойчивым, если все корни характеристического уравнения лежат внутри круга единичного радиуса ($|q_i| < 1$), кроме быть может одного простого, который лежит на единичной окружности. Для рассматриваемого примера характеристическое уравнение имеет вид $q - 1 = 0$. Здесь простой корень $q = 1$ лежит на единичной окружности. Следовательно, метод устойчив. Согласованный и устойчивый метод всегда является сходящимся.

***Пример* 5.2.** Рассмотрим две задачи Коши.

Задача 1: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$, $x(0)=2$; $y(0)=2$;

Задача 2: $y'' = xy' + y + 1,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0$.

Методом экстраполяции и вложенным методом оценим полную погрешность дискретизации на конце интервала интегрирования при решении задач методами Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона для различных h=0,1; 0,01; 0,001.

Решение. При использовании метода экстраполяции интегрирование от точки x_{n-1} до точки x_n выполняется дважды: один раз с шагом h и другой раз с шагом $\frac{h}{2}$. Тогда полную погрешность Δy_n в точке x_n можно оценить по формуле

$$\Delta y_n = \frac{y_n(h) - y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)}{2^p - 1}, \tag{5.6}$$

где $y_n(h)$ и $y_{2n}\left(\frac{h}{2}\right)$ — результаты вычислений, соответственно, с шагом h и $\frac{h}{2}$; p — порядок метода.

При использовании вложенных методов на каждом шаге интегрирование выполняется дважды: методом порядка p и методом порядка p+1. Разность полученных значений дает оценку величины погрешности Δy_n в точке x_n.

В таблицах 5.1—5.4 представлены полные погрешности Δx_1 и Δy_1, вычисленные по формуле (5.6), при решении задачи 1 методом экстраполяции, соответственно, методами второго, третьего, четвертого и пятого порядков. Там же для сравнения приведены истинные погрешности Δx и Δy, вычисленные с учетом точного решения задачи.

В таблицах 5.5—5.8 представлены полные погрешности Δx_1 и Δy_1, вычисленные по формуле (5.6), при решении задачи 2 методом экстраполяции, соответственно, методами второго, третьего, четвертого и пятого порядков. Там же для сравнения приведены истинные погрешности Δx и Δy, вычисленные с учетом точного решения задачи.

Таблица 5.1

Полные погрешности для задачи 1, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта второго порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	0,129	0,259	0,074	0,148
0,005	$1{,}76\cdot10^{-3}$	$3{,}52\cdot10^{-3}$	$1{,}69\cdot10^{-3}$	$3{,}37\cdot10^{-3}$
0,0005	$1{,}81\cdot10^{-5}$	$3{,}63\cdot10^{-5}$	$2{,}35\cdot10^{-4}$	$3{,}62\cdot10^{-5}$

Таблица 5.2

Полные погрешности для задачи 1, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта третьего порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	$5{,}20\cdot10^{-3}$	$1{,}04\cdot10^{-2}$	$2{,}20\cdot10^{-3}$	$4{,}00\cdot10^{-3}$
0,005	$8{,}65\cdot10^{-6}$	$1{,}73\cdot10^{-5}$	$8{,}15\cdot10^{-6}$	$1{,}62\cdot10^{-5}$
0,0005	$9{,}07\cdot10^{-9}$	$1{,}81\cdot10^{-8}$	$9{,}00\cdot10^{-9}$	$1{,}80\cdot10^{-8}$

Таблица 5.3

Полные погрешности для задачи 1, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта четвертого порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	$2{,}14\cdot10^{-4}$	$4{,}27\cdot10^{-4}$	$9{,}73\cdot10^{-4}$	$4{,}00\cdot10^{-3}$
0,005	$5{,}37\cdot10^{-8}$	$1{,}07\cdot10^{-7}$	$4{,}96\cdot10^{-6}$	$9{,}92\cdot10^{-8}$
0,0005	$2{,}36\cdot10^{-11}$	$4{,}71\cdot10^{-11}$	$5{,}29\cdot10^{-12}$	$1{,}06\cdot10^{-11}$

Таблица 5.4

Полные погрешности для задачи 1, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта пятого порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	$2{,}09\cdot10^{-4}$	$4{,}19\cdot10^{-4}$	$3{,}26\cdot10^{-4}$	$6{,}52\cdot10^{-4}$
0,005	$7{,}65\cdot10^{-11}$	$1{,}53\cdot10^{-10}$	$2{,}45\cdot10^{-10}$	$4{,}90\cdot10^{-10}$
0,0005	$1{,}81\cdot10^{-11}$	$3{,}63\cdot10^{-11}$	$2{,}01\cdot10^{-12}$	$3{,}92\cdot10^{-12}$

Таблица 5.5

Полные погрешности для задачи 2, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта второго порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	$1{,}04\cdot10^{-3}$	$1{,}14\cdot10^{-1}$	$7{,}57\cdot10^{-3}$	$1{,}43\cdot10^{-2}$
0,005	$2{,}55\cdot10^{-3}$	$1{,}82\cdot10^{-2}$	$5{,}90\cdot10^{-4}$	$5{,}43\cdot10^{-3}$
0,0005	$2{,}93\cdot10^{-4}$	$1{,}91\cdot10^{-3}$	$9{,}50\cdot10^{-5}$	$6{,}23\cdot10^{-4}$

Таблица 5.6

Полные погрешности для задачи 2, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта третьего порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	$1{,}85\cdot10^{-3}$	$4{,}92\cdot10^{-3}$	$7{,}34\cdot10^{-4}$	$2{,}41\cdot10^{-3}$
0,005	$3{,}09\cdot10^{-6}$	$7{,}65\cdot10^{-6}$	$2{,}91\cdot10^{-6}$	$7{,}26\cdot10^{-6}$
0,0005	$3{,}24\cdot10^{-9}$	$7{,}98\cdot10^{-9}$	$3{,}22\cdot10^{-9}$	$7{,}91\cdot10^{-9}$

Таблица 5.7

Полные погрешности для задачи 2, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта четвертого порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	$1{,}34\cdot10^{-4}$	$3{,}92\cdot10^{-4}$	$1{,}21\cdot10^{-5}$	$1{,}14\cdot10^{-4}$
0,005	$2{,}96\cdot10^{-8}$	$7{,}57\cdot10^{-8}$	$2{,}72\cdot10^{-8}$	$2{,}51\cdot10^{-8}$
0,0005	$7{,}31\cdot10^{-12}$	$1{,}72\cdot10^{-11}$	$3{,}06\cdot10^{-12}$	$7{,}81\cdot10^{-12}$

Таблица 5.8

Полные погрешности для задачи 2, полученные методом экстраполяции, при использовании метода Адамса-Бэшфорта пятого порядка

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,05	$6{,}09\cdot10^{-6}$	$2{,}62\cdot10^{-5}$	$1{,}65\cdot10^{-5}$	$2{,}48\cdot10^{-5}$
0,005	$3{,}24\cdot10^{-10}$	$8{,}60\cdot10^{-10}$	$2{,}89\cdot10^{-10}$	$5{,}31\cdot10^{-10}$
0,0005	$4{,}14\cdot10^{-12}$	$9{,}17\cdot10^{-12}$	$3{,}21\cdot10^{-13}$	$6{,}81\cdot10^{-13}$

При использовании вложенных методов на каждом шаге интегрирование выполняется дважды: методом порядка p и методом порядка p+1. Разность полученных значений дает оценку величины погрешности Δy_n в точке x_n.

В таблицах 5.9—5.11 представлены полные погрешности Δx_1 и Δy_1, вычисленные вложенным методом, при решении задачи 1, соответственно, при использовании методов второго и третьего, третьего и четвертого, четвертого и пятого порядков. Там же для сравнения приведены истинные погрешности Δx и Δy, вычисленные с учетом точного решения задачи.

В таблицах 5.12—5.14 представлены полные погрешности Δx_1 и Δy_1, вычисленные вложенным методом, при решении задачи 2, соответственно, при использовании методов второго и третьего, третьего и четвертого, четвертого и пятого порядков, Там же для сравнения приведены истинные погрешности Δx и Δy, вычисленные с учетом точного решения задачи.

Таблица 5.9

Полные погрешности для задачи 1, полученные вложенным методом, при использовании метода Адамса-Бэшфорта второго и третьего порядков

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,1	$3{,}51\cdot10^{-1}$	$7{,}03\cdot10^{-1}$	$3{,}32\cdot10^{-4}$	$6{,}65\cdot10^{-1}$
0,01	$6{,}82\cdot10^{-3}$	$1{,}36\cdot10^{-2}$	$6{,}16\cdot10^{-3}$	$1{,}35\cdot10^{-2}$
0,001	$7{,}23\cdot10^{-4}$	$1{,}45\cdot10^{-4}$	$7{,}23\cdot10^{-4}$	$1{,}45\cdot10^{-4}$

Таблица 5.10

Полные погрешности для задачи 1, полученные вложенным методом, при использовании метода Адамса-Бэшфорта третьего и четвертого порядков

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,1	$1{,}93\cdot10^{-2}$	$3{,}86\cdot10^{-2}$	$1{,}81\cdot10^{-2}$	$3{,}61\cdot10^{-2}$
0,01	$6{,}57\cdot10^{-5}$	$1{,}31\cdot10^{-4}$	$6{,}49\cdot10^{-5}$	$6{,}34\cdot10^{-5}$
0,001	$7{,}2\cdot10^{-8}$	$1{,}44\cdot10^{-7}$	$7{,}20\cdot10^{-8}$	$1{,}44\cdot10^{-7}$

Таблица 5.11

Полные погрешности для задачи 1, полученные вложенным методом, при использовании метода Адамса-Бэшфорта четвертого и пятого порядков

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,1	$1{,}25\cdot10^{-3}$	$2{,}49\cdot10^{-3}$	$9{,}05\cdot10^{-3}$	$1{,}81\cdot10^{-2}$
0,01	$7{,}97\cdot10^{-7}$	$1{,}59\cdot10^{-6}$	$7{,}90\cdot10^{-7}$	$1{,}57\cdot10^{-6}$
0,001	$1{,}03\cdot10^{-10}$	$2{,}06\cdot10^{-10}$	$9{,}10\cdot10^{-11}$	$1{,}82\cdot10^{-10}$

Таблица 5.12

Полные погрешности для задачи 2, полученные вложенным методом, при использовании метода Адамса-Бэшфорта второго и третьего порядков

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,1	$2{,}37\cdot10^{-2}$	$1{,}57\cdot10^{-1}$	$1{,}67\cdot10^{-2}$	$1{,}36\cdot10^{-1}$
0,01	$4{,}32\cdot10^{-3}$	$3{,}45\cdot10^{-2}$	$4{,}30\cdot10^{-3}$	$3{,}44\cdot10^{-2}$
0,001	$5{,}78\cdot10^{-4}$	$3{,}81\cdot10^{-4}$	$5{,}78\cdot10^{-4}$	$3{,}81\cdot10^{-4}$

Таблица 5.13

Полные погрешности для задачи 2, полученные вложенным методом, при использовании метода Адамса-Бэшфорта третьего и четвертого порядков

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,1	$6{,}99 \cdot 10^{-3}$	$2{,}18 \cdot 10^{-2}$	$6{,}67 \cdot 10^{-3}$	$1{,}97 \cdot 10^{-2}$
0,01	$2{,}35 \cdot 10^{-5}$	$5{,}84 \cdot 10^{-5}$	$2{,}31 \cdot 10^{-5}$	$5{,}73 \cdot 10^{-5}$
0,001	$2{,}58 \cdot 10^{-8}$	$6{,}34 \cdot 10^{-8}$	$2{,}58 \cdot 10^{-8}$	$6{,}33 \cdot 10^{-8}$

Таблица 5.14

Полные погрешности для задачи 2, полученные вложенным методом, при использовании метода Адамса-Бэшфорта четвертого и пятого порядков

h	Δx	Δy	Δx_1	Δy_1
0,1	$3{,}16 \cdot 10^{-4}$	$2{,}10 \cdot 10^{-3}$	$8{,}35 \cdot 10^{-4}$	$2{,}89 \cdot 10^{-3}$
0,01	$4{,}38 \cdot 10^{-7}$	$1{,}13 \cdot 10^{-6}$	$4{,}29 \cdot 10^{-7}$	$1{,}10 \cdot 10^{-6}$
0,001	$5{,}31 \cdot 10^{-11}$	$1{,}34 \cdot 10^{-10}$	$5{,}00 \cdot 10^{-11}$	$1{,}27 \cdot 10^{-10}$

Задания для самостоятельной работы

***Задание* 1.** Провести исследование сходимости и устойчивости одного из численных методов Адамса-Бэшфорта или Адамса-Мултона 3—5 порядков (по указанию преподавателя).

***Задание* 2.** Методом экстраполяции и вложенным методом оценить полную погрешность дискретизации на конце интервала интегрирования при использовании методов Адамса-Бэшфорта и Адамса-Мултона при различных h=0,1; 0,01; 0,001. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 1 и 2.

Контрольные вопросы

1. Какие методы называются согласованными и сходящимися?
2. Достаточно ли выполнения условия согласованности метода для его сходимости?
3. Какие бывают виды погрешностей?
4. Какие методы используются для оценки погрешностей?

Приложение 1

Системы дифференциальных уравнений и начальные условия к лабораторным работам № 1—5

Вар.	Система ДУ	Нач. усл.	Вар.	Система ДУ	Нач. усл.
1	$\begin{cases}\dot{x}+3x+y=0\\ \dot{y}-x+y=0\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=1$	13	$\begin{cases}\dot{x}=y+2x+\cos t\\ \dot{y}=-x+2\sin t\end{cases}$	$x(0)=2$ $y(0)=1$
2	$\begin{cases}\dot{x}-2x+y=0\\ \dot{y}-2y+x=-5e^{t}\ \sin\end{cases}$	$x(0)=0$ $y(0)=0$	14	$\begin{cases}\dot{x}+\dot{y}=2(x+y)\\ \dot{y}=3x+y\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=1$
3	$\begin{cases}\dot{x}-y-z=0\\ \dot{y}-x-z=0\\ \dot{z}-x-y=0\end{cases}$	$x(0)=-1$ $y(0)=1$ $z(0)=0$	15	$\begin{cases}\dot{x}+\dfrac{2x}{t}=1\\ \dot{y}=x+y+\dfrac{2x}{t}-1\end{cases}$	$x(1)=0$ $y(1)=1$
4	$\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=x-y\end{cases}$	$x(0)=2$ $y(0)=0$	16	$\begin{cases}\dot{x}+2\dot{y}-2(x-y)=3e^{t}\\ \dot{x}+\dot{y}+2x+y=4e^{2t}\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=2$
5	$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{x}{2x+3y}\\ \dot{y}=\dfrac{y}{2x+3y}\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=2$	17	$\begin{cases}\dot{x}=x-2y-z\\ \dot{y}=y-x+z\\ \dot{z}=x-z\end{cases}$	$x(0)=2$ $y(0)=0$ $z(0)=1$
6	$\begin{cases}\dot{x}=2x+y\\ \dot{y}=x+2y\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=3$	18	$\begin{cases}\dot{x}-5x+3y=2e^{3t}\\ \dot{y}-x-y=5e^{-t}\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=2$
7	$\begin{cases}\dot{x}=y+t\\ \dot{y}=x+e^{t}\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=0$	19	$\begin{cases}\dot{x}=y+z\\ \dot{y}=z+x\\ \dot{z}=x+y\end{cases}$	$x(0)=2$ $y(0)=1$ $z(0)=1$
8	$\begin{cases}\dot{x}=\dfrac{x}{x+y}\\ \dot{y}=\dfrac{y}{x+y}\end{cases}$	$x(0)=2$ $y(0)=4$	20	$\begin{cases}\dot{x}=8y-x\\ \dot{y}=x+y\end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=1$
9	$\begin{cases}\dot{x}=1-\dfrac{2x}{t}\\ \dot{y}=x+y-1+\dfrac{2x}{t}\end{cases}$	$x(1)=\dfrac{1}{3}$ $y(1)=-\dfrac{1}{3}$	21	$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=2y\end{cases}$	$x(0)=2$ $y(0)=2$

10	$\begin{cases} \dot{x} = z + y - x \\ \dot{y} = z + x - y \\ \dot{z} = x + y + z \end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=0$ $z(0)=0$	22	$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=1$
11	$\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = z + x \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$	$x(0)=-1$ $y(0)=1$ $z(0)=0$	23	$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-2t} \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t} \end{cases}$	$x(0)=0$ $y(0)=1$
12	$\begin{cases} \dot{x} = e^{3t} - y \\ \dot{y} = 2e^{3t} - x \end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=0$	24	$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$	$x(0)=1$ $y(0)=0$

Приложение 2

Дифференциальные уравнения и начальные условия к лабораторным работам № 1—5

Вар.	ДУ	Нач. усл.	Вар.	ДУ	Нач. усл.
1	$2xy'' = y', \quad x > 0$	$y(1) = 4$ $y'(1) = 3$	13	$y'' + 2y' = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
2	$y'' = 4\cos 2x$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$	14	$2y'' = 3y^2$	$y(-2) = 1$ $y'(-2) = -1$
3	$y'' - 4y' + 4y = 0$	$y(0) = 3$ $y'(0) = -1$	15	$y''(x^2 + 1) = 2xy'$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 3$
4	$y'' + 4y' + 29y = 0$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 15$	16	$xy'' + x(y')^2 - y' = 0$	$y(2) = 2$ $y'(2) = 1$
5	$y'' - 2y' + y = 0$	$y(0) = 4$ $y'(0) = 2$	17	$y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$	$y(2) = 0$ $y'(2) = 4$
6	$9y'' + y = 0$	$y(\frac{3p}{2}) = 2$ $y'(\frac{3p}{2}) = 0$	18	$yy'' = (y')^2 - (y')^3$	$y(1) = 1$ $y'(1) = -1$

7	$y'' - 2y' + 10y = 0$	$y(\frac{p}{6}) = 0$ $y'(\frac{p}{6}) = e^{\frac{p}{6}}$	19	$y^3 y' = -1$	$y(1) = 1$ $y'(1) = 0$
8	$y'' + 3y' = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$	20	$y^4 - y^3 y'' = 1$	$y(0) = \sqrt{2}$ $y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
9	$y'' + 5y' + 6y = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = -6$	21	$y'' = e^{2y}$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
10	$y'' - 5y' + 4y = 0$	$y(0) = 5$ $y'(0) = 8$	22	$2(y')^2 = y''(y-1)$	$y(1) = 2$ $y'(1) = 1$
11	$y'' + 3y' + 2y = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = -1$	23	$y'' = xy' + y + 1$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
12	$y'' + 4y = 0$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 2$	24	$2yy'' = (y')^2 - 1$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$

Список рекомендованной литературы

1. *Бахвалов Н. С.* Численные методы Т. 1. М.: Бином. ЛЗ, 2003. 632 с.
2. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. М.: Наука,1967. 660 с.
3. *Мысовских И. П.* Лекции по методам вычислений, М.: Физмат-гиз, 1962. 344 с.
4. *Ортега Д., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.
5. *Самарский А. А, Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1986. 432 с.
6. *Хемминг Р. В.* Численные методы. М.: Наука, 1972. 400 с.
7. *Холл Д, Уатт Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
8. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978. 464 с.
9. *Заусаев А. Ф., Заусаев А. А.* Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы. М.: Машиностроение, 2008. 250 с.
10. *Заусаев А. Ф.* Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Самара: РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 2010. 100 с.

Содержание

Учебное издание

Применение разностных методов
для решения обыкновенных
дифференциальных уравнений

ЗАУСАЕВ Анатолий Федорович
ЗОТЕЕВ Владимир Евгеньевич

Печатается в авторской редакции

Лицензия ИД № 02651 от 28.08.2000
Подписано в печать ***
Формат 60x84 1/16, Бумага офсетная,
Печать офсетная,
Усл. п. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,82.
Тираж 50 экз. Рег. № 153/10.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Самарский государственный технический университет»
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Главный корпус

Отдел типографии и оперативной полиграфии
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244. Корпус 8